

Universitatea "Al.I. Cuza" Iași
Facultatea de matematică

Ovidiu Carja

**UNELE METODE DE
ANALIZA FUNCTIONALA NELINIARA**

Sumar

1	Partiția Unității	1
1.1	Partiția unității în spații metrice	1
1.2	Partiția unității în spații compacte	10
1.3	Aplicații	13
2	Multifuncții	17
2.1	Definiții, exemple.	17
2.2	Multifuncții superior semicontinue și multifuncții inferior semicontinue	21
2.3	Incluziuni diferențiale pe mulțimi închise	37
2.4	Selecții, parametrizări, aproximări	42
3	Principiul aplicațiilor deschise	57
3.1	Teorema Robinson - Ursescu	57
3.2	Teorema lui Baire	65
3.3	Aplicații la controlabilitatea sistemelor liniare	70
3.4	Teorema de inversare locală și Teorema Lyusternik - Graves	74
3.5	Aplicații la controlabilitatea sistemelor neliniare	85
4	Teoreme de punct fix	87
4.1	Teorema de punct fix a lui Banach	88
4.2	Teorema de punct fix a lui Brouwer	92
4.3	Teorema de punct fix a lui Schauder	98
4.4	Teoreme de punct fix pentru multifuncții	109
4.5	Ecuatii semiliniare în spații Banach	114
5	Probleme de optimizare	117
5.1	Principiul Brezis - Browder	117

5.2	Aplicații ale Principiului Brezis-Browder la incluziuni diferențiale	121
5.3	Principiul variațional al lui Ekeland	129
5.4	Probleme de extrem. Metode directe în calculul variațiilor	133
5.5	Inegalități variaționale	141
5.6	Teorema de minimax	145
5.7	Controlabilitate și timp optimal pentru sisteme semiliniare	149
6	Probleme și soluții	159

Capitolul 1

Partiția Unității

Partiția unității reprezintă un instrument util în obținerea unor rezultate globale pornind de la rezultate locale. În capitolele următoare vom utiliza această tehnică în cadrul spațiilor metrice și în cadrul spațiilor compacte. Ambele tipuri de spații sunt paracompacte, cadru tipic în care se dezvoltă partiția unității în mod uzual. Prezentarea teoriei partiției unității în cadrul spațiilor paracompacte necesită un volum foarte mare de rezultate preliminare, unele cu demonstrații complicate. Vom aborda în continuare teorema de existență a partiției unității separat pe cele două cazuri. În felul acesta se simplifică prezentarea deoarece în fiecare caz putem utiliza rezultate specifice cadrului topologic respectiv. În plus, în cazul spațiilor metrice obținem o proprietate suplimentară pentru funcțiile care formează partiția unității și anume aceea de a fi local lipschitziene.

1.1 Partiția unității în spații metrice

Vom începe cu prezentarea teoriei partiției unității în spații metrice. În acest scop, vom expune câteva rezultate preliminare legate de topologia spațiilor metrice. Peste tot în cele ce urmează, $S(x, r)$ notează sfera deschisă centrată în x și de rază $r > 0$ într-un spațiu metric iar $B(x, r)$ notează sfera închisă corespunzătoare.

Teorema 1.1 *Dacă X este spațiu metric iar A și B sunt submulțimi închise și disjuncte ale lui X , atunci există o submulțime deschisă G cu proprietatea $A \subset G$ și $B \cap \overline{G} = \emptyset$.*

Demonstrație. Deoarece $A \cap B = \emptyset$ iar B este închisă, pentru fiecare $x \in A$ există $\delta_x > 0$ astfel încât $S(x, \delta_x) \cap B = \emptyset$. Mulțimea

$$G = \bigcup_{x \in A} S\left(x, \frac{\delta_x}{3}\right)$$

satisface condiția din teoremă. Într-adevăr, rezultă imediat că $A \subset G$ și G este deschisă. Să arătăm că $B \cap \overline{G} = \emptyset$. Pentru aceasta, presupunem, prin reducere la absurd, că $y \in B \cap \overline{G}$. Obținem $y \in B$ și deci $y \notin A$. Deoarece A este închisă, există $\eta_y > 0$ astfel încât $S(y, \eta_y) \cap A = \emptyset$. În plus, $y \in \overline{G}$ implică

$$S(y, \frac{\eta_y}{3}) \cap G \neq \emptyset.$$

Există așadar $z \in G$ cu proprietatea $\rho(z, y) < \eta_y/3$, unde ρ este metrica pe X . În plus, există $x \in A$ astfel încât $z \in S(x, \delta_x/3)$, deci $\rho(z, x) < \delta_x/3$. Obținem

$$\rho(x, y) < \frac{\eta_y}{3} + \frac{\delta_x}{3} < \max\{\delta_x, \eta_y\},$$

ceea ce arată că, ori $y \in S(x, \delta_x) \cap B$, ori $x \in S(y, \eta_y) \cap A$. Acest fapt este imposibil. Să prezentăm o altă demonstrație. Fie $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

unde $d(x, A) = \inf\{\rho(x, a); a \in A\}$. Funcția f este continuă, $f(x) = 0$ pentru orice $x \in A$ și $f(x) = 1$ pentru orice $x \in B$. Mulțimea $G = \{x \in X; f(x) < 1/2\}$ satisface condițiile cerute. \square

