Capitole speciale de Analiză funcţională
(suport de curs şi seminar – versiune în lucru)

Marius Durea

Capitole speciale de Analiză funcţională – MFI, MFIC
– anul I, semestrul al II-lea –

Desfăşurarea activităţii în anul universitar 2025–2026

În fiecare săptămână, timp de 14 săptămâni, vor fi 2 ore de curs şi 2 ore de seminar.

Evaluare

Evaluarea se desfăşoară după procedura de mai jos.

- În timpul semestrului va avea loc evaluarea continuă (EC) care va avea ponderea de 50% din nota finală şi va cuprinde trei componente:
  - un examen parţial (EP): în săptămâna 7, 8 sau 9, la seminar, studenţii vor susţine un examen parţial scris (cu durata de 100 de minute), iar nota obţinută va avea ponderea de 50% din EC; EP nu se poate reface şi nu se poate susţine în sesiune; exclusiv pe baza unor motive bine întemeiate, EP se poate susţine la o dată ulterioară în timpul semestrului;
  - o verificare scrisă (VS): într-una din săptămânile 11, 12 sau 13 va avea loc la seminar o verificare scrisă cu durata de 50 de minute, iar nota obţinută va avea ponderea de 25% din EC; exclusiv pe baza unor motive bine întemeiate, VS se poate susţine la o dată ulterioară în timpul semestrului;
  - activitatea de seminar (AS): prezenţa, activitatea şi calitatea răspunsurilor din timpul desfăşurării seminarelor vor genera o notă ce va avea o pondere de 25% din EC.
- În sesiune va avea loc evaluarea finală (EF) care va avea o pondere de 50% din nota finală şi care constă dintr-o probă scrisă de 2 ore. Pentru fiecare student, nota evaluării finale va fi comunicată în cadrul unei întâlniri (care va fi programată în prealabil) şi va fi determinată inclusiv de o eventuală discuţie asupra modului în care au fost rezolvate subiectele probei scrise (prezenţa studenţilor este, deci, obligatorie). O condiţie necesară pentru promovare este ca această notă să fie minim 4,5. Odată ce acestă condiţie este îndeplinită se va calcula nota finală, care va fi rotunjirea la cel mai apropiat număr natural din intervalul $[1, 10]$ a valorii

$$\frac{1}{2}EF + \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}EF + \frac{1}{4}EP + \frac{1}{8}VS + \frac{1}{8}AS.$$

Prefaţă

Acest curs, predat studenţilor de la Facultatea de Matematică a Universităţii *Alexandru Ioan Cuza* din Iaşi în anul I de studii de master, reprezintă o continuare cursului de *Analiză funcţională* de la ciclul de licenţă.

Astfel, presupunem cunoscute elementele de bază ale Analizei funcţionale pe spaţii liniare normate şi pe spaţii Hilbert. Totuşi, considerăm firească o recapitulare a acestor elemente (primele părţi din Capitolele 1 şi 5). De asememea, cunoaşterea unor elemente de bază de topologie generală este importantă.

Principalele dezvoltări pe care acest curs le are în vedere sunt următoarele:

- separarea prin hiperplane a mulţimilor convexe (Capitolul 2);
- principii ale analizei funcţionale (Capitolul 3);
- topologii slabe şi reflexivitate (Capitolul 4);
- alternativa lui Fredholm (Capitolul 4);
- dualitate în spaţii Hilbert (Capitolul 5);
- elemente de teorie spectrală (Capitolul 5).

Însoţim aceste prezentări de probleme şi indicaţii de rezolvare care pun în evidenţă diverse aspecte ale teoriei sau sunt menite să ofere cititorului un acces direct la utilizarea conceptelor introduse (Capitolul 6). În final, sunt inserate modele de subiecte pentru toate formele de evaluare scrisă.

Toate tematicile prezentate aici (precum şi multe extinderi şi aplicaţii semnificative ale acestora) se regăsesc în monografiile menţionate în bibliografie. În lucrarea de faţă, în organizarea materialului s-a ţinut cont de felul în care acesta se conectează la cursurile anterior parcurse, iar selecţia problemelor este făcută în scopul ilustrării cât mai eficiente a elementelor teoretice. De asemenea, s-a urmărit includerea celor mai naturale sau celor mai simple demonstraţii ale rezultatelor principale. Sursele bibliografice cele mai utilizate pentru fiecare capitol teoretic sunt următoarele: pentru Capitolul 1, [8], [4] şi [7]; pentru Capitolul 2, [8] şi [1]; pentru Capitolul 3, [1], [5] şi [8]; pentru Capitolul 4, [1], [5] şi [2]; pentru Capitolul 5, [1], [5], [7] şi [2]. Problemele sunt culese din diverse surse, principalele fiind [6], [3], [5] şi [7].

Cuprins

Capitolul 1

Recapitulare şi completări

Primele patru secţiuni ale acestui capitol recapitulează noţiuni şi rezultate deja întâlnite la primul curs de *Analiză funcţională*. Din acest motiv, nu prezentăm decât sporadic demonstraţii ale acestor rezultate, punctând în schimb expunerea cu unele exemple care ilustrează ideile principale. Secţiunile a cincea şi a şasea conţin rezultate (în majoritate) noi care sunt o continuare firească a acestei recapitulări şi pentru care vom prezenta în detaliu demonstraţii.

1.1 Spaţii liniare normate

Definiţia 1.1.1 *Fie $\mathbb{E}$ un corp, numit corp de scalari. O mulţime nevidă X se numeşte spaţiu liniar (sau spaţiu vectorial) peste corpul de scalari $\mathbb{E}$ dacă este definită o lege de compoziţie internă pe X, notată $+$ (adică $+ : X \times X \to X$) şi o operaţie externă de înmulţire cu elemente din $\mathbb{E}$ (cu scalari), notată $\cdot$ (adică $\cdot : \mathbb{E} \times X \to X$), astfel încât au loc următoarele condiţii*

(i) $(X, +)$ *este grup abelian;*

(ii) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, *pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ *şi orice* $x \in X$;

(iii) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, *pentru orice* $\alpha \in \mathbb{E}$ *şi orice* $x, y \in X$;

(iv) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$, *pentru orice* $\alpha, \beta \in \mathbb{E}$ *şi orice* $x \in X$;

(v) $1 \cdot x = x$, *pentru orice* $x \in X$.

În general, dacă $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ spunem că spaţiul vectorial este real, iar dacă $\mathbb{E} = \mathbb{C}$, spunem că spaţiul vectorial este complex. În acest curs vom considera doar spaţii vectoriale reale (deci vom lua $\mathbb{E} = \mathbb{R}$). Majoritatea rezultatelor sunt valabile şi în cazul $\mathbb{E} = \mathbb{C}$, dar există şi unele diferenţe pe care le vom sublinia într-o anexă la final.

Observaţia 1.1.2 *Dacă X este spaţiu liniar real, elementele sale se numesc vectori sau puncte, iar numerele reale se numesc scalari. Elementul neutru al grupului $(X, +)$ se numeşte vectorul nul şi se notează cu 0. Uneori, pentru claritate, vom folosi alternativ notaţia 0_X. Opusul unui vector x în acest grup se notează cu $-x$ şi se numeşte vectorul opus sau simetric vectorului x. Ca şi în cazul înmulţirii din $\mathbb{R}$, vom omite de cele mai multe ori să scriem explicit operaţia $\cdot$.*

Dacă $A, B \subset X$ şi $C \subset \mathbb{R}$ sunt mulţimi nevide, definim de asemenea

$$\begin{aligned} &A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \\ &\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}, A - B = A + (-1)B, \\ &CA = \{\alpha a \mid \alpha \in C, a \in A\}. \end{aligned}$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $x \in X$, vom mai scrie $\frac{x}{\alpha}$ în loc de $\frac{1}{\alpha}x$.

Observaţia 1.1.3 *În general, vom omite cuvântul "real" din denumirea spaţiului liniar real.*

Pentru uşurinţa scrierii, utilizăm notaţia $\mathbb{P} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definiţia 1.1.4 *Fie X spaţiu liniar. O mulţime de vectori $E = \{e_i \mid i \in I\}$, unde I este o mulţime de indici, se numeşte bază Hamel sau bază algebrică pentru X dacă:*

(i) pentru orice $x \in X$ există $n \in \mathbb{P}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ şi $e_{i_1}, ..., e_{i_n} \in E$ astfel încât

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_{i_k};$$

(ii) E este liniar independentă, adică orice submulţime finită a sa este liniar independentă.

Teorema 1.1.5 *Orice spaţiu liniar admite o bază. În plus, orice două baze sunt cardinal echivalente şi acest cardinal se numeşte dimensiunea spaţiului.*

Definiţia 1.1.6 *Fie X un spaţiu liniar. O submulţime Y a lui X se numeşte subspaţiu liniar al lui X dacă împreună cu restricţiile operaţiilor de pe X formează un spaţiu liniar.*

Definiţia 1.1.7 *Dacă X este spaţiu liniar şi A o submulţime nevidă a sa, atunci subspaţiul liniar generat de A este*

$$\operatorname{span} A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \mid n \in \mathbb{P}, \alpha_k \in \mathbb{R}, a_k \in A, \ \forall k \in \overline{1,n} \right\}.$$

Este clar că $\operatorname{span} A$ este cel mai mic subspaţiu liniar (în sensul incluziunii) care conţine pe A.

Definiţia 1.1.8 *Fie X un spaţiu liniar real. Se numeşte normă pe X o funcţie $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ cu următoarele proprietăţi:*

(i) $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$;

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, pentru orice $x \in X$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pentru orice $x, y \in X$.

Spaţiul vectorial X înzestrat cu norma $\|\cdot\|$ se numeşte spaţiu liniar normat.

Observaţia 1.1.9 *Vom folosi deseori şi denumirea de spaţiu vectorial normat sau chiar spaţiu normat, însăşi definiţia normei subînţelegând structura liniară.*

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. Este cunoscut faptul că norma $\|\cdot\|$ induce pe X o distanţă dată prin $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d\left(x, y\right) = \|x - y\|$$

şi o topologie definită în mod obişnuit.

Precizăm notaţiile utilizate. Fie $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Se definesc:

- bila deschisă cu centrul x şi raza ε prin

$$B\left(x, \varepsilon\right) = \left\{y \in X \mid \|x - y\| < \varepsilon\right\};$$

- bila închisă (sau discul) cu centrul x şi raza ε prin

$$D\left(x, \varepsilon\right) = \left\{y \in X \mid \|x - y\| \leq \varepsilon\right\};$$

- sfera cu centrul x şi raza ε prin

$$S\left(x, \varepsilon\right) = \left\{y \in X \mid \|x - y\| = \varepsilon\right\}.$$

Atunci când $x = 0$ şi $\varepsilon = 1$ vom mai scrie B_X, D_X şi respectiv S_X pentru mulţimile de mai sus. Uneori, când vor apărea mai multe spaţii liniare normate în cadrul discuţiei, pentru mai multă claritate, vom scrie, de exemplu, $B_X\left(x, \varepsilon\right)$ pentru a marca faptul că este vorba despre bila corespunzătoare din spaţiul X.

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi $A \subset X$. Presupunem cunoscute conceptele de mai jos şi rezultatele fundamentale legate de acestea:

- vecinătate a unui punct (notăm cu $\mathcal{V}(\overline{x})$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui $\overline{x}$);
- mulţime mărginită în X;
- mulţime deschisă, mulţime închisă;
- punct interior unei mulţimi (notăm cu $\operatorname{int} A$ interiorul lui A);
- punct de acumulare a unei mulţimi (notăm cu A' mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale lui A);
- punct aderent unei mulţimi (vom folosi notaţiile $\operatorname{cl} A$ şi $\overline{A}$ pentru a desemna mulţimea aderentă a lui A);
- frontiera unei mulţimi (notăm cu $\operatorname{Fr} A$ frontiera lui A);
- mulţime compactă;
- mulţime densă în X;
- separabilitatea lui X;

- şir de elemente ale lui X şi convergenţa unui astfel de şir (vom folosi notaţiile $x_n \to x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau, mai simplu, $\lim x_n = x$ pentru a spune că şirul $(x_n) \subset X$ este convergent la $x \in X$);

- şir Cauchy sau fundamental.

O noţiune care intervine frecvent este următoarea: o mulţime $A \subset (X, \|\cdot\|)$ se numeşte absorbantă dacă

$$\bigcup_{\alpha>0} \alpha A = X,$$

i.e., $0 \in A$ şi pentru orice $x \in X$ există $\beta > 0$ astfel încât $\beta x \in A$.

În particular, orice vecinătate a originii este mulţime absorbantă.

Observaţia 1.1.10 *Una dintre proprietăţile fundamentale ale vecinătăţilor punctelor într-un spaţiu liniar normat este dată de relaţiile evidente*

$$B(x, \varepsilon) = x + B(0, \varepsilon) = x + \varepsilon B_X, \ \forall x \in X, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Aceasta înseamnă, în particular, că putem privi o vecinătate a unui punct ca fiind o translaţie a unei vecinătăţi a lui 0*, ceea ce arată că este suficient să studiem unele proprietăţi topologice doar în* 0*.*

Fie acum $(X, \|\cdot\|)$ şi $(Y, \|\cdot\|)$ două spaţii liniare normate. În general, rezultă de fiecare dată din context de care dintre cele două norme este vorba şi nu vom utiliza notaţii diferite pentru ele. Totuşi, în unele cazuri, vom diferenţia normele de pe X, respectiv Y, prin $\|\cdot\|_X$ şi respectiv $\|\cdot\|_Y$. Din nou, presupunem cunoscute următoarele concepte şi rezultatele fundamentale asociate:

- limita unei funcţii $f : A \subset X \to Y$ într-un punct $a \in A'$ (vom scrie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ pentru a spune că limita lui f în a este $b \in Y$);

- continuitatea unei funcţii $f : A \subset X \to Y$ într-un punct $a \in A$ şi continuitatea pe mulţime;

- uniforma continuitate a unei funcţii $f : A \subset X \to Y$.

Observaţia 1.1.11 *Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este un spaţiu liniar normat atunci funcţiile $u : X \times X \to X$ şi $v : \mathbb{R} \times X \to X$ date prin*

$$u(x, y) = x + y$$
$$v(\alpha, x) = \alpha x$$

sunt continue (unde, pe spaţiile produs, se consideră topologia produs).

Definiţia 1.1.12 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi $Y \subset X$ un subspaţiu vectorial al lui X. Atunci restricţia lui $\|\cdot\|$ la Y este o normă pe care o notăm la fel şi $(Y, \|\cdot\|)$ este un spaţiu liniar normat pe care îl numim subspaţiu liniar normat al lui X.*

Definiţia 1.1.13 *Un spaţiu liniar normat* $(X, \|\cdot\|)$ *se numeşte complet sau spaţiu Banach dacă orice şir fundamental de elemente din* X *este convergent.*

Următoarele rezultate sunt cunoscute de la precedentul curs de *Analiză funcţională*.

Propoziţia 1.1.14 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat şi* Y *un subspaţiu liniar al său.*
(i) Dacă $(Y, \|\cdot\|)$ *este complet, atunci* Y *este închis.*
(ii) Dacă $(X, \|\cdot\|)$ *este complet şi* Y *este închis, atunci* $(Y, \|\cdot\|)$ *este complet.*

Definiţia 1.1.15 *Fie* X *un spaţiu liniar şi* $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ *două norme pe* X. *Spunem că cele două norme sunt echivalente dacă există* $\alpha, \beta \geq 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in X$,

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1 .$$

Propoziţia 1.1.16 *Fie* X *un spaţiu liniar şi* $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ *două norme pe* X. *Cele două norme sunt echivalente dacă şi numai dacă topologiile induse de ele pe* X *coincid (adică mulţimile deschise sunt aceleaşi).*

Definiţia 1.1.17 *Fie* X *un spaţiu liniar şi* $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ *două norme pe* X. *Spunem că* $\|\cdot\|_2$ *este mai fină decât* $\|\cdot\|_1$ *dacă există* $\alpha \geq 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in X$,

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 .$$

Propoziţia 1.1.18 *Fie* X *un spaţiu liniar şi* $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ *două norme pe* X. *Atunci* $\|\cdot\|_2$ *este mai fină decât* $\|\cdot\|_1$ *dacă şi numai dacă topologia generată de* $\|\cdot\|_2$ *este mai fină decât topologia generată de* $\|\cdot\|_1$ *(adică familia mulţimilor deschise în raport cu* $\|\cdot\|_1$ *este inclusă în familia mulţimilor deschise în raport cu* $\|\cdot\|_2$*).*

Observaţia 1.1.19 *De exemplu, pentru demonstrarea unei implicaţii din propoziţia de mai sus, în baza Observaţiei 1.1.10, este suficient să arătăm că o bilă deschisă centrată în* 0 *în raport cu* $\|\cdot\|_1$ *conţine o bilă deschisă centrată în* 0 *în raport cu* $\|\cdot\|_2$, *ceea ce rezultă imediat pe baza inegalităţii din ipoteză.*

Pe spaţii liniare normate finit dimensionale au loc o serie de proprietăţi de cea mai mare importanţă.

Teorema 1.1.20 *Fie* X *un spaţiu liniar finit dimensional. Atunci orice două norme pe* X *sunt echivalente.*

Teorema 1.1.21 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat finit dimensional. Atunci:*
(i) $(X, \|\cdot\|)$ *este spaţiu Banach;*
(ii) orice şir mărginit din $(X, \|\cdot\|)$ *admite un subşir convergent;*
(iii) orice submulţime mărginită a lui $(X, \|\cdot\|)$ *este relativ compactă;*
(iv) orice subspaţiu liniar normat al lui $(X, \|\cdot\|)$ *este închis.*

Teorema 1.1.22 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat. Atunci* D_X *este mulţime compactă dacă şi numai dacă* X *este de dimensiune finită.*

1.2 Spaţii liniare normate fundamentale

În continuare prezentăm câteva spaţii liniare normate fundamentale.

Exemplul 1.2.1 Fie $d \in \mathbb{P}$. Considerăm mulţimea

$$\mathbb{R}^d := \{(x_1, x_2, ..., x_d) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \overline{1,d}\}.$$

Această mulţime se organizează ca spaţiu vectorial real de dimensiune d cu operaţiile standard definite astfel: pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_d) \in \mathbb{R}^d$ şi orice $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_d + y_d) \in \mathbb{R}^d,\\ &ax = (ax_1, ax_2, ..., ax_d) \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Conform Teoremelor 1.1.20 şi 1.1.21 pe $\mathbb{R}^d$ toate normele sunt echivalente şi induc o structura de spaţiu Banach. În general, normele principale care se consideră pe $\mathbb{R}^d$ sunt următoarele:

- norma euclidiană:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2};$$

- norma max:

$$\|x\|_\infty = \max\left\{|x_i| \mid i \in \overline{1,d}\right\};$$

- norma sumă:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|.$$

Pentru compararea acestor norme, a se vedea Problema 2.

Exemplul 1.2.2 Fie $d \in \mathbb{P}$. Dacă X este spaţiu liniar de dimensiune d, atunci considerând o bază algebrică $B = \left\{e_k \mid k \in \overline{1,d}\right\}$ ştim că orice element $x \in X$ se scrie unic în forma

$$x = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k e_k,$$

unde $\alpha_1, ..., \alpha_d \in \mathbb{R}$. Se definesc, ca mai sus, normele

- norma euclidiană:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \alpha_i^2};$$

- norma max:

$$\|x\|_\infty = \max\left\{|\alpha_i| \mid i \in \overline{1,d}\right\};$$

- norma sumă:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |\alpha_i|.$$

Evident, exemplul precedent este conţinut în exemplul de faţă dacă considerăm pe $\mathbb{R}^d$ baza canonică.

Exemplul 1.2.3 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Definim

$$B([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ mărginită pe } [a,b]\},$$

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } [a,b]\}.$$

Cu operaţiile uzuale de adunare a funcţiilor şi de înmulţire a funcţiilor cu scalari reali, $B([a,b])$ este spaţiu liniar, iar $C([a,b])$ este subspaţiu liniar al său.

Evident, ambele spaţii sunt infinit dimensionale: este suficient să observăm că mulţimea funcţiilor monomiale este liniar independentă în $C([a,b])$, fiind, evident, de cardinal $\aleph_0$.

Pe $B([a,b])$ se introduce norma supremum (sau norma convergenţei uniforme) prin

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}.$$

Atunci, atât $B([a,b])$, cât şi $C([a,b])$ sunt spaţii Banach: a se vedea Problema 3.

Exemplul 1.2.4 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Definim

$$C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă cu derivata continuă pe } [a,b]\}.$$

Se observă că $C^1([a,b])$ este subspaţiu liniar al lui $C([a,b])$.

Totuşi, $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ nu este subspaţiu liniar normat închis, deci $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ nu este spaţiu Banach (a se vedea Propoziţia 1.1.14).

Pentru a demonstra aceasta, luăm, fără a restrânge generalitatea, $[a,b] = [-1,1]$ şi considerăm şirul $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$$

pentru $n \in \mathbb{P}$. Atunci

$$f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\to} f$$

unde $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Dar, toate funcţiile f_n cu $n \geq 1$ sunt de clasă C^1, în timp ce f nu este din $C^1([-1,1])$.

Dacă pe $C^1([a,b])$ considerăm norma

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

atunci $(C^1([a,b]), \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach: a se vedea Problema 4.

Exemplul 1.2.5 Fie m spaţiul liniar al şirurilor numerice mărginite. Definim norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{P}\}.$$

Atunci $(m, \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach: a se vedea Problema 5.

Uneori, din motive pe care le vom discuta ulterior, m se notează cu ℓ^∞.

Definim, de asemenea, spaţiul c al şirurilor numerice convergente. Atunci, $(c, \|\cdot\|_\infty)$ este subspaţiu liniar normat închis al lui $(m, \|\cdot\|_\infty)$, deci este, la rândul său, spaţiu Banach: a se vedea Problema 5.

Fie c_0 spaţiul şirurilor numerice convergente la 0. Din nou, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ este subspaţiu liniar normat închis al ambelor spaţii liniare normate de mai sus. În particular, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach: a se vedea Problema 5.

Fie $p > 0$. Definim

$$\ell^p = \left\{ (x_n) \in c_0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

care este subspaţiu liniar normat al lui $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Avem

$$\overline{\ell^p}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0.$$

Într-adevăr, incluziunea $\overline{\ell^p}^{\|\cdot\|_\infty} \subset c_0$ este evidentă. Invers, pentru $x = (x_n) \in c_0$ definim pentru orice n

$$y^n = (x_1, ..., x_n, 0...) \in \ell^p$$

şi avem

$$\|x - y^n\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \to 0.$$

Prin urmare, cum $\ell^p \neq c_0$, $(\ell^p, \|\cdot\|_\infty)$ nu este spaţiu Banach.

Acum, pentru $p \geq 1$, definim pe ℓ^p norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Este clar că pentru orice $x \in \ell^p$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p,$$

deci topologia dată de $\|\cdot\|_p$ este mai fină decât topologia dată de $\|x\|_\infty$ pe ℓ^p.

Cu această normă ℓ^p este spaţiu Banach: a se vedea Problema 6

Exemplul 1.2.6 Notăm prin c_{00} spaţiul liniar al şirurilor numerice care au toţi termenii nuli de la un loc încolo (uneori, acest spaţiu se notează $\mathbb{R}^\infty$). Dacă ne uităm la argumentele de mai sus, de fapt am demonstrat şi că $\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0$, deci nici $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ nu este spaţiu Banach.

Observaţia 1.2.7 *Fie $1 < p < r$. Avem următoarele incluziuni (care sunt stricte) între spaţiile liniare discutate:*

$$c_{00} = \mathbb{R}^\infty \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^r \subset c_0 \subset c \subset m = \ell^\infty.$$

Mai mult, se verifică cu uşurinţă faptul că pentru orice $x \in \ell^1$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_r \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1.$$

Observăm din nou că toate aceste spaţii liniare sunt infinit dimensionale: mulţimea vectorilor unitari

$$\{(1, 0, 0, ..), (0, 1, 0, ...), ...\}$$

este o bază numărabilă în c_{00}.

Observaţia 1.2.8 *În multe cazuri, atunci când vor interveni spaţii de şiruri vom presupune tacit, din motive ce ţin de uşurinţa expunerii, că şirurile sunt indexate după* $\mathbb{P}$.

De altfel, printre instrumentele de bază pentru studiul acestor spaţii se numără următoarele inegalităţi care sunt generalizări ale inegalităţilor lui Minkowski şi respectiv Hölder: pentru orice $p > 1$, $(x_n)_{n\in\mathbb{P}}, (y_n)_{n\in\mathbb{P}} \subset \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p},$$

iar pentru $q = (p-1)^{-1} p$ (adică $p^{-1} + q^{-1} = 1$),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

Exemplul 1.2.9 Fie $X \neq \emptyset$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ o $\sigma-$algebră şi $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ o măsură. Considerăm $p \geq 1$ şi reamintim definiţia spaţiului liniar de funcţii $p-$integrabile, unde, ca de obicei, funcţii egale $\mu-$a.p.t. se identifică:

$$L^p(X, \mu, \mathbb{R}) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}.$$

Pe acest spaţiu se defineşte norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Apoi, definim spaţiul liniar al funcţiilor măsurabile esenţial mărginite:

$$L^\infty(X, \mu, \mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ este } \mathcal{M}-\text{măsurabilă şi } \exists c > 0 : |f| \leq c,\ \mu - \text{a.p.t.} \}.$$

Pe acest spaţiu definim norma

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \inf \{ a > 0 \mid \mu(\{ x \in X \mid |f| \geq a \}) = 0 \} \\ &= \inf \{ c > 0 \mid |f| \leq c,\ \mu - \text{a.p.t.} \}, \end{aligned}$$

cu convenţiile $\inf \emptyset = \infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

Pentru orice $p \in [1, \infty]$, $\left(L^p(X, \mu, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ este spaţiu Banach.

Dacă X are măsură finită, atunci pentru $1 \leq p < r < \infty$ are loc

$$L^r(X, \mu, \mathbb{R}) \subset L^p(X, \mu, \mathbb{R}) \subset L^1(X, \mu, \mathbb{R}).$$

Pentru a demonstra aceasta, să considerăm p, q cu $p < q$ şi $s = p^{-1} r > 1$. Notăm de asemenea cu u valoarea $(s-1)^{-1} s$. Fie f măsurabilă din $L^r(X, \mu, \mathbb{R})$. Avem, pe baza inegalităţii lui Hölder pentru funcţii,

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu \leq \left(\int_X 1^u d\mu\right)^{u^{-1}} \left(\int_X (|f(x)|^p)^s \, d\mu\right)^{s^{-1}} = \mu(X)^{u^{-1}} \left(\int_X |f(x)|^r \, d\mu\right)^{s^{-1}},$$

de unde
$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{p^{-1}-r^{-1}} \|f\|_r,$$
ceea ce conduce la incluziunile anunţate.

Dacă măsura lui X nu este finită, atunci nu mai au loc incluziuni de tipul celor precedente. De exemplu, pentru orice $p, r \in [1, \infty)$, $p \neq r$
$$L^p(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{R}) \not\subset L^r(\mathbb{R}, \mu, \mathbb{R}).$$

Observaţia 1.2.10 *Separabilitatea este o proprietate importantă, dar de multe ori dificil de probat sau de infirmat. De exemplu, este clar că $\mathbb{R}^d$ este un spaţiu separabil, $\mathbb{Q}^d$ fiind numărabilă şi densă (indiferent de normă).*

1.3 Operatori liniari între spaţii liniare normate

Fie $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ spaţii liniare normate reale. Considerăm $T : X \to Y$ un operator liniar, adică o funcţie ce satisface relaţia
$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in X.$$
Evident, această noţiune nu utilizează norma, deci este o noţiune algebrică. Uneori vom nota $T(x)$ prin Tx. Este de asemenea clar că $T(0_X) = 0_Y$. Notăm cu $\operatorname{Ker} T$ nucleul lui T, adică
$$\operatorname{Ker} T = \{x \in X \mid T(x) = 0\}.$$
Ca în cazul oricărei funcţii, $\operatorname{Im} T$ desemnează imaginea lui T. Ambele mulţimi, $\operatorname{Ker} T$ şi $\operatorname{Im} T$ sunt subspaţii liniare în X, respectiv Y. În plus, T este injectiv dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} T = \{0\}$, iar, din nou ca în cazul unei funcţii oarecare, surjectivitatea este caracterizată prin $\operatorname{Im} T = Y$.

Propoziţia 1.3.1 *Fie T un operator liniar de la X la Y. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) T este continuu pe X;
(ii) T este continuu într-un punct $x \in X$;
(iii) T este continuu în 0.

Exemplul 1.3.2 Dacă X este un spaţiu liniar normat, atunci operatorul identitate, notat id sau id_X este liniar şi continuu.

Exemplul 1.3.3 Operatorul $T : (C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$,
$$T(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}\,t$$
este liniar. Din Teorema de medie, pentru orice $f \in C([a,b])$,
$$|T(f)| \leq (b-a)\|f\|_\infty,$$
deci T este continuu în 0. Prin urmare, T este continuu pe întreg spaţiul.

Exemplul 1.3.4 Operatorul $T : (L^1(X, \mu, \mathbb{R}), \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$,

$$T(f) = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\,\mu$$

este liniar. Avem, pentru orice $f \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$,

$$|T(f)| \leq \|f\|_1,$$

deci T este continuu în 0. Prin urmare, T este continuu pe întreg spaţiul.

Exemplul 1.3.5 Fie

$$Y = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \mid p \text{ polinom cu coeficienţi reali}\}.$$

Evident, $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ este subspaţiu liniar normat al lui $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Definim $T : Y \to Y$ prin

$$T(p) = p'.$$

Arătăm că acest operator este discontinuu în 0. Fie, pentru orice $n \in \mathbb{P}$,

$$p_n(x) = \frac{x^n}{n}.$$

Evident,

$$\|p_n\|_\infty = n^{-1},\ \forall n \in \mathbb{P},$$

deci $p_n \underset{Y}{\overset{\|\cdot\|_\infty}{\to}} 0$. Dar, pe de altă parte,

$$\|T(p_n)\|_\infty = 1,\ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Deducem că T nu este continuu în 0. Prin urmare, T nu este continuu în niciun punct.

Definiţia 1.3.6 *Fie $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ spaţii liniare normate reale şi $T : X \to Y$ un operator liniar. Spunem că T este operator mărginit dacă duce mulţimi mărginite din X în mulţimi mărginite din Y, ceea ce este echivalent cu următoarea proprietate:*

$$\exists M > 0,\ \forall x \in X : \|Tx\| \leq M\|x\|.$$

Propoziţia 1.3.7 *În notaţiile precedente, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) T este continuu;
(ii) T este mărginit.

Propoziţia 1.3.8 *Dacă X este finit dimensional şi $T : X \to Y$ este liniar, atunci T este continuu.*

Observaţia 1.3.9 *Dacă X este un spaţiu liniar normat infinit dimensional, atunci există un operator liniar de la X la $\mathbb{R}$ discontinuu. Pentru a demonstra aceasta, considerăm $B = \{e_i \mid i \in I\}$ o bază algebrică a lui X. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că toate elementele bazei sunt de normă 1. Pentru că X este infinit dimensional, putem presupune că $\mathbb{N} \subset I$. Definim $f : B \to \mathbb{R}$ prin*

$$f(e_i) = \begin{cases} i, & \text{dacă } i \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{dacă } i \in I \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Prelungim această funcţie prin liniaritate la întreg spaţiul X. Evident, această funcţie nu este continuă pentru că nu este mărginită pe $B \subset S_X$.

Operatorii liniari de la X la $\mathbb{R}$ se numesc şi funcţionale liniare. În privinţa legăturii dintre continuitatea unei funcţionale liniare şi o proprietate de mărginire, a se vedea Problema 15.

Notăm cu $L(X, Y)$ spaţiul liniar al operatorilor continui de la X la Y şi cu $L(X)$ spaţiul $L(X, X)$.

Propoziţia 1.3.10 *Fie $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ spaţii liniare normate reale. Aplicaţia $\|\cdot\| : L(X, Y) \to [0, \infty)$,*

$$\|T\| = \inf \{M > 0 \mid \|Tx\| \leq M \|x\|, \ \forall x \in X\}$$

este o normă pe $L(X, Y)$, numită norma operatorială.

Observaţia 1.3.11 *1. Pentru orice $T \in L(X, Y)$, au loc*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x \in X \setminus \{0\} \right\} \\ &= \sup \{\|Tx\| \mid \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \{\|Tx\| \mid \|x\| < 1\} \\ &= \sup \{\|Tx\| \mid \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

2. Pentru orice $T \in L(X, Y)$

$$\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|, \ \forall x \in X.$$

Exemplul 1.3.12 Definim $T : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$,

$$Tf = f(c),$$

unde c este un număr fixat în $[a, b]$. Atunci T este operator liniar mărginit şi $\|T\| = 1$.

Teorema 1.3.13 *Dacă Y este spaţiu Banach, atunci $L(X, Y)$ este spaţiu Banach.*

Definiţia 1.3.14 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. Spaţiul liniar $L(X, \mathbb{R})$ se numeşte dualul lui X şi se notează cu X^*. Norma operatorială pe X^* indusă de norma pe X se numeşte norma duală normei lui X şi o vom nota uneori cu $\|\cdot\|_*$.*

Observaţia 1.3.15 *Cum* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *este spaţiu Banach,* X^* *înzestrat cu norma operatorială este de asemenea un spaţiu Banach. Dacă* $x^* \in X^*$ *şi* $x \in X$, *mai notăm numărul real* $x^*(x)$ *prin* $\langle x, x^* \rangle$ *sau* $\langle x^*, x \rangle$. *Este important de reţinut că* $|x^*(x)| \leq \|x\| \|x^*\|_*$ *pentru orice* $x \in X$ *şi* $x^* \in X^*$.

Propoziţia 1.3.16 *Dacă* $x^* \in X^* \setminus \{0\}$, *atunci* $\operatorname{Ker} x^*$ *este un subspaţiu liniar închis al lui* X *de codimensiune* 1.

Definiţia 1.3.17 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *şi* $(Y, \|\cdot\|)$ *spaţii liniare normate şi* $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$.

(i) T *se numeşte izomorfism între cele două spaţii liniare normate dacă este liniar, continuu, bijectiv, iar operatorul invers* T^{-1} *este de asemenea continuu.*

(ii) T *se numeşte izometrie dacă pentru orice* $x \in X$, $\|Tx\| = \|x\|$.

Observaţia 1.3.18 *Dacă* T *este izometrie liniară din proprietatea de definiţie se obţine că este operator continuu şi injectiv, iar* $\|T\| = 1$. *Dacă, în plus,* T *este surjecţie atunci este izomorfism.*

Definiţia 1.3.19 *Două spaţii liniare normate* $(X, \|\cdot\|)$ *şi* $(Y, \|\cdot\|)$ *se numesc izomorfe dacă există un izomorfism între ele. Dacă, în plus, izomorfismul este şi izometrie, spunem că spaţiile sunt izometric izomorfe (sau izometrice, subînţelegând în acest context izomorfismul) şi scriem* $(X, \|\cdot\|) \simeq (Y, \|\cdot\|)$.

1.4 Teorema Hahn-Banach

Reamintim acum (fără demonstraţie) unul dintre rezultatele fundamentale ale *Analizei funcţionale* şi câteva dintre consecinţele sale.

Definiţia 1.4.1 *Fie* X *spaţiu liniar real. O funcţie* $p : X \to \mathbb{R}$ *se numeşte subliniară dacă*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x), \ \forall \lambda > 0, \ \forall x \in X, \\ p(x + y) &\leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

Teorema 1.4.2 (Hahn-Banach, varianta algebrică) *Fie* X *spaţiu liniar real şi* Y *un subspaţiu liniar al său. Fie* $p : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie subliniară şi* $f : Y \to \mathbb{R}$ *o funcţie liniară astfel încât* $f(y) \leq p(y)$ *pentru orice* $y \in Y$. *Atunci există* $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie liniară care prelungeşte pe* f *şi satisface* $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ *pentru orice* $x \in X$.

Teorema 1.4.3 (Hahn-Banach, varianta topologică) *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat şi* Y *un subspaţiu liniar normat al său. Fie* $y^* \in Y^*$. *Atunci există* $x^* \in X^*$ *astfel încât* $x^*(y) = y^*(y)$ *pentru orice* $y \in Y$ *şi* $\|x^*\|_{X^*} = \|y^*\|_{Y^*}$.

Demonstraţie Se foloseşte Teorema 1.4.2 pentru aplicaţia subliniară $p : X \to \mathbb{R}$, $p(x) = \|y^*\|_{Y^*} \|x\|$ care majorează pe y^* pe Y. $\square$

Observaţia 1.4.4 *Teorema 1.4.3 arată, în particular, că dualul unui subspaţiu liniar este format din restricţiile la acel subspaţiu ale elemetelor din dualul spaţiului, adică*

$$Y^* = \left\{ x^*_{|Y} \mid x^* \in X^* \right\}.$$

Corolarul 1.4.5 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat şi* $x \in X \setminus \{0\}$. *Atunci există* $x^* \in X^*$ *astfel încât* $x^*(x) = \|x\|^2$ *şi* $\|x^*\| = \|x\|$.

Demonstraţie Se foloseşte Teorema 1.4.3 pentru $Y = \mathbb{R}x$ şi $y^* : Y \to \mathbb{R}$, $y^*(tx) = t\|x\|^2$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Corolarul 1.4.6 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat. Atunci, pentru orice* $x \in X$,

$$\|x\| = \max\{|x^*(x)| \mid x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}.$$

Demonstraţie Dacă $x = 0$ egalitatea este clară. Dacă $x \neq 0$, atunci

$$\sup\{|x^*(x)| \mid x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\} \leq \|x\|$$

din definiţia normei duale. Din Corolarul 1.4.5, există $x^* \in X^*$ astfel încât $x^*(x) = \|x\|^2$ şi $\|x^*\| = \|x\|$. Alegem $u^* = \|x\|^{-1} x^*$ şi avem $\|u^*\| = 1$, $u^*(x) = \|x\|$, de unde obţinem concluzia. $\square$

1.5 Dualele unor spaţii uzuale

Propoziţia 1.5.1 *Fie* $d \in \mathbb{P}$. *Au loc egalităţile:*

$$\left((\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2),$$
$$\left((\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty),$$
$$\left((\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1)$$

şi

$$\left(\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p\right)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq \left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_q\right),$$

pentru orice $p, q > 1$ *cu* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *În plus, în fiecare caz în parte, izomorfismul izometric este definit prin* $T : (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|) \to \left((\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)^*, \|\cdot\|_*\right)$,

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k.$$

Demonstraţie Fie $B = \{e_1, ..., e_d\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^d$ (sau orice altă bază din $\mathbb{R}^d$, caz în care normele sunt înţelese în mod uzual). Pentru orice $x \in \mathbb{R}^d$ există o mulţime de scalari $\{\lambda_1, ..., \lambda_d\}$ astfel încât avem scrierea unică în baza dată $x = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k e_k$. Dacă $x^* : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ este o funcţională liniară, atunci

$$x^*(x) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k x^*(e_k).$$

Notând $x^*(e_k)$ prin $\alpha_k^{x^*}$ pentru $k \in \overline{1,d}$,

$$x^*\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k e_k\right) = x^*(x) = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \alpha_k^{x^*}.$$

Invers, toate funcţionalele de această formă sunt liniare, ceea ce înseamnă că aceasta este forma generală a funcţionalelor liniare pe $\mathbb{R}^d$.

Deci, x^* este funcţională liniară pe $\mathbb{R}^d$ dacă şi numai dacă există $\alpha^{x^*} \in \mathbb{R}^d$ astfel încât are loc relaţia anterioară.

Cum pe spaţii liniare normate finit dimensionale liniaritatea atrage continuitatea, deducem că aceasta este forma generală a elementelor dualului, indiferent de norma considerată (de altfel, normele sunt echivalente).

Practic, în continuare, trebuie să identificăm norma duală în funcţie de forma normei considerate pe $\mathbb{R}^d$.

Considerăm $\mathbb{R}^d$ înzestrat cu $\|\cdot\|_2$. Definim $T : \left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2\right)^*, \|\cdot\|_*\right)$ prin

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k.$$

Este clar că T este bine definit, întrucât $T(x)$ este funcţională liniară pe $\mathbb{R}^d$ (definită de $\alpha^{T(x)} = x$). De asemenea, T este liniar. În plus, T este surjectiv pentru că pentru orice $x^* \in \left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2\right)^*$, avem $x^* = T\left(\alpha^{x^*}\right)$.

Arătăm că T este izometrie, adică pentru orice $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|Tx\|_* = \|x\|_2.$$

Pentru $x = 0$, egalitatea este evidentă. Fie deci $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Pentru orice $y \in \mathbb{R}^d$,

$$|T(x)(y)| = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{d} |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{d} y_k^2} = \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Deci, $\|Tx\|_* \leq \|x\|_2$.

Pe de altă parte, $|T(x)(y)| \leq \|Tx\|_* \|y\|_2$ pentru orice $y \in \mathbb{R}^d$. Alegem $y = \|x\|_2^{-1} x$ pentru care inegalitatea anterioară devine

$$\|x\|_2 \leq \|Tx\|_*.$$

Rezultă aşadar egalitatea dorită.

Considerăm $\mathbb{R}^d$ înzestrat cu $\|\cdot\|_1$. Definim $T : \left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1\right)^*, \|\cdot\|_*\right)$ ca mai sus prin

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k.$$

Singurul lucru care trebuie arătat este că

$$\|Tx\|_* = \|x\|_\infty, \ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Fixăm $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ şi pentru orice $y \in \mathbb{R}^d$,

$$|T(x)(y)| = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{d} |x_k y_k| \leq \|x\|_\infty \sum_{k=1}^{d} |y_k| = \|x\|_\infty \|y\|_1 .$$

Deci $\|Tx\|_* \leq \|x\|_\infty$.

Apoi alegem $\overline{k} \in \overline{1,d}$ astfel încât $|x_{\overline{k}}| = \|x\|_\infty$ şi definim $y \in \mathbb{R}^d$ având toate componentele nule, cu excepţia celei de pe poziţia $\overline{k}$ care are valoarea $|x_{\overline{k}}|^{-1} x_{\overline{k}}$. Atunci $\|y\|_1 = 1$ şi inegalitatea $|T(x)(y)| \leq \|Tx\|_* \|y\|_1$ devine $\|x\|_\infty \leq \|Tx\|_*$. Egalitatea este probată.

Considerăm $\mathbb{R}^d$ înzestrat cu $\|\cdot\|_\infty$. Definim, $T : \left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_1\right) \to \left(\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty\right)^*, \|\cdot\|_*\right)$ din nou prin

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k.$$

Arătăm că

$$\|Tx\|_* = \|x\|_1 , \ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} .$$

Luăm $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ şi pentru orice $y \in \mathbb{R}^d$,

$$|T(x)(y)| = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k \leq \sum_{k=1}^{d} |x_k y_k| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty .$$

Deci $\|Tx\|_* \leq \|x\|_1$.

Apoi definim $y = (\operatorname{sgn} x_k)_{k \in \overline{1,d}} \in \mathbb{R}^d$. Atunci $\|y\|_\infty = 1$ şi inegalitatea $|T(x)(y)| \leq \|Tx\|_* \|y\|_\infty$ devine $\|x\|_1 \leq \|Tx\|_*$. Are loc din nou egalitatea dorită.

În sfârşit, pentru $p, q > 1$ cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a demonstra

$$\left(\left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p\right)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq \left(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_q\right),$$

revine la acelaşi raţionament ca în cazul normei $\|\cdot\|_2$ cu folosirea inegalităţii lui Hölder.

Astfel, rezultă toate concluziile. □

Propoziţia 1.5.2 *Are loc egalitatea:*

$$\left(\left(c_0, \|\cdot\|_\infty\right)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq \left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right),$$

prin izomorfismul izometric $T : \left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right) \to \left(\left(c_0, \|\cdot\|_\infty\right)^*, \|\cdot\|_*\right)$ *definit astfel:*

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

unde $x = (x_n)_{n \in \mathbb{P}} \in \ell^1$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{P}} \in c_0$.

Demonstraţie Fie T operatorul din enunţ. Arătăm că:

1. T este bine definit;
2. T este liniar;
3. T este surjectiv;
4. $\|Tx\|_* = \|x\|_1$ pentru orice $x \in \ell^1$.

Aceste proprietăţi demonstrează izomorfismul celor două spaţii.

1. Fie $x \in \ell^1$, ca mai sus. Trebuie să arătăm că $Tx \in (c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$ adică $Tx : (c_0, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ este bine definită, liniară şi continuă. Cum orice şir $y \in c_0$ este mărginit, absoluta convergenţă a seriei

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

rezultă dintr-un criteriu de comparaţie. Deci Tx este corect definit. Liniaritatea lui Tx este evidentă. Apoi, pentru orice $y \in c_0$

$$|T(x)(y)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \sup\{|y_k| \mid k \in \mathbb{P}\} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|y\|_\infty \|x\|_1 .$$

Deci Tx este continuă şi, în plus, $\|Tx\|_* \le \|x\|_1$.

