

# Capitole speciale de Analiză funcțională – subiecte de teorie

–semestrul II, MFI1, MFIC1, 2025/2026–

## Subiecte - partea I (doar enunțuri)

- Spații liniare normate. Definiție, topologizare, exemple remarcabile
- Continuitatea operatorilor liniari între spații liniare normate. Norma operatorială. Dualul unui spațiu liniar normat
- Teorema Hahn-Banach: variantele algebrică și topologică
- Dualele unor spații liniare normate remarcabile:  $\mathbb{R}^d$ ,  $c_0$ ,  $\ell^p$  ( $p \in [1, \infty)$ )
- Separabilitatea spațiilor liniare normate: definiție, caracterizare, exemple
- Proprietățile topologice ale mulțimilor convexe în spații liniare normate
- Funcționala Minkowski asociată unei mulțimi convexe deschise care conține vectorul nul
- Teorema Hahn-Banach: prima și a doua formă geometrică
- Consecințe ale formelor geometrice ale Teoremei Hahn-Banach: caracterizarea subspațiilor liniare dense, caracterizarea mulțimilor convexe proprii și închise, legătura dintre separabilitatea unui spațiu liniar normat și separabilitatea dualului

## Subiecte - partea a II-a (inclusiv demonstrații<sup>1</sup>)

- Teorema lui Cantor, de intersecție
- Cele două forme ale Teoremei lui Baire
- Condițiile suficiente pentru ca o submulțime a unui spațiu Banach să fie vecinătate a originii
- Principiul mărginirii uniforme
- Principiul aplicațiilor deschise și consecințe ale acestuia
- Principiul graficului închis
- Topologia slabă: definiție, sistem fundamental de vecinătăți, separare
- Topologia slabă pe spații liniare normate finit dimensionale
- Topologia slabă pe spații liniare normate infinit dimensionale

---

<sup>1</sup>Cu excepția celor marcate cu (\*)

- Teorema lui Mazur; închiderea slabă a sferei unitate pe spații liniare normate infinit dimensionale
- Convergența șirurilor în topologia slabă
- Topologia slab-stelată: definiție, sistem fundamental de vecinătăți, separare
- Caracterizarea  $w^*$ -continuității unei aplicații liniare prin apartenența la imaginea scufundării canonice
- Caracterizarea  $w^*$ -continuității unei aplicații liniare prin închiderea  $w^*$  a nucleului (\*)
- Convergența șirurilor în topologia slab-stelată
- Teorema Alaoglu-Bourbaki (\*)
- Teorema Alaoglu-Bourbaki, varianta secvențială (\*)
- Reflexivitate: definiție, completitudine, coincidența topologiilor  $w$  și  $w^*$  pe dual
- Reflexivitatea spațiilor  $\ell^p$  ( $p \in (1, \infty)$ ) și a spațiilor finit dimensionale (\*)
- Proprietăți de continuitate ale scufundării canonice
- Compactitatea slabă a discului unitate în spații reflexive
- Păstrarea reflexivității prin izomorfisme izometrice (\*)
- Reflexivitatea unui subspațiu liniar închis al unui spațiu reflexiv (\*)
- Legătura dintre reflexivitatea unui spațiu și reflexivitatea dualului său (\*)
- Legătura dintre reflexivitatea și separabilitatea unui spațiu și reflexivitatea și separabilitatea dualului său
- Compactitatea slab-secvențială a discului unitate în spații reflexive (\*)
- Consecințe ale reflexivității
- Operatori compacți: definiție, mărginire, caracterizări
- Mulțimea operatorilor compacți formează un subspațiu liniar închis în spațiul operatorilor liniari și continui
- Operatori de rang finit: definiție, consecințe
- Proprietățile operatorului  $\text{id} - T$  unde  $T \in K(X)$  și  $X$  este spațiu Banach (\*)
- Teorema de alternativă a lui Fredholm
- Spații cu produs scalar: definiție, inegalitatea lui Schwarz, norma asociată, identitatea paralelogramului (\*)
- Caracterizarea normelor induse de produse scalare (\*)
- Spații Hilbert: definiție, exemple, ortogonalitate, subspațiu ortogonal

- Existența elementului de cea mai bună aproximare (\*)
- Proprietățile operatorului de proiecție
- Perpendiculara dintr-un punct pe un subspațiu vectorial: caracterizare (\*)
- Teorema de descompunere ortogonală (\*)
- Teorema lui Riesz
- Dualul unui spațiu Hilbert este spațiu Hilbert; reflexivitatea unui spațiu Hilbert
- Orice operator compact cu valori într-un spațiu Hilbert este limita unui șir de operatori de rang finit
- Familie ortonormată: definiție și liniară independentă (\*)
- Teorema lui Pitagora (\*)
- Inegalitatea lui Bessel (\*)
- Baze ortonormate în spații Hilbert: definiție și caracterizări (\*)
- Teorema de existență a bazelor ortonormate (\*)
- Orice spațiu Hilbert separabil infinit dimensional este izomorf izometric cu  $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$
- Teorema lui Stampacchia, Lema Lax-Milgram
- Spectrul și spectrul punctual al unui operator: definiții și proprietăți
- Teorema de reprezentare a unui operator compact autoadjunct (\*)