Corolarul 1.1 *Dacă X este spațiu metric, U este o submulțime deschisă a lui X și $x \in U$, atunci există o vecinătate deschisă V a lui x cu proprietatea $\overline{V} \subset U$.*

Demonstrație. Se aplică Teorema 1.1 cu $A = \{x\}$ și $B = X \setminus U$. Altfel, există $r > 0$ astfel încât

$$S(x, r/2) \subset B(x, r/2) \subset B(x, r) \subset U.$$

\square

Un spațiu topologic care are proprietatea cuprinsă în Teorema 1.1 se numește *normal* iar dacă are proprietatea cuprinsă în Corolarul 1.1 se numește *regulat*.

Observația 1.1 Se verifică ușor că un spațiu topologic este normal dacă și numai dacă pentru orice două submulțimi A și B , nevide închise și disjuncte, există două submulțimi deschise și disjuncte G și E astfel încât $A \subset G$ și $B \subset E$. Un enunț similar are loc și pentru spații regulate.

Spațiile normale au fost definite în 1923 de Heinrich Tietze, dar rolul lor a fost recunoscut ca urmare a lucrării [93] a lui Pavel Urysohn din 1925 asupra extensiilor funcțiilor continue.

O familie $\{A_i; i \in I\}$, de submulțimi ale unui spațiu X care are proprietatea că $X = \cup_{i \in I} A_i$ se numește *acoperire* a lui X . O *subacoperire* a acoperirii \mathcal{A} este o subfamilie \mathcal{A}' a lui \mathcal{A} care este de asemenea o acoperire a lui X . Dacă \mathcal{A} și \mathcal{B} sunt acoperiri ale lui X , spunem că \mathcal{A} *rafinază* \mathcal{B} sau că \mathcal{A} este o rafinare a lui \mathcal{B} dacă pentru fiecare $A \in \mathcal{A}$ există $B \in \mathcal{B}$ astfel încât $A \subset B$. O familie \mathcal{A} de submulțimi ale unui spațiu topologic X este *local finită* dacă pentru fiecare $x \in X$ există o vecinătate a lui x care are intersecție nevidă cu cel mult un număr finit de mulțimi din \mathcal{A} . Un spațiu topologic separat Hausdorff este *paracompact* dacă fiecare acoperire deschisă (acoperire formată din mulțimi deschise) a sa are o rafinare local finită. Atragem atenția că atunci când vorbim de rafinare a unei acoperiri subînțelegem că acea rafinare este acoperire.

Vom demonstra în continuare că orice spațiu metric este paracompact. Se va folosi Teorema lui Zermelo care afirmă că orice mulțime poate fi bine ordonată. Amintim că Teorema lui Zermelo este echivalentă cu Axioma alegerii și cu Lema lui Zorn (vezi Capitolul 5). Pentru cititorul mai puțin familiarizat cu Teorema lui Zermelo, sau cu echivalentele sale (sau nu le acceptă), prezentăm o demonstrație într-un caz particular (X este separabil), fără a utiliza Teorema lui Zermelo.

Teorema 1.2 *Orice spațiu metric este paracompact, adică orice acoperire deschisă a sa are o rafinare deschisă local finită.*

Demonstrație. Cazul când spațiul X este separabil.

Etapa I. Arătăm că dacă spațiul metric X este separabil atunci există o bază numărabilă pentru X . Fie $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ o mulțime numărabilă densă în X și fie $S_{n,m} = S(x_n, 1/m)$ pentru $n, m = 1, 2, \dots$. Familia de mulțimi $\{S_{n,m}\}_{n,m \in \mathbf{N}}$ este o bază numărabilă pentru topologia lui X . Intr-adevăr, dacă V este deschisă și $x \in V$ atunci există m astfel încât $S(x, 1/m) \subset V$ și există $x_n \in S(x, 1/2m)$. Avem $S(x_n, 1/2m) \subset S(x, 1/m)$ și deci $x \in S_{n,2m} \subset V$. Așadar există o bază numărabilă pentru topologia lui X .