2. Liniaritatea lui T este uşor de verificat.

3. Fie $x^* \in (c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$. Considerăm vectorii unitari din c_0, $\{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$. Şirul $x = (x^*(e_n))_{n\in\mathbb{P}}$ este din ℓ^1 pentru că pentru orice $n \ge 1$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k| &= \sum_{k=1}^{n} |x^*(e_k)| = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(x^*(e_k)) \cdot x^*(e_k) = x^*\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(x^*(e_k)) \cdot e_k\right) \\ &\le \|x^*\|_* \left\|\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn}(x^*(e_k)) \cdot e_k\right\|_\infty \le \|x^*\|_* .\end{aligned}$$

Astfel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \le \|x^*\|_* ,$$

deci $x \in \ell^1$.

Acum verificăm că $Tx = x^*$. Pentru orice $y \in c_0$

$$\begin{aligned}T(x)(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x^*(e_k)\, y_k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} x^*(e_k)\, y_k \\ &= \lim_n \sum_{k=1}^{n} x^*(y_k e_k) = \lim_n x^*\left(\sum_{k=1}^{n} y_k e_k\right)\end{aligned}$$

Dar

$$\sum_{k=1}^{n} y_k e_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y,$$

iar x^* este continuă pe $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, deci

$$T(x)(y) = x^*(y), \ \forall y \in c_0.$$

Aceasta probează că T este surjectiv.

4. Am văzut deja că $\|Tx\|_* \le \|x\|_1$ pentru orice $x \in \ell^1$.

Fie $x \in \ell^1$. Avem, pentru $n \in \mathbb{P}$,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sgn} x_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

unde

$$y_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} x_k, \ k \in \overline{1,n} \\ 0, \ k \notin \overline{1,n}. \end{cases}$$

Este clar că $y = (y_k) \in c_0$ şi $\|y\|_\infty \le 1$. Deci

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| = T(x)(y) \le \|Tx\|_*, \ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Obţinem

$$\|x\|_1 \le \|Tx\|_*.$$

Astfel, toate afirmaţiile sunt probate. □

Propoziţia 1.5.3 *Are loc egalitatea:*

$$\left((c, \|\cdot\|_\infty)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq \left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)$$

prin izomorfismul izometric $T : \ell^1 \to c^*$

$$T(x)(y) = x_0 \lim y_n + \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

unde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ *şi* $y = (y_n)_{n\in\mathbb{P}} \in c$.

Demonstraţie Se arată toate proprietăţile necesare pentru operatorul T, după modelul propoziţiei precedente. □

Propoziţia 1.5.4 *Are loc egalitatea*

$$\left(\left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq (m, \|\cdot\|_\infty),$$

prin izomorfismul izometric $T : (m, \|\cdot\|_\infty) \to \left(\left(\ell^1, \|\cdot\|_1\right)^*, \|\cdot\|_*\right)$ *definit astfel:*

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

unde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in m$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^1$.

Demonstraţie Parcurgem cele patru etape ca în cazul Propoziţiei 1.5.2. Calculele şi argumentele sunt asemănătoare. $\square$

Propoziţia 1.5.5 *Pentru $p > 1$ are loc egalitatea:*

$$\left(\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq \left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right),$$

unde $q = \frac{p}{p-1}$, prin izomorfismul izometric $T : \left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right) \to \left(\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^*, \|\cdot\|_*\right)$ definit astfel:

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

unde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^q$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^p$.

Demonstraţie Parcurgem cele patru etape ca în cazul Problemei 1.5.2. Calculele şi argumentele sunt asemănătoare, fiind folosită inegalitatea lui Hölder. Prezentăm unele detalii.

Cum pentru $x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^q$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^p$ avem

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_n y_n| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

obţinem că seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

este absolut convergentă, deci Tx e corect definită. În plus

$$\|Tx\|_* \le \|x\|_q, \ \forall x \in \ell^q.$$

Liniaritatea este simplă şi demonstrăm acum surjectivitatea. Fie $x^* \in \left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^*$. Considerăm vectorii unitari care sunt din ℓ^p şi construim şirul $x = (x^*(e_n))_{n\in\mathbb{P}}$. Trebuie să arătăm că $x \in \ell^q$. Dacă toate componentele sale sunt nule acest lucru este evident. Altfel, fie $n \in \mathbb{P}$ astfel încât cel puţin un termen de rang inferior este nenul. Avem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q &= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{q-1} |x_k| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{q-1} \operatorname{sgn}(x_k) \cdot x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k|^{q-1} \operatorname{sgn}(x_k) \cdot x^*(e_k) = x^*\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{q-1} \operatorname{sgn}(x_k) \cdot e_k\right) \\
&\le \|x^*\|_* \left\|\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{q-1} \operatorname{sgn}(x_k) \cdot e_k\right\|_p = \|x^*\|_* \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{(q-1)p} |\operatorname{sgn}(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x^*\|_* \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q |\operatorname{sgn}(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|x^*\|_* \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

de unde se obţine

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\|x^*\|_*.$$

Deci $x\in\ell^q$. Surjectivitatea lui T rezultă acum ca la Problema 1.5.2.

Mai rămâne să probăm că

$$\|Tx\|_*\geq\|x\|_q,\ \forall x\in\ell^q.$$

Dacă $x=0$ este evident. Altfel, fie $n\in\mathbb{P}$ astfel încât cel puţin un termen de rang inferior este nenul. Definim şirul y^n prin

$$y^n=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^{q-2}x_ke_k\right).$$

Avem

$$\begin{aligned}\|y^n\|_p&=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^{(q-2)p}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}=1\end{aligned}$$

şi

$$T(x)(y^n)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^{q-2}x_kx_k\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De aici deducem că

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\|Tx\|_*.$$

Pentru $n\to\infty$ obţinem concluzia dorită. □

1.6 Separabilitate

Propoziţia 1.6.1 *Fie X spaţiu liniar normat şi $A\subset X$ numărabilă astfel încât $\overline{\operatorname{span}A}=X$. Atunci X este separabil.*

Demonstraţie. Aşa cum se ştie,

$$\operatorname{span}A=\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_ka_k\mid n\in\mathbb{P},\alpha_k\in\mathbb{R},a_k\in A,\ \forall k\in\overline{1,n}\right\}.$$

Considerăm mulţimea

$$\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}A=\left\{\sum_{k=1}^{n}q_ka_k\mid n\in\mathbb{P},q_k\in\mathbb{Q},a_k\in A,\ \forall k\in\overline{1,n}\right\}.$$

Această mulţime este numărabilă pentru că poate fi scrisă ca

$$\bigcup_{n\in\mathbb{P}}\left\{\sum_{k=1}^{n} q_k a_k \mid q_k \in \mathbb{Q}, a_k \in A,\ \forall k \in \overline{1,n}\right\},$$

fiecare dintre mulţimile

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} q_k a_k \mid q_k \in \mathbb{Q}, a_k \in A,\ \forall k \in \overline{1,n}\right\}$$

fiind numărabilă (are cardinalul mai mic sau egal decât cel al mulţimii $\mathbb{Q}^n \times A^n$).

Arătăm că $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ este densă. Fie $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Din ipoteză, există $y \in \operatorname{span} A$ astfel încât $\|x - y\| < 2^{-1}\varepsilon$. Prin definiţia lui $\operatorname{span} A$, există $n \in \mathbb{P}$ şi $\alpha_k \in \mathbb{R}, a_k \in A$, cu $k \in \overline{1,n}$ astfel încât

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k.$$

Cum $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$, pentru orice $k \in \overline{1,n}$, există $q_k \in \mathbb{Q}$ astfel încât $|\alpha_k - q_k| < (2n\|a_k\| + 1)^{-1}\varepsilon$. Atunci

$$\begin{aligned}\left\|x - \sum_{k=1}^{n} q_k a_k\right\| &\leq \|x - y\| + \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k - \sum_{k=1}^{n} q_k a_k\right\| \\ &< 2^{-1}\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - q_k|\,\|a_k\| \\ &< 2^{-1}\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Deci $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ este densă în X. □

Exemplul 1.6.2 Următoarele spaţii sunt separabile: $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ cu $p \in [1,\infty)$, $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Pentru a demonstra separabilitatea spaţiului $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$, reamintim că şirurile $e_1 = (1,0,0,..)$, $e_2 = (0,1,0,...)$, ... formează o bază numărabilă în c_{00}. Deci $c_{00} = \operatorname{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$. De asemenea, ştim că

$$\|\cdot\|_\infty - \overline{c_{00}} = c_0$$

şi conform rezultatului teoretic, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ este separabil.

La fel, se constată că

$$\|\cdot\|_p - \overline{c_{00}} = \ell^p,\ \forall p \in [1,\infty),$$

pentru că, $x = (x_k)_{k\in\mathbb{P}} \in \ell^p$ şi orice $n \geq 1$,

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|_p^p = \sum_{k>n} |x_k|^p \to 0.$$

Separabilitatea lui $\left(C\left([0,1]\right),\|\cdot\|_{\infty}\right)$ se obţine din acelaşi rezultat teoretic, ţinând cont de faptul că

$$\operatorname{span}\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

este dens (din Teorema lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcţiilor continue prin polinoame).

Observaţia 1.6.3 *Se poate arăta similar că pentru $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ pe care considerăm urma măsurii Lebesgue, spaţiul $L^p(\Omega)$ este separabil pentru $p \in [1,\infty)$.*

Capitolul 2

Separarea mulţimilor convexe

Convexitatea joacă un rol fundamental în cadrul rezultalelor din acest curs. Chiar dacă rolul convexităţii va fi din ce în ce mai puţin vizibil la nivel imediat în capitolele următoare, de fapt, remanent, acest concept va fi mereu prezent prin intermediul rezultatelor ce sunt prezentate în acest capitol.

2.1 Mulţimi convexe

Reamintim definiţia mulţimii convexe.

Definiţia 2.1.1 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. O mulţime $A \subset X$ se numeşte convexă dacă pentru orice $x, y \in A$, $[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid \alpha \in [0,1]\} \subset A$.*

Cu alte cuvinte, o mulţime nevidă A este convexă dacă şi numai dacă odată cu două puncte a_1, a_2 conţine întreg segmentul $[a_1, a_2]$. Se mai observă că în definiţia aceasta este suficient să luăm $\alpha \in (0,1)$. Convenim să considerăm mulţimea vidă ca fiind convexă.

Prin inducţie se arată imediat că $A \neq \emptyset$ este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{P}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, are loc

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in A.$$

O sumă cum este cea de mai sus se numeşte combinaţie convexă a elementelor $(x_i)_{i \in \overline{1,n}}$.

Observaţia 2.1.2 *(i) Este evident că orice intersecţie de mulţimi convexe este convexă, iar o reuniune de mulţimi convexe nu este, în general, convexă.*

(ii) Cele mai importante exemple de mulţimi convexe sunt: întregul spaţiu, subspaţiile liniare, bilele (închise şi deschise).

Fie $A \subset X$ o mulţime nevidă. Se numeşte înfăşurătoarea convexă a mulţimii A, mulţimea

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid n \in \mathbb{P},\ (\alpha_i)_{i \in \overline{1,n}} \subset [0, \infty),\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ (x_i)_{i \in \overline{1,n}} \subset A \right\}.$$

Este uşor de arătat că înfăşurătoarea convexă a lui A este mulţime convexă, conţine mulţimea A şi este cea mai mică mulţime (în sensul incluziunii) cu aceste proprietăţi.

Cum bilele sunt mulţimi convexe şi sunt translaţii ale bilelor centrate în 0, începem prin a preciza câteva proprietăţi ale vecinătăţilor lui 0 într-un spaţiu liniar normat.

Lema 2.1.3 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi V o vecinătate a originii. Atunci:*
(i) există o vecinătate U a originii astfel încât $U + U \subset V$;
(ii) pentru orice scalar $\alpha > 0$ există o vecinătate U a originii astfel încât $\alpha U \subset V$;
(iii) pentru orice $x \in X$, există $\alpha > 0$ astfel încât pentru orice $\beta \in [0, \alpha]$, $\beta x \in V$; în particular, V este absorbantă.

Demonstraţie (i) Aşa cum am văzut (şi cum se poate uşor demonstra), aplicaţia $u : X \times X \to X$,

$$u(x, y) = x + y$$

este continuă. Scriind continuitatea în $(0, 0)$ a acestei funcţii deducem că pentru vecinătatea V există vecinătatea U astfel încât $U + U \subset V$.
(ii) Aplicaţia $v : \mathbb{R} \times X \to X$ dată prin

$$v(\alpha, x) = \alpha x$$

este continuă. Fie $\alpha > 0$ fixat. Cum $\alpha \cdot 0 = 0$, pentru V există o vecinătate U a originii şi un număr $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $\beta \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ şi orice $u \in U$

$$\beta u \in V.$$

În particular, $\alpha U \subset V$.
(iii) Cum V este vecinătate a originii, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $D(0, \varepsilon) \subset V$. Fie $x \in X$. Dacă $x = 0$, proprietatea de demonstrat este evidentă. Luăm $x \neq 0$. Atunci

$$\frac{\varepsilon}{\|x\|} x \in D(0, \varepsilon).$$

În plus, cum $D(0, \varepsilon)$ este convexă şi conţine 0,

$$\left[0, \frac{\varepsilon}{\|x\|}\right] x \subset D(0, \varepsilon) \subset V.$$

Lema este complet demonstrată. □

Observaţia 2.1.4 *Bineînţeles, lema de mai sus se poate demonstra folosind bile.*

Prezentăm în continuare unele proprietăţi topologice ale mulţimilor convexe.

Teorema 2.1.5 *Fie* $C \subset (X, \|\cdot\|)$ *o mulţime convexă. Atunci:*

(i) $\operatorname{cl} C$ *este convexă;*

(ii) dacă $x \in \operatorname{int} C$ *şi* $y \in \operatorname{cl} C$, *atunci* $[x, y) \subset \operatorname{int} C$;

(iii) $\operatorname{int} C$ *este convexă;*

(iv) dacă $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, *atunci* $\operatorname{cl} C = \operatorname{cl}(\operatorname{int} C)$ *şi* $\operatorname{int} C = \operatorname{int}(\operatorname{cl} C)$.

Demonstraţie (i) Fie $x, y \in \operatorname{cl} C$ şi $\alpha \in (0,1)$. Mai mult, fie V o vecinătate a lui $0 \in X$. Conform Lemei 2.1.3, există o vecinătate U a lui 0 astfel încât $\alpha U + (1-\alpha)U \subset V$. Cum $x, y \in \operatorname{cl} C$, există $x_U, y_U \in C$ astfel încât $x_U \in (x+U) \cap C$ şi $y_U \in (y+U) \cap C$. În consecinţă, folosind convexitatea lui C, avem

$$\begin{aligned} C \ni \alpha x_U + (1-\alpha) y_U &\in \alpha(x+U) + (1-\alpha)(y+U) \\ &= \alpha x + (1-\alpha)y + \alpha U + (1-\alpha)U \\ &\subset \alpha x + (1-\alpha)y + V, \end{aligned}$$

deci $C \cap (\alpha x + (1-\alpha)y + V) \neq \emptyset$. Cum V este o vecinătate arbitrară a lui 0, aceasta arată că $\alpha x + (1-\alpha)y \in \operatorname{cl} C$.

(ii) Fie $\alpha \in (0,1)$. Este suficient să arătăm că $\alpha x + (1-\alpha)y \in \operatorname{int} C$. Cum $x \in \operatorname{int} C$, există o vecinătate V a lui 0 astfel încât $x + V + V \subset C$. Pe de altă parte, $y \in \operatorname{cl} C$ implică

$$C \cap \left(y - \frac{\alpha}{1-\alpha} V \right) \neq \emptyset,$$

deci y poate fi scris ca $c + \alpha(1-\alpha)^{-1} v$, cu $c \in C$ şi $v \in V$. Obţinem

$$\begin{aligned} \alpha x + (1-\alpha)y + \alpha V &= \alpha x + (1-\alpha)c + \alpha v + \alpha V \\ &= (1-\alpha)c + \alpha(x + v + V) \\ &\subset (1-\alpha)c + \alpha C \subset C. \end{aligned}$$

Cum αV este vecinătate a originii, concluzionăm că $\alpha x + (1-\alpha)y \in \operatorname{int} C$.

(iii) Dacă $x, y \in \operatorname{int} C$, atunci implicaţia de mai sus înseamnă că $[x, y] \subset \operatorname{int} C$, deci $\operatorname{int} C$ este mulţime convexă.

(iv) Incluziunea $\operatorname{cl}(\operatorname{int} C) \subset \operatorname{cl} C$ este evidentă. Fie $x \in \operatorname{cl} C$. Din (ii), pentru orice $y \in \operatorname{int} C$, $(x, y] \subset \operatorname{int} C$, ceea ce înseamnă că ne putem apropia de x cu puncte din $\operatorname{int} C$, deci $x \in \operatorname{cl}(\operatorname{int} C)$.

Pentru partea a doua, din nou o incluziune este evidentă: $\operatorname{int} C \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl} C)$.

Fie $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl} C)$, ceea ce înseamnă că există o vecinătate V a lui 0 astfel încât $x + V \subset \operatorname{cl} C$, deci, din nou din (ii), pentru orice $y \in \operatorname{int} C$, $\alpha \in (0,1)$ şi $v \in V$,

$$\alpha(x+v) + (1-\alpha)y \in \operatorname{int} C.$$

Dar V este absorbantă, deci pentru α suficient de aproape de 1,

$$\overline{v} := \frac{(1-\alpha)(x-y)}{\alpha} \in V$$

şi pentru un astfel de α,

$$\begin{aligned} x &= \alpha \left(x + \frac{(1-\alpha)(x-y)}{\alpha} \right) + (1-\alpha)y \\ &= \alpha(x + \overline{v}) + (1-\alpha)y \in \operatorname{int} C. \end{aligned}$$

Demonstraţia este completă. $\square$

2.2 Separarea prin hiperplane a mulţimilor convexe

Discutăm o a trei formă a Teoremei Hahn-Banach şi prezentăm unele consecinţe ale acesteia.

Definiţia 2.2.1 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat,* $f : X \to \mathbb{R}$ *liniară (nu neaparat continuă), neidentic nulă şi* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Se numeşte hiperplan o mulţime de forma*

$$H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}.$$

Vom mai nota această mulţime prin $H_{f,\alpha}$.

Propoziţia 2.2.2 *Cu notaţiile şi în cadrul de mai sus, hiperplanul* $H_{f,\alpha}$ *este închis dacă şi numai dacă* f *este continuă.*

Demonstraţie O implicaţie este evidentă: dacă f este continuă, cum $H_{f,\alpha} = f^{-1}(\{\alpha\})$, deducem că $H_{f,\alpha}$ este mulţime închisă.

Presupunem acum că $H_{f,\alpha}$ este închis, adică $X \backslash H_{f,\alpha}$ este mulţime deschisă. Posibilitatea $X \backslash H_{f,\alpha} = \emptyset$ este exclusă de faptul că $f \neq 0$. Aşadar, $X \backslash H_{f,\alpha} \neq \emptyset$. Fie $x_0 \in X \backslash H_{f,\alpha}$, deci $f(x_0) \neq \alpha$. Fără a restrânge generalitatea presupunem că $f(x_0) < \alpha$. Din ipoteză, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(x_0, \varepsilon) \subset X \backslash H_{f,\alpha}$.

Arătăm că $f(x) < \alpha$ pentru orice $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Contrar, există $x_1 \in B(x_0, \varepsilon)$ astfel încât $f(x_1) > \alpha$. Cum $B(x_0, \varepsilon)$ este convexă, $[x_0, x_1] \subset B(x_0, \varepsilon)$. Dar, pentru

$$\lambda = \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)} \in (0, 1)$$

avem

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_0) &= (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_0) \\ &= \frac{\alpha - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1) + \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_0) = \alpha, \end{aligned}$$

ceea ce reprezintă o contradicţie.

Deci, pentru orice $x \in B(x_0, \varepsilon)$,

$$f(x) < \alpha.$$

Această inegalitate înseamnă mărginirea superioară a lui f pe o vecinătate a lui x_0. Obţinem, conform Problemei 15, că f este funcţională liniară continuă. □

Definiţia 2.2.3 *Fie* $A, B \subset (X, \|\cdot\|)$ *două mulţimi nevide.*

(i) Spunem că hiperplanul $H_{f,\alpha}$ *separă mulţimile* A *şi* B *dacă* $f(a) \leq \alpha$ *pentru orice* $a \in A$ *şi* $f(b) \geq \alpha$ *pentru orice* $b \in B$. *Aceasta este echivalent cu*

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{x \in B} f(x).$$

(ii) Spunem că hiperplanul $H_{f,\alpha}$ *separă strict mulţimile* A *şi* B *dacă există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât* $f(a) \leq \alpha$ *pentru orice* $a \in A$ *şi* $f(b) \geq \alpha + \varepsilon$ *pentru orice* $b \in B$. *Aceasta este echivalent cu*

$$\sup_{x \in A} f(x) < \inf_{x \in B} f(x).$$

Observaţia 2.2.4 *Hiperplanul* $H_{f,\alpha}$ *separă (strict) mulţimile* A *şi* B *dacă şi numai dacă separă (strict) mulţimile* $\operatorname{conv} A$ *şi* $\operatorname{conv} B$, *deci problema separării a două mulţimi se reduce la separarea mulţimilor convexe.*

Lema 2.2.5 *Fie* $C \subset (X, \|\cdot\|)$ *o mulţime convexă şi deschisă ce conţine vectorul nul. Definim* $p : X \to \mathbb{R}$,

$$p(x) = \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \alpha^{-1} x \in C \right\}.$$

Atunci aplicaţia p *(numită funcţionala lui Minkowski asociată lui* C*) este bine definită şi are următoarele proprietăţi:*

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, *pentru orice* $\lambda \geq 0$ *şi orice* $x \in X$;

(ii) există $M > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in X$, $0 \leq p(x) \leq M \|x\|$;

(iii) $C = \{x \in X \mid p(x) < 1\}$;

(iv) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, *pentru orice* $x, y \in X$.

Demonstraţie Cum $0 \in \operatorname{int} C$, mulţimea

$$\left\{ \alpha > 0 \mid \alpha^{-1} x \in C \right\}$$

este nevidă, pentru orice $x \in X$. Deci p este bine definită.

(i) Relaţia $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, pentru orice $\lambda \geq 0$ şi $x \in X$ este evidentă (în particular, $p(0) = 0$).

(ii) Cum $0 \in \operatorname{int} C$, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $D(0, \varepsilon) \subset C$. Fie $x \in X \setminus \{0\}$. Atunci

$$\frac{\varepsilon}{\|x\|} x \in C,$$

deci

$$p(x) \leq \varepsilon^{-1} \|x\|,$$

ceea ce demonstrează punctul (ii).

(iii) Arătăm dubla incluziune. Fie $x \in C$. Cum C este deschisă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(1 + \varepsilon) x \in C$. Deci, $p(x) \leq (1 + \varepsilon)^{-1} < 1$.

Fie acum $x \in X$ astfel încât $p(x) < 1$. Din teorema de caracterizare a marginii inferioare, există $\alpha \in (0, 1)$ astfel încât $\alpha^{-1} x \in C$. Dar $x \in [0, \alpha^{-1} x]$ şi C este convexă. Prin urmare, $x \in C$.

(iv) Fie $x, y \in X$. Tot din teorema de caracterizare a marginii inferioare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\alpha \in (0, p(x) + \varepsilon)$, $\beta \in (0, p(y) + \varepsilon)$ astfel încât $\alpha^{-1} x \in C$, $\beta^{-1} y \in C$. Atunci, pe baza convexităţii lui C,

$$\frac{1}{\alpha + \beta}(x + y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \alpha^{-1} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \beta^{-1} y \in C,$$

deci

$$p(x + y) \leq \alpha + \beta < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$

Facem $\varepsilon \to 0$ şi obţinem concluzia. $\square$

Prezentăm acum un prim rezultat de separare.

Teorema 2.2.6 *Fie* $C \subset (X, \|\cdot\|)$ *o mulţime convexă cu interior nevid şi* $\overline{x} \in X \setminus \operatorname{int} C$. *Atunci există* $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ *astfel încât* $x^*(x) \leq x^*(\overline{x})$ *pentru orice* $x \in C$. *În particular, hiperplanul* $H_{x^*, x^*(\overline{x})}$ *separă mulţimile convexe* C *şi* $\{\overline{x}\}$.

Demonstraţie Efectuând eventual o translaţie putem presupune fără a restrânge generalitatea că $0 \in \operatorname{int} C$. Notăm cu p funcţionala Minkowski asociată lui $\operatorname{int} C$.

Considerăm subspaţiul liniar generat de $\overline{x}$, care este $Y = \mathbb{R}\overline{x}$, şi definim funcţionala liniară $g : Y \to \mathbb{R}$ prin $g(\alpha\overline{x}) = \alpha$. Dacă $\alpha \leq 0$, atunci este evident că $g(\alpha\overline{x}) \leq p(\alpha\overline{x})$. Dacă $\alpha > 0$, atunci $p(\alpha\overline{x}) = \alpha p(\overline{x}) \geq \alpha$ pentru că $\overline{x} \notin \operatorname{int} C$ (Lema 2.2.5, (iii)). Deci, pentru orice $y \in Y$, $g(y) \leq p(y)$. Cum p este subliniară (Lema 2.2.5), folosind Teorema Hahn-Banach, există o funcţie liniară f definită pe tot spaţiul care prelungeşte funcţia g şi care satisface inegalitatea $f(x) \leq p(x)$ pentru orice $x \in X$. Având în vedere inegalitatea din Lema 2.2.5 (ii), deducem că f este continuă. Evident, $f(\overline{x}) = 1$ şi pentru orice $x \in \operatorname{int} C$, $f(x) < 1$, deci are loc inegalitatea strictă $f(x) < f(\overline{x})$ pentru orice $x \in \operatorname{int} C$.

Dar, din Teorema 2.1.5 (iv), $C \subset \operatorname{cl} C = \operatorname{cl} \operatorname{int} C$, deci pentru orice $c \in C$ există un şir de elemente din $\operatorname{int} C$ cu limita c. Folosind inegalitatea de mai sus şi trecând la limită obţinem inegalitatea (nestrictă) dorită. □

Observaţia 2.2.7 *Aşa cum se poate observa din demonstraţie, dacă* C *este deschisă, atunci există* $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ *astfel încât* $x^*(x) < x^*(\overline{x})$ *pentru orice* $x \in C$.

Prezentăm acum principalele rezultate de separare a mulţimilor convexe.

Teorema 2.2.8 (Hahn-Banach, prima formă geometrică) *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat şi* $A, B \subset X$ *mulţimi convexe nevide astfel încât* $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ *şi* $\operatorname{int} A \cap B = \emptyset$. *Atunci există* $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $x^*(a) \leq \alpha \leq x^*(b)$ *pentru orice* $a \in A$ *şi* $b \in B$. *În particular, hiperplanul* $H_{x^*, \alpha}$ *separă mulţimile convexe* A *şi* B.

Demonstraţie Fie $C = \operatorname{int} A - B$. Este clar că C este convexă şi are interior nevid (este chiar deschisă). De asemenea, $0 \notin C$. Din teorema precedentă, există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ astfel încât $x^*(x) < x^*(0) = 0$ pentru orice $x \in C$. Deci

$$x^*(a) \leq x^*(b), \ \forall a \in \operatorname{int} A, \ \forall b \in B.$$

Pentru orice $b \in B$ fixat, folosim acelaşi argument ca în finalul demonstraţiei teoremei de separare a unui punct de o mulţime convexă pentru a deduce că

$$x^*(a) \leq x^*(b), \ \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

Evident, aceasta înseamnă că $\sup_{a \in A} x^*(a) \leq \inf_{b \in B} x^*(b)$ şi alegând α între cele două valori obţinem concluzia. □

Teorema 2.2.9 (Hahn-Banach, a doua formă geometrică) *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat şi* $A, B \subset X$ *mulţimi convexe nevide. Dacă* A *este închisă şi* B *este compactă iar* $A \cap B = \emptyset$, *atunci există* $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ *astfel încât* $\sup_{a \in A} x^*(a) < \inf_{b \in B} x^*(b)$. *În particular, pentru orice* α *între aceste valori, hiperplanul* $H_{x^*, \alpha}$ *separă strict mulţimile convexe* A *şi* B.

Demonstraţie Fie $C = B - A$. Folosind ipotezele, C este convexă şi închisă, iar $0 \notin C$. Prin urmare, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(0, \varepsilon) \cap C = \emptyset$. Putem aplica Teorema 2.2.8 acestor mulţimi: există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ astfel încât $x^*(x) \leq x^*(c)$ pentru orice $x \in B(0, \varepsilon)$ şi $c \in C$. Cum $B(0, \varepsilon) = \varepsilon B(0, 1)$, deducem că

$$\varepsilon x^*(x) \leq x^*(b - a), \ \forall x \in B(0, 1), \ \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

Deci

$$\varepsilon \|x^*\| \leq x^*(b - a), \ \forall a \in A, \ \forall b \in B,$$

adică

$$x^*(a) + \varepsilon \|x^*\| \leq x^*(b), \ \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

Deducem că

$$\sup_{a \in A} x^*(a) + \varepsilon \|x^*\| \leq \inf_{b \in B} x^*(b).$$

Cum $x^* \neq 0$, avem concluzia. □

Exemplul 2.2.10 În general, pe spaţii infinit dimensionale, ipoteza $A \cap B = \emptyset$ nu este suficientă pentru a separa mulţimile convexe A şi B. Considerăm exemplul următor. Fie $(e_n)_{n \in \mathbb{P}}$ elementele unitare din ℓ^2. Fie

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \mid n \in \mathbb{P}, \ a_k \in \mathbb{R}, \ k \in \overline{1, n}, \ a_n > 0 \right\} \subset \ell^2.$$

Fie $B = -A$. Atunci A, B sunt convexe, disjuncte şi pentru orice $x^* \in (\ell^2, \|\cdot\|_2)^* \setminus \{0\}$, $x^*(A) = x^*(B) = \mathbb{R}$. Mulţimile A şi B nu pot fi separate printr-un hiperplan.

Justificăm aceste afirmaţii. Faptul că A, B sunt convexe şi disjuncte este evident. Fie $x^* \in (\ell^2, \|\cdot\|_2)^* \setminus \{0\}$. Atunci există $k \in \mathbb{P}$ astfel încât $x^*(e_k) \neq 0$, pentru că în caz contrar x^* s-ar anula pe span $\{e_n \mid n \in \mathbb{P}\}$ care este densă $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$. Pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha e_k + e_{k+1} \in A$. Deci,

$$x^*(\alpha e_k + e_{k+1}) = \alpha x^*(e_k) + x^*(e_{k+1}) \in x^*(A), \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cum A este convexă şi x^* liniară, $x^*(A)$ este convexă în $\mathbb{R}$, adică este un interval. Cum $x^*(e_k) \neq 0$, din relaţia de mai sus obţinem că $x^*(A) = \mathbb{R}$. Acum este evident că $x^*(B) = -x^*(A) = \mathbb{R}$ şi astfel se obţine şi restul concluziei.

Este evident că A şi B au interior vid (de exemplu, $A \subset c_{00}$, deci $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} c_{00} = \emptyset$) şi nu sunt închise (de exemplu $(n^{-1}, 0, 0, ..., 0, ...) \in A$ pentru orice $n \in \mathbb{P}$ şi limita acestui şir este $0 \in \ell^2 \setminus A$).

Observaţia 2.2.11 *În cazul spaţiilor finit dimensionale, ipoteza $A \cap B = \emptyset$ este suficientă pentru a separa mulţimile convexe A şi B. A se vedea Problema 38.*

2.3 Consecinţe ale teoremelor de separare

Prezentăm acum unele consecinţe ale rezultatelor de separare de mai sus.

Corolarul 2.3.1 *Fie Y un subspaţiu liniar normat al spaţiului liniar normat $(X, \|\cdot\|)$. Subspaţiul Y nu este dens (adică $\operatorname{cl} Y \neq X$) dacă şi numai dacă există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ care se anulează pe Y.*

Demonstraţie Dacă $X \neq \operatorname{cl} Y$, există $\overline{x} \in X \setminus \operatorname{cl} Y$. Din Teorema 2.2.9, există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât hiperplanul $H_{x^*,\alpha}$ separă strict mulţimile $\{\overline{x}\}$ şi $\operatorname{cl} Y$. Deci, pentru orice $y \in Y$

$$x^*(y) < \alpha < x^*(\overline{x}).$$

Cum pentru orice $y \in Y$ şi orice număr real a, elementul ay se află în Y, deducem că $x^*(y) = 0$.

Invers, dacă există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ care se anulează pe Y, dacă Y ar fi dens, atunci, din continuitate, x^* se anulează peste tot, deci este funcţionala nulă, ceea ce reprezintă o contradicţie. □

Observaţia 2.3.2 *Aşadar, pentru a arăta că un subspaţiu liniar normat este dens într-un spaţiu liniar normat e suficient să arătăm că singura funcţională liniară şi continuă care se anulează pe acea mulţime este funcţionala nulă.*

Definiţia 2.3.3 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat, $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Definim mulţimile*

$$\begin{aligned} H^{\leq}_{x^*,\alpha} &= \{x \in X \mid x^*(x) \leq \alpha\} \\ H^{<}_{x^*,\alpha} &= \{x \in X \mid x^*(x) < \alpha\}, \end{aligned}$$

numite semispaţiu închis şi respectiv semispaţiu deschis. Analog se definesc $H^{\geq}_{x^*,\alpha}$ şi $H^{>}_{x^*,\alpha}$.

Corolarul 2.3.4 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi $C \subset X$ o submulţime convexă, închisă şi nevidă astfel încât $C \neq X$. Atunci C este intersecţia tuturor semispaţiilor închise care o conţin.*

Demonstraţie Cum există $x \in X \setminus C$ din Teorema 2.2.9 este clar că există măcar un semispaţiu închis ce conţine pe C. De asemenea, este evident că C este inclusă în intersecţia tuturor semispaţiilor închise care o conţin. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $\overline{x}$ care se află în respectiva intersecţie, dar nu se află în C. Aplicăm Teorema 2.2.9: există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât hiperplanul $H_{x^*,\alpha}$ separă strict mulţimile $\{\overline{x}\}$ şi C. Deci, pentru orice $c \in C$

$$x^*(c) < \alpha < x^*(\overline{x}).$$

Atunci $C \subset H^{\leq}_{x^*,\alpha}$, dar $\overline{x} \notin H^{\leq}_{x^*,\alpha}$, ceea ce reprezintă o contradicţie. □

Propoziţia 2.3.5 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. Dacă $(X^*, \|\cdot\|)$ e separabil, atunci $(X, \|\cdot\|)$ e separabil.*

Demonstraţie Fie $\{x_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$ o mulţime densă în X^*. Din definiţia normei operatoriale, pentru orice n există $x_n \in X$ astfel încât $\|x_n\| \leq 1$ şi $|x_n^*(x_n)| \geq 2^{-1} \|x_n^*\|$. Conform unui rezultat discutat anterior, este suficient să arătăm că $Y = \operatorname{span}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este densă în X. Folosim

Observaţia 2.3.2. Fie $x^* \in X^*$ astfel încât x^* se anulează pe Y. Fie $\varepsilon > 0$. Din densitatea lui $\{x_n^* \mid n \in \mathbb{N}\}$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\|x^* - x_n^*\| < \varepsilon$. Avem

$$\begin{aligned} \|x^*\| &\leq \|x^* - x_n^*\| + \|x_n^*\| \leq \varepsilon + 2\left|x_n^*\left(x_n\right)\right| \\ &\leq \varepsilon + 2\left|x_n^*\left(x_n\right) - x^*\left(x_n\right)\right| + 2\left|x^*\left(x_n\right)\right| \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Cum $\varepsilon > 0$ e arbitrar, deducem că $x^* = 0$, deci putem concluziona. □

Observaţia 2.3.6 *Reciproca propoziţiei de mai sus nu este adevărată. Conform Exemplului 1.6.2, ℓ^1 este separabil dar dualul său care se identifică cu $m = \ell^\infty$ nu este separabil.*

Capitolul 3

Principii ale Analizei funcţionale

Fiecare ramură majoră a matematicii are la bază unele rezultate fundamentale care individualizează respectiva ramură şi pe care se întemeiază toate dezvoltările ulterioare. Analiza funcţională nu face excepţie, ci, din contra, este una dintre ramurile pentru care aceste rezultate fundamentale, numite principii, sunt clar delimitate teoretic. Scopul acestui capitol este de a prezenta cele mai importante dintre aceste rezultate.

3.1 Rezultate auxiliare

Prezentăm câteva rezultate fundamentale pe care se vor baza demonstraţiile teoremelor principale ale acestui capitol.

Teorema 3.1.1 (Teorema de intersecţie, a lui Cantor) *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $(F_n)_{n\in\mathbb{P}}$ un şir de submulţimi închise şi nevide ale lui X astfel încât $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset ...$ şi $\operatorname{diam} F_n \to 0$. Atunci există $x \in X$ astfel încât*

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Demonstraţie Mai întâi, observăm că intersecţia mulţimilor (F_n) nu poate avea mai mult de un element pentru că în caz contrar diametrul tuturor mulţimilor ar fi mai mare sau egal decât o constantă strict pozitivă, lucru care nu se poate întâmpla din cauza condiţiei $\operatorname{diam} F_n \to 0$.

Arătăm acum că respectiva intersecţie este nevidă. Din fiecare mulţime F_n selectăm un element x_n, ceea ce putem face în baza faptului că mulţimile sunt nevide. Demonstrăm că şirul (x_n) astfel format este şir Cauchy.

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\operatorname{diam} F_k < \varepsilon$. Fie $m, n \geq k$. Din proprietatea de incluziune a mulţimilor, $x_n, x_m \in F_k$, deci $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} F_k < \varepsilon$. Deci (x_n) este şir fundamental, iar cum X este complet, există $x \in X$ astfel încât $x_n \to x$. Pe de altă parte, dacă fixăm $n \in \mathbb{N}$, atunci $x_m \in F_n$ pentru orice $m \geq n$. Cum F_n este închisă, $x \in F_n$. Deci $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ şi demonstraţia este încheiată. $\square$

Teorema 3.1.2 (Teorema lui Baire, prima formă) *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet şi* $(V_n)_{n\in\mathbb{P}}$ *un şir de submulţimi deschise şi dense ale lui* X. *Atunci* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ *este densă în* X.

Demonstraţie Pentru a obţine concluzia trebuie să arătăm că pentru orice $\overline{x}\in X$ şi orice $\varepsilon>0$

$$B(\overline{x},\varepsilon)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\neq\emptyset.$$

Este clar că dacă V este deschisă şi densă şi A este deschisă şi nevidă atunci există $z\in X$ şi $r>0$ astfel încât $D(z,r)\subset V\cap A$.

Aplicăm această observaţie mulţimilor V_1 şi $B(\overline{x},\varepsilon)$. Există $x_1\in X$ şi $r_1\in(0,1)$ astfel încât $D(x_1,r_1)\subset V_1\cap B(\overline{x},\varepsilon)$.

Continuăm cu acelaşi argument aplicat mulţimilor V_2 şi $B(x_1,r_1)$: există $x_2\in X$ şi $r_2\in(0,2^{-1})$ astfel încât $D(x_2,r_2)\subset V_2\cap B(x_1,r_1)$. Recurent, obţinem un şir $(x_n)\subset X$ şi un şir $(r_n)\subset(0,\infty)$ astfel încât

$$D(x_1,r_1)\supset D(x_2,r_2)\supset ...$$
$$\operatorname{diam} D(x_n,r_n)=2r_n\to 0.$$

Conform Teoremei de intersecţie, există $x\in X$ astfel încât

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D(x_n,r_n)=\{x\}.$$

Dar, $D(x_1,r_1)\subset B(\overline{x},\varepsilon)$, deci $x\in B(\overline{x},\varepsilon)$ şi $D(x_n,r_n)\subset V_n$ pentru orice $n\in\mathbb{P}$, deci $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} V_n$. Obţinem concluzia dorită. □

Teorema 3.1.3 (Teorema lui Baire, a doua formă) *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet şi* $(F_n)_{n\in\mathbb{P}}$ *un şir de submulţimi închise ale lui* X *astfel încât* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n=X$. *Atunci există* $k\in\mathbb{P}$ *astfel încât* $\operatorname{int} F_k\neq\emptyset$.

Demonstraţie Presupunem, prin reducere la absurd, că $\operatorname{int} F_n=\emptyset$ pentru orice $n\in\mathbb{P}$. Pentru toţi n considerăm $V_n=X\setminus F_n$ care sunt mulţimi deschise şi dense, ultima afirmaţie rezultând pe baza faptului că

$$\operatorname{cl} V_n=\operatorname{cl}(X\setminus F_n)=X\setminus\operatorname{int} F_n=X.$$

Cum $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n=X$, avem

$$\emptyset=X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}(X\setminus F_n)=\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n,$$

ceea ce contrazice prima formă a Teoremei lui Baire. □

Exemplul 3.1.4 Ipoteza de completitudine din Teorema lui Baire este esenţială. Pentru a proba acest lucru, considerăm spaţiul necomplet $\left(c_{00}, \|\cdot\|_p\right)$ despre care am văzut că este un subspaţiu liniar dens al lui $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$, unde $p \in (1, \infty)$. Considerăm, pentru orice $n \in \mathbb{P}$,

$$A_n = \left\{(x_1, ..., x_n, 0, 0, ...) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \overline{1, n}\right\}.$$

Aceste mulţimi sunt subspaţii finit dimensionale ale lui c_{00}, deci sunt închise. Pe de altă parte, interiorul lor este vid pentru că nu coincid cu tot spaţiul. Observăm că

$$c_{00} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Propoziţia 3.1.5 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach şi $V \subset X$ o mulţime convexă, absorbantă şi închisă. Atunci V este vecinătate a originii.*

Demonstraţie Cum V este absorbantă, conţine pe 0 şi avem

$$X = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha V.$$

Pe baza convexităţii însă, pentru orice $\alpha, \beta > 0$ cu $\alpha < \beta$,

$$\alpha V \subset \beta V$$

pentru că

$$\alpha v = \beta \left(\frac{\alpha}{\beta} v + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) 0\right) \in \beta V, \ \forall v \in V.$$

Astfel, deducem că

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{P}} nV.$$

Folosind a doua formă a Teoremei lui Baire, pentru că V este şi închisă, există $k \in \mathbb{P}$ astfel încât $\operatorname{int}(kV) \neq \emptyset$. Obţinem de aici că $\operatorname{int} V \neq \emptyset$, adică există $\overline{x} \in \operatorname{int} V$. Pentru elementul $-\overline{x}$ există $\delta > 0$ astfel încât $-\delta\overline{x} \in V$. Pe baza convexităţii lui V,

$$0 = \frac{1}{1+\delta}(-\delta\overline{x}) + \frac{\delta}{1+\delta}\overline{x} \in \operatorname{int} V.$$

Am obţinut că V este vecinătate a originii, deci concluzia. □

3.2 Rezultate principale

Prezentăm în continuare unul dintre principiile Analizei funcţionale.

Teorema 3.2.1 (Principiul mărginirii uniforme) *Fie $(X, \|\cdot\|)$ spaţiu Banach şi $(Y, \|\cdot\|)$ spaţiu liniar normat. Fie $(T_i)_{i \in I} \subset L(X, Y)$ o familie de operatori liniari continui indexată după o mulţime I arbitrară de indici. Presupunem că familia este punctual mărginită, adică pentru orice $x \in X$ există $M_x > 0$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $\|T_i x\| \leq M_x$. Atunci există $M > 0$ astfel încât pentru orice $i \in I$, $\|T_i\| \leq M$.*

Demonstraţie Pentru toţi $n \in \mathbb{P}$ considerăm mulţimea închisă

$$F_n = \{x \in X \mid \|T_i x\| \leq n, \ \forall i \in I\}.$$

Din ipoteza de mărginire punctuală,

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

şi cum X este complet, din Teorema lui Baire (Teorema 3.1.3) obţinem că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\operatorname{int} F_k \neq \emptyset$. Prin urmare, există $\overline{x} \in X$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $D(\overline{x}, \varepsilon) \subset F_k$, adică pentru orice $z \in D(\overline{x}, \varepsilon)$ şi orice $i \in I$, $\|T_i z\| \leq k$. Pentru orice $x \in D(0, \varepsilon)$ putem scrie

$$x = \frac{1}{2}(\overline{x} + x) - \frac{1}{2}(\overline{x} - x)$$

şi cum ambii vectori sunt în $D(\overline{x}, \varepsilon)$,

$$\|T_i x\| \leq \frac{1}{2}\|T_i(\overline{x} + x)\| + \frac{1}{2}\|T_i(\overline{x} - x)\| \leq k, \ \forall i \in I.$$

Fie $x \in X \setminus \{0\}$. Putem scrie

$$\|T_i x\| = \frac{\|x\|}{\varepsilon}\left\|T_i\left(\frac{\varepsilon x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{k}{\varepsilon}\|x\|, \ \forall i \in I.$$

Pe baza definiţiei normei operatoriale,

$$\|T_i\| \leq \frac{k}{\varepsilon}, \ \forall i \in I,$$

adică exact concluzia. □

Observaţia 3.2.2 *Ipoteza de mărginire punctuală este echivalentă cu mărginirea punctuală pe D_X, iar concluzia rezultatului de mai sus este echivalentă cu oricare dintre următoarele afirmaţii:*

- există $M > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D_X$ şi orice $i \in I$, $\|T_i x\| \leq M$ (adică mărginirea uniformă pe D_X);

- există $M > 0$ astfel încât $D_X \subset \{x \in X \mid \|T_i x\| \leq M, \ \forall i \in I\}$.

Exemplul 3.2.3 Completitudinea lui X este esenţială. De exemplu, pentru orice $n \in \mathbb{P}$ definim $T_n : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ prin

$$T_n((x_1, x_2, ...)) = n x_n.$$

Aceşti operatori sunt mărginiţi şi $\|T_n\| = n$ pentru orice n. Pe de altă parte, pentru orice $x \in c_{00}$, cum există $m_x \in \mathbb{P}$ astfel încât $x_k = 0$ pentru orice $k > m_x$,

$$|T_n x| \leq m_x \|x\|_\infty, \ \forall n,$$

deci familia de operatori (T_n) este punctual mărginită.

Corolarul 3.2.4 *Fie X spaţiu Banach şi Y spaţiu liniar normat. Fie $T_n : X \to Y$ $(n \in \mathbb{N})$ un şir de operatori liniari continui convergent punctual, i.e., pentru orice $x \in X$, există $Tx \in Y$ astfel încât* $\lim T_n x = Tx$. *Atunci T este operator liniar continuu.*

Demonstraţie Din convergenţa punctuală a şirului (T_n), deducem mărginirea sa punctuală. Deci, conform Principiului mărginirii uniforme (Teorema 3.2.1), există $M > 0$ astfel încât

$$\|T_n\| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se verifică uşor că T este liniar, iar relaţia de mai sus ne permite să scriem

$$\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq M \|x\|, \ \forall x \in X.$$

Aşadar, T este continuu. □

Exemplul 3.2.5 Pentru a arăta că ipoteza de completitudine pentru X este esenţială în corolarul de mai sus, considerăm şirul de operatori $T_n : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$,

$$T_n((x_1, x_2, ...)) = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Toţi operatorii T_n sunt mărginiţi. Acest şir converge punctual la operatorul liniar $T : c_{00} \to \mathbb{R}$ dat prin

$$T((x_1, x_2, ...)) = \sum_{k=1}^{\infty} x_n.$$

Dar T nu este operator mărginit.

În continuare discutăm câteva aspecte de bază privind teoria seriilor de elemente dintr-un spaţiu normat.

Definiţia 3.2.6 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi $(x_n)_{n\in\mathbb{P}}$ un şir de elemente din X. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se defineşte, ca şi în cazul numeric, ca fiind cuplul format de şirul termenului general (x_n) şi de şirul sumelor parţiale (s_n). Spunem că seria este convergentă dacă şirul sumelor parţiale este convergent în X.*

Ca de obicei, limita şirului sumelor parţiale, dacă există, se notează tot cu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Evident, în acest caz

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{k} x_n \right\| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Definiţia 3.2.7 *Spunem că o serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă dacă seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ este convergentă.*

Are loc următorul rezultat fundamental.

Propoziţia 3.2.8 *Dacă $(X, \|\cdot\|)$ este spaţiu Banach. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este o serie absolut convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă şi*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| .$$

Demonstraţie Fie (s_n) şirul sumelor parţiale ale seriei absolut convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Notăm cu (t_n) şirul sumelor parţiale ale seriei normelor. Pentru orice $n, m \in \mathbb{P}$ cu $n > m$ avem

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = t_n - t_m.$$

Cum (t_n) e şir Cauchy de numere reale, deducem că (s_n) e de asemenea şir Cauchy în X. Cum X este spaţiu Banach, (s_n) este convergent, deci seria iniţială este convergentă. Inegalitatea finală rezultă prin compararea normelor termenilor lui (s_n) cu termenii lui (t_n). $\square$

Prezentăm acum alte două dintre principiile Analizei funcţionale.

Teorema 3.2.9 (Principiul aplicaţiilor deschise) *Fie $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ spaţii Banach şi $T \in L(X, Y)$. Dacă T este surjectiv, atunci T este deschis, adică duce mulţimi deschise în mulţimi deschise.*

Demonstraţie Observăm că este suficient să arătăm că există $\nu > 0$ astfel încât

$$B_Y(0, \nu) \subset T(B_X(0, 1)). \tag{3.1}$$

Într-adevăr, dacă această incluziune este adevărată atunci pentru orice mulţime deschisă $V \subset X$ şi pentru orice $\overline{y} \in T(V)$, există $\overline{x} \in V$ astfel încât $T\overline{x} = \overline{y}$ şi există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(\overline{x}, \varepsilon) \subset V$, deci

$$T(V) \supset T(B(\overline{x}, \varepsilon)) = T\overline{x} + \varepsilon T B_X(0, 1) \supset \overline{y} + \varepsilon B_Y(0, \nu) = B_Y(\overline{y}, \nu\varepsilon),$$

ceea ce arată că $T(V)$ este deschisă.

Aşadar, demonstrăm incluziunea (3.1) evidenţiată mai sus. Să considerăm mai întâi mulţimea închisă $\overline{T(D_X)}$. Este destul de simplu de verificat că aceasta este convexă (pe baza liniarităţii lui T) şi absorbantă (pe baza surjectivităţii lui T). Cum Y este spaţiu Banach, obţinem că $\overline{T(D_X)}$ este vecinătate a originii, deci există $\rho > 0$ astfel încât $D(0, \rho) \subset \overline{T(D_X)}$.

Fie $y \in Y \setminus \{0\}$ şi $\delta > 0$. Cum $\rho \|y\|^{-1} y \in D(0, \rho) \subset \overline{T(D_X)}$, există $u \in D_X$ astfel încât

$$\left\| \rho \|y\|^{-1} y - Tu \right\| < \rho \|y\|^{-1} \delta,$$

adică punând $z = \|y\| \rho^{-1} u$,

$$\|y - Tz\| < \delta.$$

Deci, pentru orice $y \in Y$ şi $\delta > 0$ există $z \in X$ astfel încât

$$\|z\| \leq \frac{1}{\rho} \|y\| \text{ şi } \|y - Tz\| < \delta.$$

Putem acum să arătăm (3.1) pentru $\nu = \rho$. Faptul că $0_Y \in T(B_X(0,1))$ este evident. Fie aşadar $y \in B(0,\rho) \setminus \{0_Y\}$. Fixăm $\delta \in (0, 2^{-1}(\rho - \|y\|))$. Din cele discutate, există $x_0 \in X$ astfel încât

$$\begin{aligned} \|x_0\| &\leq \frac{1}{\rho}\|y\| \\ \|y - Tx_0\| &< \delta. \end{aligned}$$

Aplicăm acelaşi argument acum pentru $y - Tx_0$ şi $2^{-1}\delta$: există $x_1 \in X$ astfel încât

$$\begin{aligned} \|x_1\| &\leq \frac{1}{\rho}\|y - Tx_0\| \leq \frac{\delta}{\rho} \\ \|y - Tx_0 - Tx_1\| &< 2^{-1}\delta. \end{aligned}$$

Continuăm: aplicăm acelaşi argument acum pentru $y - Tx_0 - Tx_1$ şi $2^{-2}\delta$: există $x_2 \in X$ astfel încât

$$\begin{aligned} \|x_2\| &\leq \frac{1}{\rho}\|y - Tx_0 - Tx_1\| \leq \frac{\delta}{2\rho} \\ \|y - Tx_0 - Tx_1 - Tx_2\| &< 2^{-2}\delta. \end{aligned}$$

Dacă am construit în acest fel termenii $x_1, ..., x_{n-1}$ cu $n \in \mathbb{P}$, aplicând aceeaşi tehnică găsim $x_n \in X$ astfel încât

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq \frac{1}{\rho}\|y - Tx_0 - Tx_1 - ... - Tx_{n-1}\| \leq \frac{\delta}{2^{n-1}\rho} \\ \|y - Tx_0 - Tx_1 - Tx_2.. - Tx_{n-1} - Tx_n\| &< 2^{-n}\delta. \end{aligned}$$

Astfel, pe baza inducţiei matematice, am construit un şir (x_n) pentru care seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă pentru că, pe baza alegerii lui δ,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\| \leq \frac{1}{\rho}\|y\| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^{n-1}\rho} = \frac{\|y\| + 2\delta}{\rho} < 1.$$

Cum X este spaţiu Banach, seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă la un element $x \in X$. Dacă notăm cu (s_n) şirul sumelor parţiale ale acestei serii din a doua inegalitate de la determinarea termenilor (x_n) găsim

$$\|y - Ts_n\| < 2^{-n}\delta \to 0,$$

deci $Ts_n \to y$, ceea ce înseamnă că $y = Tx$. În plus,

$$\|x\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\|x_n\| < 1,$$

deci $y \in T(B_X)$. Demostraţia este încheiată. □

Corolarul 3.2.10 *Fie X, Y spaţii Banach şi $T \in L(X,Y)$ bijectiv. Atunci $T^{-1} \in L(Y,X)$.*

Demonstraţie Pentru că T este bijectiv, există operatorul T^{-1} despre care se arată cu uşurinţă că este liniar. Fie $D \subset X$ deschisă. Din Principiul aplicaţiilor deschise, $T(D)$ este deschisă. Având în vedere că $(T^{-1})^{-1}(D) = T(D)$, deducem că T^{-1} întoarce deschişi în deschişi, deci este continuu. $\square$

Corolarul 3.2.11 *Fie X spaţiu liniar normat şi $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ două norme pe X în raport cu care X este spaţiu Banach. Dacă există $c > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$, atunci cele două norme sunt echivalente. Cu alte cuvinte, dacă două norme de spaţiu Banach sunt comparabile, atunci ele sunt echivalente.*

Demonstraţie Fie aplicaţia identitate $\mathrm{id} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$. Conform ipotezei, id este operator liniar continuu. Din corolarul anterior deducem că operatorul invers este de asemenea continuu. Obţinem astfel concluzia. $\square$

Teorema 3.2.12 (Principiul graficului închis) *Fie X, Y spaţii Banach şi $T : X \to Y$ liniar. Atunci T este continuu dacă şi numai dacă are graficul închis.*

Demonstraţie Este cunoscut faptul că orice aplicaţie continuă între două spaţii metrice are graficul închis.

Invers, presupunem că T are graficul închis şi arătăm că este continuu.

Introducem pe X norma

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \ \forall x \in X.$$

Este uşor de văzut că aceasta este într-adevăr o normă.

Arătăm că $(X, \|\cdot\|_1)$ este spaţiu Banach. Fie (x_n) un şir Cauchy în raport cu $\|\cdot\|_1$. Obţinem imediat că (x_n) este şir Cauchy în raport cu $\|\cdot\|_X$, iar (Tx_n) este şir Cauchy în raport cu $\|\cdot\|_Y$. Cum X, Y sunt spaţii Banach, există $x \in X$ şi $y \in Y$ astfel încât $x_n \to x$, $Tx_n \to y$. Datorită faptului că T are grafic închis, $y = Tx$ şi avem că $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$. Deci $(X, \|\cdot\|_1)$ este spaţiu Banach.

Este evident că pentru orice $x \in X$, $\|x\|_X \leq \|x\|_1$ şi conform corolarului precedent cele două norme sunt echivalente, deci există $d > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$, $\|x\|_1 \leq d\|x\|_X$. Astfel,

$$\|Tx\|_Y \leq d\|x\|_X, \ \forall x \in X,$$

deci T este continuu. $\square$

Arătăm acum, prin exemple, că ipotezele de completitudine sunt esenţiale în rezultatele de mai sus.

Exemplul 3.2.13 1. Fie aplicaţia identitate de la $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ la $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$, notată, ca de obicei, cu id. Atunci id este continuă (pentru că $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$), surjectivă şi dacă ar fi deschisă atunci inversa ar fi de asemenea continuă. Dar identitatea de la $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ la $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ nu este continuă: pentru $x_n = (1, ..., 1, 0, 0, ...)$ ($n \in \mathbb{P}$, 1 până la poziţia n), $\|x_n\|_1 = n$, $\|x_n\|_\infty = 1$. Aceasta se întâmplă pentru că $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ nu este complet.

2. Fie X spaţiu Banach infinit dimensional şi $f : X \to \mathbb{R}$ un operator liniar discontinuu (nemărginit) a cărui existenţă este asigurată de Observaţia 1.3.9. Definim pe X o nouă normă prin

$$\|x\|_f = \|x\| + |f(x)|.$$

Se verifică că într-adevăr această aplicaţie este o normă. În plus, $\left(X, \|\cdot\|_f\right)$ nu este complet pentru că $\|\cdot\|_f$ şi $\|\cdot\|$ sunt comparabile şi dacă $\left(X, \|\cdot\|_f\right)$ ar fi spaţiu Banach atunci ar fi echivalente, ceea ce revine la continuitatea lui f. Definim din nou operatorul identitate id de la $\left(X, \|\cdot\|_f\right)$ la $(X, \|\cdot\|)$ care este liniar, continuu şi surjectiv. Totuşi inversul său nu este continuu pentru că normele nu sunt echivalente.

3. Să considerăm spaţiul $\left(c_{00}, \|\cdot\|_p\right)$, unde $p \in (1, \infty)$, care nu este complet (este subspaţiu dens propriu în $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$). Fie $T : \left(c_{00}, \|\cdot\|_p\right) \to \left(c_{00}, \|\cdot\|_p\right)$

$$T(x) = \left(n^{-1} x_n\right).$$

Acest operator este bine definit, liniar, continuu, bijectiv, dar inversul T^{-1} este dat de

$$T^{-1}(x) = (n x_n),$$

care este operator nemărginit.

4. Fie $T : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ dat prin

$$T(f) = f'.$$

Este clar că T este liniar şi are grafic închis (Teorema de transfer a derivabilităţii). Totuşi, T nu este continuu, nefiind mărginit. De exemplu, pentru $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin\left(n^2 x\right), \ \forall n \in \mathbb{P}$$

avem $\|f_n\|_\infty \to 0$, în timp ce $\|T f_n\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = n \to \infty$. Bineînţeles, acest exemplu nu contrazice Principiul graficului închis, întrucât domeniul nu este spaţiu Banach (a se vedea Exemplul 1.2.4 şi Exemplul 1.3.5).

Capitolul 4

Topologii slabe şi compactitate

În acest capitol vom studia, pe un spaţiu liniar normat şi pe dualul acestuia, câteva topologii care sunt mai slabe decât topologiile date de norme. Necesitatea introducerii unor topologii noi, mai slabe decât topologia normei, se fundamentează pe următoarele fapte: cu cât o topologie este mai fină (mai tare, are mai multe mulţimi deschise) există cu atât mai multe funcţii continue cu valori reale, dar cu atât mai puţine mulţimi compacte, ori tocmai cuplarea continuităţii cu compactitatea produce rezultate importante (a se vedea, de exemplu, Teorema lui Weierstrass, Teorema lui Cantor) şi asigură posibilitatea trecerii la limită în diverse probleme. Pe de altă parte, într-un spaţiu liniar normat infinit dimensional chiar bila unitate închisă nu este compactă. Astfel apare necesitatea gândirii unor topologii care să fie compatibile cu topologia normei, dar care să aibă avantajul unei mai mari clase de mulţimi compacte. Astfel de topologii nu sunt în general metrizabile, deci trebuie să facem apel la rezultate din cadrul spaţiilor liniare topologice generale.

4.1 Preliminarii

Până în acest moment, topologiile pe care le-am considerat în rezultatele principale au fost topologii induse de o normă. Reamintim definiţa generală a unei topologii precum şi unele aspecte pe care le vom avea în vedere în cele ce urmează.

Definiţia 4.1.1 *Fie X o mulţime nevidă şi $\mathcal{P}(X)$ familia submulţimilor sale. O submulţime τ a lui $\mathcal{P}(X)$ se numeşte topologie pe X dacă satisface următoarele condiţii:*

(i) $\cup_{i\in I} D_i \in \tau$, pentru orice mulţime de indici I şi orice familie $\{D_i \mid i \in I\} \subset \tau$; (ii) $D_1 \cap D_2 \in \tau$, pentru orice $D_1, D_2 \in \tau$; (iii) $X, \emptyset \in \tau$.

Perechea (X, τ) se numeşte spaţiu topologic, iar elementele lui τ se numesc mulţimi deschise.

Definiţia 4.1.2 *Fie (X, τ) un spaţiu topologic şi $A \subset X$. Spunem că A este mulţime închisă dacă $X \setminus A$ este mulţime deschisă, i.e., $X \setminus A \in \tau$.*

Presupunem cunoscute conceptele de mai jos şi rezultatele fundamentale legate de acestea: vecinătate a unui punct (notăm cu $\mathcal{V}(\overline{x})$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui $\overline{x}$); punct interior unei mulţimi; punct aderent unei mulţimi; frontiera unei mulţimi; mulţime compactă; continuitatea unei funcţii $f : A \subset X \to Y$ într-un punct $a \in A$ şi continuitatea pe mulţime, unde X, Y sunt spaţii topologice şi $A \subset X$.

Spre deosebire de o topologie metrică (deci, în particular, o topologie dată de o normă) caracterizările cu şiruri ale punctelor aderente sau ale mulţimilor compacte nu mai sunt valabile.

Fie X o mulţime nevidă şi τ_1, τ_2 două topologii pe X. Reamintim că τ_1 se numeşte mai puţin fină decât τ_2 (sau că τ_2 este mai fină decât τ_1) dacă $\tau_1 \subset \tau_2$. Spunem că τ_1 este strict mai puţin fină decât τ_2 (sau că τ_2 este strict mai fină decât τ_1) dacă $\tau_1 \subset \tau_2$ şi $\tau_1 \neq \tau_2$. Fie X o mulţime nevidă şi τ_1, τ_2 două topologii pe X. Topologia τ_1 este mai puţin fină decât τ_2 dacă şi numai dacă aplicaţia identitate $\mathrm{id} : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ este continuă.

Revenim acum la cadrul uzual al spaţiilor liniare normate. Începem prin a defini pe un spaţiu liniar normat o topologie, numită topologia slabă, în scopul de a identifica mai uşor mulţimi compacte, având totuşi o clasă suficient de vastă de funcţii continue. Deşi acest prim efort nu oferă răspunsul direct la această chestiune, vom construi pe spaţiul dual, pe baza aceloraşi idei, două noi topologii, topologia slabă şi topologia slab-stelată şi vom vedea că aceasta din urmă corespunde scopului iniţial. O ipoteză suplimentară care conduce la conceptul de spaţiu reflexiv va fi esenţială pentru obţinerea de rezultate de compactitate şi pentru prima topologie introdusă, şi anume topologia slabă.

Apoi, vom studia un tip special de operatori pentru care imaginea discului unitate are proprietăţi de compactitate. Astfel, întreaga problematică a acestui capitol este subsumată ideii de identificare a unor mulţimi compacte (în raport cu o topologie mai slabă decât cea a normei).

4.2 Topologia slabă

Fie X un spaţiu liniar normat. Topologia slabă, notată w, pe X este cea mai puţin fină topologie care conţine familia de mulţimi

$$\mathcal{E} = \left\{ x^{*-1}(V) \mid x^* \in X^*, V \subset \mathbb{R} \text{ deschisă} \right\}.$$

Altfel spus, w este cea mai slabă topologie pe X pentru care toate funcţionale din dual sunt continue. Este evident că

$$w = \bigcap \{\tau \mid \tau \text{ topologie pe } X,\ \mathcal{E} \subset \tau\}.$$

Deci, mulţimile deschise în w sunt reuniunile de intersecţii finite de elemente din $\mathcal{E}$. Are loc rezultatul următor de caracterizare a mulţimilor topologiei w.

Propoziţia 4.2.1 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. Atunci o submulţime nevidă $U \subset X$ este în w dacă şi numai dacă pentru orice $x \in U$, există $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{P}$, $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$ astfel încât*

$$\bigcap_{k=1}^{n} x_k^{*-1}\left(x_k^*(x) - \varepsilon, x_k^*(x) + \varepsilon\right)$$
$$= \left\{ y \in X \mid |x_k^*(y - x)| < \varepsilon,\ \forall k \in \overline{1, n} \right\} \subset U.$$

Demonstraţie Mulţimea U este în w dacă şi numai dacă este vecinătate în w pentru orice $x \in U$. Aceasta revine la a spune că pentru orice $x \in U$ există o intersecţie finită de elemente din $\mathcal{E}$ care conţine x şi este inclusă în U. Deci

$$U \in w \iff \forall x \in U, \exists n \in \mathbb{P}, x_1^*, ..., x_n^* \in X^*, V_1, ..., V_n \subset \mathbb{R} \text{ deschise, astfel încât}$$
$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} x_k^{*-1}(V_k) \subset U.$$

Este clar că fiecare V_k este vecinătate a lui $x_k^*(x)$, deci există un $\varepsilon > 0$ comun astfel încât

$$(x_k^*(x) - \varepsilon, x_k^*(x) + \varepsilon) \subset V_k.$$

Deducem că

$$U \in w \iff \forall x \in U, \exists n \in \mathbb{P}, x_1^*, ..., x_n^* \in X^*, \varepsilon > 0, \text{ astfel încât}$$
$$\bigcap_{k=1}^{n} x_k^{*-1}(x_k^*(x) - \varepsilon, x_k^*(x) + \varepsilon) \subset U.$$

Astfel, avem concluzia. □

Observaţia 4.2.2 *Din cele de mai sus reţinem şi faptul că o vecinătate generică a unui punct $\overline{x} \in X$ în topologia slabă are forma*

$$V(\overline{x}; x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*; \varepsilon) = \left\{x \in X \mid |x_i^*(x - \overline{x})| < \varepsilon, \forall i \in \overline{1, n}\right\},$$

unde $n \in \mathbb{P}$, $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* \in X^*$ şi $\varepsilon > 0$. De asemenea,

$$V(\overline{x}; x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*; \varepsilon) = \overline{x} + V(0; x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*; \varepsilon).$$

Aceasta înseamnă, printre altele, că pentru a proba continuitatea unei aplicaţii liniare în raport cu topologia slabă este suficient să se arate continuitatea sa în origine.

Observaţia 4.2.3 *Este clar că topologia slabă este inclusă în topologia normei pe care o vom numi şi topologia tare: orice mulţime slab deschisă este şi deschisă tare. Similar pentru mulţimi închise.*

Propoziţia 4.2.4 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. Atunci w este separată T_2.*

Demonstraţie Fie $x, y \in X$ cu $x \neq y$. Din Teorema Hahn-Banach, există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ astfel încât $x^*(x - y) > 0$. Notăm $\varepsilon = x^*(x - y)$ şi observăm că

$$\left\{z \in X \mid |x^*(z - x)| < 2^{-1}\varepsilon\right\} \cap \left\{z \in X \mid |x^*(z - y)| < 2^{-1}\varepsilon\right\} = \emptyset,$$

iar cele două mulţimi sunt vecinătăţi în w ale lui x şi respectiv y. □

Propoziţia 4.2.5 *Pe spaţii liniare normate finit dimensionale topologia normei şi w coincid.*

Demonstraţie Fie X spaţiu liniar normat finit dimensional, de dimensiune $n \in \mathbb{P}$. Cum toate normele sunt echivalente pe X, este suficient să arătăm că bilele deschise în raport cu norma $\|\cdot\|_\infty$ sunt vecinătăţi slab deschise ale centrului.

Fie $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Atunci

$$B_\infty(x, \varepsilon) = \left\{ y \in X \mid |y_i - x_i| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n} \right\}.$$

Considerăm funcţionalele $f_1, .., f_n : X \to \mathbb{R}$ date, pentru $k \in \overline{1,n}$, prin

$$f_k(x) = x_k.$$

Este clar că aceste funcţionale sunt din X^* şi observăm că

$$B_\infty(x, \varepsilon) = \left\{ y \in X \mid |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n} \right\},$$

deci $B_\infty(x, \varepsilon) \in w$, adică $B_\infty(x, \varepsilon)$ este vecinătate slabă a lui x. □

Propoziţia 4.2.6 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat infinit dimensional. Atunci:*

(i) orice mulţime slab deschisă nevidă conţine o dreaptă afină, deci este nemărginită în topologia normei;

(ii) orice mulţime mărginită în normă are interior vid în topologia w.

Demonstraţie (i) Fie $U \in w \backslash \{\emptyset\}$. Atunci pentru orice $x \in U$, există $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{P}$, $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$ astfel încât

$$\left\{ y \in X \mid |x_i^*(y - x)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n} \right\} \subset U.$$

Arătăm că există $\overline{x} \in X \setminus \{0\}$ astfel încât pentru orice $i \in \overline{1,n}$, $x_i^*(\overline{x}) = 0$. Dacă nu ar exista un astfel de element, atunci aplicaţia

$$x \mapsto (x_1^*(x), ..., x_n^*(x)) \in \mathbb{R}^n$$

ar fi o injecţie liniară cu valori într-un spaţiu finit dimensional, ceea ce ar atrage concluzia falsă că dimensiunea lui X este finită.

Prin urmare, există $\overline{x} \in X \setminus \{0\}$ astfel încât pentru orice $i \in \overline{1,n}$, $x^*(\overline{x}) = 0$. Atunci, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi $i \in \overline{1,n}$, $x_i^*(x + t\overline{x} - x) = 0$, adică

$$\{x + t\overline{x} \mid t \in \mathbb{R}\} \subset U,$$

ceea ce reprezintă concluzia.

(ii) Fie U mărginită în normă. Dacă interiorul său în topologia w ar fi nevid, atunci acesta ar fi un deschis nevid din w conţinut în U. Dar conform punctului (i), pe baza mărginirii lui U, singura mulţime din w conţinută în U este $\emptyset$, deci $\operatorname{int}_w U = \emptyset$. □

Observaţia 4.2.7 *Punctul (ii) al rezultatului precedent arată că pe spaţii normate infinit dimensionale topologia slabă este strict mai puţin fină decât topologia tare.*

Prezentăm acum un rezultat foarte important care arată că mulţimile convexe şi închise coincid în cele două topologii.

Teorema 4.2.8 (Mazur) *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi $C \subset X$ o mulţime convexă. Atunci C este slab închisă dacă şi numai dacă este tare închisă. Pentru o astfel de mulţime*

$$\mathrm{cl}_w C = C = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} C.$$

Demonstraţie Dacă C este slab închisă atunci ea este tare închisă din compararea topologiilor. Presupunem că C este tare închisă. Fie $x \notin C$ (cazul $C = X$ este evident). Atunci, din a doua formă geometrică a Teoremei Hahn-Banach, există $x^* \in X^*$ şi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^*(x) < a < x^*(c)$ pentru orice $c \in C$. Aceasta înseamnă că $x \in H^{<}_{x^*,a} \subset X \setminus C$. Cum $H^{<}_{x^*,a}$ este o mulţime deschisă în topologia w, deducem că $X \setminus C$ este deschisă în această topologie. Astfel, C este închisă în w.

Ultima afirmaţie este evidentă pentru că o mulţime închisă într-o topologie oarecare coincide cu închiderea ei în acea topologie. □

Propoziţia 4.2.9 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat infinit dimensional. Atunci sfera unitate nu este slab închisă. Mai mult,*

$$\mathrm{cl}_w S_X = D_X.$$

Demonstraţie Avem, succesiv,

$$\begin{aligned} X \setminus \mathrm{cl}_w S_X &= \mathrm{int}_w (X \setminus S_X) = \mathrm{int}_w (B_X \cup (X \setminus D_X)) \\ &= \mathrm{int}_w B_X \cup \mathrm{int}_w (X \setminus D_X) = \emptyset \cup (X \setminus \mathrm{cl}_w D_X). \end{aligned}$$

Cum D_X este convexă, din teorema precedentă închiderea sa este aceeaşi în ambele topologii, deci

$$X \setminus \mathrm{cl}_w S_X = X \setminus D_X,$$

adică $\mathrm{cl}_w S_X = D_X$. □

Discutăm acum unele aspecte legate de convergenţa şirurilor în topologia slabă.

Propoziţia 4.2.10 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat, $(x_n) \subset X$ un şir şi $x \in X$. Atunci:*
(i) $x_n \xrightarrow{w} x$ dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in X^*$, $x^*(x_n) \to x^*(x)$ în $\mathbb{R}$;
(ii) dacă $x_n \to x$, atunci $x_n \xrightarrow{w} x$;
(iii) dacă $x_n \xrightarrow{w} x$, atunci (x_n) este mărginit în normă şi $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
(iv) dacă (x_n^*) este un şir de funcţionale convergent în norma dualului la x^* şi $x_n \xrightarrow{w} x$, atunci $x_n^*(x_n) \to x^*(x)$.

Demonstraţie (i) Afirmaţia rezultă imediat din definiţia convergenţei unui şir într-o topologie şi din forma vecinătăţilor unui punct în w.

(ii) Compararea topologiilor probează şi această implicaţie.

(iii) Dacă $x_n \xrightarrow{w} x$, din punctul (i), $x^*(x_n) \to x^*(x)$ pentru orice $x^* \in X^*$. În particular, familia de operatori $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, unde x_n este identificat cu operatorul $x_n : X^* \to \mathbb{R}$, $x_n(x^*) = x^*(x_n)$, este punctual mărginită. Conform Principiului mărginirii uniforme (X^* este complet), deducem mărginirea lui (x_n) în topologia normei.

Pentru orice $x^* \in X^*$,

$$|x^*(x)| \leq |x^*(x - x_n)| + |x^*(x_n)| \leq |x^*(x - x_n)| + \|x^*\| \|x_n\| .$$

Prin trecere la $\liminf$ se obţine inegalitatea anunţată.

(iv) Scrierea

$$\begin{aligned} |x_n^*(x_n) - x^*(x)| &\leq |x_n^*(x_n) - x^*(x_n)| + |x^*(x_n) - x^*(x)| \\ &\leq \|x_n^* - x^*\| \|x_n\| + |x^*(x_n - x)| \end{aligned}$$

şi mărginirea în normă a lui (x_n) probează afirmaţia. □

Exemplul 4.2.11 În general, convergenţa slabă (i.e., în topologia slabă) a unui şir nu implică convergenţa sa tare (i.e., în topologia normei). Un astfel de exemplu este cazul vectorilor unitari $(e_n)_{n\in\mathbb{P}}$ în $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Este clar că acest şir nu este tare convergent întrucât nu este fundamental:

$$\|e_n - e_m\|_\infty = 1, \ \forall m, n \in \mathbb{P}, \ n \neq m.$$

Arătăm că acest şir este slab convergent la 0. Ştim că $c_0^* = \ell^1$, iar operatorul care realizează izomorfismul izometric între cele două spaţii este $T : (\ell^1, \|\cdot\|_1) \to ((c_0, \|\cdot\|_\infty)^*, \|\cdot\|_*)$ definit prin:

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

unde $x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^1$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{P}} \in c_0$. Astfel $e_n \xrightarrow{w} 0$ este echivalent cu: pentru orice $x \in \ell^1$,

$$T(x)(e_n) = x_n \to 0,$$

ceea ce este adevărat.

Totuşi convergenţa în topologia slabă nu poate fi caracterizată prin şiruri pe spaţii infinit dimensionale pentru că w nu este metrizabilă pe astfel de spaţii, după cum arată rezultatul ce urmează.

Teorema 4.2.12 *Topologia slabă într-un spaţiu liniar normat infinit dimensional nu este metrizabilă.*

Demonstraţie Este suficient să arătăm că topologia slabă nu satisface prima axiomă a numărabilităţii. Presupunem, prin reducere la absurd şi fără a restrânge generalitatea, că originea admite un sistem fundamental de vecinătăţi numărabil $(U_n)_{n\in\mathbb{P}}$ în topologia w. Evident, tot fără a restrânge generalitatea, putem considera

$$U_1 \supset U_n \supset ... \supset U_n \supset ... \supset \{0\}.$$

Conform Propoziţiei 4.2.6 şi demonstraţiei punctului (i), pentru orice n, există $x_n \in X \setminus \{0\}$ astfel încât

$$\{0 + tx_n \mid t \in \mathbb{R}\} \subset U_n.$$

Definim şirul

$$(y_n)_n = \left(\frac{nx_n}{\|x_n\|}\right)_n.$$

Este evident că pentru orice n, $y_n \in U_n$.

Alegem $x^* \in X^*$ şi $\varepsilon > 0$. Cum $x^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \in w$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $U_{n_\varepsilon} \subset x^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$, iar din monotonia şirului (U_n),

$$U_n \subset x^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon), \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Deci

$$y_n \in x^{*-1}(-\varepsilon, \varepsilon), \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că $x^*(y_n) \to 0$. Cum x^* a fost ales arbitrar, conform Propoziţiei 4.2.10 (i), $y_n \xrightarrow{w} 0$. Dar tot (y_n) este nemărginit în normă, deci nu poate fi slab convergent conform punctului (iii) al aceleiaşi propoziţii.

Contradicţia la care am ajuns înseamnă că originea nu admite un sistem fundamental de vecinătăţi numărabil. Demostraţia este încheiată. □

4.3 Topologia slab – stelată

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ dualul său. Evident, X^* are la rândul său un dual, notat X^{**} şi numit bidualul lui X. Putem astfel, considerându-l pe X^* ca spaţiu de bază, să introducem pe X^* topologia slabă, ca mai sus: cea mai puţin fină topologie pentru care toate funcţionalele din bidual sunt continue.

Studiind relaţia dintre X şi X^{**}, vom observăm însă că, tot pe X^*, mai putem introduce o topologie, mai slabă decât topologia sa slabă.

Să începem prin a remarca faptul că norma pe X^{**} este dată de

$$\|x^{**}\|_{X^{**}} = \sup\{x^{**}(x^*) \mid \|x^*\|_{X^*} \leq 1\}.$$

Definim acum $\Phi : X \to X^{**}$,

$$\Phi(x)(x^*) = x^*(x), \ \forall x^* \in X^*.$$

Observăm că Φ este bine definită întrucât pentru orice $x \in X$, $\Phi(x)$ este liniară pe X^* şi

$$\sup\{\Phi(x)(x^*) \mid \|x^*\|_{X^*} \leq 1\} = \sup\{x^*(x) \mid \|x^*\|_{X^*} \leq 1\} = \|x\|,$$

deci $\Phi(x) \in X^{**}$ şi $\|\Phi(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$.

Mai mult, Φ este liniară, deci Φ stabileşte un izomorfism izometric între X şi $\Phi(X)$. Astfel, X poate fi privit ca un subspaţiu al lui X^{**}, întrucât se identifică cu $\Phi(X)$. Aplicaţia Φ se numeşte scufundarea canonică a lui X în X^{**}. În general, Φ nu este surjectivă şi vom vedea mai multe detalii în cele ce urmează. Suntem acum pregătiţi să definim topologia anunţată.

Definiţia 4.3.1 *Fie X un spaţiu liniar normat, X^{**} bidualul său şi $\Phi : X \to X^{**}$ scufundarea canonică. Topologia slab-stelată, notată w^*, este cea mai puţin fină toplogie pe X^* care conţine familia de mulţimi*

$$\mathcal{E}^* = \left\{ (\Phi(x))^{-1}(V) \mid x \in X, V \subset \mathbb{R} \text{ deschisă} \right\}.$$

Altfel spus, w^* este cea mai slabă topologie pe X^* pentru care toate funcţionale din $\Phi(X) \subset X^{**}$ sunt continue.

Propoziţia 4.3.2 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. Atunci $U \in w^*$ dacă şi numai dacă pentru orice $x^* \in U$, există $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{P}$, $x_1, ..., x_n \in X$ astfel încât*

$$\bigcap_{k=1}^{n} (\Phi(x_k))^{-1} (\Phi(x_k)(x^*) - \varepsilon, \Phi(x_k)(x^*) + \varepsilon)$$
$$= \left\{ y^* \in X^* \mid |(y^* - x^*)(x_k)| < \varepsilon, \ \forall k \in \overline{1,n} \right\} \subset U.$$

Demonstraţie Rezultă din cele de mai sus, ca în cazul topopogiei w. □

Observaţia 4.3.3 *O vecinătate generică a unei funcţionale $\overline{x}^* \in X^*$ în topologia w^* are forma*

$$V(\overline{x}^*; x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon) = \left\{ x^* \in X^* \mid |(x^* - \overline{x}^*)(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in \overline{1,n} \right\},$$

unde $n \in \mathbb{P}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Din nou, $V(\overline{x}^*; x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon) = \overline{x}^* + V(0; x_1, x_2, ..., x_n; \varepsilon)$

Propoziţia 4.3.4 *Topologia w^* este separată T_2.*

Demonstraţie Fie $x^*, y^* \in X^*$ cu $x^* \neq y^*$. Atunci există $\overline{x} \in X$ astfel încât $x^*(\overline{x}) \neq y^*(\overline{x})$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $x^*(\overline{x}) > y^*(\overline{x})$, luăm $\varepsilon = x^*(\overline{x}) - y^*(\overline{x})$ şi observăm că

$$\left\{ z^* \in X^* \mid |\Phi(\overline{x})(x^* - z^*)| < 2^{-1}\varepsilon \right\} \cap \left\{ z^* \in X^* \mid |\Phi(\overline{x})(y^* - z^*)| < 2^{-1}\varepsilon \right\} = \emptyset,$$

iar cele două mulţimi sunt vecinătăţi în w^* ale lui x^* şi respectiv y^*. □

Observaţia 4.3.5 *Este clar că pe X^* cele trei topologii considerate sunt în relaţia*

$$w^* \subset w \subset \tau_{\|\cdot\|_{X^*}}.$$

Dacă X este finit dimensional atunci

$$X \simeq X^* \simeq X^{**}$$

şi cele trei topologii coincid.

În schimb, am văzut, că dacă X^* este infinit dimensional atunci a doua incluziune este strictă. Vom vedea că dacă scufundarea canonică nu este surjectivă atunci şi prima incluziune este strictă.

Mai întâi demonstrăm că funcţionalele liniare continue în raport cu w^* sunt exact cele din $\Phi(X)$. Avem nevoie de o lemă (consecinţă, de exemplu, a Lemei lui Farkas). Mai întâi să observăm că o funcţională liniară este continuă în raport cu w^* dacă şi numai dacă este continuă în raport cu w^* în 0 (conform Observaţiei 4.3.3).

Lema 4.3.6 (Teorema nucleelor) *Fie X un spaţiu liniar, $n \in \mathbb{P}$, φ_i, $i \in \overline{1,n}$ şi φ funcţionale liniare de la X la $\mathbb{R}$. Atunci*

$$\forall x \in X : [\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_n(x) = 0] \Rightarrow \varphi(x) = 0 \tag{4.1}$$

dacă şi numai dacă există $(\alpha_i)_{i \in \overline{1,n}} \subset \mathbb{R}$ astfel încât $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$.

Teorema 4.3.7 *Fie X un spaţiu liniar normat, X^{**} bidualul său şi $\Phi : X \to X^{**}$ scufundarea canonică. Fie $\varphi : X^* \to \mathbb{R}$ liniară. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $\varphi \in \Phi(X)$;
(ii) $\operatorname{Ker} \varphi$ *este mulţime w^*−închisă;*
(iii) φ este $(w^*, |\cdot|)$ continuă.

Demonstraţie Implicaţia (i) $\Longrightarrow$ (iii) rezultă chiar din definiţia lui w^*, iar implicaţia (iii) $\Longrightarrow$ (ii) este evidentă.

Demonstrăm (iii) $\Longrightarrow$ (i). Fie $\varepsilon > 0$. Conform ipotezei, există U vecinătate a originii în w^* astfel încât $|\varphi(x^*)| < \varepsilon$ pentru orice $x^* \in U$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că

$$U = \left\{x^* \in X^* \mid |x^*(x_k)| < \delta,\ \forall k \in \overline{1,n}\right\},$$

unde $\delta > 0$, $n \in \mathbb{P}$ şi $x_k \in X$ pentru $k \in \overline{1,n}$. Din inegalitatea de mai sus deducem că dacă $x^*(x_k) = 0$ pentru orice $k \in \overline{1,n}$ atunci $|\varphi(x^*)| < \varepsilon$. Dar dacă $x^*(x_k) = 0$ pentru orice $k \in \overline{1,n}$, atunci pentru orice $\alpha > 0$, $(\alpha x^*)(x_k) = 0$ pentru orice $k \in \overline{1,n}$, deci $\alpha |\varphi(x^*)| < \varepsilon$, ceea ce nu se poate decât dacă $\varphi(x^*) = 0$. Astfel, am arătat că

$$\left(\Phi(x_k)(x^*) = 0,\ \forall k \in \overline{1,n}\right) \implies \varphi(x^*) = 0.$$

Din Teorema nucleelor (Lema 4.3.6 de mai sus), există $\alpha_k \in \mathbb{R}$ cu $k \in \overline{1,n}$ astfel încât

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi(x_k) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \in \Phi(X).$$

Demonstraţia implicaţiei anunţate este completă.

Arătăm că (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Conform ipotezei,

$$A = \{x^* \in X^* \mid \varphi(x^*) \neq 0\}$$

este w^*−deschisă. Fie $\varepsilon > 0$ şi $x^* \in A$ astfel încât $|\varphi(x^*)| < \varepsilon$. Există U o vecinătate w^*−deschisă a lui x^* în A de care poate fi luată de forma

$$U = \left\{y^* \in X^* \mid |(y^* - x^*)(x_k)| < \delta,\ \forall k \in \overline{1,n}\right\},$$

unde $\delta > 0$, $n \in \mathbb{P}$ şi $x_k \in X$ pentru $k \in \overline{1,n}$. Mulţimea U este convexă ca intersecţie de mulţimi convexe, deci $\varphi(U)$ este convexă în $\mathbb{R}$, adică este un interval. Prin urmare, cum φ nu se anulează pe U, $\varphi(U) \subset (-\infty, 0)$ sau $\varphi(U) \subset (0, \infty)$. Luăm primul caz, în celălalt raţionamentul fiind asemănător. Deci ştim că $\varphi(y^*) < 0$ pentru orice $y^* \in U$. Notăm

$$V = U - x^* = \left\{z^* \in X^* \mid |z^*(x_k)| < \delta,\ \forall k \in \overline{1,n}\right\}$$

şi pentru orice $z^* = y^* - x^* \in V$, cu $y^* \in U$ avem

$$\varphi(z^*) = \varphi(y^*) - \varphi(x^*) < -\varphi(x^*) < \varepsilon.$$

Dar V este simetrică, deci

$$|\varphi(z^*)| < \varepsilon,\ \forall z^* \in V.$$

Aşadar am demonstrat că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V a lui 0 în w^* astfel încât pentru orice $z^* \in V$, $|\varphi(z^*)| < \varepsilon$. Aceasta înseamnă că φ este continuă în 0, deci continuă peste tot. □

Corolarul 4.3.8 *Dacă scufundarea canonică nu este surjectivă, atunci w^* este strict mai slabă decât w pe X^*.*

Demonstraţie Dacă scufundarea canonică nu este surjectivă, atunci considerând $x^{**} \in X^{**} \setminus \Phi(X)$, mulţimea $\operatorname{Ker} x^{**}$ este slab închisă, dar nu este w^*-închisă (conform teoremei anterioare), ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ. □

Observaţia 4.3.9 *Demonstraţia acestui corolar arată şi faptul că Teorema lui Mazur nu are loc pentru topologia w^*.*

Propoziţia 4.3.10 *Fie X un spaţiu liniar normat şi X^* dualul său. Fie $(x_n^*) \subset X^*$ un şir şi $x^* \in X^*$. Atunci:*

(i) $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ dacă şi numai dacă pentru orice $x \in X$, $x_n^*(x) \to x^*(x)$ în $\mathbb{R}$;

(ii) dacă $x_n^* \to x^*$, atunci $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$; dacă $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$, atunci $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$;

(iii) dacă X este complet şi $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, atunci (x_n^*) este mărginit în normă şi $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n^*\|$;

(iv) dacă X este complet şi (x_n) este un şir de elemente din X convergent în normă la x, iar $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, atunci $x_n^*(x_n) \to x^*(x)$.

Demonstraţie Se utilizează aceleaşi argumente, adaptate topologiei w^*, ca cele din cazul propoziţiei corespunzătoare prvitoare la topologia w. Este de remarcat că pentru punctul (iii) se foloseşte Principiul mărginirii uniforme pentru operatori definiţi pe X, deci X trebuie să fie complet. La punctul (iv) se foloseşte mărginirea de la punctul (iii), deci trebuie impusă din nou completitudinea lui X. □

Exemplul 4.3.11 Prezentăm un exemplu concret în care convergenţele secvenţiale în topologiile w şi w^* pe X^* sunt distincte. Fie $\{e_n \mid n \in \mathbb{P}\}$ vectorii unitari standard în ℓ^1 privit ca dual al lui c_0. Atunci $e_n \xrightarrow{w^*} 0$, dar (e_n) nu este $w-$convergent.