Etapa a II-a. Arătăm că orice acoperire deschisă a lui X are o subacoperire numărabilă (deci o rafinare deschisă numărabilă). Fie \mathcal{A} o acoperire deschisă a lui

X și \mathcal{B} o bază numărabilă (există conform etapei precedente). Pentru fiecare $A \in \mathcal{A}$ și $x \in A$ există $B_{x,A} \in \mathcal{B}$ astfel încât $x \in B_{x,A} \subset A$. Familia

$$\mathcal{B}' = \{B_{x,A}; A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

este numărabilă deoarece $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, deci se poate scrie în forma

$$\mathcal{B}' = \{B_{x_1,A_1}, B_{x_2,A_2}, \dots\}.$$

Familia $\{A_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ astfel obținută este o subacoperire numărabilă a lui \mathcal{A} . Am demonstrat deci că orice acoperire deschisă are o subacoperire numărabilă.

Etapa a III-a. Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a lui X . Pentru fiecare $x \in X$ selectăm $i(x) \in I$ astfel încât $x \in U_{i(x)}$. Aplicând Corolarul 1.1, există mulțimile deschise W_x și V_x astfel încât

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset W_x \subset \overline{W_x} \subset U_{i(x)}.$$

Familia $\mathcal{V} = \{V_x; x \in X\}$ este o acoperire deschisă a lui X , căreia îi aplicăm rezultatul demonstrat în Etapa a II-a. Există deci o subacoperire numărabilă $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots\}$ a lui \mathcal{V} . Fie $T_1 = W_{x_1}$ și

$$T_n = W_{x_n} \cap (X \setminus \overline{V_{x_1}}) \cap \dots \cap (X \setminus \overline{V_{x_{n-1}}})$$

pentru $n \geq 2$. Familia

$$\mathcal{T} = \{T_n; n \in \mathbf{N}\}$$

este o rafinare local finită a lui \mathcal{U} . Pentru a dovedi acest fapt, arătăm mai întâi că \mathcal{T} este o acoperire a lui X . Fie $x \in X$. Dacă $x \notin T_1 = W_{x_1}$, fie n cel mai mic pentru care $x \in W_{x_n}$. Este clar că $\{W_{x_1}, W_{x_2}, \dots\}$ este o acoperire a lui X și deci existența lui n este asigurată. Este ușor de văzut că, din modul de alegere a lui n , rezultă $x \in T_n$. Am demonstrat deci că \mathcal{T} este o acoperire a lui X . De asemenea $T_n \subset W_{x_n} \subset U_{i(x_n)}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și deci \mathcal{T} rafinează \mathcal{U} .

În sfârșit să arătăm că \mathcal{T} este local finită. Într-adevăr, pentru orice $x \in X$, există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $x \in V_{x_n}$. Arătăm că numai un număr finit de mulțimi din \mathcal{T} au intersecție nevidă cu V_{x_n} . Aceasta rezultă din faptul că

$$T_{n+j} \cap V_{x_n} = \emptyset,$$

pentru orice $j \geq 1$. Demonstrația este încheiată în cazul în care X este separabil.

Să demonstrăm acum Teorema 1.2 în cazul general, adică atunci când X nu este numai decât separabil. Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a lui X . Din Teorema lui Zermelo, presupunem că (I, \preceq) este bine ordonată. Definim inductiv, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$, mulțimile $V_{n,i}$ cu $i \in I$ astfel: $V_{n,i}$ este reuniunea tuturor mulțimilor de forma $S(x, 2^{-n})$ cu proprietățile

- (a) i este primul element astfel încât $x \in U_i$;
- (b) $x \notin V_{m,j}$ dacă $m < n$ și $j \in I$;
- (c) $S(x, 3/2^n) \subset U_i$.

Arătăm că $\mathcal{V} = \{V_{n,i} ; n \in \mathbf{N}, i \in I\}$ este o rafinare deschisă local finită a lui \mathcal{U} . Este clar că $V_{n,i}$ sunt deschise și $V_{n,i} \subset U_i$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ și $i \in I$, deci \mathcal{V} este o rafinare deschisă a lui \mathcal{U} . De asemenea, \mathcal{V} este o acoperire a lui X pentru că, dacă $x \in X$, există $n \in \mathbf{N}$, suficient de mare, astfel încât $S(x, 3/2^n) \subset U_i$. Dacă $x \notin V_{m,j}$ cu $m < n$ și $j \in I$ atunci $x \in V_{n,i}$.

În sfârșit, arătăm că \mathcal{V} este local finită. Pentru aceasta, fie $x \in X$, $n \in \mathbf{N}$ și $i_0 \in I$ astfel încât $x \in V_{n,i_0}$ și fie m suficient de mare astfel încât

$$S(x, 2^{-m}) \subset V_{n,i_0}.$$

Vom arăta următoarele:

- (d) dacă $p \geq n + m$ atunci $S(x, 2^{-n-m}) \cap V_{p,i} = \emptyset$;
- (e) dacă $p < n + m$ atunci $S(x, 2^{-n-m}) \cap V_{p,i} \neq \emptyset$ pentru cel mult un $i \in I$.

De aici rezultă că mulțimea $S(x, 2^{-n-m})$ intersectează un număr finit de elemente din \mathcal{V} și deci \mathcal{V} este local finită.