Într-adevăr, având în vedere forma operatorului care realizează izomorfismul izometric între ℓ^1 şi c_0^*, pentru orice $x \in c_0$, avem

$$T(e_n)(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (e_n)_i x_i = x_n \to 0,\ \forall n$$

deci $e_n \xrightarrow{w^*} 0$.

Se constată uşor că $(e_n) \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$: cum, $(\ell^1)^* = \ell^\infty$, $x = (1, 1, ..., 1, ...) \in \ell^\infty$, prin operatorul de izomorfism izometric obţinem

$$T(x)(e_n) = \sum_{i=0}^{\infty} (e_n)_i x_i = x_n = 1 \not\to 0.$$

Obţinerea următorului rezultat reprezintă principalul motiv al studiului topologiilor slabe.

Teorema 4.3.12 (Teorema Alaoglu-Bourbaki) *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi $A \subset X^*$ o mulţime nevidă, mărginită în normă şi w^*-închisă. Atunci A este w^*-compactă. În particular, D_{X^*} este w^*-compactă.*

Demonstraţie De fapt, este suficient să probăm că D_{X^*} este w^*-compactă pentru că mărginirea lui A asigură existenţa unei constante $\alpha > 0$ astfel încât

$$A \subset \alpha D_{X^*},$$

deci A este o submulţime w^*-închisă a unei mulţimi w^*-compacte.

Fie acum $\mathbb{R}^X$, adică (spaţiul funcţiilor de la X la $\mathbb{R}$) cu topologia produs pe care o notăm cu τ. Evident, $X^* \subset \mathbb{R}^X$.

Arătăm că w^* este urma topologiei produs de pe $\mathbb{R}^X$ pe X^*. Reamintim că dacă $f \in \mathbb{R}^X$ atunci o mulţime U este vecinătate a lui f în topologia produs dacă există $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{P}$ şi $x_1, ..., x_n \in X$ astfel încât

$$V\left(f; (x_i)_{i\in\overline{1,n}}; \varepsilon\right) = \left\{g \in \mathbb{R}^X \mid |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon,\ \forall i \in \overline{1,n}\right\} \subset U.$$

Restrângându-ne la X^* şi ţinând cont de definiţia lui w^*, afirmaţia făcută anterior este evident adevărată.

Ne reamintim şi faptul că $x^* \in D_{X^*}$ dacă şi numai dacă $|x^*(x)| \leq \|x\|$ pentru orice $x \in X$. Deci

$$D_{X^*} \subset \prod_{x\in X} [-\|x\|, \|x\|].$$

Conform Teoremei lui Tihonov, mulţimea din partea dreaptă este compactă ca produs cartezian de spaţii topologice compacte.

Trebuie deci să mai arătăm că D_{X^*} este închisă în $\left(\mathbb{R}^X, \tau\right)$. Pentru început observăm că închiderea lui D_{X^*} în raport cu τ este submulţime a lui X^* pentru că X^* este închisă ca mulţime în $\left(\mathbb{R}^X, \tau\right)$. Într-adevăr, dacă $f \in \mathbb{R}^X \setminus X^*$, există $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât numărul $f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)$ este pozitiv. Alegem

$$\delta = \frac{f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)}{1 + |\alpha| + |\beta|}$$

şi atunci $V(f; (x, y, \alpha x + \beta y); \delta) \cap X^* = \emptyset$, ceea ce dovedeşte afirmaţia anterioară.

În sfârşit, demonstrăm închiderea lui D_{X^*} în X^* în raport cu w^*. Fie $x^* \in w^* - \operatorname{cl} D_{X^*}$ şi $\varepsilon > 0$. Există $x \in S_X$ astfel încât

$$\|x^*\| < x^*(x) + \varepsilon.$$

Dar w^*-vecinătatea lui x^*

$$\{y^* \in X^* \mid |(y^* - x^*)(x)| < \varepsilon\}$$

trebuie să intersecteze D_{X^*}, deci există $y^* \in D_{X^*}$ astfel încât $|(y^* - x^*)(x)| < \varepsilon$.

Obţinem

$$\|x^*\| < x^*(x) + \varepsilon \leq y^*(x) + 2\varepsilon \leq \|y^*\| \|x\| + 2\varepsilon \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, $\|x^*\| \leq 1$, adică $x^* \in D_{X^*}$.

Demonstraţia este completă. □

Propoziţia 4.3.13 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach separabil. Fie $B \subset X^*$ o mulţime mărginită. Atunci urma topologiei w^* pe B este metrizabilă, iar o metrică care induce w^* pe B este $d : B \times B \to \mathbb{R}$,*

$$d(x^*, y^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{|x^*(x_k) - y^*(x_k)|, 1\}}{2^k},$$

unde $\{x_k \mid k \in \mathbb{P}\}$ este o submulţime densă a lui X.

Demonstraţie Fie $\{x_k \mid k \in \mathbb{P}\}$ o submulţime densă a lui X şi d dată de formula de mai sus. Este simplu de verificat că d este o metrică invariantă la translaţii. Deci este suficient să presupunem că $0 \in B$ şi să arătăm că τ_d şi w^* au aceleaşi vecinătăţi.

Conform definiţiilor corespunzătoare, aceste sisteme de vecinătăţi au ca baze:

$$B(0, \rho) = \left\{ y^* \in X^* \mid \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{|y^*(x_k)|, 1\}}{2^k} \right\}$$

$$U\left(\varepsilon, \{y_k\}_{k \in \overline{1,n}}\right) = \left\{ y^* \in X^* \mid |y^*(y_k)| < \varepsilon, \ \forall k \in \overline{1,n} \right\}, \text{ unde } n \in \mathbb{P}, \{y_k\}_{k \in \overline{1,n}} \subset X.$$

Fie $\rho > 0$ şi $x^* \in U\left(2^{-1}\rho, \{x_k\}_{k \in \overline{1,n}}\right)$, cu $n \in \mathbb{P}$, adică

$$|x^*(x_k)| < 2^{-1}\rho, \ \forall k \in \overline{1,n}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{|x^*(x_k)|, 1\}}{2^k} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\min\{|x^*(x_k)|, 1\}}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\min\{|x^*(x_k)|, 1\}}{2^k} \\ &\leq \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\rho}{2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Cum, pentru n suficient de mare,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\rho}{2}$$

obţinem că pentru un astfel de n,

$$U\left(2^{-1}\rho, \{x_k\}_{k \in \overline{1,n}}\right) \subset B(0, \rho).$$

Invers, mai întâi observăm că pentru orice $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{P}$ şi $y_1, ..., y_n \in X$, există, eventual renumerotând, $x_1, .., x_n$ astfel încât

$$\|y_k - x_k\| \le \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{diam} B}, \ \forall k \in \overline{1,n}.$$

Deci, pentru orice $x^* \in B$ şi orice $k \in \overline{1,n}$,

$$\begin{aligned} |x^*(y_k)| &\le |x^*(x_k)| + \|f\| \|y_k - x_k\| \\ &\le |x^*(x_k)| + \operatorname{diam} B \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{diam} B} \\ &= |x^*(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Fie acum $x^* \in B\left(0, \frac{1}{2^{n+1}} \min\{\varepsilon, 1\}\right)$. Atunci

$$\frac{1}{2^k} \min\{|x^*(x_k)|, 1\} \le \frac{1}{2^{n+1}} \min\{\varepsilon, 1\}, \ \forall k \in \overline{1,n},$$

deci,

$$\min\{|x^*(x_k)|, 1\} \le \frac{1}{2} \min\{\varepsilon, 1\} \le \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall k \in \overline{1,n}.$$

Deducem că

$$|x^*(y_k)| \le |x^*(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ \forall k \in \overline{1,n},$$

adică

$$B\left(0, \frac{1}{2^{n+1}} \min\{\varepsilon, 1\}\right) \subset U\left(\varepsilon, \{y_k\}_{k \in \overline{1,n}}\right),$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Teorema 4.3.14 (Alaoglu-Bourbaki, varianta secvenţială) *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu Banach separabil. Atunci D_{X^*} este w^*-secvenţial compactă.*

Demonstraţie Conform Teoremei Alaoglu-Bourbaki (Teorema 4.3.12), D_{X^*} este w^*-compactă. Dar, din rezultatul anterior topologia w^* pe D_{X^*} este o topologie metrică, deci cele două tipuri de compactitate coincid. □

4.4 Reflexivitate

Definiţia 4.4.1 *Un spaţiu liniar normat $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte reflexiv dacă scufundarea canonică în bidual este surjectivă.*

Observaţia 4.4.2 *Cum bidualul este mereu spaţiu Banach, orice spaţiu liniar normat reflexiv este spaţiu Banach.*

Observaţia 4.4.3 *Dacă X este reflexiv, atunci topologiile w şi w^* pe X^* coincid.*

Propoziţia 4.4.4 *Orice spaţiu ℓ^p cu $p \in (1, \infty)$ este reflexiv.*

Demonstraţie Ştim că

$$\left(\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq \left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right),$$

unde $q = \frac{p}{p-1}$, iar operatorul $T : \left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right) \to \left(\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^*, \|\cdot\|_*\right)$ prin

$$T(x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

este izomorfism izometric. Atunci $T_1 : \left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right)^* \to \left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^{**}$ dat prin

$$T_1(y^*) = y^* \circ T^{-1}$$

este izomorfism de spaţii liniare normate. Fie acum izomorfismul izometric $T_2 : \left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right) \to \left(\left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right)^*, \|\cdot\|_*\right)$,

$$T_2(x)(y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

Atunci $T_1 \circ T_2 : \left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right) \to \left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^{**}$ este izomorfism izometric. Arătăm că acest operator coincide cu scufundarea canonică.

Fie $x \in \ell^p$. Atunci, pentru orice $x^* \in (\ell^p)^*$,

$$(T_1 \circ T_2)(x)(x^*) = \left((T_2 x) \circ T^{-1}\right)(x^*) = (T_2 x) \circ T^{-1}(x^*),$$

iar folosind notaţia $y = T^{-1}(x^*)$ avem în continuare:

$$(T_1 \circ T_2)(x)(x^*) = T_2(x)(y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k = T(y)(x) = x^*(x) = \Phi(x)(x^*).$$

Aceasta arată că $(T_1 \circ T_2) = \Phi$. $\square$

Observaţia 4.4.5 *Folosind aceeaşi metodă, obţinem că orice spaţiu liniar normat finit dimensional este reflexiv.*

Exemplul 4.4.6 Spaţiul $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ nu este reflexiv. Într-adevăr, ştim că

$$c_0^{**} \simeq \ell^\infty.$$

Pe de altă parte, c_0 şi ℓ^∞ (cu normele uzuale) nu sunt izomorfe pentru că primul spaţiu este separabil iar al doilea este neseparabil. Deci nu există niciun izomorfism între c_0 şi c_0^{**}. Astfel, c_0 nu este reflexiv.

Propoziţia 4.4.7 *Fie X un spaţiu Banach. Atunci:*
(i) $\Phi(X)$ este subspaţiu liniar închis în X^{**};
(ii) Φ este $(w, w^*)-$continuă;
(iii) dacă X este reflexiv, atunci Φ^{-1} este $(w^*, w)-$continuă.

Demonstraţie (i) Cum Φ este izometrie, afirmaţia rezultă pe baza Problemei 14.

(ii) Φ este (w, w^*) −continuă dacă şi numai dacă Φ^{-1} duce w^*−vecinătăţi ale lui 0 în w−vecinătăţi ale lui 0. Fie

$$V = \left\{ y^{**} \in X^{**} \mid |y^{**}(x_i^*)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n} \right\}$$

o w^*−vecinătate a lui $0 \in X^{**}$ (cu notaţiile obişnuite). Atunci $u \in \Phi^{-1}(V)$ dacă şi numai dacă $\Phi(u) \in V$, ceea ce este echivalent cu

$$|\Phi(u)(x_i^*)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n},$$

adică

$$|x_i^*(u)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n}.$$

Astfel $u \in \Phi^{-1}(V)$ dacă şi numai dacă $u \in U = \left\{ x \in X \mid |x_i^*(x)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n} \right\}$, deci $\Phi^{-1}(V) = U$ care este o w−vecinătate a lui 0.

(iii) Presupunem că Φ este surjectivă şi arătăm că Φ^{-1} este (w^*, w) −continuă, adică Φ duce w−vecinătăţi ale lui 0 în w^*−vecinătăţi ale lui 0.

Fie, din nou cu notaţiile standard,

$$U = \left\{ x \in X \mid |x_i^*(x)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n} \right\}$$

o w−vecinătate a lui 0. Atunci $x^{**} \in \Phi(U)$ dacă şi numai dacă există $u \in U$ astfel încât $x^{**} = \Phi(u)$. Cum

$$|x_i^*(u)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n},$$

deducem că

$$|\Phi(u)(x_i^*)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n},$$

adică

$$|x^{**}(x_i^*)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n}.$$

Deci $x^{**} \in \Phi(X) \cap V = V$, unde $V = \left\{ y^{**} \in X^{**} \mid |y^{**}(x_i^*)| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1,n} \right\}$. Astfel obţinem concluzia. □

Teorema 4.4.8 *Dacă X este spaţiu Banach reflexiv, atunci D_X este $w-$compactă.*

Demonstraţie Cum $\Phi(X)$ este izometrie, $\Phi(D_X) = D_{X^{**}}$. Pe baza Teoremei Alaoglu-Bourbaki (Teorema 4.3.12) deducem că $D_{X^{**}}$ este w^*−compactă. Dar conform Propoziţiei 4.4.7, Φ^{-1} este (w^*, w) −continuă, deci D_X este w−compactă. □

Observaţia 4.4.9 *De fapt, are loc şi reciproca pe care nu o demonstrăm aici. Această echivalenţă poartă numele de Teorema lui Kakutani.*

Pe baza rezultatului de mai sus şi a Teoremei lui Weierstrass, obţinem consecinţa următoare.

Corolarul 4.4.10 *Dacă X este spaţiu Banach reflexiv, atunci pentru orice $x^* \in X^*$,*

$$\|x^*\| = \max \{ |x^*(x)| \mid \|x\| \leq 1 \}.$$

Propoziţia 4.4.11 *Dacă* $(X, \|\cdot\|) \simeq (Y, \|\cdot\|)$ *şi* X *este reflexiv, atunci* Y *este reflexiv.*

Demonstraţie Notăm cu Φ_X şi Φ_Y cele două scufundări canonice şi cu $T : X \to Y$ izomorfismul izometric dintre X şi Y. Definim $T_1 : X^* \to Y^*$ prin

$$T_1 (x^*) = x^* \circ T^{-1}$$

şi $T_2 : X^{**} \to Y^{**}$ prin

$$T_2 (x^{**}) = x^{**} \circ T_1^{-1}.$$

Cei doi operatori sunt izomorfisme izometrice.

Fie $y^{**} \in Y^{**}$. Cum T_2 este surjectiv, există $x^{**} \in X^{**}$ astfel încât $T_2 (x^{**}) = y^{**}$, adică $x^{**} \circ T_1^{-1} = y^{**}$. Folosind surjectivitatea lui Φ_X, există $x \in X$ astfel încât $\Phi_X (x) = x^{**}$. Atunci, pentru orice $y^* \in Y^*$, avem

$$\begin{aligned} y^{**} (y^*) &= x^{**} \circ T_1^{-1} (y^*) = x^{**} (y^* \circ T) = \Phi_X (x) (y^* \circ T) \\ &= (y^* \circ T) (x) = y^* (Tx) = \Phi_Y (Tx) (y^*) . \end{aligned}$$

Deci $y^{**} = \Phi_Y (Tx)$, adică Φ_Y este surjectivă. □

Propoziţia 4.4.12 *Dacă* X *este spaţiu Banach reflexiv şi* Y *este un subspaţiu liniar închis al său, atunci* Y *este spaţiu Banach reflexiv.*

Demonstraţie Fie $\psi \in Y^{**}$. Definim $\varphi \in X^{**}$ prin

$$\varphi (x^*) = \psi (x^* |_Y) , \ \forall x^* \in X^*.$$

Cum X este reflexiv, există $x \in X$ astfel încât $\Phi (x) = \varphi$. Trebuie să arătăm că $x \in Y$ pentru că astfel avem

$$x^* |_Y (x) = x^* (x) = \Phi (x) (x^*) = \varphi (x^*) = \psi (x^* |_Y) , \ \forall x^* \in X^*$$

şi pe baza Teoremei Hahn-Banach, orice $y^* \in Y^*$ poate fi extinsă la o funcţională $x^* \in X^*$, deci relaţia de mai sus asigură

$$y^* (x) = \psi (y^*) , \ \forall y^* \in Y^*.$$

Presupunem, prin reducere la absurd, că $x \notin Y$. Din forma geometrică a Teoremei Hahn-Banach, există un hiperplan care separă subspaţiul închis Y şi mulţimea compactă $\{x\}$. Deducem, printr-un argument deja standard, că există $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ astfel încât x^* se anulează pe Y şi $x^* (x) > 0$. Pentru acest x^* avem

$$\varphi (x^*) = \psi (x^* |_Y) = 0,$$

în timp ce

$$\varphi (x^*) = \Phi (x) (x^*) = x^* (x) \neq 0.$$

Contradicţia obţinută înseamnă că presupunerea făcută este falsă, deci $x \in Y$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Propoziţia 4.4.13 *Un spaţiu Banach* X *este reflexiv dacă şi numai dacă dualul său este reflexiv.*

Demonstraţie Practic, trebuie să arătăm că

$$\Phi_X(X) = X^{**} \iff \Phi_{X^*}(X^*) = X^{***}.$$

Presupunem mai întâi că $X^{**} = \Phi_X(X)$. Fixăm $u \in X^{***}$ şi observăm că funcţia $x^* : X \to \mathbb{R}$,

$$x^*(x) = u(\Phi_X(x))$$

este din X^*. Pe de altă parte,

$$x^*(x) = \Phi_X(x)(x^*), \ \forall x \in X,$$

deci

$$u(\Phi_X(x)) = \Phi_X(x)(x^*), \ \forall x \in X.$$

Cum $\Phi(x)$ parcurge X^{**} când x parcurge X, înseamnă că

$$u(x^{**}) = x^{**}(x^*), \ \forall x^{**} \in X^{**},$$

adică

$$u = \Phi_{X^*}(x^*).$$

Aceasta înseamnă că injecţia canonică a lui X^* în X^{***} este surjectivă.

Invers, presupunem că X^* este reflexiv. Din pasul anterior rezultă că X^{**} este reflexiv. Spaţiul X fiind Banach, $\Phi(X)$ este subspaţiu închis în X^{**} şi din rezultatul anterior obţinem că $\Phi(X)$ este reflexiv, deci, pe baza Propoziţiei 4.4.11, X este reflexiv. $\square$

Propoziţia 4.4.14 *Fie X spaţiu Banach. Atunci X este reflexiv şi separabil dacă şi numai dacă X^* este reflexiv şi separabil.*

Demonstraţie Dacă X^* este reflexiv şi separabil, atunci X este reflexiv şi separabil pe baza rezultatelor deja demonstrate. Invers, dacă X este reflexiv şi separabil, atunci $X^{**} \simeq \Phi(X)$ este reflexiv şi separabil, deci X^* este reflexiv şi separabil. $\square$

Teorema 4.4.15 *Dacă X este spaţiu Banach reflexiv, atunci D_X este $w-$secvenţial compactă.*

Demonstraţie Fie (x_n) şir din D_X. Considerăm subspaţiul liniar închis al lui X

$$Y = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} \operatorname{span}\{x_1, ..., x_n, ...\}$$

care este reflexiv şi evident separabil . Deducem că Y^{**} este reflexiv şi separabil. Din varianta secvenţială a Teoremei Alaoglu-Bourbaki, $D_{Y^{**}}$ este secvenţial compactă. Folosind din nou Propoziţia 4.4.7, D_Y este secvenţial compactă, deci şirul $(x_n) \subset D_Y$ are subşir $w-$convergent. $\square$

În final, trecem în revistă câteva consecinţe ale reflexivităţii.

Teorema 4.4.16 *Fie X spaţiu Banach reflexiv. Atunci:*
(i) D_X este $w-$compactă şi $w-$secvenţial compactă;
(ii) orice şir mărginit din X admite un subşir $w-$convergent;
(iii) orice mulţime $w-$închisă şi mărginită este $w-$compactă şi $w-$secvenţial compactă;
(iv) orice mulţime convexă, mărginită şi închisă în normă este $w-$compactă şi $w-$secvenţial compactă.

Demonstraţie (i) Cele două concluzii au făcut obiectul unor rezultate anterioare (Teoremele 4.4.8 şi 4.4.15).

(ii) Un şir mărginit este inclus într-un disc centrat în 0, care este mulţime $w-$secvenţial compactă.

(iii) Dacă o mulţime este mărginită în normă atunci este inclusă într-un disc centrat în 0, care este mulţime $w-$compactă şi $w-$secvenţial compactă. În plus, fiind slab închisă este şi slab secvenţial închisă. Deducem concluzia

(iv) Aplicăm Teorema lui Mazur pentru a deduce că mulţimea este slab închisă şi apoi aplicăm punctul precedent. □

Exemplul 4.4.17 De la ipotezele punctului (iv) nu putem elimina convexitatea. De exemplu, sfera unitate în ℓ^2 este măginită şi închisă în normă, dar nu este slab compactă şi nici slab secvenţial compactă întrucât şirul vectorilor unitari converge slab la 0 (a se vedea Problema 66).

4.5 Operatori compacţi. Alternativa lui Fredholm

Definiţia 4.5.1 *Fie X, Y spaţii Banach. Un operator $T \in L(X,Y)$ se numeşte compact dacă $\overline{T(D_X)}$ este mulţime compactă în Y. Notăm cu $K(X,Y)$ mulţimea operatorilor compacţi de la X la Y şi cu $K(X)$ spaţiul $K(X,X)$.*

Observaţia 4.5.2 *1. Dacă T este liniar de la X la Y şi $\overline{T(D_X)}$ este mulţime compactă în Y, atunci T este automat continuu pentru că este mărginit.*

2. Faptul că $\overline{T(D_X)}$ este mulţime compactă revine la a spune că $T(D_X)$ este mulţime relativ compactă. Reamintim că o submulţime a unui spaţiu metric complet este relativ compactă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ poate fi acoperită cu un număr finit de bile de rază ε (sau, altfel spus, într-un spaţiu metric complet mulţimile relativ compacte coincid cu cele total mărginite).

3. Proprietatea lui T de a fi operator compact poate fi reformulată astfel: pentru orice şir mărginit $(x_n) \subset X$, şirul (Tx_n) admite un subşir convergent.

Propoziţia 4.5.3 *Mulţimea $K(X,Y)$ este subspaţiu liniar închis al lui $L(X,Y)$.*

Demonstraţie Faptul că mulţimea $K(X,Y)$ este subspaţiu liniar se arată uşor dacă se ţine cont că $+$ este parte stabilă datorită incluziunii

$$\overline{(S+T)(D_X)} \subset \overline{S(D_X)} + \overline{T(D_X)},$$

şi a rezultatului cunoscut care afirmă că suma dintre două mulţimi compacte este compactă (imaginea prin aplicaţia continuă $(x,y) \to x+y$ a produsului celor două mulţimi).

Fie acum un şir $(T_n) \subset K(X,Y)$ şi $T \in L(X,Y)$ astfel încât $\|T_n - T\| \to 0$. Fie aşadar $\varepsilon > 0$. Există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\|T_n - T\| \leq 2^{-1}\varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Deci, pentru orice $x \in D_X$,

$$\|T_{n_\varepsilon}(x) - T(x)\| \leq 2^{-1}\varepsilon.$$

Cum $T_{n_\varepsilon}(D_X)$ este relativ compactă (iar Y este spaţiu Banach), poate fi acoperită cu un număr finit de bile de rază ε, deci există $k \in \mathbb{P}$ şi $y_i \in Y$, $i \in \overline{1,k}$ astfel încât

$$T_{n_\varepsilon}(D_X) \subset \bigcup_{i=1}^{k} D\left(y_i, 2^{-1}\varepsilon\right).$$

Deducem că

$$T(D_X) \subset \bigcup_{i=1}^{k} D(y_i, \varepsilon).$$

Deci T este compact. □

Definiţia 4.5.4 *Fie X, Y spaţii Banach. Un operator $T \in L(X,Y)$ se numeşte de rang finit dacă $T(X)$ are dimensiune finită.*

Observaţia 4.5.5 *Evident, orice operator de rang finit este compact.*

Corolarul 4.5.6 *Dacă $T \in L(X,Y)$ este limita în normă a unui şir de operatori de rang finit, atunci este compact.*

Exemplul 4.5.7 Fie operatorul $T : \ell^2 \to \ell^2$ dat prin

$$T(x) = \left(\frac{x_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{P}}, \ \forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{P}} \in \ell^2.$$

Se verifică uşor că T este liniar continuu. De asemenea, se observă că T este limita şirului de operatori de rang finit $(T_n)_{n\in\mathbb{P}}$ dat prin

$$T_n(x) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, ..., \frac{x_n}{n}, 0, ...\right), \ \forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{P}} \in \ell^2, \ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Deci T este un operator compact care nu este de rang finit (toţi vectorii unitari se află în $\operatorname{Im} T$).

Exemplul 4.5.8 Fie $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Pentru $f \in C([0,1])$ definim

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt.$$

Atunci T este un operator liniar continuu compact de la $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ la $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Demonstrăm aceste afirmaţii. Este clar că $Tf \in C([0,1])$ pentru orice $f \in C([0,1])$. Liniaritatea lui T este evidentă. Apoi, pentru orice $f \in C([0,1])$ şi orice $x \in [0,1]$,

$$|(Tf)(x)| = \left|\int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt\right| \leq \int_0^1 |K(x,t) f(t)|\, dt \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty,$$

deci

$$\|Tf\|_\infty \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty,$$

adică T este continuu. Pentru a arăta că T este compact, trebuie să mai arătăm că $T\left(D_{C([0,1])}\right)$ este relativ compactă, lucru pentru care folosim Teorema Arzelà-Ascoli. Mărginirea mulţimii

$T\left(D_{C([0,1])}\right)$ este evidentă din continuitatea lui T. Trebuie să arătăm că această mulţime de funcţii este echicontinuă. Pentru orice $x, x' \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|(Tf)(x) - (Tf)(x')| &= \left| \int_0^1 (K(x,t) - K(x',t)) f(t)\, dt \right| \\
&\leq \|f\|_\infty \sup_{t\in[0,1]} |K(x,t) - K(x',t)|.
\end{aligned}$$

Dar K fiind continuă pe compactul $[0,1]^2$, este uniform continuă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x, x', t, t' \in [0,1]$ cu $|x - x'| \leq \delta$, $|t - t'| < \delta$ avem

$$|K(x,t) - K(x',t')| < \varepsilon.$$

În particular, pentru orice $t \in [0,1]$

$$|K(x,t) - K(x',t)| < \varepsilon$$

dacă $x, x' \in [0,1]$ cu $|x - x'| \leq \delta$. Deci pentru orice $f \in D_{C([0,1])}$, orice $x, x' \in [0,1]$ cu $|x - x'| \leq \delta$,

$$|(Tf)(x) - (Tf)(x')| \leq \varepsilon \|f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Concluzionăm că $T\left(D_{C([0,1])}\right)$ este echicontinuă deci, în final, relativ compactă.

Exemplul 4.5.9 Dacă X este un spaţiu Banach infinit dimensional, atunci id_X nu este un operator compact.

Reamintim următorul rezultat important.

Lema 4.5.10 (Lema lui Riesz) *Fie Y este subspaţiu liniar închis propriu al unui spaţiu Banach X şi $\varepsilon \in (0,1)$. Atunci există $x \in S_X$ astfel încât $d(x,Y) \geq \varepsilon$.*

Demonstraţie Fie $u \in X \setminus Y$. Cum Y este închis, $d(u,Y) > 0$. Din definiţia distanţei, pentru că $\varepsilon \in (0,1)$, există $v \in Y$ astfel încât

$$\|u - v\| < \frac{d(u,Y)}{\varepsilon}$$

Considerăm acum $\overline{x} = \|u - v\|^{-1}(u - v) \in S_X$ şi pentru orice $y \in Y$

$$\|\overline{x} - y\| = \left\| \frac{u - v}{\|u - v\|} - y \right\| = \left\| \frac{u - (v + \|u - v\| y)}{\|u - v\|} \right\| \geq \frac{d(u,Y)}{\|u - v\|} > \varepsilon.$$

Deci, $d(\overline{x}, Y) \geq \varepsilon$. □

Teorema 4.5.11 *Fie X spaţiu Banach şi $T \in K(X)$. Atunci:*
(i) $\mathrm{Ker}(\mathrm{id} - T)$ *este finit dimensional;*
(ii) $\mathrm{Im}(\mathrm{id} - T)$ *este închisă.*
(iii) Dacă $(\mathrm{id} - T)$ *este injectiv, atunci este inversabil.*

Demonstraţie Dacă X este finit dimensional, toate afirmaţiile sunt evidente. Presupunem deci că X este infinit dimensional.

(i) Avem $u \in \operatorname{Ker}(\operatorname{id} - T)$ dacă şi numai dacă $u = T(u)$. Asta înseamnă că bila unitate închisă din subspaţiul $\operatorname{Ker}(\operatorname{id} - T)$ este inclusă în $\overline{T(D_X)}$, deci este compactă. Asta înseamnă că $\operatorname{Ker}(\operatorname{id} - T)$ este de dimensiune finită.

(ii) Fie $(x_n)_n \subset X$ şi $(y_n)_n = (x_n - Tx_n)_n \subset \operatorname{Im}(\operatorname{id} - T)$ astfel încât $y_n \to y$. Arătăm că $y \in \operatorname{Im}(\operatorname{id} - T)$.

Presupunem mai întâi că (x_n) este mărginit. Cum T este operator compact, există un subşir (x_{n_k}) astfel încât

$$Tx_{n_k} \to z \in X.$$

Atunci

$$x_{n_k} = x_{n_k} - Tx_{n_k} + Tx_{n_k} \to y + z$$

şi deducem că

$$Tx_{n_k} \to T(y+z).$$

Deci $T(y+z) = z$. Avem

$$y = y + z - z = y + z - T(y+z) = (\operatorname{id} - T)(y+z) \in \operatorname{Im}(\operatorname{id} - T).$$

Presupunem acum că (x_n) nu este mărginit. Fie şirul de numere reale

$$(d_n)_n = (d(x_n, \operatorname{Ker}(\operatorname{id} - T)))_n.$$

Există $z_n \in \operatorname{Ker}(\operatorname{id} - T)$ astfel încât

$$\|x_n - z_n\| \leq 2d_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Arătăm că şirul numeric (d_n) este mărginit. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un subşir al acestuia (notat la fel, pentru uşurinţa scrierii) divergent la infinit, adică $(d_n) \to \infty$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că toţi termenii acestui subşir sunt nenuli şi luăm, pentru orice n

$$\alpha_n = \frac{x_n - z_n}{2d_n}.$$

Dar, (α_n) este mărginit şi cum T este operator compact, $(T\alpha_n)$ admite subşir convergent la un element $\beta \in X$. Pe de altă parte,

$$T\alpha_n - \alpha_n = \frac{T(x_n - z_n) - x_n + z_n}{2d_n} = \frac{-y_n}{2d_n} \to 0.$$

Din relaţia de mai sus, (α_n) are un subşir convergent la β, deci $\beta \in \operatorname{Ker}(\operatorname{id} - T)$. Însă, pentru n suficient de mare, $\|\alpha_n - \beta\| < 2^{-1}$, deci

$$\left\|\frac{x_n - z_n}{2d_n} - \beta\right\| < 2^{-1},$$

adică

$$\|x_n - z_n - 2d_n\beta\| < d_n,$$

ceea ce este fals întrucât $z_n + 2d_n\beta \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}-T)$. Conchidem că (d_n) este mărginit. Evident, $(x_n - z_n)$ este de asemenea mărginit. Cum $(z_n) \subset \mathrm{Ker}\,(\mathrm{id}-T)$, avem $(\mathrm{id}-T)(x_n - z_n) \to y$ şi am revenit la cazul precedent pentru care am arătat deja că are loc concluzia.

(iii) Trebuie să arătăm că $\mathrm{id}-T$ este surjectiv. Fie $X_1 = \mathrm{Im}\,(\mathrm{id}-T)$ şi presupunem, prin reducere la absurd, că $X_1 \neq X$. Din punctul anterior, X_1 este spaţiu Banach şi $T(X_1) \subset X_1$ pentru că $y \in T(X_1)$ se scrie ca $y = T(v) - T(Tv)$ cu $v \in X$, deci $y = (\mathrm{id}-T)(Tv)$. Mai mult, restricţia lui T la X_1 este din $K(X_1)$.

Considerăm subspaţiul liniar închis $X_2 = (\mathrm{id}-T)(X_1)$. Orice $y \in X_2$ se scrie ca $y = x - T(x)$ cu $x \in X_1$, ceea ce înseamnă că $y \in X_1$, adică $X_2 \subset X_1$. Mai mult, incluziunea este strictă pentru că $\mathrm{id}-T$ este injectiv: luând $y \in X \setminus X_1$, $(\mathrm{id}-T)(y) \in X_1$ dar nu poate fi în X_2 pentru că s-ar contrazice injectivitatea.

Inductiv, construim şirul strict descrescător de subspaţii închise

$$(X_n)_{n\in\mathbb{P}} = ((\mathrm{id}-T)^n (X))_{n\in\mathbb{P}},$$

unde puterea n semnifică compunerea de n ori a operatorului.

Din Lema lui Riesz (Lema 4.5.10), pentru orice n, există $u_n \in X_n \cap S_X$ astfel încât $d(u_n, X_{n+1}) > 2^{-1}$. Atunci, pentru orice n, m

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n - u_m,$$

şi dacă $n > m$, cum $X_{n+1} \subset X_n \subset X_{m+1} \subset X_m$,

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in X_{m+1},$$

deci

$$\|Tu_n - Tu_m\| \geq d(u_m, X_{m+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Acesta este imposibil pentru că (u_n) este mărginit şi T este compact. Am ajuns la o contradicţie, deci $\mathrm{Im}\,(\mathrm{id}-T) = X$. □

Teorema 4.5.12 (Alternativa lui Fredholm) *Fie X spaţiu Banach şi $T \in K(X)$. Atunci are loc exact una dintre următoarele două afirmaţii:*

(i) ecuaţia $x - Tx = 0$ are o soluţie nenulă (deci o infinitate de soluţii);

(ii) pentru orice $y \in X$ ecuaţia $x - Tx = y$ are soluţie unică.

Demonstraţie Rezultă din punctul (iii) al teoremei precedente. □

Observaţia 4.5.13 *În notaţiile din Exemplul 4.5.8, pe baza teoremei precedente obţinem următorul rezultat: fie ecuaţia (în necunoscuta f)*

$$f - \int_0^1 K(\cdot, t) f(t)\, dt = 0$$

are o soluţie nenulă, fie pentru orice $g \in C([0,1])$ ecuaţia (în necunoscuta f)

$$f - \int_0^1 K(\cdot, t) f(t)\, dt = g$$

are o unică soluţie.

Capitolul 5

Spaţii Hilbert

Ca şi în cazul primului capitol, vom trece mai întâi în revistă concepte şi rezultate întâlnite deja în cursurile anterioare. Structura fină a unui spaţiu Hilbert permite obţinerea unor rezultate noi şi foarte puternice, aşa cum vom constata în rezultatele principale ale acestui capitol.

5.1 Recapitulare şi completări

Definiţia 5.1.1 *Fie X spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$. Se numeşte produs scalar pe X o funcţie $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ având următoarele proprietăţi:*

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pentru orice $x \in X$ şi $\langle x, x \rangle = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$;

(ii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y, z \in X$;

(iii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, pentru orice $x, y \in X$.

Perechea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se numeşte spaţiu cu produs scalar.

Exemplul 5.1.2 1. Pe $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ se defineşte produsul scalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

2. Dacă X e spaţiu liniar finit dimensional de dimensiune $d \geq 1$ şi $E = \{e_1, ..., e_d\}$ este o bază algebrică a sa, atunci pentru orice $x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k$ şi $y = \sum_{k=1}^{d} y_k e_k$ scrise în baza E se defineşte produsul scalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k y_k.$$

3. Pe ℓ^2 se defineşte produsul scalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

(E simplu de văzut că această serie este convergentă tocmai pentru că $x, y \in \ell^2$.)
4. Pe $C([a,b])$ se defineşte produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

5. Pe $L^2(X, \mu, \mathbb{R})$ se defineşte produsul scalar

$$\langle f, g\rangle = \int_X (f \cdot g)\, d\mu.$$

Propoziţia 5.1.3 *Fie* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un spaţiu cu produs scalar. Atunci:*
(i) $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$, *pentru orice* $x, y \in X$ *(inegalitatea lui Schwarz);*
(ii) $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *este o normă pe* X.

Demonstraţie (i) Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi orice $x, y \in X$,

$$0 \leq \langle x - ay, x - ay\rangle = \langle x, x\rangle - 2a \langle x, y\rangle + a^2 \langle y, y\rangle .$$

Folosind proprietăţile trinomului de gradul al doilea, obţinem inegalitatea.
(ii) Verificăm doar a treia proprietate a normei, primele două fiind imediate. Pentru orice $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle} + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 . \end{aligned}$$

Deci $\|\cdot\|$ este o normă. □

Observaţia 5.1.4 *Inegalitatea lui Schwarz se scrie echivalent*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| , \ \forall x, y \in X.$$

Propoziţia 5.1.5 *Fie* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un spaţiu cu produs scalar. Atunci pentru orice* $x, y \in X$*:*
(i) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *(identitatea paralelogramului);*
(ii) $4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$.

Demonstraţie Ambele relaţii se arată prin calcul direct. □

Teorema 5.1.6 *Dacă* $(X, \|\cdot\|)$ *este spaţiu liniar normat pe care are loc identitatea paralelogramului atunci există un produs scalar pe* X *care induce norma* $\|\cdot\|$.

Demonstraţie Definim

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}, \ \forall x, y \in X$$

şi arătăm că acesta este produs scalar, iar norma provine din acesta.
Prima şi a treia proprietate din Definiţia 5.1.1 sunt evidente.
Pentru a arăta proprietatea a doua (adică liniaritatea în raport cu prima variabilă), arătăm pe rând aditivitatea şi omogenitatea.

Fie $x_1, x_2, x_3 \in X$. Pe baza identităţii paralelogramului avem

$$\|x_1 + x_2 + x_3\|^2 + \|x_1 + x_2 - x_3\|^2 = 2\left(\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_3\|^2\right)$$
$$\|x_1 - x_2 + x_3\|^2 + \|x_1 - x_2 - x_3\|^2 = 2\left(\|x_1 - x_2\|^2 + \|x_3\|^2\right),$$

relaţii care prin scădere conduc la

$$\begin{aligned}&\left(\|x_1 + x_2 + x_3\|^2 - \|x_1 - x_2 + x_3\|^2\right) + \left(\|x_1 + x_2 - x_3\|^2 - \|x_1 - x_2 - x_3\|^2\right)\\ &= 2\left(\|x_1 + x_2\|^2 - \|x_1 - x_2\|^2\right),\end{aligned}$$

adică

$$\langle x_1 + x_3, x_2\rangle + \langle x_1 - x_3, x_2\rangle = 2\langle x_1, x_2\rangle. \tag{5.1}$$

Pentru $x_3 = x_1$, deducem

$$\langle 2x_1, x_2\rangle + \langle 0, x_2\rangle = 2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Dar, din relaţia de definiţie, $\langle 0, x_2\rangle = 0$,

$$\langle 2x_1, x_2\rangle = 2\langle x_1, x_2\rangle, \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

Fie acum $x, y, z \in X$. Alegem în (5.1) $x_1 = 2^{-1}(x+y)$, $x_3 = 2^{-1}(x-y)$, $x_2 = z$. Atunci

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = 2\left\langle 2^{-1}(x+y), z\right\rangle = \langle x+y, z\rangle$$

şi aditivitatea este demonstrată.

Demonstrăm acum omogenitatea. Fie $x, y \in X$. Din aditivitate, inducţie, pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle.$$

Înlocuind x cu $n^{-1}x$ pentru $n \in \mathbb{P}$ deducem şi

$$\frac{1}{n}\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{1}{n}x, y\right\rangle.$$

Prin combinaţia acestor relaţii obţinem omogenitatea pentru scalarii raţionali pozitivi.

Acum, prin definiţia lui $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

$$\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$$

şi obţinem omogenitatea pentru toţi scalarii raţionali. Cum $\langle\cdot, y\rangle$ este continuă pentru orice $y \in X$, deducem omogenitatea pentru scalarii reali.

În sfârşit, este clar că $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$, deci norma provine din produsul scalar definit pe baza ei. □

Corolarul 5.1.7 *O normă pe un spaţiu liniar provine dintr-un produs scalar dacă şi numai dacă satisface identitatea paralelogramului.*

Exemplul 5.1.8 Norma $\|\cdot\|_1$ pe $\mathbb{R}^2$ nu provine dintr-un produs scalar pentru că nu satisface identitatea paralelogramului. Într-adevăr, se observă cu uşurinţă că vectorii bazei canonice nu verifică această identitate.

Observaţia 5.1.9 *Pe baza inegalităţii lui Schwarz, produsul scalar este continuu în raport cu fiecare din cele două variabile în raport cu topologia normei. De fapt, produsul scalar este continuu în ansamblul variabilelor, lucru care se arată direct şi mai jos.*

Propoziţia 5.1.10 *Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu cu produs scalar. Atunci pentru orice două şiruri $(x_n), (y_n)$ convergente (în topologia dată de norma indusă de produsul scalar) la $x \in X$, respectiv $y \in X$ avem*

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle .$$

Demonstraţie Avem

$$\begin{aligned}|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\ &\le \|x_n - x\| \|y_n\| + \|y_n - y\| \|x\| \to 0,\end{aligned}$$

ceea ce demonstrează propoziţia. □

Definiţia 5.1.11 *Se numeşte spaţiu Hilbert un spaţiu cu produs scalar care este complet în raport cu norma indusă de produsul scalar.*

Exemplul 5.1.12 Spaţiile de la Exemplul 5.1.2 1, 2, 3, 5 sunt spaţii Hilbert. Spaţiul de la Exemplul 5.1.2 4 nu este Hilbert, pentru că $C([a, b])$ nu este complet în raport cu nicio normă $\|\cdot\|_p$.

Teorema 5.1.13 (existenţa elementului de cea mai bună aproximare) *Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu Hilbert şi $C \subset X$ o mulţime nevidă, convexă şi închisă. Atunci, pentru orice $x \in X$ există un unic element $y \in C$ astfel încât*

$$d(x, C) = \|x - y\| .$$

În plus, y este caracterizat de proprietăţile $y \in C$ şi $\langle x - y, u - y\rangle \le 0$ pentru orice $u \in C$.

Demonstraţie Cum pentru orice $x \in X$, mulţimea $C - x$ este nevidă, convexă şi închisă, este suficient să arătăm prima parte pentru $x = 0$. Adică, trebuie demonstrat că există un unic $z \in C$ astfel încât

$$d(0, C) = \inf \{\|c\| \mid c \in C\} = \|z\| .$$

Arătăm mai întâi existenţa. Notăm $d(0, C)$ cu γ. Pentru orice $y \in C$, $\|y\| \ge \gamma$ şi conform caracterizării infimumului, pentru orice $n \in \mathbb{P}$, există $y_n \in C$ astfel încât

$$\gamma^2 \le \|y_n\|^2 \le \gamma^2 + \frac{1}{n}. \tag{5.2}$$

Arătăm că (y_n) este şir Cauchy folosind identitatea paralelogramului. Avem, pentru orice $n, m \in \mathbb{P}$,

$$\begin{aligned}\|y_n - y_m\|^2 &= 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m\right\|^2 \\ &\le 2\left(\gamma^2 + \frac{1}{n} + \gamma^2 + \frac{1}{m}\right) - 4\gamma^2 = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right),\end{aligned}$$

unde am folosit faptul că $2^{-1}y_n + 2^{-1}y_m \in C$ pentru că C este convexă. Inegalitatea de mai sus arată că (y_n) este şir fundamental. Cum spaţiul este complet, există $z \in C$ astfel încât $\lim y_n = z$. De asemenea, prin trecere la limită în (5.2), $\|z\| = \lim \|y_n\| = \gamma$.

Demonstrăm acum unicitatea. Dacă $0 \in C$, nu avem nimic de arătat. Luăm $0 \notin C$. Considerăm $a_1, a_2 \in C$ cu $d(0, C) = \|a_1\| = \|a_2\|$. Folosind egalitatea paralelogramului avem

$$\|a_1 + a_2\|^2 + \|a_1 - a_2\|^2 = 2\|a_1\|^2 + 2\|a_2\|^2,$$

adică

$$\|a_1 + a_2\|^2 + \|a_2 - a_1\|^2 = 4\gamma^2$$

şi împărţind prin 4 obţinem

$$\left\|\frac{a_1 + a_2}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{a_2 - a_1}{2}\right\|^2 = \gamma^2.$$

Cum C este convexă, $2^{-1}(a_1 + a_2) \in C$, deci $\left\|\frac{a_1+a_2}{2}\right\|^2 \geq \gamma^2$. Această relaţie şi egalitatea precedentă arată că $\|a_2 - a_1\| = 0$, deci $a_1 = a_2$. Demonstraţia unicităţii este completă.

Să demonstrăm acum, din nou pentru $x \in X$ fixat, că $y \in C$ a cărui existenţă şi unicitate tocmai au fost probate verifică relaţia $\langle x - y, u - y\rangle \leq 0$ pentru orice $u \in C$. Pentru aceasta luăm $u \in C$. Atunci pentru orice $\alpha \in (0, 1]$

$$v = \alpha u + (1 - \alpha)y \in C.$$

Deci

$$\|x - y\| \leq \|x - \alpha u - (1 - \alpha)y\| = \|x - y - \alpha(u - y)\|,$$

de unde, prin ridicare la pătrat,

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - 2\alpha \langle x - y, u - y\rangle + \alpha^2 \|u - y\|^2.$$

După reducere şi simplificarea cu $\alpha > 0$ obţinem

$$0 \leq -2\langle x - y, u - y\rangle + \alpha \|u - y\|^2.$$

Făcând $\alpha \to 0$ obţinem inegalitatea anunţată.

Invers, dacă un element $c \in C$ satisface $\langle x - c, u - c\rangle \leq 0$ pentru orice $u \in C$, atunci pentru orice $v \in C$

$$\|x - c\|^2 - \|x - v\|^2 = 2\langle x - c, v - c\rangle - \|c - v\|^2 \leq 0,$$

deci c coincide cu y. Demonstraţia este încheiată. □

Definiţia 5.1.14 *În contextul teoremei anterioare y se numeşte proiecţia lui x pe C şi se notează $\mathrm{pr}_C\, x$.*

Propoziţia 5.1.15 *Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu Hilbert şi $C \subset X$ o mulţime nevidă, convexă şi închisă. Atunci operatorul de proiecţie $X \ni x \mapsto \mathrm{pr}_C\, x \in C$ este $1-$Lipschitz.*

Demonstraţie Fie $x_1, x_2 \in X$. Atunci, conform Teoremei 5.1.13, pentru orice $v \in C$,

$$\begin{aligned} \langle x_1 - \operatorname{pr}_C x_1, v - \operatorname{pr}_C x_1 \rangle &\leq 0 \\ \langle x_2 - \operatorname{pr}_C x_2, v - \operatorname{pr}_C x_2 \rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

Înlocuind în prima relaţie v cu $\operatorname{pr}_C x_2$ şi în a doua v cu $\operatorname{pr}_C x_1$ şi adunând, găsim

$$\|\operatorname{pr}_C x_1 - \operatorname{pr}_C x_2\|^2 \leq \langle x_1 - x_2, \operatorname{pr}_C x_1 - \operatorname{pr}_C x_2 \rangle,$$

de unde concluzia. $\square$

Propoziţia 5.1.16 *Fie Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu Hilbert şi $Y \subset X$ un subspaţiu liniar închis diferit de $\{0\}$. Atunci operatorul de proiecţie $X \ni x \mapsto \operatorname{pr}_Y x \in Y$ este operator liniar continuu de normă* 1.

Demonstraţie Fie $x \in X$. Caracterizarea elementului de proiecţie a lui x pe Y dată mai sus, şi anume, $\operatorname{pr}_Y x \in Y$ şi $\langle x - \operatorname{pr}_Y x, u - \operatorname{pr}_Y x \rangle \leq 0$ pentru orice $u \in Y$ devine, pe baza liniarităţii lui Y, $\operatorname{pr}_Y x \in Y$ şi $\langle x - \operatorname{pr}_Y x, u \rangle = 0$ pentru orice $u \in Y$. Cu această precizare, liniaritatea rezultă imediat pentru că pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, orice $x, y \in X$ şi orice $u \in Y$ avem

$$\begin{aligned} &\langle \alpha x + \beta y - \operatorname{pr}_Y (\alpha x + \beta y), u \rangle = 0, \\ &\langle x - \operatorname{pr}_Y x, u \rangle = 0, \langle y - \operatorname{pr}_Y y, u \rangle = 0, \end{aligned}$$

de unde găsim, prin operaţii algebrice,

$$\langle \alpha \operatorname{pr}_Y x + \beta \operatorname{pr}_Y y - \operatorname{pr}_Y (\alpha x + \beta y), u \rangle = 0.$$

Alegând $u = \alpha \operatorname{pr}_Y x + \beta \operatorname{pr}_Y y - \operatorname{pr}_Y (\alpha x + \beta y) \in Y$, deducem concluzia.

Propoziţia anterioară dovedeşte continuitatea acestui operator şi, în plus, $\|\operatorname{pr}_Y\| \leq 1$. Cum $Y \cap S_X \neq \emptyset$, deducem că $\|\operatorname{pr}_Y\| = 1$. $\square$

5.2 Ortogonalitate

Definiţia 5.2.1 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar.*

(i) Spunem că două elemente $x, y \in X$ sunt ortogonale şi scriem $x \perp y$ dacă $\langle x, y \rangle = 0$.

(ii) Fie $x, y \in X \setminus \{0\}$. Se numeşte unghiul celor două elemente numărul, notat $\widehat{(x, y)}$, din intervalul $[0, \pi]$ pentru care

$$\cos \widehat{(x, y)} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Dacă $\widehat{(x, y)} \in \{0, \pi\}$, spunem că vectorii x şi y sunt paraleli sau coliniari.

Observaţia 5.2.2 *Dacă $x, y \in X \setminus \{0\}$ atunci $x \perp y$ dacă şi numai dacă $\widehat{(x, y)} = \frac{\pi}{2}$.*

Definiţia 5.2.3 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi $A \subset X$. Se numeşte complementul ortogonal al lui A mulţimea*

$$A^{\perp} = \{x \in X \mid x \perp a, \ \forall a \in A\}.$$

Propoziţia 5.2.4 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi $A \subset X$. Atunci:*
(i) $A^{\perp} = \overline{\operatorname{span} A}^{\perp}$ şi $A^{\perp}$ este subspaţiu liniar închis al lui X;
(ii) $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$;
(iii) $A \cap A^{\perp} = \{0\}$ dacă $0 \in A$ şi $A \cap A^{\perp} = \emptyset$ dacă $0 \notin A$.

Demonstraţie Toate afirmaţiile rezultă direct din definiţii. □

Lema 5.2.5 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi Y un subspaţiu vectorial al lui X. Fie $x \in X$ şi $y \in Y$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $x - y \in Y^{\perp}$;
(ii) $\|x - y\| \leq \|x - u\|$, pentru orice $u \in Y$.

Demonstraţie Fie $z = x - y$. Atunci, pentru orice $u \in Y$

$$x - u = (x - y) - (u - y) = z - v,$$

unde $v = u - y$. Pentru $y \in Y$ fixat aplicaţia $Y \ni u \mapsto v = u - y \in Y$ este o bijecţie. Deci:
(i) se scrie $z \in Y^{\perp}$;
(ii) se scrie $\|z\| \leq \|z - v\|$ pentru orice $v \in Y$ adică, dacă ridicăm la pătrat şi efectuăm calculele, $2 \langle v, z \rangle \leq \|v\|^2$ pentru orice $v \in Y$.

Acum, (i) $\Longrightarrow$ (ii) este evidentă. Demonstrăm (ii) $\Longrightarrow$ (i). Aplicăm (ii) pentru αv cu $\alpha \in \mathbb{R}$ şi avem

$$2\alpha \langle v, z \rangle \leq \alpha^2 \|v\|^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in Y.$$

Dacă $z \notin Y^{\perp}$, există $y \in Y$ astfel încât $\langle z, y \rangle \neq 0$. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $\langle z, y \rangle > 0$ şi cum

$$2\alpha \langle y, z \rangle \leq \alpha^2 \|y\|^2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

prin împărţire la $\alpha > 0$ şi făcând $\alpha \to 0$, obţinem

$$\|y\|^2 \geq \frac{2 \langle y, z \rangle}{\alpha} \to \infty,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Deci $z \in Y^{\perp}$. □

Corolarul 5.2.6 *Fie X un spaţiu Hilbert şi Y un subspaţiu vectorial închis al lui X. Fie $x \in X$ şi $y \in Y$. Atunci $y = \operatorname{pr}_Y x$ dacă şi numai dacă $x - y \in Y^{\perp}$.*

Definiţia 5.2.7 *Spunem că un spaţiu liniar X este sumă directă a două subspaţii vectoriale Y şi Z ale sale dacă pentru orice $x \in X$, există şi sunt unice două elemente $y \in Y$, $z \in Z$ astfel încât $x = y + z$. Scriem $X = Y \oplus Z$ şi observăm că definiţia este echivalentă cu $X = Y + Z$ şi $Y \cap Z = \{0\}$.*

Teorema 5.2.8 (de descompunere ortogonală) *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu Hilbert şi $Y \subset X$ un subspaţiu vectorial închis al lui X. Atunci $X = Y \oplus Y^{\perp}$, adică pentru orice $x \in X$ există şi sunt unice două elemente $y \in Y$ şi $z \in Y^{\perp}$ astfel încât $x = y + z$. În plus, pentru orice $v \in Y$,*

$$\|x - v\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - v\|^2.$$

Demonstraţie Fie $x \in X$. Cum Y este, ca mulţime, nevidă, convexă şi închisă, din Teorema 5.1.13, există un unic $y \in Y$ astfel încât

$$\|x - y\| \leq \|x - u\|, \ \forall u \in Y.$$

Conform Lemei 5.2.5, $x - y \in Y^{\perp}$. Deci $x = y + z$, unde $z = x - y$. Unicitatea descompunerii rezultă din faptul că $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$.

Arătăm ultima concluzie. Fie $v \in Y$. Atunci

$$x - v = x - y + (y - v).$$

Cum $(x - y) \perp (y - v)$, prin ridicare la pătrat,

$$\|x - v\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - v\|^2,$$

adică ceea ce trebuia să demonstrăm. □

Propoziţia 5.2.9 *Dacă Y este subspaţiu vectorial închis al spaţiului Hilbert X, atunci are loc egalitatea $\left(Y^{\perp}\right)^{\perp} = Y$.*

Demonstraţie Incluziunea $Y \subset \left(Y^{\perp}\right)^{\perp}$ are loc mereu. Fie $x \in \left(Y^{\perp}\right)^{\perp}$. Atunci, conform Teoremei 5.2.8, există şi sunt unice două elemente $y \in Y$ şi $z \in Y^{\perp}$ astfel încât $x = y + z$. Înmulţim scalar cu z această egalitate şi avem $\|z\|^2 = 0$, deci $x = y \in Y$. □

5.3 Dualitate în spaţii Hilbert

Dualul unui spaţiu Hilbert poate fi descris explicit.

Teorema 5.3.1 (Teorema lui Riesz) *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu Hilbert peste $\mathbb{R}$. Pentru orice $y \in X$, funcţia $f_y : X \to \mathbb{R}$ dată prin $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ satisface $f_y \in X^*$ şi $\|f_y\|_{X^*} = \|y\|_X$. Reciproc, pentru orice $x^* \in X^*$, există un unic $y \in X$ astfel încât $x^* = f_y$.*

Demonstraţie Faptul că f_y este liniară pentru orice y este evident. Apoi, pentru orice $x \in X$

$$|f_y(x)| \leq \|x\| \|y\|,$$

deci f_y este continuă şi $\|f_y\| \leq \|y\|$. Dar,

$$\|y\|^2 = |f_y(y)| \leq \|f_y\| \|y\|,$$

deci $\|f_y\| \geq \|y\|$. Aşadar, are loc egalitatea.

Fie acum $x^* \in X^*$. Dacă $x^* = 0$, luăm $y = 0$ şi $x^* = f_y$. Presupunem că $x^* \neq 0$. Atunci, $\operatorname{Ker} x^* \neq X$ şi din Teorema de descompunere ortogonală deducem că $(\operatorname{Ker} x^*)^{\perp} \neq \{0\}$. Fie $z \in (\operatorname{Ker} x^*)^{\perp} \setminus \{0\}$. Dacă $z \in \operatorname{Ker} x^*$, atunci am avea $\|z\|^2 = 0$, ceea ce nu se poate. Deci $x^*(z) \neq 0$. Fie $x \in X$. Observăm că

$$x^*\left(x - \frac{x^*(x)}{x^*(z)} z\right) = 0,$$

deci

$$\left\langle z, x - \frac{x^*(x)}{x^*(z)} z \right\rangle = 0,$$

adică

$$\langle x, z \rangle = \frac{x^*(x)}{x^*(z)} \|z\|^2.$$

Aşadar, pentru orice $x \in X$,

$$x^*(x) = \left\langle x, \frac{x^*(z)}{\|z\|^2} z \right\rangle,$$

ceea ce înseamnă că $x^* = f_y$, unde

$$y = \frac{x^*(z)}{\|z\|^2} z.$$

Deci are loc rezultatul de existenţă. Demonstrăm, în final, unicitatea lui y. Dacă $f_y = f_z$ pentru $y, z \in X$, atunci $\langle x, y - z \rangle = 0$ pentru orice $x \in X$, ceea ce atrage $y = z$. □

Observaţia 5.3.2 *Aşadar Teorema lui Riesz arată faptul că un spaţiu Hilbert este izomorf izometric cu dualul său şi* $x^* \in X^*$ *dacă şi numai dacă* $x^* = \langle y, \cdot \rangle$ *cu* $y \in X$.

În particular, convergenţa slabă pe X *devine*

$$\left(x_n \xrightarrow{w} x \right) \iff \left(\langle y, x_n \rangle \to \langle y, x \rangle, \ \forall y \in X \right).$$

Propoziţia 5.3.3 *Dacă* X *este spaţiu Hilbert, atunci* X^* *este spaţiu Hilbert.*

Demonstraţie Fie $x^*, y^* \in X^*$. Fie $x, y \in X$ elementele corespunzătoare date de Teorema lui Riesz. Definim $\langle x^*, y^* \rangle = \langle x, y \rangle$. Se arată uşor că acesta este un produs scalar care induce norma pe X^*. Cum X^* este şi complet, deducem că este spaţiu Hilbert. □

Teorema 5.3.4 *Orice spaţiu Hilbert este reflexiv.*

Demonstraţie Fie $\Phi : X \to X^{**}$ scufundarea canonică în bidual. Trebuie să arătăm că Φ este surjectivă. Fie $x^{**} \in X^{**}$. Cum X^* este spaţiu Hilbert, din Teorema lui Riesz, există $y^* \in X^*$ astfel încât pentru orice $x^* \in X^*$,

$$x^{**}(x^*) = \langle x^*, y^* \rangle = \langle x, y \rangle,$$

unde x, y sunt elementele corespunzătoare pentru x^* şi y^* date de Teorema lui Riesz. Astfel,

$$x^{**}(x^*) = x^*(y), \ \forall x^* \in X^*,$$

deci $x^{**} = \Phi(y)$. □

Teorema 5.3.5 *Fie* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un spaţiu Hilbert. Dacă* $T \in L(X)$ *atunci există un unic operator* $T^* \in L(X)$ *astfel încât*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \ \forall x, y \in X.$$

În plus, $\|T\| = \|T^*\|$.

Demonstraţie Pentru orice y fixat considerăm $x^* : X \to \mathbb{R}$,

$$x^*(x) = \langle Tx, y \rangle.$$

Cum T e liniar şi continuu, $x^* \in X^*$ şi conform Teoremei 5.3.1 există un unic $z_y \in X$ astfel încât $x^* = \langle \cdot, z_y \rangle$. Prin urmare, definim $T^* : X \to X$ prin $T^*(y) = z_y$ şi chiar din această definiţie avem

$$x^*(x) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle, \ \forall x \in X.$$

Fie acum $y_1, y_2 \in X$ şi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Pentru orice $x \in X$

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \rangle &= \langle Tx, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle = \alpha_1 \langle Tx, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \alpha_1 \langle x, T^* y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x, T^* y_2 \rangle = \langle x, \alpha_1 T^* y_1 + \alpha_2 T^* y_2 \rangle. \end{aligned}$$

De aici rezultă că $T^*(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T^* y_1 + \alpha_2 T^* y_2$, adică T^* este liniar.

Pentru orice $x, y \in X$,

$$|\langle x, T^* y \rangle| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \|y\| \leq \|T\| \|x\| \|y\|.$$

Alegem $x = T^* y$ şi avem

$$\|T^* y\|^2 \leq \|T\| \|T^* y\| \|y\|,$$

deci

$$\|T^* y\| \leq \|T\| \|y\|,$$

adică $T^* \in L(X)$ şi $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Pe de altă parte, din nou pentru orice $x, y \in X$,

$$|\langle Tx, y \rangle| = |\langle x, T^* y \rangle| \leq \|T^*\| \|x\| \|y\|.$$

Alegem $y = Tx$ şi avem

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^*\| \|Tx\| \|x\|,$$

deci

$$\|Tx\| \leq \|T^*\| \|x\|,$$

adică $\|T\| \leq \|T^*\|$. Avem aşadar concluzia. □

Definiţia 5.3.6 *Operatorul T^* definit în teorema de mai sus se numeşte adjunctul operatorului T.*

Propoziţia 5.3.7 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu Hilbert şi $T \in L(X)$. Atunci:*

(i) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$;

(ii) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$;

(iii) $(\operatorname{Ker} T)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T^*}$;

(iv) $(\operatorname{Ker} T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$.

Demonstraţie (i) Egalitatea rezultă prin dublă incluziune prin aplicarea definiţiilor.

Astfel, dacă $u \in \operatorname{Ker} T$ şi $v \in \operatorname{Im} T^*$, atunci există $y \in X$ astfel încât $v = T^* y$ şi

$$\langle u, v \rangle = \langle u, T^* y \rangle = \langle Tu, y \rangle = 0,$$

deci $u \in (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$.

Dacă luăm $v \in (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$, atunci pentru orice $y \in X$,

$$0 = \langle v, T^* y \rangle = \langle Tv, y \rangle .$$

Deducem că $Tv = 0$, adică $v \in \operatorname{Ker} T$.

(ii) Pe baza punctului anterior,

$$\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im}(T^*)^*)^{\perp} = (\operatorname{Im} T)^{\perp} .$$

(iii) Avem

$$(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \left((\operatorname{Im} T^*)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\left(\overline{\operatorname{Im} T^*}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T^*}.$$

(iv) Este similar punctului anterior. □

Propoziţia 5.3.8 *Fie X spaţiu Banach, Y spaţiu Hilbert şi $T \in K(X, Y)$. Atunci T este limita unui şir de operatori de rang finit.*

Demonstraţie Fie $\varepsilon > 0$. Mulţimea $T(D_X)$ fiind relativ compactă, există $n \in \mathbb{P}$ şi $y_1, ..., y_n \in Y$ astfel încât

$$\overline{T(D_X)} \subset \bigcup_{i \in \overline{1,n}} B(y_i, \varepsilon) .$$

Notăm cu Z subspaţiul finit dimensional (deci închis) al lui Y generat de $(y_i)_{i \in \overline{1,n}}$ şi considerăm operatorul liniar continuu

$$T_\varepsilon = \operatorname{pr}_Z \circ T,$$

unde pr_Z este operatorul de proiecţie pe Z. Evident, T_ε este de rang finit.

Mai întâi, observăm că pentru orice $x \in D_X$ există $i_0 \in \overline{1,n}$ astfel încât

$$\|Tx - y_{i_0}\| < \varepsilon.$$

Deci, pentru orice $x \in D_X$,

$$\begin{aligned} \|Tx - (\operatorname{pr}_Z \circ T)x\| &\leq \|Tx - y_{i_0}\| + \|(\operatorname{pr}_Z \circ T)x - y_{i_0}\| \\ &< \varepsilon + \|(\operatorname{pr}_Z \circ T)x - \operatorname{pr}_Z(y_{i_0})\| \leq \varepsilon + \|Tx - y_{i_0}\| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

adică

$$\|T - T_\varepsilon\| \leq 2\varepsilon,$$

ceea ce conduce la concluzie. □

5.4 Mulţimi ortonormate, baze ortonormate

Definiţia 5.4.1 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar. O submulţime $A \subset X$ se numeşte ortonormată dacă pentru orice $e, f \in A$*

$$\langle e, f \rangle = \begin{cases} 0, & \text{dacă } e \neq f \\ 1, & \text{dacă } e = f. \end{cases}$$

Propoziţia 5.4.2 *Orice mulţime ortonormată este liniar independentă.*

Demonstraţie Fie $A \subset X$ ortonormată şi $\{e_1, .., e_n\}$ o submulţime finită a sa (unde $n \in \mathbb{P}$). Fie acum $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0.$$

Înmulţim succesiv cu $(e_j)_{j \in \overline{1,n}}$ şi deducem că $\alpha_j = 0$ pentru orice $j \in \overline{1,n}$. □

Propoziţia 5.4.3 (Teorema lui Pitagora) *Fie $\{e_1, .., e_n\}$ ($n \in \mathbb{P}$) o mulţime ortonormată finită în spaţiul cu produs scalar $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Atunci pentru orice $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2.$$

Demonstraţie Calculul direct al normei din primul membru şi proprietatea de ortonormatitate dovedesc egalitatea. □

Observaţia 5.4.4 *1. Dacă $A \subset X$ este ortonormată, atunci pentru orice două elemente distincte $e, f \in A$, avem $\|e - f\| = \sqrt{2}$. Deducem că dacă X este infinit dimensional şi separabil, atunci A poate fi cel mult numărabilă.*

2. Din Lema lui Zorn rezultă că orice mulţime ortonormată este conţinută într-o mulţime ortonormată maximală.

Propoziţia 5.4.5 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi $A = \{e_1, .., e_n\}$ ($n \in \mathbb{P}$) o mulţime ortonormată. Fie $x \in X$ şi*

$$y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Atunci $y \in \operatorname{span} A$ este proiecţia lui x pe $\operatorname{span} A$, deci $x - y \in (\operatorname{span} A)^{\perp}$. În plus, pentru orice $v \in \operatorname{span} A$,

$$\|x - v\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - v\|^2 .$$

Demonstraţie Este clar că $y \in \operatorname{span} A$. Luăm $z = x - y$ şi se verifică uşor că $z \in (\operatorname{span} A)^{\perp}$. Evident, $\operatorname{span} A$ este finit dimensional şi prin urmare închis. Restul afirmaţiilor rezultă ca în Teorema de descompunere ortogonală. □

În continuare discutăm despre familii ortonormate numărabile.

Propoziţia 5.4.6 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu Hilbert şi $A = \{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$ o familie ortonormată numărabilă. Fie $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{P}}$ un şir de elemente din $\mathbb{R}$. Atunci seria $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ converge dacă şi numai dacă $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ converge. Mai mult, în caz de convergenţă are loc relaţia*

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2.$$

Demonstraţie Definim şirul sumelor parţiale

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,\ n \in \mathbb{P}.$$

Pe baza ortonormatităţii,

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2.$$

Dacă (s_n) este convergent, atunci (s_n) este mărginit, deci relaţia de mai sus asigură convergenţa seriei numerice $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$.

Invers, dacă $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2$ este convergentă, cum pentru orice m, n cu $n > m$,

$$\|s_n - s_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k^2,$$

deducem că (s_n) este şir Cauchy şi deci, cum spaţiul este complet, convergent.

În plus,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\|^2 = \lim \|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2,$$

adică concluzia finală. □

Propoziţia 5.4.7 (Inegalitatea lui Bessel) *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi*

$$\{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$$

o familie ortonormată numărabilă. Atunci, pentru orice $x \in X$, seria $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2$ este convergentă şi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Demonstraţie Fie $x \in X$. Pentru a proba ambele afirmaţii este suficient să arătăm că pentru orice $n \in \mathbb{P}$

$$\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

Fixăm aşadar $n \in \mathbb{P}$ şi luăm $Y_n = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\}$. Fie $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. Atunci $s_n(x) \in Y_n$ şi $x - s_n(x) \in Y_n^{\perp}$. Folosim Propoziţia 5.4.5 pentru a scrie

$$\|x\|^2 = \|s_n(x)\|^2 + \|x - s_n(x)\|^2.$$

De aici rezultă
$$\|s_n(x)\|^2 \leq \|x\|^2,$$
ceea ce conduce la concluzie. $\square$

Corolarul 5.4.8 *Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu Hilbert şi $\{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$ o familie ortonormată numărabilă. Atunci, pentru orice $x \in X$ seria $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$ este convergentă.*

Observaţia 5.4.9 *Dacă $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este un spaţiu Hilbert şi $\{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$ este o familie ortonormată numărabilă a sa, atunci $e_k \xrightarrow{w} 0$, dar (e_k) nu este nici măcar fundamental în topologia normei. Într-adevăr, din inegalitatea lui Bessel, pentru orice $x \in X$,*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle^2 \leq \|x\|^2,$$
iar seria fiind convergentă $\langle x, e_k\rangle \to 0$, deci $e_k \xrightarrow{w} 0$. Pe de altă parte, pentru orice $i, j \in \mathbb{P}$ diferiţi,
$$\|e_i - e_j\|^2 = 2,$$
de unde se obţine a doua concluzie.

Teorema 5.4.10 *Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu cu produs scalar şi $A = \{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$ o mulţime ortonormată numărabilă. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$ pentru orice $x \in X$;
(ii) $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle^2$ pentru orice $x \in X$;
(iii) $\overline{\operatorname{span} A} = X$.
Dacă în plus X este spaţiu Hilbert, atunci acestea sunt echivalente şi cu:
(iv) A este o mulţime ortonormată maximală;
(v) $A^{\perp} = \{0\}$.

Demonstraţie Ca mai sus, definim, pentru orice $x \in X$ şi orice $n \in \mathbb{P}$
$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Conform ipotezei, pentru orice x,
$$x = \lim s_n(x).$$
Atunci
$$\|x\|^2 = \lim \|s_n(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle^2.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Din ipoteza acestei implicaţii, pentru orice $x \in X$,
$$\|x\|^2 = \lim \|s_n(x)\|^2.$$
Dar, aşa cum am văzut mai sus,
$$\|x\|^2 = \|s_n(x)\|^2 + \|x - s_n(x)\|^2,$$

ceea ce atrage

$$x = \lim s_n(x),$$

adică (i).

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Pentru orice $x \in X$,

$$x = \lim s_n(x) \in \overline{\operatorname{span} A},$$

deci

$$X = \overline{\operatorname{span} A}.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Fie $x \in X$. Atunci $x \in \overline{\operatorname{span} A}$, deci există un şir $(y_n) \subset \operatorname{span} A$ astfel încât $y_n \to x$. Dar

$$\operatorname{span} A = \bigcup_{n \in \mathbb{P}} Y_n,$$

unde $Y_n = \operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\}$, pentru orice $n \in \mathbb{P}$. Deci, pentru orice termen al şirului (y_n) există $p_n \in \mathbb{P}$ astfel încât $y_n \in Y_{p_n}$.

Dar

$$\|x - s_{p_n}(x)\| \leq \|x - y_n\| \to 0,$$

adică

$$s_{p_n}(x) \to x.$$

Folosind din nou egalitatea

$$\|x\|^2 - \|s_n(x)\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2, \ \forall n \in \mathbb{P},$$

cum şirul $(\|s_n(x)\|)_n$ este crescător, înseamnă că şirul $(\|x - s_n(x)\|)_n$ este descrescător. Deducem că

$$s_n(x) \to x.$$

Presupunem acum că X este spaţiu Hilbert.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) Dacă A nu ar fi maximală, ar putea fi extinsă, deci ar exista $\overline{x} \in S_X$ astfel încât $\langle x, e_n \rangle = 0$, pentru orice n. Evident, aceasta contrazice relaţia de la (ii) scrisă pentru $\overline{x}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Presupunem, prin reducere la absurd, că există $x \in X$ astfel încât seria convergentă $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ nu este egală cu x. Fie u suma acestei serii. Atunci, pentru orice n, folosind continuitatea produsului scalar, avem

$$\begin{aligned}\langle x - u, e_n \rangle &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, e_n \right\rangle = \langle x, e_n \rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, e_n \right\rangle \\ &= \langle x, e_n \rangle - \lim_m \left\langle \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k, e_n \right\rangle = 0.\end{aligned}$$

În particular, $x - u \notin \operatorname{span} A$, deci adăugând la A elementul $\|x - u\|^{-1}(x - u)$ obţinem o mulţime ortonormată mai largă, contrazicând astfel maximalitatea lui A.

(iii) $\Longrightarrow$ (v) Cum $A^{\perp} = \overline{\operatorname{span} A}^{\perp}$, obţinem $A^{\perp} = \{0\}$.

(v) $\Longrightarrow$ (iii) Din Teorema de descompunere ortogonală ştim că $X = \overline{\operatorname{span} A} \oplus \overline{\operatorname{span} A}^{\perp}$, iar faptul că $\overline{\operatorname{span} A}^{\perp} = \{0\}$ asigură concluzia. $\square$

Definiţia 5.4.11 *O familie ortonormată cu proprietăţile din teorema precedentă se numeşte bază ortonormată a spaţiului X.*

Observaţia 5.4.12 *1. Egalitatea din punctul (ii) al teoremei anterioare se numeşte identitatea lui Parseval.*

2. Dacă A este o bază ortonormată şi $x \in X$, atunci elementele $\{\langle x, e_k \rangle \mid k \in \mathbb{P}\}$ se numesc coeficienţi Fourier ai lui x în raport cu A.

3. Descompunerea dată de punctul (i) al teoremei menţionate a unui element x în raport cu baza A este unică. Într-adevăr,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

implică $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ pentru orice k.

Exemplul 5.4.13 În spaţiul Hilbert ℓ^2 elementele $\{(1, 0, 0, ...), (0, 1, 0, ...), ...\}$ formează o bază ortonormată: faptul că mulţimea este ortonormată este uşor de probat şi, în plus, are loc identitatea lui Parseval.

Corolarul 5.4.14 *Fie X un spaţiu Hilbert, $A = \{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$ o bază ortonormată a sa, $(x_n) \subset X$ şi $x \in X$. Atunci $x_n \xrightarrow{w} x$ dacă şi numai dacă (x_n) este mărginit şi $\langle x_n, e_k \rangle \to \langle x, e_k \rangle$ pentru orice $k \in \mathbb{P}$.*

Demonstraţie Afirmaţia este o consecinţă a Teoremei 5.4.10 şi a Problemei 62. □

Teorema 5.4.15 *Fie X un spaţiu Hilbert infinit dimensional. Atunci X admite o bază ortonormată numărabilă dacă şi numai dacă este separabil.*

Demonstraţie Presupunem mai întâi că X admite o bază ortonormată numărabilă. Faptul că X este separabil rezultă din proprietatea din Teorema 5.4.10 (iii) şi o problemă discutată anterior.

Invers, X admite o mulţime ortonormată maximală numărabilă (Observaţia 5.4.4). O astfel de mulţime este bază (Teorema 5.4.10). □

Teorema 5.4.16 *Orice spaţiu Hilbert separabil infinit dimensional este izomorf izometric cu $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$.*

Demonstraţie Fie X un spaţiu Hilbert separabil infinit dimensional. Conform rezultatului anterior, există $A = \{e_k \mid k \in \mathbb{P}\} \subset X$ o bază ortonormată numărabilă a sa. Definim $T : (X, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ prin

$$Tx = (\langle x, e_k \rangle)_{k \in \mathbb{P}}.$$

Din teorema de caracterizare a bazelor ortonormate (Teorema 5.4.10),

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2, \ \forall x \in X,$$

deci $Tx \in \ell^2$ pentru orice $x \in X$, adică T este bine definit. Apoi, este uşor de verificat că T este operator liniar. Din identitatea lui Parseval,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2 = \|Tx\|_2^2, \ \forall x \in X,$$

deci T este izometrie. Este suficient să mai arătăm că T este surjectiv. Fie $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{P}} \in \ell^2$. Cum seria $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2$ este convergentă, seria $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k$ converge în X. Considerăm $x = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k \in X$. Pentru orice $n \in \mathbb{P}$, folosind continuitatea produsului scalar, putem scrie

$$\langle x, e_n\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k, e_n\right\rangle = \lim_{k\to\infty}\left\langle \sum_{i=1}^{k}\alpha_i e_i, e_n\right\rangle = \alpha_n.$$

Deci $Tx = (\langle x, e_k\rangle)_{k\in\mathbb{P}} = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{P}}$, adică T este surjectiv. □

5.5 Lema Lax-Milgram

Definiţia 5.5.1 *Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu cu produs scalar. O aplicaţie biliniară $a : X \times X \to \mathbb{R}$ se numeşte:*

(i) continuă dacă există $c > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$

$$|a(x,y)| \le c\,\|x\|\,\|y\|\,;$$

(ii) coercivă dacă există $\alpha > 0$ astfel încât pentru orice $u \in X$

$$\alpha\,\|u\|^2 \le a(u,u)\,.$$

Teorema 5.5.2 (Teorema lui Stampacchia) *Fie X spaţiu Hilbert şi a o aplicaţie biliniară continuă şi coercivă. Fie $C \subset X$ nevidă, închisă şi convexă. Atunci, pentru orice $x^* \in X^*$ există un unic $u \in C$ astfel încât*

$$a(u, v-u) \ge x^*(v-u)\,,\ \forall v \in C.$$

Mai mult, dacă a este simetrică, u este caracterizat de proprietăţile

$$\begin{cases} u \in C, \\ \frac{1}{2}a(u,u) - x^*(u) = \min_{v\in C}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - x^*(v)\right\}. \end{cases}$$

Demonstraţie Fie $x^* \in X^*$. Pentru $u \in X$ fixat, aplicaţia $v \mapsto a(u,v)$ este liniară şi continuă. Conform Teoremei lui Riesz (Teorema 5.3.1), există un unic element în X, pe care îl notăm Au, astfel încât

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle\,,\ \forall v \in X.$$

E uşor de observat că $A : X \to X$ este liniar şi

$$\begin{cases} \|Au\| \le c\,\|u\|\,,\ \forall u \in X \\ \langle Au, u\rangle \ge \alpha\,\|u\|^2\,,\ \forall u \in X. \end{cases}$$

A obţine existenţa în prima concluzie înseamnă determinarea unui element $u \in C$ astfel încât

$$\langle Au, v-u\rangle \ge x^*(v-u)\,,\ \forall v \in C,$$

adică, prin identificarea lui x^* cu elementul corespunzător dat de Teorema lui Riesz,

$$\langle x^* - Au, v-u\rangle \le 0,\ \forall v \in C.$$

Această ultimă inegalitate este echivalentă cu

$$\langle \beta x^* - \beta Au + u - u, v - u \rangle \leq 0, \ \forall v \in C,$$

unde $\beta > 0$. Reamintindu-ne caracterizarea proiecţiei din Teorema 5.1.13, cum C este nevidă, convexă şi închisă, aceasta înseamnă

$$u = \mathrm{pr}_C \left(\beta x^* - \beta Au + u \right).$$

Vom arăta că pentru $\beta > 0$ convenabil ales un astfel de punct $u \in C$ există.

Definim, pentru $\beta > 0$, $S_\beta : C \to C$,

$$S_\beta \left(v \right) = \mathrm{pr}_C \left(\beta x^* - \beta Av + v \right)$$

şi practic trebuie să arătăm că S_β are punct fix pentru $\beta > 0$ convenabil ales. Conform Propoziţiei 5.1.15, pentru orice $v_1, v_2 \in C$ avem

$$\begin{aligned} \left\| S_\beta \left(v_1 \right) - S_\beta \left(v_2 \right) \right\|^2 &\leq \left\| \left(v_1 - v_2 \right) - \beta \left(Av_1 - Av_2 \right) \right\|^2 \\ &= \left\| v_1 - v_2 \right\|^2 - 2\beta \left\langle v_1 - v_2, A \left(v_1 - v_2 \right) \right\rangle + \beta^2 \left\| A \left(v_1 - v_2 \right) \right\|^2 \\ &\leq \left(1 - 2\beta\alpha + \beta^2 c^2 \right) \left\| v_1 - v_2 \right\|^2. \end{aligned}$$

Fie $\beta \in \left(0, 2c^{-2}\alpha \right)$. Atunci $\left(1 - 2\beta\alpha + \beta^2 c^2 \right) < 1$, deci S_β este o contracţie. Conform Principiului lui Banach de punct fix, S_β are un unic punct fix în C şi existenţa în prima parte a teoremei este demonstrată.

Fie $u_1, u_2 \in C$ care verifică concluzia. Atunci

$$\begin{aligned} a \left(u_1, u_2 - u_1 \right) &\geq x^* \left(u_2 - u_1 \right), \\ a \left(u_2, u_1 - u_2 \right) &\geq x^* \left(u_1 - u_2 \right). \end{aligned}$$

Prin adunare, obţinem

$$a \left(u_2 - u_1, u_1 - u_2 \right) \geq 0.$$

adică

$$a \left(u_2 - u_1, u_2 - u_1 \right) \leq 0.$$

Deducem de aici că $u_1 = u_2$.

Presupunem acum că a este simetrică. Atunci a determină pe X un nou produs scalar, iar datorită celorlalte proprietăţi ale lui a, norma corespunzătoare este echivalentă cu norma iniţială. Astfel, X este spaţiu Hilbert şi în raport cu această normă. Din Teorema lui Riesz, există un unic $z \in X$ astfel încât

$$x^* \left(v \right) = a \left(z, v \right), \ \forall v \in X.$$

Atunci prima concluzie, deja demonstrată, revine la găsirea unui element $u \in C$ astfel încât

$$a \left(z - u, v - u \right) \leq 0, \forall v \in C.$$

Acest u nu este decât proiecţia lui z pe C în noul produs scalar, iar aceasta înseamnă că u minimizează pe C funcţia

$$v \mapsto \sqrt{a \left(z - v, z - v \right)},$$

adică minimizează pe C funcţia

$$v \mapsto a(z-v, z-v) = a(v,v) - 2x^*(v) + a(z,z).$$

Deci, în final, u minimizează pe C funcţia

$$v \mapsto \frac{1}{2} a(v,v) - x^*(v),$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Teorema 5.5.3 (Lema Lax-Milgram) *Fie X spaţiu Hilbert şi a o aplicaţie biliniară continuă şi coercivă. Atunci, pentru orice $x^* \in X^*$ există un unic $u \in X$ astfel încât*

$$a(u,v) = x^*(v), \ \forall v \in X.$$

Mai mult, dacă a este simetrică, u este caracterizat de proprietăţile

$$\begin{cases} u \in X, \\ \frac{1}{2} a(u,u) - x^*(u) = \min_{v \in X} \left\{ \frac{1}{2} a(v,v) - x^*(v) \right\}. \end{cases}$$

Demonstraţie Se aplică Teorema lui Stampacchia pentru $C = X$ şi folosind liniaritatea spaţiului obţinem chiar egalitate în prima concluzie. $\square$

5.6 Elemente de teorie spectrală

Definiţia 5.6.1 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $T \in L(X)$. Mulţimea rezolventă, notată $\rho(T)$, a operatorului T este*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (T - \lambda \operatorname{id}) \text{ este bijectiv}\}.$$

Spectrul lui T este mulţimea $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

Un număr real λ se numeşte valoare proprie a lui T dacă $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id}) \neq \{0\}$. Mulţimea tuturor valorilor proprii ale lui T se notează $\sigma_p(T)$ şi se numeşte spectrul punctual al lui T. Un element nenul din $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id})$ se numeşte vector propriu asociat valorii proprii λ.

Este clar că $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Această incluziune este strictă, în general, aşa cum se poate vedea în exemplul de mai jos.

Exemplul 5.6.2 Fie $X = \ell^2$ şi $T \in L(\ell^2)$ dat prin

$$T(x) = (0, x_1, x_2, ...), \ \forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{P}} \in \ell^2.$$

Atunci $0 \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.

De asemenea, ambele spectre pot fi mulţimea vidă, ca în exemplul următor.

Exemplul 5.6.3 Fie $X = \ell^2$ şi $T \in L(\ell^2)$ dat prin

$$T(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, ...), \ \forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{P}} \in \ell^2.$$

Atunci $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \emptyset$.

Propoziţia 5.6.4 *Dacă $T \in L(X)$, atunci $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$ şi $\sigma(T)$ este mulţime compactă.*

Demonstraţie Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $|\lambda| > \|T\|$. Arătăm că $\lambda \in \rho(T)$, adică $T - \lambda\,\mathrm{id}$ este operator bijectiv. Aceasta revine la a arăta că pentru orice $y \in X$, ecuaţia $Tx - \lambda x = y$ are soluţie unică. Ecuaţia anterioară se scrie ca

$$x = \lambda^{-1}(Tx - y),$$

iar aplicaţia $x \to \lambda^{-1}(Tx - y)$ este o contracţie. Din Principiul lui Banach de punct fix, deducem că există un unic punct fix al acestei aplicaţii, adică o soluţie unică a ecuaţiei anterioare.

Cum $\sigma(T)$ este o submulţime a lui $\mathbb{R}$, pentru arăta că este compactă mai trebuie arătat că este închisă. Arătăm că $\rho(T)$ este deschisă. Fie $\bar{\lambda} \in \rho(T)$. Considerăm $\lambda \in \mathbb{R}$ şi $y \in X$. Ecuaţia $Tx - \lambda x = y$ se scrie

$$Tx - \bar{\lambda}x = y + \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)x,$$

adică

$$x = \left(T - \bar{\lambda}\,\mathrm{id}\right)^{-1}\left(y + \left(\lambda - \bar{\lambda}\right)x\right)$$

Din nou, din Principiul lui Banach de punct fix, această ecuaţie are soluţie unică dacă aplicaţia (în x) din membrul drept este contracţie, adică dacă $\left|\lambda - \bar{\lambda}\right| \left\|\left(T - \bar{\lambda}\,\mathrm{id}\right)^{-1}\right\| < 1$. Aşadar, pentru λ suficient de aproape de $\bar{\lambda}$, $T - \lambda\,\mathrm{id}$ este inversabilă, observaţie care încheie demonstraţia. □

În continuare investigăm structura mulţimilor $\sigma(T)$ şi $\sigma_p(T)$ în cazul în care $T \in K(X)$.

Lema 5.6.5 *Dacă $T \in K(X)$ şi $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{P}}$ este un şir de numere reale distincte convergent la $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\lambda_n) \subset \sigma(T) \setminus \{0\}$, atunci $\lambda = 0$.*

Demonstraţie Din Teorema 4.5.11 (iii) ştim că $(\lambda_n) \subset \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, deci pentru orice $n \in \mathbb{P}$ există $u_n \neq 0$ astfel încât $(T - \lambda_n\,\mathrm{id})(u_n) = 0$. Definim

$$Y_n = \mathrm{span}\{u_1, ..., u_n\}, \ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Evident, $Y_n \subset Y_{n+1}$ pentru orice n. Arătăm că incluziunea este strictă, ceea ce este adevărat dacă vectorii $(u_n)_n$ sunt liniari independenţi. Folosim principiul inducţiei matematice şi presupunem deci că pentru n fixat $(u_i)_{i\in\overline{1,n}}$ sunt liniari independenţi. Prin reducere la absurd, presupunem că există $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset \mathbb{R}$ astfel încât

$$u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i.$$

Atunci, cum $Tu_{n+1} = \lambda_{n+1}u_{n+1}$, avem

$$Tu_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i u_i = \lambda_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i,$$

adică, din ipoteza inductivă, $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ pentru orice $i \in \overline{1,n}$. Cum valorile $(\lambda_n)_n$ sunt distincte, obţinem că $\alpha_i = 1$ pentru orice $i \in \overline{1,n}$, adică o contradicţie. Aşadar incluziunea

$Y_n \subset Y_{n+1}$ este strictă pentru orice n. Aplicăm în continuare Lema lui Riesz (Lema 4.5.10) pentru a construi un şir $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încât $x_n \in Y_n$, $\|x_n\| = 1$, $d(x_n, Y_{n-1}) \geq 2^{-1}$ pentru orice $n \geq 2$. Pentru m, n astfel încât $2 \leq m < n$ avem $Y_{m-1} \subset Y_m \subset Y_{n-1} \subset Y_n$ şi $(T - \lambda_n \operatorname{id})(Y_n) \subset Y_{n-1}$ (pentru că $u_n \in \operatorname{Ker}(T - \lambda_n \operatorname{id})$). Deci

$$\left\| \frac{Tx_n}{\lambda_n} - \frac{Tx_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \frac{Tx_n - \lambda_n x_n}{\lambda_n} - \frac{Tx_m - \lambda_m x_m}{\lambda_m} + x_n - x_m \right\| \geq d(x_n, Y_{n-1}) \geq 2^{-1}.$$

Dacă $\lambda \neq 0$, cum (Tx_n) are subşir convergent, inegalitatea de mai sus nu este posibilă. Deci $\lambda = 0$. $\square$

Teorema 5.6.6 *Presupunem că X este infinit dimensional şi $T \in K(X)$. Atunci:*
(i) $0 \in \sigma(T)$;
(ii) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$;
(iii) are loc una dintre următoarele situaţii:
(a) $\sigma(T) = \{0\}$;
(b) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *e mulţime finită;*
(c) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *este un şir cu limita* 0.