Să demonstrăm (d). Fie $S(y, 2^{-p})$ o sferă ce apare în componența lui $V_{p,i}$. Vom demonstra că

$$S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap S(y, \frac{1}{2^p}) = \emptyset.$$

Deoarece $p > n$, din (b) rezultă $y \notin V_{n,i}$ pentru orice $i \in I$. Cum $S(x, 2^{-m}) \subset V_{n,i_0}$ rezultă $\rho(x, y) > 2^{-m}$, unde ρ este metrica pe X . În sfârșit,

$$S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap S(y, \frac{1}{2^p}) = \emptyset,$$

deoarece, dacă intersecția de mai sus ar fi nevidă, ar rezulta

$$\rho(x, y) < \frac{1}{2^{n+m}} + \frac{1}{2^p} \leq \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{1}{2^m},$$

ceea ce este imposibil. Am demonstrat așadar că, dacă $p \geq n + m$, $S(x, 2^{-n-m})$ are intersecție vidă cu orice sferă ce apare în componența lui $V_{p,i}$ cu $i \in I$ și deci (d).

Să demonstrăm acum punctul (e). Presupunem că există $i_1, i_2 \in I$ cu $i_1 < i_2$ astfel încât

$$S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap V_{p,i_1} \neq \emptyset, \quad S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap V_{p,i_2} \neq \emptyset.$$

Există aşadar

$$u \in S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap V_{p,i_1} \quad v \in S(x, \frac{1}{2^{n+m}}) \cap V_{p,i_2}.$$

Deoarece $u \in V_{p,i_1}$, există y astfel încât $u \in S(y, 2^{-p})$ și (a), (b), (c) sunt verificate cu i_1 în loc de i și cu p în loc de n . Din (c) rezultă

$$S(y, 3/2^p) \subset U_{i_1}. \quad (1.1)$$

Deoarece $v \in V_{p,i_2}$, există z astfel încât $v \in S(z, 2^{-p})$ și (a), (b), (c) sunt verificate cu i_2 în loc de i și cu p în loc de n . Cum $i_1 < i_2$, din (a) rezultă că $z \notin U_{i_1}$. Combinând cu (1.1) deducem că $\rho(y, z) > 3/2^p$ și deci $\rho(u, v) \geq 2^{-p}$. Pe de altă parte avem

$$\rho(u, v) < \frac{2}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^{n+m-1}} \leq \frac{1}{2^p}.$$

Contradicția la care am ajuns poate fi eliminată doar dacă (e) este adevărată. \square

Noțiunea de spațiu paracompact a fost definită în 1944 de Jean Dieudonné [32], unde s-a demonstrat că un spațiu paracompact este normal. Faptul că un spațiu metric este paracompact a fost demonstrat în 1948 de Arthur H. Stone [88]. Demonstrația prezentată aici pentru cazul general este destul de simplă față de altele existente în literatură și a fost publicată de Marry Ellen Rudin [81] în 1969.

Am demonstrat că într-un spațiu metric orice acoperire deschisă $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ are o rafinare local finită $\mathcal{W} = \{W_j; j \in J\}$. Vom arăta în continuare că putem considera $J = I$.

Teorema 1.3 *Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a unui spațiu topologic X cu proprietatea că există o rafinare deschisă local finită a sa. Atunci există o rafinare deschisă local finită a lui \mathcal{U} , $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$, astfel încât $V_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{W} = \{W_j; j \in J\}$ o rafinare deschisă local finită a lui \mathcal{U} . Pentru fiecare $j \in J$ fie $f(j) \in I$ astfel încât $W_j \subset U_{f(j)}$. Pentru fiecare $i \in I$ definim

$$V_i = \cup \{W_j; f(j) = i\}.$$

Mulțimea V_i poate fi vidă. Familia $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ astfel construită satisface condițiile cerute, fapt ușor de verificat. \square

Următoarea teoremă arată că în spații metrice orice acoperire deschisă $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ se poate micșora (“shrink” în engleză) în sensul că există o acoperire deschisă $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ astfel încât $\overline{V_i} \subset U_i$ pentru orice $i \in I$.

Dacă (X, ρ) este un spațiu metric și A este o submulțime nevidă a lui X , notăm

$$d(x, A) = \inf\{\rho(x, a); a \in A\}.$$

Teorema 1.4 *Fie X un spațiu metric și $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a sa. Atunci există o acoperire deschisă $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ a lui X astfel încât $\overline{V_i} \subset U_i$ pentru orice $\forall i \in I$.*

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea putem presupune că spațiul este mărginit. Dacă există $i_0 \in I$ astfel încât $U_{i_0} = X$, considerăm $V_{i_0} = X$ și $V_i = \emptyset$ pentru $i \neq i_0$. Presupunem în continuare că $U_i \neq X$ pentru orice $i \in I$. Considerăm $E_i = X \setminus U_i$ și definim pentru $x \in X$

$$p(x) = \sup\{d(x, E_i); i \in I\}.$$

Observăm că E_i sunt mulțimi nevide și închise și în plus există $i_0 \in I$ astfel încât $x \notin E_{i_0}$. Rezultă că $p(x) > 0$ pentru orice $x \in X$. Considerăm acum mulțimile

$$F_i = \{x \in X; d(x, E_i) \geq \frac{1}{2} p(x)\}, \quad i \in I.$$

Deoarece

$$F_i = \bigcap_{j \in I} \{x \in X; d(x, E_i) \geq \frac{1}{2} d(x, E_j)\},$$

și ținând cont că funcția $x \mapsto d(x, A)$ este continuă, obținem că mulțimile F_i sunt închise. Vom arăta că

$$\mathcal{F} = \{F_i; i \in I\}$$

este o acoperire a lui X și că $F_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$. Pentru aceasta, fie $x \in X$. Din definiția lui $p(x)$ deducem că există $i_0 \in I$ astfel încât

$$d(x, E_{i_0}) \geq \frac{1}{2} p(x),$$

și deci $x \in F_{i_0}$. În sfârșit, dacă $x \in F_i$ atunci $x \notin E_i$ (altfel, $d(x, E_i) = 0$ și, din definiția lui F_i , $p(x) \leq 0$), deci $x \in U_i$. Am obținut o acoperire închisă $\mathcal{F} = \{F_i; i \in I\}$ a lui X cu $F_i \subset U_i$ pentru orice $\forall i \in I$. Pentru a încheia demonstrația, folosim proprietatea de normalitate a spațiilor metrice, Teorema 1.1, aplicată mulțimilor închise F_i și E_i . Pentru fiecare $i \in I$ există V_i deschisă astfel încât $F_i \subset V_i$ și

$$\overline{V_i} \cap E_i = \emptyset.$$

Este clar că $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ este acoperire deschisă a lui X și că $\overline{V}_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$. Demonstrația este încheiată. \square

Să observăm că dacă \mathcal{U} este local finită atunci și \mathcal{V} dată de Teorema 1.4 este local finită.

Rezultatele de mai sus le rezumăm în

Teorema 1.5 *Fie X un spațiu metric și $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a sa. Atunci există o rafinare deschisă local finită $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ cu proprietatea $\overline{V}_i \subset U_i$ pentru orice $i \in I$.*

Demonstrație. Se aplică Teorema 1.3 acoperirii \mathcal{U} , ținând seama de Teorema 1.2. Se aplică apoi Teorema 1.4 rafinării obținute în Teorema 1.3. \square

Suntem acum în măsură să prezentăm teorema de existență a partiției unității în spații metrice. Precizăm că pentru o funcție $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ notăm

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}.$$

Teorema 1.6 *Fie X un spațiu metric și $\mathcal{A} = \{A_i; i \in I\}$ o acoperire local finită a sa. Atunci există o familie $\{p_i; i \in I\}$ de funcții $p_i : X \rightarrow [0, 1]$ cu următoarele proprietăți:*

- (a) p_i sunt local lipschitziene pentru orice $i \in I$;
- (b) $\text{supp}(p_i) \subset A_i$ pentru orice $i \in I$;
- (c) $\sum_{i \in I} p_i(x) = 1$ pentru orice $x \in X$.

Suma din (c) are sens deoarece pentru fiecare x numai un număr finit de $p_i(x)$ sunt nenuli având în vedere (b) și faptul că \mathcal{A} este local finită.

Definiția 1.1 Familia de funcții $\{p_i; i \in I\}$ dată de Teorema 1.6 se numește *partiție local lipschitziană a unității subordonată acoperirii \mathcal{A} .*

În situația în care avem nevoie ca p_i să fie doar continue, vom spune pe scurt *partiție a unității* subordonată acoperirii \mathcal{A} . Teorema 1.6 afirmă deci că într-un spațiu metric, pentru fiecare acoperire local finită, există o partiție local lipschitziană a unității subordonată ei.

Demonstrația Teoremei 1.6 Din Teorema 1.4 rezultă că există o acoperire deschisă local finită, $\mathcal{B} = \{B_i; i \in I\}$, astfel încât $\overline{B_i} \subset A_i$ pentru orice $i \in I$. Pentru fiecare $i \in I$ definim funcția $f_i : X \rightarrow \mathbf{R}$ prin

$$f_i(x) = d(x, X \setminus B_i).$$

Aceste funcții sunt lipschitziene cu constanta Lipschitz egală cu 1 și în plus

$$\text{supp}(f_i) \subset \overline{B_i} \subset A_i.$$

Definim

$$p_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j \in I} f_j(x)}$$

pentru $x \in X$. După cum am mai precizat, suma de mai sus este finită. În plus, pentru fiecare $x \in X$ măcar un $f_i(x)$ este nenul deoarece \mathcal{B} este acoperire iar dacă $x \in B_i$, $f_i(x) > 0$. Este clar că p_i sunt continue, $p_i(x) \in [0, 1]$ pentru orice $x \in X$ și $\sum_{i \in I} p_i(x) = 1$.