Demonstraţie (i) Dacă $0 \notin \sigma(T)$, atunci T este bijectiv, ceea ce conduce la faptul că $\operatorname{id} = T \circ T^{-1}$ este operator compact (a se vedea şi Problema 80), ceea ce contrazice faptul că X este infinit dimensional.

(ii) Dacă $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, din Teorema 4.5.11 (iii) rezultă că $T - \lambda \operatorname{id}$ nu este injectiv, deci $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.

(iii) Pentru fiecare $n \in \mathbb{P}$, considerăm mulţimea $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| \geq n^{-1}\}$. Conform Lemei 5.6.5, aceasta este vidă sau finită. Deci mulţimea $\sigma(T) \setminus \{0\}$ fie este finită, fie are o infinitate de puncte distincte care formează un şir cu limita 0. $\square$

Definiţia 5.6.7 *Un operator $T \in L(X)$ se numeşte autoadjunct dacă $T = T^*$.*

Propoziţia 5.6.8 *Fie $T \in L(X)$ autoadjunct. Definim $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in S_X\}$, $M = \sup\{\langle Tx, x\rangle \mid x \in S_X\}$. Atunci $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m, M \in \sigma(T)$. Mai mult, $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$.*

Demonstraţie Pentru $\lambda > M$ arătăm că $\lambda \in \rho(T)$. Ştim că

$$\langle Tx, x\rangle \leq M\|x\|^2, \ \forall x \in X.$$

Deci

$$\langle \lambda x - Tx, x\rangle \leq (\lambda - M)\|x\|^2, \ \forall x \in X.$$

Din Lema Lax-Milgram (Teorema 5.5.3) deducem că $\lambda \operatorname{id} - T$ este operator bijectiv. Asemănător, $\lambda \in \rho(T)$ pentru $\lambda < m$. Astfel, $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Arătăm că $M \in \sigma(T)$. Forma biliniară $a : X \times X \to \mathbb{R}$, $a(x, y) = \langle Mx - Tx, y\rangle$ este simetrică şi satisface $a(x, x) \geq 0$ pentru orice $x \in X$, adică satisface proprietăţile unui produs scalar. Putem scrie deci inegalitatea Schwarz:

$$|a(x, y)| \leq \sqrt{a(x, x)}\sqrt{a(y, y)}, \ \forall x, y \in X.$$

Astfel,

$$|\langle Mx - Tx, y\rangle| \leq \sqrt{\langle Mx - Tx, x\rangle}\sqrt{\langle My - Ty, y\rangle},\ \forall x, y \in X.$$

Luând sup după $y \in X$, deducem că există o constantă $c > 0$ such that

$$\|Mx - Tx\| \leq c\sqrt{\langle Mx - Tx, x\rangle},\ \forall x \in X.$$

Din definiţia lui M, există un şir $(x_n)_n \subset S_X$ astfel încât $\langle Tx_n, x_n\rangle \to M$, iar din inegalitatea precedentă avem $\|Mx_n - Tx_n\| \to 0$. Dacă am avea $M \in \rho(T)$, atunci $x_n = (M\,\mathrm{id} - T)^{-1}(Mx_n - Tx_n) \to 0$, ceea ce este imposibil. Deci $M \in \sigma(T)$. Similar se arată că $m \in \sigma(T)$.

În final, arătăm că $\|T\| = \mu$, unde $\mu = \max\{|m|, |M|\}$. Faptul că $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\|\,\|x\|^2$ pentru orice $x \in X$ asigură inegalitatea $\mu \leq \|T\|$.

Pentru orice $x, y \in X$, având în vedere că T este autoadjunct putem scrie

$$\langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle + 2\langle Tx, y\rangle,$$
$$\langle T(x-y), x-y\rangle = \langle Tx, x\rangle + \langle Ty, y\rangle - 2\langle Tx, y\rangle.$$

Atunci,

$$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \leq M\|x+y\|^2 - m\|x-y\|^2,$$

deci

$$4|\langle Tx, y\rangle| \leq \mu\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = 2\mu\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),\ \forall x, y \in X.$$

Înlocuind y cu αy pentru $\alpha > 0$, găsim

$$4|\langle Tx, y\rangle| \leq 2\mu\left(\frac{\|x\|^2}{\alpha} + \alpha\|y\|^2\right),\ \forall x, y \in X,\ \forall \alpha > 0.$$

Pentru x, y fixaţi nenuli, membrul drept îşi atinge minimul pentru $\alpha = \|u\|\,\|v\|^{-1}$, deci

$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \mu\|u\|\,\|v\|,\ \forall x, y \in X.$$

Deducem că $\|T\| \leq \mu$, deci are loc egalitatea. □

Corolarul 5.6.9 *Dacă $T \in L(X)$ este autoadjunct atunci*

$$\|T\| = \sup_{x \in S_X} |\langle Tx, x\rangle|.$$

Corolarul 5.6.10 *(i) Dacă $T \in L(X)$ este autoadjunct şi $\sigma(T) = \{0\}$, atunci $T = 0$.*

(ii) Dacă $T \in K(X)$ este autoadjunct şi nenul atunci are măcar o valoare proprie nenulă.

Demonstraţie Folosim Propoziţia 5.6.8 pentru (i) şi Teorema 5.6.6 (ii) (pentru care ipoteza legată de dimensiunea spaţiului nu e esenţială) pentru (ii). □

Lema 5.6.11 *Fie $T \in L(X)$ autoadjunct. Atunci T este inversabil dacă şi numai dacă există $c > 0$ astfel încât $c\|x\| \leq \|Tx\|$ pentru orice $x \in X$.*

Demonstraţie Evident, inegalitatea din enunţ este implicată de inversabilitatea lui T cu $c = \|T^{-1}\|^{-1}$. Invers, inegalitatea implică imediat injectivitatea lui T. Cum $T = T^*$ şi, în general, $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$ (Propoziţia 5.3.7), obţinem că $\operatorname{Im} T$ este dens. De asemenea, inegalitatea dată implică închiderea lui $\operatorname{Im} T$ (Problema 14). Aşadar $\operatorname{Im} T = X$, adică T este bijectiv, deci inversabil (Corolarul 3.2.10). □

Definiţia 5.6.12 *Fie* $T \in L(X)$.

(i) Dacă λ *este o valoare proprie a lui* T, *atunci subspaţiul* $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id})$ *se numeşte subspaţiu propriu asociat lui* λ.

(ii) Un subspaţiu Y *al lui* X *se numeşte invariant prin* T *dacă* $T(Y) \subset Y$.

Lema 5.6.13 *Fie* $T \in L(X)$ *un operator autoadjunct. Atunci:*

(i) Subspaţiile proprii asociate unor valori proprii distincte sunt ortogonale.

(ii) Dacă Y *este un subspaţiu invariant prin* T, *atunci* $Y^{\perp}$ *este de asemenea invariant prin* T *şi* $\sigma(T) = \sigma\left(T_{|Y}\right) \cup \sigma\left(T_{|Y^{\perp}}\right)$.

Demonstraţie (i) Fie λ_1, λ_2 valori proprii distincte ale lui T şi x_1, x_2 vectori proprii asociaţi acestora. Atunci:

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \lambda x_1, x_2 \rangle = \langle T x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, T x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle .$$

Deci $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

(ii) Fie $y \in Y^{\perp}$. Pentru orice $x \in Y$, $\langle Ty, x \rangle = \langle y, Tx \rangle = 0$, deci $Ty \in Y^{\perp}$. Este clar că $T_{|Y}$ şi $T_{|Y^{\perp}}$ sunt autoadjuncţi.

Considerăm $\lambda \in \sigma\left(T_{|Y}\right)$. Conform Lemei 5.6.11,
$\inf_{x \in S_X} \|T - \lambda \operatorname{id}_X\| \leq \inf_{x \in S_F} \|T - \lambda \operatorname{id}_F\| = 0$, deci $\lambda \in \sigma(T)$. La fel, $\sigma\left(T_{|Y^{\perp}}\right) \subset \sigma(T)$.

Luăm $\lambda \notin \sigma\left(T_{|Y}\right) \cup \sigma\left(T_{|Y^{\perp}}\right)$. Atunci, tot din Lema 5.6.11, există $c > 0$ astfel încât

$$c\|y\| \leq \|Ty - \lambda y\|, \ \forall y \in Y$$

$$c\|z\| \leq \|Tz - \lambda z\|, \ \forall z \in Y^{\perp}.$$

Orice $x \in X$ se scrie sub forma $x = y + z$ cu $y \in Y$ şi $z \in Y^{\perp}$. Dar $Ty - \lambda y \in Y$ şi $Tz - \lambda z \in Y^{\perp}$, astfel că

$$\begin{aligned} \|Tx - \lambda x\|^2 &= \|Ty - \lambda y + Tz - \lambda z\|^2 = \|Ty - \lambda y\|^2 + \|Tz - \lambda z\|^2 \\ &\geq c^2 \|y\|^2 + c^2 \|z\|^2 = c^2 \|x\|^2 . \end{aligned}$$

Deducem că $\lambda \notin \sigma(T)$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Teorema 5.6.14 *Dacă* X *este spaţiu Hilbert separabil netrivial şi* $T \in K(X)$ *este un operator autoadjunct, atunci există o bază ortonormată a lui* X *formată din vectori proprii* $(u_n)_n$ *ai lui* T *şi pentru orice* $x \in X$,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n,$$

unde λ_n *este valoarea proprie asociată lui* u_n *pentru orice* n.

Demonstraţie Cazul $T = 0$ este trivial. Presupunem $T \neq 0$. Ştim că $\sigma_p(T) \neq \emptyset$ (Corolarul 5.6.10), iar această mulţime este finită sau numărabilă (Teorema 5.6.6). Pentru orice $\lambda \in \sigma_p(T)$ considerăm o bază ortonormată B_λ a subspaţiului propriu $\operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id})$ (care are dimensiune finită dacă $\lambda \neq 0$, conform Teoremei 4.5.11). Cum aceste spaţii sunt ortogonale două câte două,

$$B = \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} B_\lambda$$

este o mulţime ortonormată. Trebuie să arătăm că subspaţiul închis, notat Y, generat de B, adică generat de $\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(T)} \operatorname{Ker}(T - \lambda \operatorname{id})$ este X. În caz contrar, $Y^\perp \neq \{0\}$. Cum Y este invariant prin T, $Y^\perp$ este de asemenea invariant prin T şi $T_{|Y^\perp}$ are cel puţin o valoare proprie, care este valoare proprie şi pentru T (din Lema 5.6.13). Astfel, vectorii proprii asociaţi ar fi şi în Y şi în $Y^\perp$, ceea ce nu e posibil. Aşadar B este bază ortorormată pentru X formată din vectori proprii ai lui T.

Notăm cu $(u_n)_n$ elementele acestei baze şi cu $(\lambda_n)_n$ valorile proprii asociate. Cum $|\lambda_n| \leq \|T\|$ pentru orice n, operatorul $S : X \to X$ definit prin $S(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n$ e bine definit (pentru că $\sum_{n \geq 1} |\langle x, u_n \rangle|^2 < \infty$ implică $\sum_{n \geq 1} |\lambda_n|^2 |\langle x, u_n \rangle|^2 < \infty$) şi continuu pentru că

$$\|Sx\|^2 = \sum_{n \geq 1} |\lambda_n|^2 |\langle x, u_n \rangle|^2 \leq \|T\|^2 \|x\|^2, \ \forall x \in X.$$

Cum $Su_n = \lambda_n u_n = T(u_n)$ pentru orice $n \geq 1$, deducem că $S = T$. $\square$

Capitolul 6

Probleme (şi indicaţii de rezolvare)

6.1 Recapitulare şi completări

Problema 1 *Să se determine toate normele pe* $\mathbb{R}$.

Indicaţie Fie $\|\cdot\|$ o normă pe $\mathbb{R}$. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$\|x\| = \|x \cdot 1\| = |x| \, \|1\| .$$

Notăm $\|1\|$ cu a şi deducem forma normei. □

Problema 2 *Să se arate, prin calcul direct, echivalenţa celor trei norme de la Exemplul 1.2.1 şi să se precizeze cele mai bune constante de comparaţie.*

Indicaţie Se observă că pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$ $(p \in \mathbb{P})$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 .$$

Pentru $p = 2$ şi $x = (1, 0)$ avem egalitate în ambele relaţii deci inegalităţile nu pot fi îmbunătăţite.

Mai departe, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{p} \, \|x\|_\infty$$

şi pentru $p = 2$ şi $x = (1, 1)$ avem egalitate, deci constanta $\sqrt{p}$ nu poate fi îmbunătăţită (micşorată). Pentru celelalte situaţii se procedează similar. □

Problema 3 *Să se arate că* $B\left([a, b], \|\cdot\|_\infty\right)$ *şi* $\left(C\left([a, b]\right), \|\cdot\|_\infty\right)$ *sunt spaţii Banach.*

Indicaţie Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{P}}$ un şir Cauchy în $B\left([a, b], \|\cdot\|_\infty\right)$. Aceasta înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$,

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

În particular, pentru orice $x \in [a, b]$.

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$

deci şirul numeric $(f_n(x))_n$ este fundamental. Prin urmare, pentru orice $x \in [a,b]$ există $f(x) \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_n f_n(x) = f(x).$$

Trecem la limită cu $m \to \infty$ în relaţia de mai sus şi se obţine că $f \in B([a,b])$.

Apoi se deduce că

$$f_n \stackrel{\|\cdot\|_\infty}{\longrightarrow} f.$$

Deci, $B([a,b], \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach.

Acum, pentru că $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ este subspaţiu liniar al spaţiului Banach $B([a,b], \|\cdot\|_\infty)$, pentru a demonstra că este complet la rândul său, este suficient să arătăm că este închis. □

Problema 4 *Să se arate că $(C^1([a,b]), \|\cdot\|)$, cu $\|\cdot\|$ de la Exemplul 1.2.4 este spaţiu Banach.*

Indicaţie Se foloseşte Teoremei de transfer a derivabilităţii prin convergenţa uniformă. □

Problema 5 *Să se arate că $(m, \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach. Să se arate că c şi c_0 subspaţii liniare închise, deci sunt spaţii Banach.*

Indicaţie Fie $(x^n)_{n\in\mathbb{P}}$ un şir Cauchy în $(m, \|\cdot\|_\infty)$. Deci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$

$$\|x^n - x^m\|_\infty = \sup_k |x_k^n - x_k^m| < \varepsilon.$$

În particular, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şirul $(x_k^n)_n$ este şir Cauchy în $\mathbb{R}$. Aşadar, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $x_k^0 \in \mathbb{R}$ care e limita lui $(x_k^n)_n$. Notăm cu x^0 şirul cu termenii x_k^0 $(k \in \mathbb{P})$. Se procedează ca mai sus, adaptat prezentei situaţii şi concluzionăm că $(m, \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach. □

Problema 6 *Să se arate că pentru $p \in [1,\infty)$, $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ este spaţiu Banach.*

Indicaţie Se folosesc argumente similare celor de mai sus, eventual aplicate unor şiruri de sume parţiale. □

Problema 7 *Să se arate că spaţiul liniar normat $\left(c_{00}, \|\cdot\|_p\right)$ $(p \in [1,\infty))$ nu este spaţiu Banach.*

Indicaţie Spaţiul $\left(c_{00}, \|\cdot\|_p\right)$ este subspaţiu liniar normat al spaţiului Banach $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$. Este suficient să arătăm că nu este închis. Considerăm, pentru orice $n \in \mathbb{P}$,

$$x^n = \left(1, \frac{1}{2^{2p^{-1}}}, ..., \frac{1}{n^{2p^{-1}}}, 0, 0, ...\right) \in c_{00},$$

şi

$$x^0 = \left(1, \frac{1}{2^{2p^{-1}}}, ..., \frac{1}{n^{2p^{-1}}}, \frac{1}{(n+1)^{2p^{-1}}}, ...\right) \in \ell^p \setminus c_{00}.$$

şi deducem că $\left(c_{00}, \|\cdot\|_p\right)$ nu este închis. □

Problema 8 *Fie a, b, c numere reale strict pozitive cu $b < c$ şi $k \in \mathbb{P}$. Fie $(P_n)_{n\in\mathbb{P}}$ un şir de polinoame de grad cel mult k. Presupunem că*

$$\int_b^c |P_n(x)|\, dx \le a,\ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Să se arate că (P_n) admite un subşir uniform convergent pe intervalul $[b, c]$.

Indicaţie Considerăm spaţiul liniar al funcţiilor polinomiale de grad cel mult k definite pe $[b, c]$. Acest spaţiu liniar este finit dimensional, deci toate normele sunt echivalente. □

Problema 9 *Considerăm spaţiul liniar normat $(B([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_\infty)$. Să se determine distanţa dintre funcţiile* sin *şi* cos *în acest spaţiu.*

Indicaţie Conform definiţiei,

$$\|\sin - \cos\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |\sin x - \cos x|.$$

Este uşor de văzut că acest maxim este $\sqrt{2}$. □

Problema 10 *Să se arate că pentru orice $p \in [1, \infty]$, $\left(L^p(X, \mu, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right)$ este spaţiu Banach.*

Soluţie Demonstrăm pentru cazul $p \in [1, \infty)$.

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{P}}$ un şir Cauchy din spaţiul $\left(L^p\left(X, \mu, \mathbb{R}^d\right), \|\cdot\|_{L^p}\right)$. Atunci există un subşir $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{P}}$ astfel încât pentru orice k

$$\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \le \frac{1}{2^k}.$$

Notăm, pentru orice $i \in \mathbb{P}$:

$$g_i = \sum_{k=1}^{i} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|.$$

Este clar că (g_i) este un şir monoton şi folosind Teorema convergenţei monotone avem

$$\int_X g_i^p d\mu \to \int_X g^p d\mu,$$

unde $g = \sup_i g_i = \lim g_i$. De asemenea, pentru orice i

$$\|g_i\|_p = \left\|\sum_{k=1}^{i} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|\right\|_p \le \sum_{k=1}^{i} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \le 1,$$

de unde deducem că $\|g\|_p \le 1$.

Pe de altă parte, pentru $m \ge o \ge 2$,

$$\begin{aligned} |f_{n_m} - f_{n_o}| &\le \sum_{k=o}^{m-1} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| - \sum_{k=1}^{o-1} \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right| \le g - g_{o-1}, \end{aligned}$$

$\mu-$a.p.t. Deci $\mu-$a.p.t. $x \in X$, şirul $(f_{n_k}(x))$ este Cauchy în $\mathbb{R}$. Din completitudinea acestui spaţiu, deducem convergenţa $\mu-$a.p.t. $x \in X$ a şirului $(f_{n_k}(x))$. Pentru aceste elemente x, notăm $f(x) = \lim f_{n_k}(x)$. Avem astfel o funcţie f definită $\mu-$a.p.t. pe care o completăm cu valoarea 0 în rest. Atunci funcţia f astfel obţinută este $\mu-$măsurabilă şi avem:

$$\begin{aligned} &|f - f_{n_k}|^p \leq g^p, \ k \text{ suficient de mare} \\ &f_{n_k} \to f, \ \mu - \text{a.p.t.} \end{aligned}$$

iar $g^p \in L^1(X, \mu, \mathbb{R})$. Din Teorema convergenţei dominate, deducem că

$$f_{n_k} \to f \text{ în } \left(L^p(X, \mu, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p\right).$$

Cum şirul Cauchy (f_n) are un subşir convergent, deducem că şirul este convergent la aceeaşi limită. □

Problema 11 *Să se arate că pentru orice* $p \in [1, \infty)$, $\left(C([a, b]), \|\cdot\|_p\right)$ *nu este spaţiu Banach.*

Indicaţie Trebuie să construim un şir Cauchy în $\left(C([a, b]), \|\cdot\|_p\right)$ care nu este convergent în $\left(C([a, b]), \|\cdot\|_p\right)$. Fără a restrânge generalitatea presupunem că $[a, b] = [-1, 1]$. Fie, pentru orice $n \in \mathbb{P}$, $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [-1, 0], \\ nx, \text{ dacă } x \in \left(0, \frac{1}{n}\right), \\ 1, \text{ dacă } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

E uşor de văzut că aceste funcţii sunt continue.

Se arată că (f_n) este şir Cauchy în $\left(C([a, b]), \|\cdot\|_p\right)$.

Presupunem apoi, prin reducere la absurd că $(f_n) \to f_0 \in C([a, b])$ în $\|\cdot\|_p$. Cum

$$\int_{-1}^{0} |f_n(x) - f_0(x)|^p \, dx \leq \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_0(x)|^p \, dx \to 0$$

şi $f_n(x) = 0$ pentru orice $x \in [-1, 0]$, deducem că $f_0(x) = 0$ pentru orice $x \in [-1, 0]$.

Fie $\varepsilon \in (0, 1]$. Similar, deducem că $f_0(x) = 1$ pentru orice $x \in [\varepsilon, 1]$. Cum $\varepsilon \in (0, 1]$ este arbitrar, avem $f_0(x) = 1$ pentru orice $x \in (0, 1]$. Cum f_0 astfel obţinută nu este continuă, am ajuns la o contradicţie. Deci (f_n) nu este convergent în $\left(C([a, b]), \|\cdot\|_p\right)$. □

Problema 12 *Să se arate că dacă un spaţiu liniar normat conţine o mulţime compactă cu interior nevid, atunci este finit dimensional.*

Indicaţie Fie X un spaţiu liniar normat şi $A \subset X$ o mulţime compactă cu interior nevid. Atunci există $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $D(x, \varepsilon) \subset A$. Cum $D(x, \varepsilon)$ este închisă, deducem că $D(x, \varepsilon)$ este compactă. Dar

$$D(x, \varepsilon) = x + \varepsilon D_X,$$

deci D_X este compactă. □

Problema 13 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat şi* Y *un subspaţiu liniar al său.*
(i) Să se arate că $\operatorname{cl} Y$ *este de asemenea subspaţiu liniar.*
(ii) Să se arate că $\operatorname{int} Y \neq \emptyset$ *dacă şi numai dacă* $Y = X$.

Indicaţie (i) Verificarea este imediată folosind caracterizarea cu şiruri a închiderii.
(ii) Evident, dacă $Y = X$ atunci $\operatorname{int} Y = X \neq \emptyset$. Invers, presupunem că există $y \in Y$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(y, \varepsilon) \subset Y$. Atunci, cum $B(y, \varepsilon) = y + \varepsilon B(0, 1)$, deducem că $B(0, 1) \subset Y$. Se obţine $Y = X$. $\square$

Problema 14 *Fie* X *spaţiu Banach,* Y *spaţiu liniar normat şi* $T \in L(X, Y)$. *Presupunem că există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in X$, $\|T(x)\| \geq \varepsilon \|x\|$. *Să se arate că imaginea lui* T *este mulţime închisă şi* T *privit cu valori în* $T(X)$ *este bijectiv şi bicontinuu.*

Indicaţie Fie (x_n) şir de elemente din X astfel încât $T(x_n) \to y \in Y$. Arătăm că $y \in T(X)$. Şirul $(T(x_n))$ este fundamental şi folosind ipoteza avem

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \|T(x_n) - T(x_m)\|, \ \forall n, m,$$

de unde deducem că (x_n) este şir fundamental. Deci, cum X este spaţiu Banach, există $x \in X$ astfel încât $x_n \to x$. Restul argumentelor sunt acum uşor de dedus. $\square$

Problema 15 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat. Să se arate că o funcţională liniară este continuă dacă şi numai dacă este mărginită superior pe o vecinătate a unui punct.*

Indicaţie Fie $f : X \to \mathbb{R}$ liniară şi continuă. Atunci este clar că f este mărginită pe $B(0, 1)$. Reciproc, scriem mărginirea lui f pe o bilă şi deducem proprietatea de mărginire din caracterizarea continuităţii. $\square$

Problema 16 *Fie* X *un spaţiu liniar finit dimensional şi fie* $T : X \to X$ *un operator liniar. Să se arate că dacă* T *este injectiv, atunci este surjectiv şi reciproc.*

Indicaţie Se foloseşte scrierea elementelor lui X într-o bază finită. $\square$

Problema 17 *Fie* $X = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$. *Să se arate că următorii operatori sunt liniari şi continui şi să se determine norma lor.*
(i) $T_1 : X \to X$

$$(T_1 f)(x) = x^2 f(0);$$

(ii) $T_2 : X \to X$

$$(T_2 f)(x) = f\left(x^2\right).$$

Indicaţie În ambele cazuri verificarea cerinţelor nu ridică probleme deosebite. Norma ambilor operatori este 1 (pentru inegalitatea $\|\cdot\| \geq 1$ se poate considera funcţia identic 1). $\square$

Problema 18 *(i) Fie* $T : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ *definit prin*

$$T((x_1, x_2, ...)) = (x_2, x_3, ...).$$

Să se arate că T este liniar, continuu şi are norma 1. Să se arate că T este surjectiv, dar nu este injectiv.

(ii) Fie $S : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ definit prin

$$S((x_1, x_2, ...)) = (0, x_1, x_2, ...).$$

Să se arate că S este liniar, continuu şi are norma 1. Să se arate că S este injectiv, dar nu este surjectiv. În plus, $S(\ell^2)$ este subspaţiu liniar închis al lui $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$.

Indicaţie (i) Faptul că T este liniar se verifică foarte uşor. Apoi, pentru orice $x \in \ell^2$,

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=2}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_2,$$

deci T este continuu şi $\|T\| \leq 1$.

(ii) Faptul că S este liniar se verifică foarte uşor. Apoi, pentru orice $x \in \ell^2$,

$$\|Sx\|_2 = \|x\|_2,$$

deci S este continuu şi $\|S\| = 1$.

Fie $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f\left((x_n)_{n\in\mathbb{P}}\right) = x_1.$$

Se verifică faptul că $f \in (\ell^2)^*$ şi că $S(\ell^2) = \operatorname{Ker} f$, de unde se deduce concluzia. □

Problema 19 *Fie $x^* : c_0 \to \mathbb{R}$,*

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}.$$

(i) Să se arate că $x^* \in (c_0, \|\cdot\|_\infty)^*$ şi $\|x^*\| = 2$.

(ii) Să se arate că x^* nu îşi atinge norma pe bila unitate închisă.

Indicaţie (i) Liniaritatea lui x^* este simplu de arătat. Pentru orice $x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in c_0$,

$$|x^*(x)| \leq \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2\|x\|_\infty.$$

Deci $x^* \in (c_0)^*$ şi $\|x^*\| \leq 2$.

Fie acum, pentru orice $n \in \mathbb{P}$, $x^n = (1, ..., 1, 0, 0, ...) \in c_0$, unde 1 apare pe primele n poziţii. Deducem că $\|x^*\| \geq 2$.

(ii) Presupunem că x^* şi-ar atinge norma pe bila unitate închisă a lui c_0, adică există $x \in c_0$ cu $\|x\|_\infty \leq 1$ şi $x^*(x) = \|x^*\| = 2$. Astfel,

$$2 = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^{n-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Se ajunge la o contradicţie. □

Problema 20 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu liniar normat şi* Y *un subspaţiu liniar normat al său. Fie* $x_0 \in X$ *astfel încât* $d(x_0, Y) > 0$. *Atunci există* $x^* \in X^*$ *astfel încât* $x^*(y) = 0$ *pentru orice* $y \in Y$, $x^*(x_0) = 1$ *şi* $\|x^*\| = (d(x_0, Y))^{-1}$.

Indicaţie Definim $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x_0\}$ şi $f : Z \to \mathbb{R}$,

$$f(y + \alpha x_0) = \alpha.$$

Apoi, aplicăm acum varianta topologică a Teoremei Hahn-Banach. □

Problema 21 *Fie* X, Y *spaţii liniare normate şi* $T \in L(X, Y)$. *Să se arate că pentru orice* $x \in X$ *şi* $r > 0$

$$\sup_{u \in B(x,r)} \|Tu\| \geq r \|T\|.$$

Indicaţie Ştim că $B(x, r) = x + rB(0, 1)$. Atunci, pentru orice $v \in B(0, 1)$,

$$\max\{\|T(x + rv)\|, \|T(x - rv)\|\} \geq \frac{1}{2}[\|T(x + rv)\| + \|T(x - rv)\|].$$

Restul argumentelor sunt simple. □

Problema 22 *Pe spaţiul liniar* $C^1([0, 1])$ *considerăm următoarele aplicaţii cu valori reale nenegative*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx, \quad \|f\|' = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|, \ \forall f.$$

(i) Să se arate că $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|'$ *sunt norme.*

(ii) Să se arate că orice şir convergent în norma $\|\cdot\|_\infty$ *este convergent în* $\|\cdot\|_1$ *şi orice şir convergent în norma* $\|\cdot\|'$ *e convergent în norma* $\|\cdot\|_\infty$.

(iii) Să se studieze convergenţa şirurilor $f_n(x) = x^n$ *şi* $g_n(x) = n^{-1} \sin(nx)$, *unde* $n \in \mathbb{P}$. *Apoi să se compare cele trei norme.*

Indicaţie (i) Verificarea acestui fapt reprezintă un calcul simplu.

(ii) Pentru orice $f \in C^1([0, 1])$ avem

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty,$$

deci $\|\cdot\|_\infty$ este mai fină decât $\|\cdot\|_1$. Obţinem astfel demonstraţia primei afirmaţii.

Apoi, se arată că $\|\cdot\|'$ este mai fină decât $\|\cdot\|_\infty$, de unde deducem a doua afirmaţie.

(iii) Pentru $n \in \mathbb{P}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\, dx = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Deci

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0.$$

Dar,

$$\|f_n\|_\infty = 1, \ \forall n \in \mathbb{P}.$$

deci

$$f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Aşadar, $\|\cdot\|_\infty$ este strict mai fină decât $\|\cdot\|_1$.

Similar, $\|\cdot\|'$ este strict mai fină decât $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Problema 23 *Cu notaţiile de la Problema 22, definim $T : C^1([0,1]) \to C^1([0,1])$ prin*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Să se arate că T este bine definit şi liniar. Să se studieze continuitatea lui T atunci când pe $C^1([0,1])$, atât ca domeniu, cât şi codomeniu se consideră una dintre cele trei norme.

Indicaţie Faptul că T este bine definit şi liniar se verifică uşor.

Pentru a doua cerinţă avem de studiat practic 9 cazuri. Totuşi ţinând seama de relaţiile dintre cele trei norme stabilite la Problema 22 unele concluzii sunt deductibile din altele. $\square$

Problema 24 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ şi $(Y, \|\cdot\|)$ spaţii liniare normate. Să se arate că dacă $(X, \|\cdot\|) \simeq (Y, \|\cdot\|)$, atunci $(X, \|\cdot\|)^* \simeq (Y, \|\cdot\|)^*$.*

Indicaţie Din ipoteză, există un izomorfism izometric $T : (X, \|\cdot\|) \to (Y, \|\cdot\|)$. Definim $S : (X, \|\cdot\|)^* \to (Y, \|\cdot\|)^*$ prin

$$S(x^*) = x^* \circ T^{-1}.$$

Operatorul S este corect definit (x^* şi T^{-1} sunt liniare şi continue). Se arată că S este izomorfism izometric. $\square$

Problema 25 *Fie $\varphi : (\ell^1, \|\cdot\|_1) \to \mathbb{R}$,*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{2n-1} - 3x_{2n}), \ \forall x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1.$$

(i) Să se arate că φ este corect definită şi că $\varphi \in (\ell^1)^*$; să se determine $\|\varphi\|$.

(ii) Să se determine elementul $y \in m$ care corespunde lui φ prin izomorfismul izometric de la Propoziţia 1.5.4; să se regăsească valoarea lui $\|\varphi\|$.

Indicaţie (i) Este simplu de arătat că φ este corect definită şi este liniară. Apoi, pentru orice $x = (x_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$

$$|\varphi(x)| \leq 3\|x\|_1.$$

Deci φ este continuă şi $\|\varphi\| \leq 3$.

Considerăm acum elementul unitar e_2 pentru care avem $\|e_2\|_1 = 1$ şi

$$|\varphi(e_2)| = 3.$$

În concluzie, $\|\varphi\| = 3$.

(ii) Având în vedere forma izomorfismului izometric de la Problema 1.5.4, elementul din m corespunzător lui φ este şirul $y = (y_n)$ definit astfel:

$$y_n = \begin{cases} 1, \text{ dacă } n \text{ este impar} \\ -3, \text{ dacă } n \text{ este par.} \end{cases}$$

Regăsim faptul că $\|\varphi\| = 3$. □

Problema 26 *Să se arate că dacă două spaţii liniare normate sunt izomorfe, atunci ele sunt simultan separabile sau neseparabile.*

Indicaţie Este uşor de constatat că un izomorfism între două spaţie liniare normate duce o mulţime densă de pe primul spaţiu într-o mulţime densă în cel de-al doilea spaţiu. □

Problema 27 *Să se arate că* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *nu e separabil.*

Indicaţie Pentru a demonstra că $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ nu e separabil vom pune în evidenţă o familie nenumărabilă de bile deschise disjuncte. Astfel, o mulţime densă trebuie să aibă puncte comune cu toate aceste mulţimi, deci nu poate fi numărabilă.

Fie $f : \mathcal{P}(\mathbb{P}) \to \ell^\infty$,

$$f(S) = \left(x_1^S, x_2^S, ...\right),$$

unde

$$x_k^S = \begin{cases} 1, & k \in S \\ 0, & k \notin S \end{cases}, \ \forall k \in \mathbb{P}.$$

Atunci $M = f(\mathcal{P}(\mathbb{P})) \subset \ell^\infty$ şi $f : \mathcal{P}(\mathbb{P}) \to M$ este bijecţie, deci $\operatorname{card} M = \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{P}) = 2^{\aleph_0}$.

Fie $S, T \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$, $S \neq T$. Atunci

$$B\left(x^S, 2^{-1}\right) \cap B\left(x^T, 2^{-1}\right) = \emptyset$$

şi

$$\left\{B\left(x^S, 2^{-1}\right) \mid x \in M\right\}$$

este familia căutată. □

Problema 28 *Fie* $T : (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty) \to (L(\ell^2, \|\cdot\|_2), \|\cdot\|_*)$ *dat prin*

$$T(x)(y) = (x_i y_i)_{i \in \mathbb{P}}$$

pentru orice $x = (x_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \ell^\infty$ *şi orice* $y = (y_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \ell^2$. *Să se arate că:*

(i) T *este bine definit şi stabileşte un izomorfism izometric între* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *şi un subspaţiu liniar închis al lui* $(L(\ell^2, \|\cdot\|_2), \|\cdot\|_*)$ *(spunem că* $(L(\ell^2, \|\cdot\|_2), \|\cdot\|_*)$ *conţine o copie a lui* $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$*);*

(ii) $(L(\ell^2, \|\cdot\|_2), \|\cdot\|_*)$ *nu este separabil.*

Indicaţie (i) Proprietăţile lui T se stabilesc în mod obişnuit. Din proprietatea de izometrie rezultă şi că $\operatorname{Im} T$ este închisă (Problema 14).

(ii) Dacă $(L(\ell^2, \|\cdot\|_2), \|\cdot\|_*)$ ar fi separabil, atunci $(\operatorname{Im} T, \|\cdot\|_*)$ ar fi separabil, deci $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ar fi separabil. □

Problema 29 *Fie X, Y spaţii liniare normate, $(T_n)_{n\in\mathbb{P}} \subset L(X,Y)$ un şir de operatori şi $T \in L(X,Y)$. Să se arate că dacă $T_n \to T$ atunci $T_n x \to Tx$ pentru orice $x \in X$.*

Folosind operatorii $T_n, T : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ $(n \in \mathbb{P})$

$$\begin{aligned}&T_n((x_1, x_2, ...)) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...),\\ &T = \mathrm{id},\end{aligned}$$

să se arate că reciproca afirmaţiei anterioare este falsă.

Indicaţie Este evident că pentru orice $x \in X$ şi orice $n \in \mathbb{P}$ putem scrie

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\| \|x\|,$$

de unde obţinem prima concluzie.

Pentru a doua parte, este uşor de arătat că toţi operatorii T_n sunt liniari şi continui. În plus, pentru orice $x \in \ell^2$,

$$T_n x \overset{\|\cdot\|_2}{\to} \mathrm{id}\, x.$$

Dar, orice $n \in \mathbb{P}$,

$$\|T_n - \mathrm{id}\| \geq \|(T_n - \mathrm{id})(e_{n+1})\| = 1.$$

Prin urmare, (T_n) nu tinde în norma operatorială la id. □

Problema 30 *Fie X un spaţiu liniar normat real şi $x^* \in X^* \setminus \{0\}$. Fie $a \in X$ astfel încât $a \notin \operatorname{Ker} x^*$. Să se arate că*

(i) $\|x^*\| = d(a, \operatorname{Ker} x^*)^{-1} |x^*(a)|$;

(ii) există $\overline{x} \in \operatorname{Ker} x^*$ astfel încât $d(a, \operatorname{Ker} x^*) = \|a - \overline{x}\|$ dacă şi numai dacă există $x_0 \in S_X$ astfel încât $|x^*(x_0)| = \|x^*\|$;

(iii) în cazul $X = C([0,1])$ înzestrat cu norma uniformă şi pentru aplicaţia x^* dată prin

$$x^*(f) = \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$$

condiţiile echivalente de la (ii) nu au loc.

Soluţie (i) Este clar că $d(a, \operatorname{Ker} x^*) > 0$ pentru că $a \notin \operatorname{Ker} x^*$ şi $\operatorname{Ker} x^*$ este subspaţiu liniar închis. De asemenea, este cunoscut faptul că $\operatorname{Ker} x^*$ este subspaţiu liniar de codimensiune 1 şi $X = \operatorname{Ker} x^* \oplus \mathbb{R}a$. Pentru orice $u \in \operatorname{Ker} x^*$ avem

$$|x^*(a)| = |x^*(a - u)| \leq \|x^*\| \|a - u\|,$$

deci

$$|x^*(a)| \leq d(a, \operatorname{Ker} x^*) \|x^*\|.$$

Fie $x \in X \setminus \operatorname{Ker} x^*$. Atunci există $u \in \operatorname{Ker} x^*$ şi $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $x = u + ta$. Avem

$$\|x\| = |t| \left\| \frac{1}{t} u + a \right\| \geq |t|\, d(a, \operatorname{Ker} x^*)$$

şi

$$|x^*(x)| = |t|\,|x^*(a)|,$$

deci

$$\frac{|x^*(x)|}{\|x\|} \le \frac{|x^*(a)|}{d(a, \operatorname{Ker} x^*)}.$$

Deducem egalitatea dorită.

(ii) Presupunem că există $\overline{x} \in \operatorname{Ker} x^*$ astfel încât $d(a, \operatorname{Ker} x^*) = \|a - \overline{x}\|$. Avem, folosind calculele de mai sus,

$$|x^*(a - \overline{x})| = |x^*(a)| = d(a, \operatorname{Ker} x^*)\,\|x^*\| = \|a - \overline{x}\|\,\|x^*\|.$$

Astfel, elementul $\|a - \overline{x}\|^{-1}(a - \overline{x})$ satisface concluzia.

Reciproc, presupunem că există $x_0 \in S_X$ astfel încât $|x^*(x_0)| = \|x^*\|$. Din nou, există $u \in \operatorname{Ker} x^*$ şi $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_0 = u + ta$. Atunci, $|x^*(x_0)| = |t|\,|x^*(a)|$, deci $|t|\,d(a, \operatorname{Ker} x^*) = 1$. Dar, $\|x_0\| = 1$, deci $\|u + ta\| = |t|\,d(a, \operatorname{Ker} x^*)$, adică $\left\|a - |t|^{-1} u\right\| = d(a, \operatorname{Ker} x^*)$ şi deducem concluzia.

(iii) Este simplu de arătat că $x^* \in X^*$ şi $\|x^*\| \le 1$. Pentru $n > 2$, definim $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă ca fiind funcţia care are valoarea 1 pe intervalul $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right]$, -1 pe intervalul $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]$ şi este afină pe $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right]$. Atunci, pentru orice n, $\|f_n\|_\infty = 1$ şi $x^*(f_n) = 1 - n^{-1}$. Deci $\|x^*\| \ge 1$, iar în final $\|x^*\| = 1$.

Presupunem că există $f \in X$ astfel încât $\|f\|_\infty = 1$ şi $|x^*(f)| = 1$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $x^*(f) = 1$. Atunci

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - f(x))\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 + f(x))\,dx = 0.$$

Cum funcţiile $1 - f$ şi $1 + f$ sunt continue şi pozitive, obţinem că $1 - f = 0$ pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, iar $1 + f = 0$ pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Deci $f\left(\frac{1}{2}\right)$ trebuie să fie simultan 1 şi -1, ceea ce este imposibil. $\square$

Problema 31 *Fie X un spaţiu liniar normat şi $Y, Z \subset X$ un subspaţii liniare astfel încât Y este închis, iar Z este finit dimensional. Să se arate că $Y + Z$ este închis.*

Soluţie Presupunem mai întâi că $Y \cap Z = \{0\}$. Fie $(y_n) \subset Y$ şi $(z_n) \subset Z$ astfel încât $y_n + z_n \to x \in X$. Arătăm că (z_n) este mărginit. Într-adevăr, în caz contrar, există un subşir al său (z_{n_k}) astfel încât $\|z_{n_k}\| \to \infty$. Cum Z este finit dimensional, putem presupune, eventual trecând din nou la un subşir $\|z_{n_k}\|^{-1} z_{n_k} \to z \in Z$, cu $\|z\| = 1$. Obţinem că

$$\|z_{n_k}\|^{-1} y_{n_k} + \|z_{n_k}\|^{-1} z_{n_k} \to 0,$$

deci $\|z_{n_k}\|^{-1} y_{n_k} \to -z$. Cum Y este închis şi $\left(\|z_{n_k}\|^{-1} y_{n_k}\right) \subset Y$, deducem că $z \in Y$. Aşadar $z \in Y \cap Z = \{0\}$, ceea ce este imposibil. Deci (z_n) este mărginit şi admite subşir convergent la un element $z \in Z$. Atunci, pe acel subşir, (y_n) este convergent la $u - z \in Y$, ceea ce înseamnă că $u \in Y + Z$. Concluzia este demonstrată în ipoteza suplimentară $Y \cap Z = \{0\}$.

În cazul general, notăm cu $\tilde{Y}$ complementul lui $Y \cap Z$ în Z, care există tocmai pentru că Z este finit dimensional. Evident, $\tilde{Y}$ este finit dimensional, $\tilde{Y} \cap Y = \{0\}$ şi $Y + \tilde{Y} = Y + Z$. Din pasul anterior, rezultă că $\tilde{Y} + Y$ este închis, deci $Y + Z$ este închis. $\square$

6.2 Separarea mulţimilor convexe

Problema 32 *Fie X spaţiu liniar normat şi $f : X \to \mathbb{R}$ liniară.*

(i) Să se arate că f este continuă dacă şi numai dacă $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ *este închisă.*

(ii) Să se arate că dacă f nu este continuă, atunci $\operatorname{Ker} f$ *este densă în X.*

Indicaţie (i) Rezultă din Propoziţia 2.2.2.

(ii) Dacă $f^{-1}(0)$ nu este densă în X, există o bilă B centrată într-un punct din X astfel încât f nu se anulează în niciun punct al lui B. Folosind acelaşi raţionament ca în Propoziţia 2.2.2, f este continuă pe X, ceea ce reprezintă o contradicţie. □

Problema 33 *Fie X spaţiu liniar normat de dimensiune infinită. Să se arate că există două mulţimi convexe C_1 şi C_2 astfel încât $C_1 \cup C_2 = X$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ şi C_1, C_2 dense în X.*

Indicaţie Conform Observaţiei 1.3.9, există un operator liniar f de la X la $\mathbb{R}$ discontinuu. Definim

$$C_1 = \{x \in X \mid f(x) \geq 0\}$$
$$C_2 = \{x \in X \mid f(x) < 0\}.$$

Este clar că $C_1 \cup C_2 = X$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Folosind raţionamentul din problema precedentă, C_1 şi C_2 sunt dense. □

Problema 34 *Să se dea exemple de mulţimi convexe C pentru care egalităţile* $\operatorname{cl} C = \operatorname{cl}(\operatorname{int} C)$ *şi* $\operatorname{int} C = \operatorname{int}(\operatorname{cl} C)$ *nu au loc.*

Indicaţie Având în vedere Teorema 2.1.5, în ambele cazuri, mulţimea C trebuie să fie cu interior vid. Pentru prima dintre situaţii, orice mulţime formată dintr-un singur punct nu satisface egalitatea. Pentru a doua situaţie, orice subspaţiu liniar propriu dens într-un spaţiu liniar normat nu satisface egalitatea (a se vedea Exemplele 1.2.5 şi 1.2.6). □

Problema 35 *Fie*

$$A = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{P}} \in \ell^2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} k x_k^2 < 1 \right\}.$$

Să se arate că A este convexă, nu este absorbantă şi nu este deschisă.

Indicaţie Convexitatea lui A se arată uşor folosind definiţia şi, eventual, convexitatea funcţiei $x \mapsto x^2$.