Să arătăm că p_i sunt local lipschitziene. Pentru aceasta, să fixăm $x_0 \in X$ și să considerăm V o vecinătate a lui x_0 care intersectează un număr finit de elemente din \mathcal{B} , să zicem $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_n}\}$. Este clar că dacă $x \in V$ avem $p_i(x) = 0$ pentru $i \neq i_k$, $k = 1, \dots, n$. Rămâne să ne ocupăm de p_{i_k} cu $k \in \{1, \dots, n\}$. Deoarece

$$\sum_{j=1}^n f_{i_j}(x_0) = \sum_{i \in I} f_i(x_0) > 0,$$

există o vecinătate W a lui x_0 , $W \subset V$, și există $m > 0$, $M > 0$ astfel încât

$$m \leq \sum_{j=1}^n f_{i_j}(x) \leq M$$

pentru $x \in W$. Vom arăta că p_{i_k} este lipschitziană pe W . Pentru $x, y \in W$ avem

$$\begin{aligned} |p_{i_k}(x) - p_{i_k}(y)| &= \left| \frac{f_{i_k}(x)}{\sum_{j=1}^n f_{i_j}(x)} - \frac{f_{i_k}(y)}{\sum_{j=1}^n f_{i_j}(y)} \right| \leq \\ &\frac{1}{m^2} \left| f_{i_k}(x) \sum_{j=1}^n f_{i_j}(y) - f_{i_k}(y) \sum_{j=1}^n f_{i_j}(x) \right| \leq \\ &\frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^n |f_{i_k}(x)f_{i_j}(y) - f_{i_k}(y)f_{i_j}(x)| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^n |f_{i_k}(y)f_{i_j}(y) - f_{i_k}(y)f_{i_j}(x)| + \frac{1}{m^2} \sum_{j=1}^n |f_{i_k}(x)f_{i_j}(y) - f_{i_k}(y)f_{i_j}(y)| \leq \\ \frac{M}{m^2} \sum_{j=1}^n |f_{i_j}(y) - f_{i_j}(x)| + \frac{nM}{m^2} |f_{i_k}(x) - f_{i_k}(y)| \leq \frac{2nM}{m^2} \rho(x, y), \end{aligned}$$

unde ρ este metrica pe X . Demonstrația este încheiată. \square

1.2 Partiția unității în spații compacte

Vom prezenta în continuare partiția unității în spații compacte. Pentru aceasta avem nevoie de câteva rezultate preliminare. Incepem cu un rezultat stabilit de Pavel Uryson [93] în 1925, cunoscut în literatură sub numele de Lema lui Urysohn.

Teorema 1.7 *Dacă X este spațiu normal iar A și B sunt submulțimi închise și disjuncte ale lui X , există o funcție continuă $f : X \rightarrow [0, 1]$ astfel încât $f(A) = \{0\}$ și $f(B) = \{1\}$.*

Demonstrație. Fie $U_1 = X \setminus B$. Deoarece X este normal, există $U_{1/2}$ deschisă astfel încât

$$A \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_1.$$

Determinăm apoi $U_{1/4}$ și $U_{3/4}$ astfel încât

$$A = U_0 \subset U_{\frac{1}{4}} \subset \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subset U_{\frac{1}{2}} \subset \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subset U_{\frac{3}{4}} \subset \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subset U_1.$$

Continuăm procedeul inductiv și pentru fiecare $k \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq 2^n$, determinăm $U_{k/2^n}$ astfel încât, dacă $i < j$, avem

$$U_i \subset \overline{U_i} \subset U_j.$$

Definim apoi funcția f prin $f(x) = 1$ dacă $x \in B$ și $f(x) = \inf\{i; x \in U_i\}$. Este clar că $f(x) = 0$ pentru $x \in A$. Pentru a arăta că f este continuă, observăm că, dacă $a \in (0, 1]$ și $b \in [0, 1)$, avem

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup_{i < a} U_i$$

și

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup_{i > b} (X \setminus \overline{U_i}),$$

deci mulțimile $f^{-1}([0, a))$ și $f^{-1}((b, 1])$ sunt deschise. \square

Ipoteza că mulțimile A și B sunt închise este esențială. De exemplu, $A = (0, 1)$ și $B = (1, 2)$ sunt disjuncte în spațiul normal \mathbf{R} dar nu există o funcție continuă $f : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ astfel încât $f(A) = \{0\}$ și $f(B) = \{1\}$.

Dacă mulțimile A și B au proprietatea cuprinsă în Teorema 1.7, spunem că ele pot fi separate printr-o funcție continuă. Lema lui Uryson afirmă că dacă într-un spațiu topologic normal orice pereche de mulțimi închise și disjuncte pot fi separate prin mulțimi deschise atunci orice astfel de perechi pot fi separate prin funcții continue. Reciproca este imediată pentru că, dacă $f : X \rightarrow [0, 1]$ este funcția dată, atunci mulțimile $f^{-1}([0, 1/2))$ și $f^{-1}((1/2, 1])$ sunt deschise disjuncte și conțin respectiv mulțimile A și B .

Următorul corolar va fi utilizat în demonstrația existenței partiției unității.

Corolarul 1.2 *Fie A închisă și V deschisă, submulțimi ale spațiului normal X cu $A \subset V$. Atunci există o funcție continuă $f : X \rightarrow [0, 1]$ astfel încât $f(x) = 1$ pentru orice $x \in A$ și $\text{supp}(f) \subset V$.*

Demonstrație. Considerăm $B = X \setminus V$ și, din faptul că X este normal, determinăm D , deschisă, astfel încât

$$A \subset D \subset \overline{D} \subset V.$$

Aplicăm acum Teorema 1.7 pentru A și $\text{Fr}(\overline{D})$ în spațiul \overline{D} și determinăm $g : \overline{D} \rightarrow [0, 1]$ continuă astfel încât $g(x) = 1$ dacă $x \in A$ și $g(x) = 0$ dacă $x \in \text{Fr}(\overline{D})$. Extindem g punând $g(x) = 0$ pentru $x \in X \setminus \overline{D}$ și astfel obținem funcția căutată. \square

Demonstrăm acum că un spațiu compact este normal.

Teorema 1.8 *Dacă A și B sunt mulțimi închise și disjuncte ale unui spațiu compact X , există o submulțime deschisă G cu proprietatea că $A \subset G$ și $B \cap \overline{G} = \emptyset$.*

Demonstrație. Folosind proprietatea de separație Hausdorff și faptul că B este compactă, se deduce imediat că pentru fiecare $x \in A$ există o vecinătate deschisă a sa U_x , și o mulțime deschisă W_x astfel încât $B \subset W_x$ și $U_x \cap W_x = \emptyset$. Familia $\{U_x; x \in A\}$ este o acoperire deschisă pentru A și deci există o subacoperire finită $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Evident mulțimea

$$G = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

verifică proprietatea cerută. \square

Suntem în măsură acum să demonstrăm teorema de existență a partiției unității în spații compacte.

Teorema 1.9 Fie X un spațiu compact și fie $\mathcal{V} = \{V_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ o acoperire deschisă a sa. Atunci există funcțiile continue $p_i : X \rightarrow [0, 1]$ cu următoarele proprietăți:

$$(a) \text{supp}(f_i) \subset V_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$(b) \sum_{i=1}^n f_i(x) = 1, \quad x \in X.$$

Demonstrație. Pentru fiecare $x \in X$ există $V_{i(x)} \in \mathcal{V}$ astfel încât $x \in V_{i(x)}$ și, conform Teoremei 1.8, există U_x vecinătate deschisă a lui x astfel încât $\overline{U_x} \subset V_{i(x)}$ (se ia $A = \{x\}$ și $B = X \setminus V_{i(x)}$). Spațiul compact X se poate acoperi cu

$$\mathcal{U} = \{U_{x_j}; j = 1, \dots, m\}.$$

Pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, considerăm W_i ca fiind reuniunea tuturor mulțimilor din \mathcal{U} care au proprietatea $\overline{U_{x_j}} \subset V_i$. Este clar că $\{W_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ acoperă X și $\overline{W_i} \subset V_i$. Aplicăm Corolarul 1.2 și determinăm funcțiile continue $f_i : X \rightarrow [0, 1]$ cu proprietatea că $f_i(x) = 1$ dacă $x \in \overline{W_i}$ și $\text{supp}(f_i) \subset V_i$. Construim

$$p_1 = f_1, \quad p_2 = f_2(1 - f_1), \dots, p_n = f_n(1 - f_1)(1 - f_2) \cdots (1 - f_{n-1}).$$

Este clar că $\text{supp}(p_i) \subset U_i$ și

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 - (1 - f_1) \cdots (1 - f_n).$$

Deoarece familia $\{\overline{W_i}; i = 1, 2, \dots, n\}$ este acoperire pentru X , deducem

$$\sum_{i=1}^n p_i(x) = 1$$

pentru orice $x \in X$. □

Definiția 1.2 Dată acoperirea deschisă $\mathcal{V} = \{V_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ a spațiului compact X , familia de funcții continue $\{p_i; i = 1, 2, \dots, n\}$, $p_i : X \rightarrow [0, 1]$, care verifică (a) și (b) din Teorema 1.9 se numește partiție a unității subordonată acoperirii \mathcal{V} .

Teorema 1.9 afirmă că într-un spațiu compact, pentru fiecare acoperire deschisă finită există o partiție a unității subordonată ei.