Fie

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...\right) \in \ell^2 \setminus A.$$

Fie $\lambda \geq 0$ astfel încât $\lambda x \in A$. Atunci

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \leq 1,$$

ceea ce atrage $\lambda = 0$. Deci A nu este absorbantă. În continuare, observăm că $0 \in A$ şi dacă A ar fi deschisă, atunci 0 s-ar afla în interiorul lui A, deci A ar fi vecinătate a originii, deci ar fi absorbantă. Deducem că A nu este deschisă.

Problema 36 *Fie* $p \in (1, \infty)$ *şi*

$$G = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^p \mid \sum_{n\in\mathbb{P}} x_n = 0 \right\}.$$

Să se arate că G *este subspaţiu liniar normat dens în* $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$.

Indicaţie Folosim Observaţia 2.3.2 şi demonstrăm că dacă $x^* \in \left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^*$ şi x^* se anulează pe G, atunci x^* este nulă. Cum $\left(\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)^*, \|\cdot\|_*\right) \simeq \left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right)$, unde $q = \frac{p}{p-1}$, prin izomorfismul T de la Problema 1.5.5 putem scrie $x^* = Tx$, cu $x \in \ell^q$. Fie $n \in \mathbb{N}$ cu $n \geq 1$. Definim şirul

$$u = (-1, 0, ...0, 1, 0, ...) \in G,$$

unde între -1 şi 1 sunt $(n-1)$ zerouri. Cum

$$x^*(u) = T(x)(u) = x_n - x_1,$$

deducem că şirul x este constant. Cum $x \in \ell^q$, singura posibilitate este ca x să fie 0. □

Problema 37 *În spaţiul liniar normat* $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ *considerăm mulţimile*

$$Y = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0 \mid x_{2n-1} = 0,\ \forall n \in \mathbb{P} \right\}$$
$$Z = \left\{ x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0 \mid x_{2n} = n x_{2n-1},\ \forall n \in \mathbb{P} \right\}.$$

Să se arate că
(i) Y, Z *sunt subspaţii liniare normate închise ale lui* c_0;
(ii) $Y + Z$ *este subspaţiu liniar normat propriu şi dens în* c_0.

Soluţie (i) Fie $\varphi : c_0 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = (x_1, 0, x_3, 0, ...),\ \forall x = (x_n)_{n\geq 1} \in c_0.$$

Este uşor de văzut că φ este liniară, continuă şi $Y = \operatorname{Ker} \varphi$. Deci Y este subspaţiu liniar normat închis în c_0.

Faptul că Z este subspaţiu liniar se probează în mod standard. Arătăm că Z este închis. Fie $\left(x_n^k\right)_n \in Z$ pentru orice $k \in \mathbb{P}$ astfel încât $x^k \underset{\|\cdot\|_\infty}{\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}} x \in c_0$. Atunci

$$x_{2n}^k = n x_{2n-1}^k,\ \forall n, k.$$

Dar

$$\sup_n \left| x_n^k - x_n \right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

deci are loc convergenţa pe coordonate. Astfel, deducem că pentru orice n, $x_{2n} = n x_{2n-1}$, deci $x \in Z$.

(ii) Arătăm acum că $Y+Z$ este dens în c_0. Fie $\varphi \in c_0^* \simeq \ell^1$ prin izomorfismul canonic. Astfel, φ se identifică cu Tx, unde $x \in \ell^1$. Presupunem că $(Tx)(y)=0$ pentru orice $y \in Y+Z$, adică

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = 0,\ \forall y \in Y+Z.$$

Alegem, pentru orice k, $y^{2k} = (0,...,0,1,0,...) \in Y \subset Y+Z$ (cu 1 pe poziţia $2k$) avem $x_{2k}=0$. Deci relaţia de mai sus revine la

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{2n-1} y_{2n-1} = 0,\ \forall y \in Y+Z.$$

Alegem, pentru orice k, $y^{2k-1} = (0,...,0,1,k,0,...) \in Z \subset Y+Z$ (cu 1 pe poziţia $2k-1$) şi deducem $x_{2k-1}=0$. Deci $x=0$, adică $\varphi=0$. Conform, Observaţiei 2.3.2, $Y+Z$ este dens în c_0.

Arătăm că $Y+Z$ nu coincide cu c_0. Fie

$$u = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, ...\right) \in c_0.$$

Dacă u s-ar scrie ca $v+w$ cu $v \in Y$ şi $w \in Z$, am avea succesiv: $v_1=0$, $w_1=1$, $w_2=2$, $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}-1$, $v_3=0$, $w_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $w_4=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $v_4=\frac{1}{\sqrt{4}}-2\frac{1}{\sqrt{3}}$ ş.a.m.d. Se ajunge la contradicţia $w \notin c_0$. $\square$

Problema 38 *Fie* $(X,\|\cdot\|)$ *finit dimensional. Fie* $C \subset X$ *o mulţime convexă nevidă astfel încât* $0 \notin C$ *şi fie* A, B *mulţimi convexe nevide disjuncte. Fie* $\{x_n \mid n \in \mathbb{P}\}$ *o mulţime densă în* C*. Să se arate că:*

(i) pentru orice $n \in \mathbb{P}$ *mulţimea* $C_n = \operatorname{conv}\{x_1,...,x_n\}$ *este compactă şi reuniunea acestor mulţimi este densă în* C*;*

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{P}$ *există* $x_n^* \in X^*$ *astfel încât* $\|x_n^*\| = 1$ *şi* $x_n^*(x) \geq 0$ *pentru orice* $x \in C_n$*;*

(iii) există $x^* \in X^*$ *astfel încât* $\|x^*\|=1$ *şi* $x^*(x) \geq 0$ *pentru orice* $x \in C$*;*

(iv) mulţimile A *şi* B *pot fi separate printr-un hiperplan.*

Indicaţie (i) Compactitatea lui C_n se arată după modalitatea standard, probând secvenţiala compactitate. Cum reuniunea acestor mulţimi conţine pe $\{x_n \mid n \in \mathbb{P}\}$, este densă în C.

(ii) Existenţa lui x_n^* rezultă dintr-una din teoremele de separare aplicată pentru C_n şi $\{0\}$.

(iii) Şirul $(x_n^*)_{n\in\mathbb{P}}$ de la punctul precedent este mărginit şi cum dualul lui X este tot finit dimensional, există un subşir notat tot prin (x_n^*) convergent la un element $x^* \in S_{X^*}$.

Fie $x \in C$. Atunci există un şir

$$(y_n) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{P}} C_n$$

astfel încât $y_n \to x$. Pentru orice n există $k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât $y_n \in C_{k_n}$ şi cum şirul de mulţimi (C_n) este crescător, $y_n \in C_k$ pentru orice $k \geq k_n$. Găsim astfel un şir strict crescător de numere reale $(k_n)_n$ astfel încât $y_n \in C_{k_n}$ pentru orice n. Avem:

$$x_{k_n}^*(y_n) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned}\left|x^*(x)-x^*_{k_n}(y_n)\right| &\le \left|x^*(x)-x^*_{k_n}(x)\right|+\left|x^*_{k_n}(x)-x^*_{k_n}(y_n)\right| \\ &\le \left\|x^*-x^*_{k_n}\right\|\|x\|+\|x-y_n\|,\ \forall n\in\mathbb{P},\end{aligned}$$

deci $x^*_{k_n}(y_n)\to x^*(x)$. Deducem că $x^*(x)\ge 0$.

(iv) Cum $A\cap B=\emptyset$, $0\notin A-B$. Aplicăm punctul (iii) şi deducem concluzia. □

Problema 39 *Să se arate că* $(\ell^1,\|\cdot\|_1)$ *şi* $((\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)^*,\|\cdot\|_*)$ *nu sunt izomorfe. Să se arate că* $T:(\ell^1,\|\cdot\|_1)\to((\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)^*,\|\cdot\|_*)$ *dat prin*

$$T(x)(y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k,$$

$x=(x_n)_{n\in\mathbb{P}}\in\ell^1$, $y=(y_n)_{n\in\mathbb{P}}\in\ell^\infty$ *este corect definit, liniar, injectiv şi continuu. Să se atate că* T *este izometrie şi să se deducă faptul că* T *nu este surjectiv.*

Să se construiască o funcţională $x^*\in(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)^*\setminus\operatorname{Im}T$.

Indicaţie Am văzut la Exemplul 1.6.2 şi Problema 27 că $(\ell^1,\|\cdot\|_1)$ este separabil, dar $(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ nu este separabil. Dacă $(\ell^1,\|\cdot\|_1)$ ar fi izomorf cu $((\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)^*,\|\cdot\|_*)$, atunci $((\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)^*,\|\cdot\|_*)$ ar fi separabil şi conform Propoziţiei 2.3.5, $(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)$ ar fi separabil. Obţinem o contradicţie, deci spaţiile nu sunt izomorfe.

Buna definire a lui T, injectivitatea, liniaritatea şi continuitatea sa se dovedesc ca la problemele precedente. Similar pentru proprietatea de izometrie. Din cele de mai sus, T nu poate fi surjectiv.

Construim o funcţională din $(\ell^\infty,\|\cdot\|_\infty)^*$ care nu se află în imaginea lui T. Fie $f:c\to\mathbb{R}$ dată prin

$$f(x)=\lim x_n.$$

Este uşor de verificat că această aplicaţie este în $(c,\|\cdot\|_\infty)^*$. Folosim Teorema Hahn-Banach în varianta sa topologică şi prelungim f la întreg spaţiul ℓ^∞ (c este subspaţiu liniar al lui ℓ^∞). Notăm această extindere g şi ştim că $\|g\|_*=\|f\|_*$. Dacă ar exista $x\in\ell^1$ astfel încât $Tx=g$, atunci pentru orice n

$$x_n=T(x)(e_n)=g(e_n)=f(e_n)=0,$$

deci $x=0$, adică $g=0$. Dar, $g((1,1,...,1...))=f((1,1,...,1...))=1$, ceea ce reprezintă o contradicţie. □

6.3 Principii ale Analizei funcţionale

Problema 40 *Să se arate că dacă* $(X,\|\cdot\|)$ *este spaţiu Banach infinit dimensional, atunci dimensiunea sa algebrică este mai mare decât* $\aleph_0$.

Indicaţie Dacă $(X,\|\cdot\|)$ este spaţiu infinit dimensional, atunci dimensiunea sa algebrică este mai mare sau egală decât $\aleph_0$. Presupunem că $(X,\|\cdot\|)$ este spaţiu Banach şi are dimensiunea $\aleph_0$. Fie $B=\{e_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ o bază a lui X. Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ definim

$$F_n=\operatorname{span}\left\{e_k\mid k\in\overline{0,n}\right\}.$$

Evident, toate subspaţiile liniare F_n sunt închise (fiind finit dimensionale) şi

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Conform Teoremei lui Baire (Teorema 3.1.3), există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$. Atunci, pe baza Problemei 13, $F_{n_0} = X$, ceea ce reprezintă o contradicţie. Aşadar, X nu poate avea dimensiunea $\aleph_0$. $\square$

Problema 41 *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu Banach. Să se arate că* X *nu se poate scrie ca reuniune numărabilă de subspaţii liniare închise proprii.*

Indicaţie Fie (X_n) o familie numărabilă de subspaţii liniare închise astfel încât

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Conform Teoremei lui Baire (Teorema 3.1.3), cel puţin unul dintre aceste subspaţii are interior nevid. Dar, conform Problemei 13, dacă un subspaţiu liniar are interior nevid, atunci coincide cu întregul spaţiu. $\square$

Problema 42 *(i) Să se arate că nu există normă de spaţiu Banach pe* c_{00}.
(ii) Să se arate că nu există normă de spaţiu Banach pe spaţiul liniar al polinoamelor.

Indicaţie Se folosesc problemele precedente. $\square$

Problema 43 *Fie, pentru orice* $n \in \mathbb{P}$, $T_n : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_0, \|\cdot\|_\infty)$,

$$T_n((x_1, x_2, ...)) = (x_1, 2x_2, ..., nx_n, 0, 0...).$$

Să se arate că:
(i) pentru orice $n \in \mathbb{P}$, T_n *este liniar continuu şi pentru orice* $x \in c_{00}$, *şirul* $(T_n x)$ *este convergent;*
(ii) şirul $(\|T_n\|)$ *nu este mărginit.*
Contrazic aceste fapte Principiul mărginirii uniforme?

Indicaţie Punctele (i) şi (ii) se probează uşor. Principiul mărginirii uniforme nu este contrazis de acest exemplu pentru că $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ nu este spaţiu Banach. $\square$

Problema 44 *Fie* X *spaţiu liniar normat şi* $B \subset X$. *Să se arate că* B *este mărginită dacă şi numai dacă mulţimea* $x^*(B)$ *este mărginită pentru orice* $x^* \in X^*$.

Indicaţie O implicaţie este clară: dacă B este mărginită atunci mulţimea $x^*(B)$ este mărginită pentru orice $x^* \in X^*$.

Demonstrăm implicaţia inversă. Pentru orice $b \in B$ definim operatorul liniar $T_b : X^* \to \mathbb{R}$ prin

$$T_b(x^*) = x^*(b).$$

Cum
$$|T_b(x^*)| \leq \|b\| \|x^*\|, \ \forall b \in B, \ x^* \in X^*$$
deducem faptul că $\{T_b \mid b \in B\}$ este o familie de operatori liniari şi continui. Având în vedere că pentru orice $x^* \in X^*$, $\{T_b(x^*) \mid b \in B\} = x^*(B)$, ipoteza ne asigură că această familie este punctual mărginită. De asemenea, X^* este spaţiu Banach. Atunci, conform Principiului mărginirii uniforme (Teorema 3.2.1), există $c > 0$ astfel încât pentru orice $x^* \in X^*$ şi orice $b \in B$,
$$|T_b(x^*)| \leq c \|x^*\|,$$
deci
$$|x^*(b)| \leq c \|x^*\|.$$
Cum
$$\|b\| = \sup \{|x^*(b)| \mid x^* \in S_{X^*}\},$$
obţinem că $\|b\| \leq c$ pentru orice $b \in B$. Deci B este mărginită. □

Problema 45 *Fie X spaţiu Banach şi $B \subset X^*$. Să se arate că B este mărginită dacă şi numai dacă mulţimea $\{b(x) \mid b \in B\}$ este mărginită pentru orice $x \in X$.*

Indicaţie Raţionăm similar cu problema de mai sus, singura diferenţă fiind că trebuie să impunem completitudinea lui X întrucât lucrăm cu operatori definiţi pe X, spre deosebire de problema anterioară la care completitudinea lui X^*, adică a domeniului operatorilor, este automat satisfăcută. □

Problema 46 *Fie X, Y, Z spaţii liniare normate. Fie $T : X \times Y \to Z$ operator liniar în fiecare variabilă. Considerăm următoarele afirmaţii:*

(i) T este continuu (în ansamblul variabilelor);

(ii) T este continuu în $(0,0)$;

(iii) există $M > 0$ astfel încât
$$\|T(x,y)\| \leq M \|x\| \|y\|, \ \forall x \in X, y \in Y;$$

(iv) T este continuu în fiecare variabilă.

Atunci (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv). Dacă, în plus, X sau Y este complet toate afirmaţiile sunt echivalente.

Indicaţie Implicaţiile (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iv) şi (iii) $\Longrightarrow$ (i) sunt evidente.

Pentru (ii) $\Longrightarrow$ (iii), presupunem, prin reducere la absurd, că există $(x_n) \subset X$, $(y_n) \subset Y$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{P}$
$$\|T(x_n, y_n)\| > n \|x_n\| \|y_n\|.$$
Evident, termenii x_n şi y_n sunt nenuli. Considerăm şirurile
$$(\overline{x}_n) = \left(\frac{x_n}{\sqrt{n} \|x_n\|} \right), (\overline{y}_n) = \left(\frac{y_n}{\sqrt{n} \|y_n\|} \right)$$
şi ajungem la o contradicţie cu ipoteza.

Arătăm acum (iv) $\Longrightarrow$ (iii). Până acum completitudinea niciunui spaţiu nu a fost necesară. Pentru această implicaţie, fără a restrânge generalitatea, presupunem că X este complet. Pentru orice $x \in X$ fixat considerăm aplicaţia liniară şi continuă $T(x, \cdot) : Y \to Z$. Deci pentru orice $x \in X$, există $M_x > 0$ astfel încât

$$\|T(x, y)\| \leq M_x \|y\|, \ \forall y \in Y.$$

Atunci familia de operatori liniari şi continui de la X la Z dată prin $\{T(\cdot, y) \mid \|y\| \leq 1\}$ este punctual mărginită. Se aplică apoi Principiului mărginirii uniforme. $\square$

Problema 47 *Să se studieze exemplul* $X = Y = c_{00}$, $Z = \mathbb{R}$, $T : X \times Y \to Z$

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

unde $x = (x_1, x_2, ...)$, $y = (y_1, y_2, ...)$ *pentru a dovedi că ipoteza de completitudine din problema precedentă este esenţială.*

Soluţie Se arată uşor că T este bine definit, continuu şi liniar în fiecare variabilă. Considerăm acum

$$x_n = (1, 1, ..., 1, 0, 0, ...), \ \forall n \in \mathbb{P}$$

unde 1 se găseşte până la poziţia n. Atunci

$$T(x_n, x_n) = n,$$

deci

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{n}} x_n, \frac{1}{\sqrt{n}} x_n\right) = 1, \ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Cum $\sqrt{n}^{-1} x_n \to 0$ în $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$, deducem că T nu este continuu în ansamblul variabilelor. $\square$

Problema 48 *Fie în* $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ *seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e_n.$$

Să se arate că seria este absolut convergentă, dar nu este convergentă.

Soluţie Absoluta convergenţă este clară. Apoi, c_{00} este subspaţiu liniar al lui c_0 şi se observă că seria este convergentă în c_0 la $(n^{-2})_{n \in \mathbb{P}}$, element care nu este în c_{00}. $\square$

Problema 49 *Fie* $T : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ *dat prin*

$$T((x_n)) = \left(\frac{x_n}{n}\right).$$

Să se arate că:

(i) T *este corect definit, liniar, continuu;*

(ii) imaginea lui T este

$$\operatorname{Im} T = \left\{ x \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < \infty \right\},$$

iar acest subspaţiu liniar este propriu şi dens în $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$;
(iii) operatorul liniar, continuu, bijectiv $T : (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\operatorname{Im} T, \|\cdot\|_2)$ nu are invers continuu.
Să se compare cu Corolarul 3.2.10.

Indicaţie Toate afirmaţiile se probează în mod standard. Spaţiul $(\operatorname{Im} T, \|\cdot\|_2)$ nu este complet şi din acest motiv Corolarul 3.2.10 nu este aplicabil. □

Problema 50 *Fie*

$$M = \left\{ x \in \ell^1 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n \, |x_n| < \infty \right\}.$$

Să se arate că M este subspaţiu liniar propriu dens al lui $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$. Definim $T : (M, \|\cdot\|_1) \to (\ell^1, \|\cdot\|_1)$ prin

$$T((x_n)) = (n x_n).$$

Să se arate că:
(i) T este liniar, bijectiv;
(ii) T^{-1} este continuu;
(iii) T are grafic închis dar nu este continuu.
Să se compare cu Principiul graficului închis.

Problema 51 *Fie X un spaţiu liniar şi $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ două norme complete pe X. Presupunem că are loc următoarea proprietate: pentru orice $(x_n) \subset X$,*

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x_1 \\ x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x_2 \end{cases} \implies x_1 = x_2.$$

Să se arate că cele două norme sunt echivalente.

Indicaţie Considerăm aplicaţia identitate $\mathrm{id} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$. Ipoteza asigură faptul că graficul acestei aplicaţii este închis. Deci, pe baza completitudinii normelor (Principiul graficului închis, Teorema 3.2.12), id de mai sus este continuă. Astfel normele sunt comparabile şi folosind Corolarul 3.2.11 obţinem echivalenţa lor. □

Problema 52 *Fie X un spaţiu Banach şi $T : X \to X^*$ un operator liniar. Să se arate că dacă*

$$T(x)(x) \geq 0, \ \forall x \in X,$$

atunci T este continuu.

Indicaţie Se arătă că T are grafic închis şi cum X şi X^* sunt spaţii Banach va rezulta că este continuu. Fie $(x_n, T(x_n)) \to (x, x^*) \in X \times X^*$ un şir convergent de elemente din graficul lui T. Trebuie să arătăm că $x^* = Tx$. Din ipoteză se obţine

$$x^*(y-x) \leq T(y)(y-x), \ \forall y \in X.$$

De aici se obţine $x^* = Tx$. □

Problema 53 *Fie X spaţiu Banach, Y spaţiu liniar normat şi $T : X \to Y$ operator liniar. Definim $\|\cdot\|_1 : X \to \mathbb{R}$ prin*

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|Tx\|.$$

(i) Să se arate că $\|\cdot\|_1$ este o normă pe X;

(ii) Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente: (a) T este continuu; (b) normele $\|\cdot\|$ şi $\|\cdot\|_1$ sunt echivalente; (c) $(X, \|\cdot\|_1)$ este spaţiu Banach.

Indicaţie (i) Faptul că $\|\cdot\|_1$ este o normă pe X se arată în mod obişnuit.

(ii) (a) $\Longrightarrow$ (b) Este clar că $\|\cdot\|_1$ este mai fină decât $\|\cdot\|$. Invers, din continuitatea lui T, pentru orice $x \in X$,

$$\|x\|_1 \leq (1 + \|T\|) \|x\|.$$

Deci normele sunt echivalente.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Implicaţia este evidentă.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Cum cele două norme sunt comparabile şi sunt norme complete, din Corolarul 3.2.11 deducem că sunt echivalente. Deci există $M > 0$ astfel încât

$$\|x\|_1 \leq M \|x\|, \ \forall x \in X.$$

Obţinem

$$\|Tx\| \leq (M-1) \|x\|, \ \forall x \in X,$$

deci T este continuu. □

Problema 54 *Fie X, Y spaţii Banach şi $T : X \to Y$ operator liniar continuu şi surjectiv. Să se arate că există $\gamma > 0$ astfel încât pentru orice $y \in Y$ există $x \in X$ cu $y = Tx$ şi $\|x\| \leq \gamma \|y\|$.*

Indicaţie Din Principiul aplicaţiilor deschise (Teorema 3.2.9), există $\alpha > 0$ astfel încât $D(0,\alpha) \subset T(D(0,1))$. Se obţine concluzia pentru $\gamma = \alpha^{-1}$. □

Problema 55 *Fie X, Y spaţii Banach şi $T : X \to Y$ operator liniar continuu. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $T(X)$ este mulţime închisă;

(ii) Operatorul T privit cu valori în $T(X)$ este deschis;

(iii) există $\gamma > 0$ astfel încât pentru orice $y \in T(X)$ există $x \in X$ cu $y = Tx$ şi $\|x\| \leq \gamma \|y\|$.

Indicaţie (i) $\Longrightarrow$ (ii) Cum $T(X)$ este spaţiu Banach, putem aplica Principiul aplicaţiilor deschise.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Rezultă dim Problema 54.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Fie $(y_n) \subset \operatorname{Im} T$ astfel încât $y_n \to y \in Y$. Putem atunci găsi un şir strict crescător (n_k) de numere naturale astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{P}$,

$$\left\|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}\right\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Din relaţia de mai sus, pentru orice $k \in \mathbb{P}$, găsim $u_k \in X$ astfel încât

$$Tu_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k} \text{ şi } \|u_k\| \leq \frac{\gamma}{2^k}.$$

Fie $x_1 \in X$ astfel încât $Tx_1 = y_{n_1}$ şi

$$x_k = x_1 + u_1 + ... + u_{k-1}, \ \forall k \geq 2,$$

ceea ce înseamnă, în particular, că

$$Tx_k = y_{n_k}, \ \forall k \geq 1.$$

Dar, din cele de mai sus, seria $\sum u_k$ este absolut convergentă, deci convergentă. Deducem că (x_k) este convergent la un element $x \in X$. Deci, $Tx_k = y_{n_k} \to Tx = y$, adică $x \in \operatorname{Im} T$. $\square$

Problema 56 *Fie X spaţiu Banach şi Y, Z subspaţii liniare închise ale lui X astfel încât $Y \cap Z = \{0\}$ şi $X = Y + Z$. Să se arate că pentru orice $x \in X$ există o unică scriere $x = y_x + z_x$ cu $y_x \in Y$ şi $z_x \in Z$. Definim $P_Y : X \to Y$ şi $P_Z : X \to Z$ prin $P_Y(x) = y_x$, $P_Z(x) = z_x$. Să se arate că aceşti doi operatori sunt liniari, surjectivi, satisfac*

$$P_Y \circ P_Y = P_Y, \ker(P_Y) = Z, P_Z \circ P_Z = P_Z, \ker(P_Z) = Y$$

şi sunt continui.

Indicaţie Singura dificultate este demonstrarea continuităţii. Cum Y, Z sunt spaţii Banach, este suficient să arătăm că cei doi operatori au grafic închis. Arătăm pentru P_Y. Fie aşadar $(x_n, P_Y(x_n)) \to (x, y) \in X \times Y$ un şir convergent de elemente din graficul operatorului P_Y. Cum P_Y este surjectiv, există $\overline{x} \in X$ astfel încât $P_Y(\overline{x}) = y$. Este suficient să arătăm că $P_Y(\overline{x}) = P_Y(x)$. Ştim că $x_n - P_Y(x_n) \to x - y$. Dar, pentru orice n, $x_n - P_Y(x_n) \in \ker(P_Y) = Z$. Cum Z este închis, $x - y \in Z$, deci $P_Y(x) = P_Y(y)$. $\square$

6.4 Topologii slabe şi compactitate

Problema 57 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. Să se arate că o funcţională liniară $f : X \to \mathbb{R}$ este $(\|\cdot\|, |\cdot|)-$continuă dacă şi numai dacă este $(w, |\cdot|)-$continuă.*

Indicaţie Rezultă din modul de definire a topologiei slabe şi din compararea celor două topologii. $\square$

Problema 58 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi (x_n) un şir de elemente din X care este fundamental în normă şi converge slab la un element $x \in X$. Atunci (x_n) converge tare la x.*

Indicaţie Fie $\varepsilon > 0$. Faptul că (x_n) este fundamental în normă înseamnă că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$, $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Deci, pentru orice $n, m \geq n_\varepsilon$

$$x_m \in x_n + \varepsilon D_X.$$

Dar, conform Teoremei lui Mazur (Teorema 4.2.8), mulţimea $x_n + \varepsilon D_X$ este slab închisă pentru orice n. Făcând $m \to \infty$, pe baza convergenţei slabe a lui (x_n) deducem

$$x \in x_n + \varepsilon D_X, \ \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că

$$\|x_n - x\| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon,$$

deci x este limita lui (x_n) în topologia normei. □

Problema 59 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat. Fie $(x_n) \subset X$ un şir care converge slab la $x \in X$. Folosind mulţimea $C = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|}(\mathrm{conv}\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ şi Teorema lui Mazur să se arate că există un şir de combinaţii convexe ale lui (x_n) care converge tare la x.*

Indicaţie Este clar că C este convexă şi $\|\cdot\|$ −închisă. Din Teorema lui Mazur (Teorema 4.2.8), C este slab închisă. Dar cum $x_n \xrightarrow{w} x$, x este în închiderea slabă a mulţimii $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ care este submulţime a lui C. Deci $x \in C$. Obţinem concluzia. □

Problema 60 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi (x_n) un şir de elemente din X astfel încât toţi termenii se află într-o submulţime compactă în topologia normei. Să se arate că dacă (x_n) este slab convergent, atunci este tare convergent.*

Indicaţie Presupunem că $x_n \xrightarrow{w} x \in X$ dar $x_n \not\to x$. Atunci există $\varepsilon > 0$ şi un subşir (x_{n_k}) al lui (x_n) astfel încât pentru orice k

$$\|x_{n_k} - x\| \geq \varepsilon.$$

Dar (x_{n_k}) este la rândul său un şir conţinut în mulţimea compactă din enunţ, deci are subşir convergent în topologia tare. Acest subşir este deci convergent şi în sens slab la aceeaşi limită şi cum topologia w este separată, limita nu poate fi decât x. Aceasta este în contradicţie cu relaţia de mai sus. □

Problema 61 *Fie X un spaţiu liniar normat şi $A \subset X$ o mulţime nevidă. Să se arate că*

$$\mathrm{cl}_w \, \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A = \mathrm{cl}_w A.$$

Este adevărat, în general, că $\mathrm{cl}_{\|\cdot\|} \mathrm{cl}_w A = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A$?

Să se dea exemplu de şir pentru care închiderea slabă a mulţimii termenilor săi este D_X.

Indicaţie Incluziunea $\mathrm{cl}_w A \subset \mathrm{cl}_w \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A$ este evidentă. Fie $x \in \mathrm{cl}_w \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A$. Atunci, pentru orice mulţime U, $w-$deschisă ce conţine x, avem

$$U \cap \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A \neq \emptyset.$$

Dar U este şi tare deschisă, iar relaţia de mai sus atrage $U \cap A \neq \emptyset$.

Pentru a vedea că relaţia $\mathrm{cl}_{\|\cdot\|}\,\mathrm{cl}_w A = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A$ nu este în general adevărată, este suficient să considerăm X infinit dimensional şi să luăm $A = S_X$.

Pentru ultima chestiune, considerăm X un spaţiu liniar normat separabil infinit dimensional şi $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{P}\}$ o submulţime densă în S_X (orice subspaţiu metric al unui spaţiu metric separabil este separabil). Atunci, conform celor arătate,

$$\mathrm{cl}_w A = \mathrm{cl}_w\,\mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A = \mathrm{cl}_w S_X = D_X,$$

adică egalitatea dorită. □

Problema 62 *Fie X spaţiu liniar normat, $(x_n) \subset X$, $x \in X$, $(x_n^*) \subset X^*$, $x^* \in X^*$, $D \subset X$ astfel încât $\overline{\mathrm{span}\, D} = X$, $D^* \subset X^*$ astfel încât $\overline{\mathrm{span}\, D^*} = X^*$. Să se arate că*

(i) $x_n \xrightarrow{w} x$ dacă şi numai dacă (x_n) este mărginit şi

$$x^*(x_n) \to x^*(x), \ \forall x^* \in D^*.$$

(ii) dacă X este complet, $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ dacă şi numai dacă (x_n^*) este mărginit şi

$$x_n^*(x) \to x^*(x), \ \forall x \in D.$$

Indicaţie (i) Dacă $x_n \xrightarrow{w} x$ atunci $x^*(x_n) \to x^*(x)$ pentru orice $x^* \in X^*$, deci a doua parte a concluziei are loc. Pentru prima parte, folosim Propoziţia 4.2.10 pentru a deduce mărginirea şirului.

Demonstrăm implicaţia reciprocă. Trebuie să arătăm că $x^*(x_n) \to x^*(x)$ pentru orice $x^* \in X^*$.

Fie $x^* \in X^*$. Cum $\overline{\mathrm{span}\, D^*} = X^*$, există un şir $(x_k^*) \subset \mathrm{span}\, D^*$, $x_k^* \to x^*$. Pe baza ipotezei se observă cu uşurinţă că

$$x^*(x_n) \to x^*(x), \ \forall x^* \in \mathrm{span}\, D^*.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Folosind convergenţa lui (x_k^*) şi mărginirea lui (x_n), există un rang k_ε astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\begin{cases} \|x_n\| \left\|x_{k_\varepsilon}^* - x^*\right\| < \varepsilon \\ \|x\| \left\|x_{k_\varepsilon}^* - x^*\right\| < \varepsilon. \end{cases}$$

Pentru acest rang k_ε, din ipoteză, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$,

$$\left|x_{k_\varepsilon}^*(x_n) - x_{k_\varepsilon}^*(x)\right| < \varepsilon.$$

Atunci

$$\begin{aligned} |x^*(x_n) - x^*(x)| &\leq \left|x^*(x_n) - x_{k_\varepsilon}^*(x_n)\right| + \left|x_{k_\varepsilon}^*(x_n) - x_{k_\varepsilon}^*(x)\right| + \left|x_{k_\varepsilon}^*(x) - x^*(x)\right| \\ &< 3\varepsilon, \ \forall n \geq n_\varepsilon. \end{aligned}$$

Deducem aşadar că $x^*(x_n) \to x^*(x)$.

(ii) Raţionăm ca mai sus. Completitudinea lui X intervine atunci când, la implicaţia directă, folosim Propoziţia 4.3.10 pentru a obţine mărginirea şirului. □

Problema 63 *Fie $X = c_0$ sau $X = \ell^p$ cu $p \in (1, \infty)$. Fie $(v_n) \subset X$ un şir mărginit şi $x \in X$. Să se arate că $v_n \xrightarrow{w} x$ dacă şi numai dacă are loc convergenţa pe coordonate, adică $(v_n)_k \to x_k$ pentru orice k. Să se arate că ipoteza de mărginire a lui (v_n) este esenţială.*

Indicaţie Considerăm mulţimea vectorilor unitari privită în $\ell^1 = (c_0)^*$ sau în $\ell^q = (\ell^p)^*$ (cu $p^{-1} + q^{-1} = 1$). Pentru a constata că ipoteza de mărginire a lui (v_n) este esenţială, considerăm $(v_n) = (ne_n) \subset \ell^2$. Acest şir converge pe componente la 0, dar nu este slab convergent pentru că nu este mărginit. $\square$

Problema 64 *Fie* $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Să se arate că $f \in (\ell^1)^*$, *dar* f *nu este* w^*-*continuă.*

Indicaţie Liniaritatea lui f este clară. Apoi,

$$|f(x)| \le \|x\|_1, \ \forall x \in \ell^1,$$

deci f este continuă. Fie acum $\{e_k \mid k \in \mathbb{P}\}$ vectorii unitari standard în ℓ^1. Ştim că $e_k \xrightarrow{w^*} 0$. Dar $f(e_k) = 1$ pentru orice k, deci f nu este w^*-continuă. $\square$

Problema 65 *Fie* (e_n) *şirul vectorilor unitari în* c_0. *Definim şirul* (v_n) *prin*

$$v_n = e_1 + ... + e_n, \ \forall n.$$

Să se arate că:
(i) (v_n) *privit ca şir în* $\ell^\infty = (\ell^1)^*$ *este* w^*-*convergent;*
(ii) (v_n) *nu este* $w-$*convergent în* c_0.

Indicaţie (i) Pentru orice $y \in \ell^1$, folosind operatorul de izomorfism izometric între ℓ^∞ şi $(\ell^1)^*$, avem

$$T(v_n)(y) = \sum_{k=1}^{n} y_k \to \sum_{k=1}^{\infty} y_k = T((1))(y),$$

unde (1) este şirul constant 1. Deci $v_n \xrightarrow{w^*} (1)$.

(ii) Dacă ar exista $x \in c_0$ astfel încât $v_n \xrightarrow{w-c_0} x$ atunci $v_n \xrightarrow{w^*-\ell^\infty} x$. Astfel, $x = (1) \notin c_0$, ceea ce reprezintă o contradicţie. $\square$

Problema 66 *Să se arate că şirul vectorilor unitari converge slab în* ℓ^2, *dar nu este convergent în normă.*

Indicaţie Cum dualul lui ℓ^2 se identifică cu ℓ^2, pe baza operatorului de identificare avem, pentru orice $x \in \ell^2$ şi orice n,

$$T(x)(e_n) = x_n \to 0,$$

deci $e_n \xrightarrow{w} 0$. Dar, pentru orice n, m diferite

$$\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2},$$

deci (e_n) nu admite subşir convergent în normă (de fapt, nu admite nici subşir fundamental în normă). $\square$

Problema 67 *În spaţiul* $\ell^\infty = m$, *privit ca dual al lui* ℓ^1, *considerăm şirul* $(x^n)_{n\in\mathbb{P}}$ *cu primii* n *termeni* 0 *şi toţi ceilalţi* 1. *Să se arate că* $(x^n) \xrightarrow{w^*} 0$, *dar* $(x^n) \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$.

Indicaţie Reamintim că $\ell^\infty \simeq (\ell^1)^*$. Folosind operatorul T de izomorfism izometric (Problema 1.5.4) deducem

$$T(x^n)(y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Deci, $(x^n) \xrightarrow{w^*} 0$. Dacă ar fi adevărat că $(x^n) \xrightarrow{w} 0$, atunci din Corolarul 59 ar exista un şir de combinaţii convexe de termeni ai şirului cu limita 0 în normă. Cum $\|u\|_\infty = 1$ pentru orice u combinaţie convexă de vectori (x^n), acest lucru nu este posibil. Deci (x^n) nu converge nici în topologia w, nici în topologia tare. □

Problema 68 *Fie* $X = \ell^\infty$ *(adică* m*) cu norma* $\|\cdot\|_\infty$. *Să se arate că mulţimea*

$$S = \{e_k \mid k \in \mathbb{P}\} \cup \{0\}$$

este slab-stelat secvenţial compactă, dar nu este compactă în normă.

Indicaţie Observăm că

$$\|e_i - e_j\|_\infty = 1, \ \forall i, j \in \mathbb{P}, \ i \neq j,$$

deci nu putem extrage niciun subşir convergent în normă.

Apoi, se arată că $e_k \xrightarrow{w^*} 0$. □

Problema 69 *Considerăm spaţiul* $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. *Să se arate că dacă* $(f_n) \subset C([0,1])$ *este slab convergent la* $f \in C([0,1])$, *atunci* $f_n(x) \to f(x)$ *pentru orice* $x \in [0,1]$, *iar reciproca acestei implicaţii este falsă.*

Indicaţie Pentru orice $x \in [0,1]$ operatorul $T_x : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ dat prin $T_x(f) = f(x)$ este liniar şi continuu. Deducem că dacă $f_n \xrightarrow{w} f$, atunci (f_n) converge punctual la f. Pentru a arăta că reciproca este falsă, considerăm operatorul $T : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ dat prin

$$T(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

şi şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{P}} \subset C([0,1])$ definit prin $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$. □

Problema 70 *Fie* $X = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. *Considerăm şirul de operatori* $L_n : X \to \mathbb{R}$ *dat, pentru orice* $n \in \mathbb{P}$, *prin*

$$L_n(f) = n\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx.$$

(i) Să se arate că $L_n \in S_{X^*}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{P}$.
(ii) Să se arate că (L_n) *este* w^*-*convergent.*
(iii) Să se arate că (L_n) *nu este convergent în normă.*

Indicaţie Primul punct se arată uşor. Pentru al doilea, folosind eventual o teoremă de medie, observăm că

$$\lim n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx = f(0), \ \forall f \in X.$$

La punctul (iii) este suficient să găsim $c > 0$ şi un şir de funcţii $(f_n) \subset S_X$ astfel încât $|L_n(f_n) - L(f_n)| \geq c$, $\forall n \in \mathbb{P}$. □

Problema 71 *Fie (X, τ) spaţii topologic, Y spaţiu liniar normat şi $f : X \to Y$ o funcţie. Să se arate că f este $(\tau, w)-$continuă dacă şi numai dacă pentru orice $y^* \in Y^*$, $y^* \circ f : X \to \mathbb{R}$ este $(\tau, |\cdot|)-$continuă.*

Indicaţie Dacă f este $(\tau, w)-$continuă, cum orice $y^* \in Y^*$ este $(w, |\cdot|)-$continuă (problema anterioară), deducem că $y^* \circ f$ este $(\tau, |\cdot|)-$continuă.

Invers, presupunem că $y^* \circ f : X \to \mathbb{R}$ este $(\tau, |\cdot|)-$continuă pentru orice $y^* \in Y^*$. Fie $\overline{x} \in X$. Considerăm o vecinătate $w-$deschisă a lui $f(\overline{x})$, adică alegem $n \in \mathbb{P}$, $y_i^* \in Y^*$ pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varepsilon > 0$ şi considerăm

$$V(f(\overline{x}); y_1^*, ..., y_n^*; \varepsilon) = \left\{ y \in Y \mid |y_i^*(y) - y_i^*(f(\overline{x}))| < \varepsilon, \ \forall i \in \overline{1, n} \right\}.$$

Se verifică egalitatea

$$f^{-1}(V(f(\overline{x}); y_1^*, ..., y_n^*; \varepsilon)) = \bigcap_{i=1}^{n} (y_i^* \circ f)^{-1}(B(y_i^*(f(\overline{x})), \varepsilon)).$$

Aceasta este o mulţime deschisă în τ pentru că $y_i^* \circ f$ este $(\tau, |\cdot|)-$continuă pentru orice $i \in \overline{1, n}$. Deci f întoarce mulţimi deschise din w în mulţimi din τ. □

Problema 72 *Fie X, Y spaţii Banach şi $T : X \to Y$ un operator liniar. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) T este $(\|\cdot\|, \|\cdot\|)-$continuu;
(ii) T este $(w, w)-$continuu;
(iii) T este $(\|\cdot\|, w)-$continuu.

Indicaţie Pentru a arăta echivalenţa condiţiilor (i) şi (ii), într-un sens se foloseşte problema anterioară, iar în celălalt Principiul graficului închis. Similar pentru echivalenţa dintre (i) şi (iii) □

Problema 73 *Fie X spaţiu Banach reflexiv, Y spaţiu Banach şi $T \in L(X, Y)$. Să se arate că $T(D_X)$ este închisă în Y. Dacă, în plus, $T \in K(X, Y)$, atunci $T(D_X)$ este compactă.*

Indicaţie Cum X este reflexiv, D_X este slab compactă. Din Problema 72, T este $(w, w)-$continuu. Aşadar, $T(D_X)$ este $w-$închisă deci tare închisă. Dacă $T \in K(X, Y)$, $T(D_X)$ este şi relativ compactă, deci compactă. □

Problema 74 *Fie X, Y spaţii liniare normate şi $T \in L(X, Y)$. Să se arate că dacă cel puţin unul dintre aceste spaţii este reflexiv, atunci pentru orice şir mărginit $(x_n) \subset X$, şirul $(T(x_n))$ conţine subşir slab convergent.*

Indicaţie Dacă X este reflexiv, atunci orice şir mărginit $(x_n) \subset X$ conţine un subşir slab convergent. Cum T este (w, w) −continuu (din nou prima implicaţie din Problema 72), deducem concluzia.

Dacă Y este reflexiv, cum $(T(x_n))$ este mărginit, obţinem din nou concluzia. $\square$

Problema 75 *Să se arate că spaţiile ℓ^1, ℓ^∞ nu sunt reflexive.*

Indicaţie Dacă ℓ^1 ar fi reflexiv, cum este un spaţiu separabil, conform Propoziţiei 4.4.14, dualul său ar fi separabil, ceea ce, conform Problemelor 1.5.2 şi 27, este fals.

Dacă ℓ^∞ ar fi reflexiv atunci subspaţiul său închis c_0 ar fi de asemenea reflexiv (Propoziţia 4.4.12). Dar ştim că c_0 nu este reflexiv (Exemplul 4.4.6). $\square$

Problema 76 *Fie X, Y spaţii Banach şi $T \in K(X, Y)$. Să se arate că* $\operatorname{Im} T$ *este mulţime închisă dacă şi numai dacă T este de rang finit.*

Indicaţie Dacă T este de rang finit, $\operatorname{Im} T$ este un subspaţiu liniar finit dimensional, deci este mulţime închisă. Invers, presupunem că $\operatorname{Im} T$ este închisă. Atunci $\operatorname{Im} T$ este spaţiu Banach şi $T \in L(X, \operatorname{Im} T)$ este surjectiv. Conform Principiului aplicaţiilor deschise, $T(D_X)$ conţine o bilă închisă B centrată în 0 a lui $\operatorname{Im} T$. Cum $\operatorname{Im} T$ este închisă, B este închisă în Y. Dar,

$$B \subset T(D_X) \subset \overline{T(D_X)}.$$

Astfel, B este compactă, deci $\operatorname{Im} T$ este subspaţiu finit dimensional. $\square$

Problema 77 *Fie X, Y spaţii Banach şi $T : X \to Y$ un operator liniar. Să se arate că*

(i) dacă T este $(w, \|\cdot\|)$ −continuu, atunci T este de rang finit;

(ii) dacă T este $(\|\cdot\|, \|\cdot\|)$ −continuu şi de rang finit, atunci este $(w, \|\cdot\|)$ −continuu.

Să se compare cu Problema 72.

Indicaţie (i) Proprietatea de continuitate înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, $n \in \mathbb{P}$, $(x_i^*)_{i \in \overline{1,n}}$ astfel încât $\|Tx\| < \varepsilon$ pentru orice $x \in V(0; x_1^*, ..., x_n^*; \delta)$. În particular, dacă x aparţine subspaţiului $Z = \left\{z \in X \mid x_i^*(z) = 0,\ \forall i \in \overline{1,n}\right\}$, obţinem că $T(x) = 0$. Dar codimnesiunea lui M este finită, deci nucleul lui T este de codimensiune finită. Deducem că imaginea lui T are dimensiune finită.

(ii) Cum T este de rang finit, pe $\operatorname{Im} T$ topologia w coincide cu topologia normei. Dar, pentru orice $A \subset Y$, $T^{-1}(A) = T^{-1}(A \cap \operatorname{Im} T)$ şi folosind Problema 72, $(w, \|\cdot\|)$ −continuu. $\square$

Problema 78 *Să se arate că operatorul $T : \ell^p \to \ell^p$ cu $p \in (1, \infty)$ dat prin*

$$T\left((x_n)_{n \in \mathbb{P}}\right) = (0, x_1, ..., x_n, ...)$$

nu este compact.

Indicaţie Mulţimea $T(D_{\ell^p})$ conţine şirul de vectori $(0, 1, 0, ...)$, $(0, 0, 1, ...)$,... care nu conţine niciun subşir Cauchy, deci niciun subşir convergent. $\square$

Problema 79 *Fie* $p \in [1, \infty]$ *şi* $a = (a_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^\infty$. *Definim* $T : \ell^p \to \ell^p$ *prin*

$$T_a(x) = (a_n x_n)_n, \ \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^p.$$

Să se arate că:

(i) T_a *este bine definit, liniar şi continuu, iar* $\|T_a\| = \|a\|_\infty$*;*

(ii) T_a *este compact dacă şi numai dacă* $a \in c_0$.

Indicaţie (i) Se arată folosind metode deja utilizate de mai multe ori.

(ii) Presupunem că T_a este compact, dar $a \notin c_0$. Atunci există $\varepsilon > 0$ şi un subşir (a_{n_k}) al lui (a_n) astfel încât $|a_{n_k}| > \varepsilon$ pentru orice k. Atunci pentru $j, k \in \mathbb{P}$

$$\|T_a e_{n_k} - T_a e_{n_k}\| = \left(|a_{n_k}|^p + \left|a_{n_j}\right|^p\right)^p > \delta,$$

deci şirul $(T_a(a_{n_k}))$ nu admite subşir convergent.

Presupunem acum că $a \in c_0$. Definim şirul de elemente din c_{00} prin

$$a^{(n)} = (a_1, ..., a_n, 0, ...), \ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Se arată că $\|T_a - T_{a^{(n)}}\| \to 0$ şi se deduce concluzia. □

Problema 80 *Fie* X, Y, Z *spaţii Banach şi* $T \in L(X, Y)$, $S \in L(Y, Z)$. *Să se arate că*

(i) dacă $T \in K(X, Y)$, *atunci* $S \circ T \in K(X, Z)$;

(ii) dacă $S \in K(Y, Z)$, *atunci* $S \circ T \in K(X, Z)$.

Indicaţie Ambele afirmaţii rezultă prin aplicarea definiţiilor şi proprietăţii de mărginire a operatorilor liniari continui. □

Problema 81 *Fie* X *spaţiu Banach infinit dimensional şi* $T \in K(X)$. *Să se arate că* $0 \in \overline{T(S_X)}$.

Soluţie Presupunem că $0 \notin \overline{T(S_X)}$. Atunci $\alpha = \inf_{x\in S_X} \|Tx\| > 0$. Aceasta înseamnă că $T(X)$ este subspaţiu liniar închis (a se vedea Problema 14), deci $T^{-1} : T(X) \to X$ este operator liniar continuu ($\|T^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$), iar $\mathrm{id}_X = T^{-1} \circ T$ este operator compact (Problema 80). Rezultă deci X este finit dimensional, ceea ce este fals. □

Problema 82 *Fie* X, Y *spaţii Banach şi* $T \in L(X, Y)$. *Considerăm următoarea proprietate:*

$$(*) \ \forall (x_n)_n \xrightarrow{w} x, \ T(x_n) \to T(x).$$

Să se arate că:

(i) dacă T *este compact, atunci are proprietatea* $(*)$;

(ii) dacă X *este reflexiv şi* T *are proprietatea* $(*)$, *atunci* T *este compact.*

Soluţie (i) Fie $(x_n)_n \xrightarrow{w} x$. Ştim că $(x_n)_n$ este mărginit, iar cum T este compact, $(T(x_n))$ are subşir convergent tare la un element y. În particular, $(T(x_n))$ este şi slab convergent la y. De asemenea, ştim că T este (w, w) continuu, deci $T(x_n) \to T(x)$, Deducem că $y = T(x)$. Astfel, singurul punct limită al lui $(T(x_n))$ este $T(x)$. Cum $(T(x_n))$ este inclus într-o mulţime compactă, găsim că singura posibilitate este ca $T(x_n) \to T(x)$.

(ii) Fie $(x_n) \subset X$ un şir mărginit. Cum X este reflexiv, există un subşir al acestuia, notat (x_{n_k}) slab convergent la un element $x \in X$. Din ipoteză $(T(x_{n_k}))$ este tare convergent. Obţinem că T este compact. □

6.5 Spaţii Hilbert

Problema 83 *Fie X un spaţiu cu produs scalar şi fie $x, y \in X$. Să se arate că $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\|$ dacă şi numai dacă x şi y sunt liniar dependenţi, adică fie x sau y este nul, fie există $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ astfel încât $x = \lambda y$.*

Indicaţie Presupunem că $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\|$ şi arătăm că există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\|x - \lambda y\|^2 = 0$. $\square$

Problema 84 *Fie X un spaţiu cu produs scalar şi $x, y \in X$. Să se arate că dacă*

$$\|x\| \leq \|x + \alpha y\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

atunci $x \perp y$.

Indicaţie Ridicăm la pătrat relaţia dată, dezvoltăm al doilea membru şi obţinem $\langle x, y\rangle = 0$. $\square$

Problema 85 *Să se arate că dintre toate spaţiile Banach $\left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right)$ cu $p \in [1, \infty)$, singurul care este spaţiu Hilbert este $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$.*

Indicaţie Se arată că doar pe $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ se respectă identitatea paralelogramului. $\square$

Problema 86 *Definim aplicaţia $\langle \cdot, \cdot \rangle : c_{00} \times c_{00} \to \mathbb{R}$ dată prin*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k.$$

Să se arate că $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este un produs scalar dar c_{00} cu acest produs scalar nu este spaţiu Hilbert.

Indicaţie Se arată uşor că $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este corect definită şi reprezintă un produs scalar. Am văzut la Problema 40 că c_{00} nu este complet în raport cu nicio normă. $\square$

Problema 87 *Fie X un spaţiu Hilbert şi Y un subspaţiu liniar al său. Să se arate că Y este dens în X dacă şi numai dacă $Y^{\perp} = \{0\}$.*

Indicaţie Dacă Y este dens, avem

$$Y^{\perp} = (\mathrm{cl}\, Y)^{\perp} = X^{\perp} = \{0\}.$$

Invers, dacă $Y^{\perp} = \{0\}$, atunci $(\mathrm{cl}\, Y)^{\perp} = \{0\}$ şi cum $X = (\mathrm{cl}\, Y)^{\perp} \oplus \mathrm{cl}\, Y$, deducem că $\mathrm{cl}\, Y = X$, adică Y este dens în X. $\square$

Problema 88 *Să se găsească un spaţiu Hilbert X şi un subspaţiu Y al său astfel încât $X \neq Y \oplus Y^{\perp}$.*

Indicaţie Fie în spaţiul Hilbert $X = \ell^2$ subspaţiul liniar $Y = c_{00}$. Atunci $Y^{\perp} = \{0\}$ pentru că pentru orice şir $x \in \ell^2 \setminus \{0\}$ există i astfel încât $x_i \neq 0$, deci $\langle x, e_i\rangle \neq 0$ (sau pentru că c_{00} este dens în ℓ^2). $\square$

Problema 89 *Fie X un spaţiu Hilbert şi Y, Z subspaţii liniare închise ale lui X. Să se arate că dacă $Y \perp Z$ (adică $\langle y, z\rangle = 0$ pentru orice $y \in Y$ şi $z \in Z$) atunci $Y + Z$ este subspaţiu liniar închis.*

Indicaţie Evident, $Y + Z$ este subspaţiu liniar. Arătăm că este închis.

Fie $(x_n) = (y_n + z_n) \to x$ unde $(y_n) \subset Y$, $(z_n) \subset Z$. Vom demonstra că (y_n) şi (z_n) sunt şiruri Cauchy. Într-adevăr, pe baza perpendicularităţii din ipoteză, pentru $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\|^2 &= \|(y_m + z_m) - (y_n + z_n)\|^2 = \|y_m - y_n\|^2 + \|z_m - z_n\|^2 \\ &\geq \max\left\{\|y_m - y_n\|^2, \|z_m - z_n\|^2\right\}.\end{aligned}$$

şi cum (x_n) este şir Cauchy, deducem afirmaţia făcută. Atunci, pe baza completitudinii lui X, (y_n) este convergent la un element y care aparţine lui Y (pentru că Y este închis), iar (z_n) este convergent la un element z care aparţine lui Z (pentru că Z este închis). □

Problema 90 *În spaţiul ℓ^2 considerăm subspaţiile $H_0 = \operatorname{span}\{e_i\}_{i\geq 2}$ şi $H = \operatorname{span}\left(H_0 \cup \left\{(\frac{1}{n})_{n\in P}\right\}\right)$. Să se arate că H_0 este subspaţiu liniar închis în H şi că nu există în H_0 element de cea mai bună aproximare pentru $x = (\frac{1}{n})_{n\in P}$.*

Soluţie Dacă vom considera un şir de elemente din H_0 convergent în H, atunci este clar că elementul limită are prima componentă 0, deci nu poate fi în $H \setminus H_0$. Apoi, presupunem, prin reducere la absurd că există un element de cea mai bună aproximare pentru x în H_0, pe care îl notăm $\operatorname{pr}_{H_0} x$. Atunci $\operatorname{pr}_{H_0} x$ are forma $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, unde I este o mulţime finită de elemente din $\mathbb{P} \setminus \{1\}$ şi scalarii α_i sunt reali. Se arată că pentru orice $j \in \mathbb{P} \setminus (\{1\} \cup I)$

$$\left\|x - \operatorname{pr}_{H_0} x\right\| > \left\|x - \left(\sum_{i\in I} \alpha_i e_i + \frac{1}{j} e_j\right)\right\|$$

obţinându-se o contradicţie. □

Problema 91 *Fie spaţiul $C([0,1])$ pe care considerăm norma uzuală, adică norma $\|\cdot\|_\infty$. Considerăm mulţimea*

$$M = \left\{f \in C([0,1]) \mid \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx = 1\right\}.$$

(i) Să se arate că $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ nu este spaţiu Hilbert.
(ii) Să se arate că M este convexă şi închisă.
(iii) Să se determine $\inf\{\|f\|_\infty \mid f \in M\}$.
(iv) Să se arate că M nu conţine niciun element de normă minimă.

Soluţie (i) Norma $\|\cdot\|_\infty$ nu provine dintr-un produs scalar pentru că nu satisface identitatea paralelogramului. Putem considera, de exemplu, funcţiile $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ date prin $f(x) = x$ şi $g(x) = 1 - x$.

(ii) Convexitatea lui M se verifică cu uşurinţă. De asemenea, teorema de transfer a integrabilităţii Riemann prin convergenţa uniformă asigură închiderea lui M.

(iii) Se arăta că

$$\inf \{\|f\|_\infty \mid f \in M\} = 1.$$

(iv) Presupunem că există $f \in M$ astfel încât $\|f\|_\infty = 1$. Atunci

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - f(x))\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 + f(x))\, dx = 0.$$

Cum funcţiile $1 - f$ şi $1 + f$ sunt continue şi pozitive, obţinem că $1 - f = 0$ pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, iar $1 + f = 0$ pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Deci $f\left(\frac{1}{2}\right)$ trebuie să fie simultan 1 şi -1, ceea ce este imposibil. $\square$

Problema 92 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o bază ortonormată a sa. Fie*

$$Y = \overline{\operatorname{span}\{e_{2n} \mid n \in \mathbb{P}\}},$$
$$Z = \overline{\operatorname{span}\left\{e_{2n} + \frac{e_{2n+1}}{2n+1} \mid n \in \mathbb{P}\right\}}.$$

Să se arate că $Y + Z$ este subspaţiu dens propriu al lui X.

Indicaţie Este clar că Y şi Z sunt subspaţii liniare închise, iar $Y + Z$ conţine baza $\{e_n\}_{n\in\mathbb{P}}$. Deci $Y + Z$ este subspaţiu dens. Arătăm că $Y + Z$ nu coincide cu X. Pentru aceasta observăm că vectorul

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_{2n+1}}{2n+1}$$

nu aparţine lui $Y + Z$. Mai întâi observăm că x este corect definit (seria este convergentă) pe baza Propoziţiei 5.4.6. Dacă ar exista $y \in Y$, $z \in Z$ astfel încât $x = y + z$, atunci, din forma subspaţiilor şi unicitatea descopunerii în raport cu baza, cum toate elementele $\{e_{2n+1}\}_n$ sunt implicate în x, trebuie ca y să fie

$$-\sum_{n=1}^{\infty} e_{2n}.$$

Dar acest lucru este imposibil pentru că această sumă nu converge (din nou pe baza Propoziţiei 5.4.6). $\square$

Problema 93 *Fie X spaţiu Hilbert şi $T \in L(X)$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) există $c > 0$ astfel încât

$$c\|x\| \leq \|Tx\|, \ \forall x \in X;$$

(ii) există $S \in L(X)$ astfel încât $S \circ T = 1_X$.

Indicaţie (i) $\Longrightarrow$ (ii) Pe baza ipotezei, din Problema 14, $T(X)$ este subspaţiu liniar închis şi $T^{-1} : T(X) \to X$ este liniar şi continuu. Fie Y complementul ortogonal al lui $T(X)$ în X (conform Teoremei 5.2.8). Definim $S : X \to X$ prin $S(x) = T^{-1}(z)$, unde $z \in T(X)$ este elementul care intervine în scrierea unică a lui x în descompunerea ortogonală $X = T(X) \oplus Y$. Atunci S are proprietăţile de la (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Pentru orice $x \in X$,

$$\|x\| = \|(S(T(x)))\| \leq \|S\| \|Tx\|.$$

Evident, $\|S\| \neq 0$ (contrar, $S = 0$ şi relaţia $S \circ T = 1_X$ este imposibilă) şi prin urmare (i) are loc. $\square$

Problema 94 *Fie X un spaţiu Hilbert. Să se arate că dacă un şir $(x_n) \subset X$ satisface $x_n \xrightarrow{w} x \in X$ şi $\|x_n\| \to \|x\|$, atunci $x_n \to x$.*

Indicaţie Avem

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x \rangle = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2.$$

Cum $x_n \xrightarrow{w} x$, avem $\langle x_n, x\rangle \to \|x\|^2$. Folosind şi ipoteza $\|x_n\| \to \|x\|$ deducem că $\|x_n - x\|^2 \to 0$, de unde se obţine concluzia. $\square$

Problema 95 *Fie X spaţiu Hilbert, $\{e_n\}_{n\in\mathbb{P}}$ o bază ortonormată a sa şi $(a_n)_{n\in\mathbb{P}}$ un şir mărginit de numere reale. Definim şirul*

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k e_k, \ \ \forall n \in \mathbb{P}.$$

Să se arate că
(i) $(u_n) \to 0$;
(ii) $(\sqrt{n}u_n) \xrightarrow{w} 0$.

Indicaţie (i) Avem, pentru toţi n,

$$\|u_n\|^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \frac{M^2}{n},$$

unde M este o constantă de mărginire a lui (a_n). Deci $\|u_n\| \to 0$.

(ii) Din estimarea anterioară deducem că şirul $(\sqrt{n}u_n)$ este mărginit. Observăm şi că, pentru orice k fixat şi orice $n \geq k$,

$$\left\langle \sqrt{n}u_n, e_k \right\rangle = \frac{a_k}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Pe baza Corolarului 5.4.14, deducem că $(\sqrt{n}u_n) \xrightarrow{w} 0$. $\square$

Problema 96 *Fie $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu Hilbert, $T, T_1, T_2 \in L(X)$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci:*
(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$;
(ii) $(\lambda T)^* = \lambda T^*$;
(iii) $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$, unde T_1T_2 notează compunerea celor doi operatori;
(iv) $(T^*)^* = T$;
(v) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$;
(vi) Dacă T este inversabil atunci T^* este inversabil şi $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Indicaţie Toate relaţiile sunt simple aplicaţii ale definiţiei operatorului adjunct. $\square$

Problema 97 *Să se arate că dacă X este spaţiu Hilbert şi $T \in K(X)$, atunci $T^* \in K(X)$.*

Indicaţie. Trebuie să arătăm că pentru orice şir (y_n) mărginit şirul (T^*y_n) admite subşir convergent. Fie M constanta de mărginire a lui (y_n). Cum $T^* \in L(X)$, şirul (T^*y_n) este mărginit, deci şirul $(T(T^*y_n))$ admite un subşir, notat $(T(T^*y_{n_k}))$, convergent (pentru că $T \in K(X)$). Se arată că $(T^*y_{n_k})$ este convergent arătând că este fundamental. □

Problema 98 *Fie X spaţiu Hilbert şi $T \in K(X)$. Să se arate că $\mathrm{id}-T$ este injectiv dacă şi numai dacă este surjectiv.*

Indicaţie Injectivitatea lui $\mathrm{id}-T$ atrage surjectivitatea sa chiar în spaţii Banach, după cum am văzut în Teorema 4.5.11 (iii).

Reciproc, presupunem acum că $\mathrm{id}-T$ este surjectiv. Atunci

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}-T)^* = (\mathrm{Im}(\mathrm{id}-T))^{\perp} = \{0\},$$

adică $(\mathrm{id}-T)^*$ este injectiv. Dar $T^* \in K(X)$ (conform problemei anterioare) şi din pasul precedent al demonstraţiei, $\mathrm{Im}(\mathrm{id}-T)^* = X$. Astfel, folosind Problema 5.3.7,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{id}-T) = (\mathrm{Im}(\mathrm{id}-T)^*)^{\perp} = \{0\},$$

deci $\mathrm{id}-T$ este injectiv. □

Definiţia 6.5.1 *Fie X spaţiu liniar normat şi $T \in L(X)$. Spunem că T este mărginit inferior dacă există $c > 0$ astfel încât*

$$c\|x\| \le \|Tx\|, \ \forall x \in X.$$

Problema 99 *Fie X spaţiu Hilbert şi $T \in L(X)$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) T este bijectiv;

(ii) T şi T^* sunt mărginiţi inferior;

(iii) T este mărginit inferior şi T^* este injectiv;

(iv) T este mărginit inferior şi $\overline{T(X)} = X$.

Indicaţie (i) $\Longrightarrow$ (ii) Dacă T este bijectiv, cum X este complet, T are invers continuu (Corolarul 3.2.10). Astfel, mărginirea inferioară este clară: pentru orice $x \in X$,

$$\|x\| = \left\|T^{-1}(Tx)\right\| \le \left\|T^{-1}\right\| \|Tx\|.$$

Cum, pe baza Problemei 96, T^* este inversabil şi $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ obţinem că şi T^* este mărginit inferior.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Este clar că orice operator liniar mărginit inferior este injectiv.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Ştim (Propoziţia 5.3.7) că $\mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)^{\perp} = \left(\overline{\mathrm{Im}\, T}\right)^{\perp}$, deci $\{0\} = \left(\overline{\mathrm{Im}\, T}\right)^{\perp}$, adică

$$X = \left(\left(\overline{\mathrm{Im}\, T}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{T(X)}.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Cum T este mărginit inferior, este injectiv. Tot din mărginirea inferioară obţinem (Problema 14) că $T(X)$ este subspaţiu liniar închis, deci în ipoteza dată T este surjectiv. Deci T este bijectiv. □

Problema 100 *Fie X spaţiu Hilbert şi $T : X \to X$ liniar. Presupunem că*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \ \forall x \in X.$$

Să se arate că T este continuu, iar $\mathrm{id} + T$ este inversabil şi are invers continuu.

Indicaţie Prima concluzie rezultă din Problema 52 şi Teorema lui Riesz. Apoi se arată că $\mathrm{id} + T$ satisface condiţiile de la punctul (ii) al problemei de mai sus. □

Problema 101 *Fie X spaţiu Hilbert şi $T \in L(X)$. Presupunem că $\|T\| \leq 1$. Să se arate că $Tx = x$ dacă şi numai dacă $T^*x = x$.*

Indicaţie Fie $x \in X$ astfel încât $Tx = x$. Atunci

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle \\ &\leq \|x\| \|T^*x\| \leq \|x\|^2 \|T^*\| \leq \|x\|^2 . \end{aligned}$$

Prin urmare, toate inegalităţile sunt de fapt egalităţi. Deci

$$\langle x, T^*x\rangle = \|x\| \|T^*x\|$$

şi conform Problemei 83, x şi T^*x sunt liniar dependenţi sau unul dintre aceşti vectori este nul. Folosind din nou şirul de egalităţi de mai sus obţinem că $T^*x = x$.

Reciproc, dacă $T^*x = x$, atunci $(T^*)^* x = x$, adică $Tx = x$. □

Problema 102 *Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ definim $T_k : \ell^2 \to \ell^2$ prin*

$$T_k(x) = (x_{k+1}, x_{k+2}, ...), \ \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} .$$

(i) Să se arate că $T_k \in L(\ell^2)$ şi să se determine $(T_k)^*$.
(ii) Să se arate că $\lim_{k\to\infty} T_k x \to 0 \in \ell^2$ pentru orice $x \in \ell^2$.
(iii) Să se arate că există $x \in \ell^2$ astfel încât $(T_k^* x)_k$ nu are limită în ℓ^2.

Indicaţie (i) Din condiţia

$$\langle T_k x, y\rangle = \langle x, (T_k)^* y\rangle, \ \forall x, y \in \ell^2,$$

deducem că $(T_k)^*(x) = (0, ...0, x_1, x_2, ...)$, unde primele k componente sunt 0.

(ii) Pentru orice $x \in \ell^2$,

$$\|T_k x\| = \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n|^2} \overset{k\to\infty}{\to} 0,$$

deducem concluzia.

(iii) Pentru orice $x \in \ell^2$,

$$\|(T_k)^* x\| = \|x\| .$$

Pentru $x \neq 0$, presupunând că există $y = \lim_{k\to\infty} (T_k)^* x$, din forma operatorilor $(T_k)^*$, deducem că $y_n = 0$ pentru orice n, ceea ce contrazice relaţia anterioară. □

Problema 103 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $A : X \to X$ un operator liniar astfel încât*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \ \forall x, y \in X.$$

Să se arate că A este continuu.

Indicaţie Presupunem, prin reducere la absurd, că A nu este continuu. Atunci există $(x_n)_{n \in \mathbb{P}} \subset S_X$ astfel încât $\|Ax_n\| \to \infty$. Considerăm, pentru fiecare $n \in \mathbb{P}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \langle x, Ax_n \rangle.$$

Atunci $f_n \in X^*$ şi şirul $(f_n)_n$ este punctual mărginit. Se aplică Principiul mărginirii uniforme şi se ajunge la o contradicţie. □

Definiţia 6.5.2 *Fie X un spaţiu Hilbert. Un operator liniar $P : X \to X$ se numeşte proiector dacă imaginea sa este subspaţiu liniar închis şi*

$$x - Px \in P(X)^{\perp}, \ \forall x \in X.$$

Problema 104 *Fie $Y \subset X$ un subspaţiu liniar închis al spaţiului Hilbert X. Atunci există un unic proiector $P : X \to X$ astfel încât $P(X) = Y$. În particular, orice proiector este continuu şi are norma 1, iar*

$$P(X) = \{x \in X \mid Px = x\}.$$

Soluţie Conform Teoremei de descompunere ortogonală, $X = Y \oplus Y^{\perp}$, adică pentru orice $x \in X$ există şi sunt unice două elemente $y \in Y$ şi $z \in Y^{\perp}$ astfel încât $x = y + z$. Definim $P : X \to X$ prin $P(x) = \mathrm{pr}_Y x = y$. Este clar că P este liniar, $\operatorname{Im} P = Y$ iar pentru orice $x \in X$, $x - P(x) \in Y^{\perp} = (\operatorname{Im} P)^{\perp}$. Demonstrăm unicitatea. Fie $Q : X \to X$ un proiector astfel încât $Q(X) = Y$. Dar, pentru orice $x \in X$,

$$x = Px + (x - Px) = Qx + (x - Qx),$$

iar unicitatea descompunerii lui X atrage $Px = Qx$. Deci $P = Q$.

Aşadar, orice proiector este un operator de proiecţie pe un subspaţiu liniar închis şi din Propoziţia 5.1.16 deducem că orice proiector este continuu şi are norma 1. Ultima afirmaţie este acum evidentă. □

Problema 105 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $P : X \to X$ un proiector. Să se arate că:*

(i) $\langle Px, x \rangle \geq 0$, *pentru orice* $x \in X$;

(ii) $\operatorname{Ker} P = \{x \in X \mid \langle Px, x \rangle = 0\}$;

(iii) $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} P)^{\perp}$.

Indicaţie (i) Pentru orice $x \in X$ avem

$$\langle Px, x \rangle = \langle Px, Px + (x - Px) \rangle = \langle Px, Px \rangle + \langle Px, (x - Px) \rangle = \|Px\|^2 \geq 0.$$

(ii), (iii) Rezultă din punctul precedent şi problema anterioară. □

Problema 106 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $P \in L(X)$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) P este proiector;

(ii) $P = P^*$ şi $P \circ P = P$;

(iii) $P^* \circ P = P$.

Indicaţie (i) $\Longrightarrow$ (ii) Presupunem că P este proiector. Atunci, pentru orice $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} \langle Px, y\rangle &= \langle Px, Py + y - Py\rangle = \langle Px, Py\rangle + \langle Px, y - Py\rangle = \langle Px, Py\rangle \\ &= \langle Px, Py\rangle + \langle x - Px, Py\rangle = \langle x, Py\rangle . \end{aligned}$$

Deci $P = P^*$. Apoi, pentru orice $x \in X$,

$$(P \circ P)(x) = P(Px) = Px,$$

adică $P \circ P = P$.

Celelalte implicaţii se arată folosind argumente similare. $\square$

Problema 107 *Fie X un spaţiu Hilbert. Pe mulţimea proiectorilor introducem următoarea relaţie:*

$$P_1 \le P_2 \iff \langle P_1 x, x\rangle \le \langle P_2 x, x\rangle, \ \forall x \in X.$$

Să se arate că această relaţie este o relaţie de ordine. Apoi să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) $P_1 \le P_2$;

(ii) $\operatorname{Ker} P_2 \subset \operatorname{Ker} P_1$;

(iii) $P_1(X) \subset P_2(X)$;

(iv) $P_2 \circ P_1 = P_1$;

(v) $P_1 \circ P_2 = P_1$;

(vi) $P_2 - P_1$ este proiector.

Soluţie Faptul că $\le$ este reflexivă şi tranzitivă este evident. Arătăm că este antisimetrică. Presupunem deci că $\langle P_1 x, x\rangle = \langle P_2 x, x\rangle$ pentru orice $x \in X$. Dar, ca mai sus, $\langle P_1 x, x\rangle = \|P_1 x\|^2$ şi similar pentru P_2. Deducem că $P_1 = P_2$.

Arătăm acum echivalenţele din enunţ.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Conform ipotezei,

$$\langle P_1 x, x\rangle \le \langle P_2 x, x\rangle, \ \forall x \in X.$$

Dacă $x \in \operatorname{Ker} P_2$, atunci $\langle P_2 x, x\rangle = 0$ şi cum $\langle P_1 x, x\rangle \ge 0$ (Problema 105) deducem $\langle P_1 x, x\rangle = 0$, deci $x \in \operatorname{Ker} P_1$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Ştim (din nou Problema 105) că $(\operatorname{Im} P_1)^\perp = \operatorname{Ker} P_1$ şi similar pentru P_2. Deci ipoteza se scrie

$$(\operatorname{Im} P_2)^\perp \subset (\operatorname{Im} P_2)^\perp,$$

deci

$$\operatorname{Im} P_2 = (\operatorname{Im} P_2)^{\perp\perp} \supset (\operatorname{Im} P_1)^{\perp\perp} = \operatorname{Im} P_1.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Cum $P_1(X) \subset P_2(X)$, pentru orice $x \in X$, $P_1 x \in P_2(X)$, deci $P_2(P_1 x) = P_1 x$, deci $P_2 \circ P_1 = P_1$.

(iv) $\Longrightarrow$ (v) Dacă $P_2 \circ P_1 = P_1$, atunci $(P_2 \circ P_1)^* = P_1^*$, deci $P_1^* \circ P_2^* = P_1^*$, dar cum $P_1^* = P_1$ şi $P_2^* = P_2$, obţinem că $P_1 \circ P_2 = P_1$.

(v) $\Longrightarrow$ (i) Fie $x \in X$. Avem

$$\langle P_1 x, x\rangle = \|P_1 x\|^2 = \|(P_1 \circ P_2) x\|^2 \leq \|P_1\|^2 \|P_2 x\|^2 = \langle P_1 x, x\rangle ,$$

adică $P_1 \leq P_2$.

(i) $\Longrightarrow$ (vi) Faptul că $P_1 \leq P_2$ este echivalent cu $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = P_1$. Se verifică uşor că $P_2 - P_1$ verifică, de exemplu, condiţiile din Problema 106 (ii), deci este proiector.

(vi) $\Longrightarrow$ (i) Dacă $P_2 - P_1$ este proiector atunci

$$\langle (P_2 - P_1) x, x\rangle \geq 0, \ \forall x \in X,$$

deci $P_1 \leq P_2$. $\square$

Problema 108 *Fie X un spaţiu Hilbert şi P_1, P_2 proiectori. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $P_1 + P_2$ este proiector;

(ii) $P_1 \circ P_2 = 0$;

(iii) $P_2 \circ P_1 = 0$;

(iv) $P_1(X) \perp P_2(X)$.

Indicaţie Se folosesc argumente similare celor din problemele anterioare. $\square$

Problema 109 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $T \in L(X)$ autoadjunct. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pentru orice $x \in X$;

(ii) $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Soluţie Echivalenţa celor două afirmaţii este consecinţă directă a Propoziţiei 5.6.8. $\square$

Problema 110 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $T \in L(X)$ autoadjunct. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pentru orice $x \in X$ şi $\|T\| \leq 1$;

(ii) $0 \leq \langle Tx, x\rangle \leq \|x\|^2$ pentru orice $x \in X$;

(iii) $\sigma(T) \subset [0, 1]$;

(iv) $\langle Tx, x\rangle \geq \|Tx\|^2$ pentru orice $x \in X$.

Soluţie Din Corolarul 5.6.9, $\|T\| = \sup_{x \in S_X} |\langle Tx, x\rangle|$. Astfel, (i), (ii) şi (iii) sunt evident echivalente. De asemenea, faptul că (iv) implică (iii) este simplu de văzut. Arătăm că (iii) implică (iv). Pentru orice $\varepsilon > 0$, operatorul $T_\varepsilon = T + \varepsilon \,\mathrm{id}$ este bijectiv şi $\sigma(T_\varepsilon) \subset [\varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Astfel, $\sigma(T_\varepsilon^{-1}) \subset \left[\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right]$. Din nou prin intermediul Propoziţiei 5.6.8,

$$\left\langle T_\varepsilon^{-1} x, x\right\rangle \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \|x\|^2, \ \forall x \in X,$$

adică
$$\langle T_\varepsilon x, x\rangle \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\|T_\varepsilon x\|^2, \ \forall x \in X.$$
Făcând $\varepsilon \to 0$ obţinem concluzia. $\square$

Problema 111 *Fie X un spaţiu Hilbert şi $T \in L(X)$ autoadjunct. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\|^2$ pentru orice $x \in X$.

(ii) $(0,1) \subset \sigma(T)$.

Soluţie Considerăm operatorul $S = 2T - \mathrm{id}$. Atunci (i) este echivalent cu
$$\|x\| \leq \|Sx\|, \ \forall x \in X.$$
Astfel, conform Lemei 5.6.11, (i) implică
$$(-1,1) \subset \rho(S) = 2\rho(T) - 1,$$
deci (ii) are loc.

Invers, (ii) implică faptul că $(-1,1) \subset \rho(S)$, deci $\sigma(S) \subset (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. Astfel, $\sigma(S^{-1}) \subset [-1,1]$ şi din Propoziţia 5.6.8, $\|S^{-1}\| \leq 1$, ceea ce implică (i). $\square$

Problema 112 *Fie $T : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$,*
$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
(i) Să se arate că T este liniar, continuu şi compact.

(ii) Să se arate că pentru orice $\lambda \neq 0$ şi orice $g \in C([0,1])$, problema Cauchy
$$\begin{cases} h - \lambda h' = g, \\ h(0) = 0 \end{cases}$$
are soluţie unică şi să se găsească spectrul operatorului T. Să se precizeze dacă 0 este valoare proprie pentru T.

Soluţie (i) Faptul că T este liniar şi continuu se arată în mod obişnuit. Pentru a arăta compactitatea, adică pentru a arăta că $T\left(D_{C([0,1])}\right)$ este relativ compactă, folosim Teorema Arzelà-Ascoli. Din nou, mărginirea este clară:
$$\|Tf\| \leq \|f\|_\infty, \ \forall f \in C([0,1]).$$
În plus,
$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq \|f\|_\infty |x-y| \leq |x-y|, \ \forall f \in D_{C([0,1])}, \ \forall x, y \in [0,1],$$
de unde rezultă echicontinuitatea familiei de funcţii $T\left(D_{C([0,1])}\right)$.

(ii) Folosind formula variaţiei constantelor, obţinem soluţia unică a problemei Cauchy din enunţ în forma
$$h(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{\frac{x}{\lambda}}\int_0^x g(t)\,e^{-\frac{t}{\lambda}}dt.$$

Folosind aceasta pentru $h = Tf$, deducem că pentru orice $\lambda \neq 0$, operatorul $T - \lambda\,\mathrm{id}$ este bijectiv. Pe de altă parte, T nu este surjectiv pentru că toate funcţiile din imaginea sa sunt de clasă C^1. Deci $\sigma(T) = \{0\}$. Totuşi, 0 nu este valoare proprie pentru că dacă considerăm $f \in \operatorname{Ker} T$, atunci $f = (Tf)' = 0$. $\square$

Addendum – Spaţii liniare reale vs. spaţii liniare complexe

Aşa cum am anunţat de la început, vom face o scurtă trecere în revistă a similarităţilor şi deosebirilor dintre rezultatele principale ale acestei lucrări atunci când se lucrează cu spaţii liniare normate reale (cum am procedat până acum) şi atunci când se consideră spaţii liniare complexe (peste $\mathbb{C}$).

Fie deci $\mathbb{E} = \mathbb{C}$ şi X spaţiu liniar normat peste $\mathbb{C}$. Definiţia normei se modifică doar la a doua axiomă, acolo unde acum $\alpha \in \mathbb{C}$. O funcţională liniară pe X ia acum valori în $\mathbb{C}$ şi toţi scalarii implicaţi în definiţie sunt din $\mathbb{C}$. Dualul şi norma duală se definesc şi se notează similar.

Este evident că un spaţiu liniar X peste $\mathbb{C}$ este şi un spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$ (notăm acest spaţiu prin $X_{\mathbb{R}}$) aşa încât, atunci când avem o normă pe un spaţiu liniar complex, avem şi o normă peste spaţiul liniar real corespunzător. Între elementele dualului unui spaţiu liniar complex (notat, cum am spus, prin X^*) şi elementele dualului spaţiului liniar real corespunzător, pe care îl notăm $X_{\mathbb{R}}^*$, avem relaţiile date de rezultatul de mai jos.

Propoziţia 6.5.3 *Fie $f : X \to \mathbb{C}$ liniară (peste $\mathbb{C}$) şi $u : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $u = \operatorname{Re} f$ (unde* Re *notează partea reală a unui număr complex). Atunci u este liniară (peste $\mathbb{R}$) şi $f(\cdot) = u(\cdot) - i \cdot u(i \cdot (\cdot))$.*

Reciproc, dacă $u : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ este liniară (peste $\mathbb{R}$), atunci $f : X \to \mathbb{C}$ definită prin $f(\cdot) = u(\cdot) - i \cdot u(i \cdot (\cdot))$ este liniară (peste $\mathbb{C}$).

În plus, cu aceste notaţii, $f \in X^*$ dacă şi numai dacă $u \in X_{\mathbb{R}}^*$ şi în acest caz, $\|f\|_{X^*} = \|u\|_{X_{\mathbb{R}}^*}$.

În varianta algebrică a Teoremei Hahn-Banach (Teorema 1.4.2), pentru a păstra concluzia trebuie ca p să fie o seminormă, în timp ce varianta topologică a aceleiaşi teoreme (Teorema 1.4.3) rămâne neschimbată pentru spaţii liniare normate complexe. Legat de teoremele de separare a mulţimilor convexe, noţiunea de hiperplan devine:

$$H = \{x \in X \mid \operatorname{Re} f(x) = \alpha\},$$

unde $f : X \to \mathbb{C}$ este liniară, neidentic nulă şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Cu această modificare, teoremele de separare capătă o formă specifică, uşor de dedus din aceste fapte.

Rezultatele din Capitolele 4 şi 5 rămân practic neschimbate, iar modificările de demonstraţie sunt uşor de dedus.

Probabil cea mai semnificativă diferenţă între spaţiile liniare complexe şi cele reale apare în contextul spaţiilor Hilbert. Reluăm definiţia produsului scalar în acest context şi o parte de rezultatele subsecvente cu modificările necesare.

Definiţia 6.5.4 *Fie X spaţiu liniar peste $\mathbb{C}$. Se numeşte produs scalar pe X o funcţie $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ având următoarele proprietăţi:*
(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pentru orice $x \in X$ şi $\langle x, x \rangle = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$;
(ii) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y, z \in X$;
(iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, pentru orice $x, y \in X$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului complex z;
Perechea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se numeşte spaţiu cu produs scalar.

Din nou, definiţia normei şi a conceptului de spaţiu Hilbert sunt aceleaşi. Identitatea paralelogramului este neschimbată. În general, rezultatele pe care nu le reluăm aici sunt neschimbate în acest cadru, singurele modificări survenind în demonstraţii şi fiind relativ evidente.

Propoziţia 6.5.5 *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu liniar complex cu produs scalar. Atunci:*
(i) $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\| \|y\|$, pentru orice $x, y \in X$;
(ii) $4 \langle x, y \rangle = \|x + iy\|^2 - \|x - y\|^2 + i \|x + iy\|^2 - i \|x - iy\|^2$, pentru orice $x, y \in X$.

Teorema 6.5.6 (existenţa elementului de cea mai bună aproximare) *Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu Hilbert complex şi $C \subset X$ o mulţime nevidă, convexă şi închisă. Atunci, pentru orice $x \in X$ există un unic element $y \in C$ astfel încât*

$$d(x, C) = \|x - y\|.$$

În plus, y este caracterizat de proprietăţile $y \in C$ şi $\operatorname{Re} \langle x - y, u - y \rangle \leq 0$ pentru orice $u \in C$.

Următoarele modificări semnificative apar la Teorema lui Stampacchia (Teorema 5.5.2) şi Lema Lax-Milgram (Teorema 5.5.3).

Fie $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu liniar complex cu produs scalar. Considerăm o aplicaţie $a : X \times X \to \mathbb{C}$ cu următoarele proprietăţi:

- pentru orice $y \in X$, $x \mapsto a(x, y)$ este liniară şi pentru orice $x \in X$, $y \mapsto \overline{a(x, y)}$ este liniară;

- a este continuă, adică există $c > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$,

$$|a(x, y)| \leq c \|x\| \|y\|;$$

- a este coercivă, adică există $\alpha > 0$ astfel încât pentru orice $u \in X$

$$\alpha \|u\|^2 \leq \operatorname{Re} a(u, u).$$

Teorema 6.5.7 (Teorema lui Stampacchia – cazul complex) *Fie X spaţiu Hilbert complex şi a o aplicaţiecare satisface proprietăţile de mai sus. Fie $C \subset X$ nevidă, închisă şi convexă. Atunci, pentru orice $x^* \in X^*$ există un unic $u \in C$ astfel încât*

$$\operatorname{Re} a(u, v - u) \geq \operatorname{Re} x^*(v - u), \ \forall v \in C.$$

Mai mult, dacă $a(x, y) = \overline{a(y, x)}$ pentru orice $x, y \in X$, u este caracterizat de proprietăţile

$$\begin{cases} u \in C, \\ \frac{1}{2} a(u, u) - \operatorname{Re} x^*(u) = \min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \operatorname{Re} x^*(v) \right\}. \end{cases}$$

Noua formă a Lemei Lax-Milgram este acum evidentă.

În ceea ce priveşte rezultatele de teorie spectrală, cadrul spaţiilor Hilbert complexe oferă un cadru mult mai potrivit dezvoltărilor necesare, iar diferenţele faţă de cadrul descris în această lucrare sunt unele importante, motiv pentru care consultarea surselor bibliografice este indicată.

Modele de evaluări scrise

Model examen parţial

Subiectul 1. Funcţionala Minkowski asociată unei mulţimi convexe, deschise ce conţine elementul 0. Definiţie şi demonstrarea subliniarităţii.

Subiectul 2. Fie $p, q \in (1, \infty)$, $p < q$. Să se arate că $\ell^p \subset \ell^q$, iar scufundarea canonică $f : \left(\ell^p, \|\cdot\|_p\right) \to \left(\ell^q, \|\cdot\|_q\right)$,

$$f(x) = x$$

este aplicaţie liniară continuă. Să se determine norma lui f.

Subiectul 3. Fie următoarea submulţime a lui $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$:

$$A = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^1 \mid |x_n| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{P}\right\}.$$

Să se arate că A este convexă, închisă, absorbantă, iar

$$\operatorname{int} A = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{P}} \in \ell^1 \mid |x_n| < 1,\ \forall n \in \mathbb{P}\right\}.$$

Subiectul 4. Fie $T : C([0,2]) \to C([0,2])$ dat prin

$$T(f)(x) = \int_0^x t f(t)\, dt,\ \forall x \in [0,2].$$

Să se arate că T este bine definit şi liniar. Pe $C([0,2])$ considerăm normele

$$\|f\|_1 = \max_{t\in[0,2]} |f(t)|,$$

$$\|f\|_2 = \int_0^2 |f(t)|\, dt.$$

Să se studieze continuitatea lui T atunci când pe domeniu se consideră $\|\cdot\|_1$, iar pe codomeniu se consideră $\|\cdot\|_2$.

Barem de notare:
1p din oficiu; Subiectul 1: 1,5p; Subiectul 2: 2,5p; Subiectul 3: 2,5p; Subiectul 4: 2,5p

Timp de lucru: 100 minute

Model verificare scrisă

Subiectul 1. Să se enunţe Teorema lui Baire (într-una din cele două forme) şi să se enunţe şi să se demonstreze Principiul mărginirii uniforme.

Subiectul 2. Studiaţi convergenţa slabă şi convergenţa slab-stelată a vectorilor unitari din ℓ^1.

Barem de notare:
1p din oficiu; Subiectul 1: Baire 2p; PMU - enunţ 3p; PMU - demonstraţie 4p; Subiectul 2: studiul convergenţei w − 4p; studiul convergenţei w^* − 5p.

Timp de lucru: 50 minute

Model evaluare finală

Subiectul 1. Conceptul de operator compact (definiţie). Să se arate că mulţimea operatorilor compacţi formează un subspaţiu liniar închis în spaţiul operatorilor liniari şi continui.

Subiectul 2. Fie X un subspaţiu liniar închis al lui $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ astfel încât toate elementele sale sunt funcţii de clasă C^1. Folosind operatorul $T : X \to C([0,1])$, $T(f) = f'$, să se arate că există $M > 0$ astfel încât pentru orice $f \in X$ cu $\|f\|_\infty \leq 1$ are loc $\|f'\|_\infty \leq M$.

Subiectul 3. Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu liniar normat şi (x_n) un şir de elemente din X astfel încât toţi termenii se află într-o submulţime compactă în topologia normei. Să se arate că dacă (x_n) este slab convergent, atunci este tare convergent.

Subiectul 4. Studiaţi convergenţa slabă a şirului vectorilor unitari în spaţiile ℓ^p $(p \in [1, \infty))$.

Subiectul 5. Pe spaţiul ℓ^2 considerăm norma standard $\|\cdot\|_2$ şi norma $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2 + \|\cdot\|_\infty$. Să se arate că cele două norme sunt echivalente, $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ este spaţiu Hilbert, dar $(\ell^2, \|\cdot\|)$ nu este spaţiu Hilbert.

Barem de notare:
1p din oficiu; Subiectul 1: 1,5p; Subiectul 2: 1,5p; Subiectul 3: 1,5p; Subiectul 4: 2,5; Subiectul 5: 2,0

Timp de lucru: 2 ore

Bibliografie

[1] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Springer, 2011.

[2] A. Bowers, N.J. Kalton, *An introductory course in functional analysis*, Springer, 2014.

[3] C. Costara, D. Popa, *Exercises in functional analysis*, Kluwer Academic Publishers, 2003

[4] L. Florescu, *Analiză matematică*, Editura Universităţii "Al. I. Cuza" Iaşi, 1999.

[5] N. Katzourakis, E. Vărvărucă, *An illustrative introduction to modern analysis*, CRC Press, 2018.

[6] E. Popa, *Culegere de probleme de analiză funcţională*, Editura Didactică şi Pedagogică, 1981.

[7] D. Rusu, *Analiză funcţională*, Editura Performantica, 2005.

[8] C. Zălinescu, *Programare matematică în spaţii normate infinit dimensionale*, Editura Academiei, 1998.