Am prezentat în detaliu existența partiției unității în spații metrice și în spații compacte. Se poate demonstra existența partiției unității în spații paracompacte. Pentru aceasta se arată mai întâi că un spațiu paracompact este normal iar apoi se arată că într-un spațiu normal fiecărei acoperiri local finite \mathcal{U} se poate asocia o partiție a unității subordonată ei. De altfel, existența partiției unității este echivalentă cu proprietatea spațiului de a fi paracompact. Aceste rezultate sunt datorate lui Ernest Michael (1953). Cititorul interesat poate consulta [34] pentru detalii.

1.3 Aplicații

Să prezentăm câteva aplicații ale partiției unității; multe altele vor fi date în capitolele următoare.

Teorema 1.10 (Dugundji) *Fie X un spațiu metric, Y un spațiu normat, $A \subset X$ o mulțime închisă și $f : A \rightarrow Y$ o funcție continuă. Atunci f are o extensie continuă, $F : X \rightarrow Y$ astfel încât $F(x) \in \text{conv}(f(A))$ pentru orice $x \in X$.*

Demonstrație. Deoarece mulțimea A este închisă, pentru fiecare $x \in X \setminus A$ există $\varepsilon(x) > 0$ astfel încât $S(x, \varepsilon(x)) \cap A = \emptyset$. Familia

$$\{A_x = S(x, \frac{\varepsilon(x)}{4}); x \in X \setminus A\}$$

este o acoperire deschisă a mulțimii $X \setminus A$. Fie $\{U_i; i \in I\}$ o rafinare local finită a sa și $\{p_i; i \in I\}$ o partiție local lipschitziană a unității subordonată ei. Pentru fiecare $i \in I$ există $x(i) \in X \setminus A$ astfel încât $U_i \subset A_{x(i)}$. Definim F prin

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \in A \\ \sum_{i \in I} p_i(x) f(x_i) & \text{dacă } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

unde $x_i \in A$ este astfel încât

$$d(x_i, U_i) < 2 d(A, U_i). \quad (1.2)$$

Precizăm că $d(A, B)$ notează $\inf\{\rho(a, b); a \in A, b \in B\}$, unde ρ este metrica pe X . Existența lui x_i care satisface (1.2) este asigurată de faptul că $d(A, U_i) > 0$. Să arătăm că F este continuă pe X . Este clar că ea este continuă pe $\text{int}A$ și pe $X \setminus A$. Fie $x_0 \in \text{Fr}(A)$. Dacă $x \in X \setminus A$ și $p_i(x) > 0$ atunci avem $x \in U_i \subset A_{x(i)}$. Dar un calcul simplu arată că

$$\rho(x_i, x_0) \leq 4\rho(x_0, x).$$

Intrădevăr, folosind (1.2), deducem că există $y \in U_i$ astfel încât

$$\rho(x_i, y) < 2 d(A, U_i).$$

Este ușor de văzut că $\rho(x, y) < \rho(x, x_0)$. Obținem astfel

$$\rho(x_i, x_0) \leq \rho(x_i, y) + \rho(y, x_0) \leq 2\rho(x_0, x) + \rho(x_0, y) \leq 4\rho(x_0, x).$$

Folosind continuitatea lui f în x_0 și definiția lui F rezultă imediat continuitatea lui F în x_0 . Demonstrația este încheiată. \square

Să observăm că rezultatul are loc, cu aceeași demonstrație, și în cazul când Y este spațiu local convex. A fost obținut de James Dugundji [33] în 1951, extinzându-se astfel rezultatul lui Heinrich Tietze din 1915 referitor la cazul $Y = \mathbf{R}$.

Problema extensiei la tot spațiul a funcțiilor reale continue definite pe mulțimi închise a fost tratată pentru prima dată în spațiul \mathbf{R}^2 de Henri Lebesgue (1907). A urmat Heinrich Tietze în 1915 pe spații metrice și apoi Pavel Uryson pe spații normale în 1925. Să enunțăm acest rezultat și să facem câteva comentarii asupra lui.

Teorema 1.11 *Fie X un spațiu normal și fie A o submulțime închisă a lui X .*

- (a) *Orice funcție continuă $f : A \rightarrow [a, b]$ poate fi extinsă la o funcție continuă $F : X \rightarrow [a, b]$*
- (b) *Orice funcție continuă $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ poate fi extinsă la o funcție continuă $F : X \rightarrow \mathbf{R}$*

Ideea demonstrației punctului (a) este de a se construi un șir de funcții continue (s_n) definite pe X , astfel încât (s_n) converge uniform și astfel încât restricția lui s_n la A aproximează f . Funcția limită va fi funcția căutată. Construcția lui s_n se bazează pe Lema lui Uryson. Punctul (b) rezultă din (a). Intr-adevăr, observăm întâi că putem înlocui \mathbf{R} cu $(-1, 1)$ deoarece $(-1, 1)$ este homeomorf cu \mathbf{R} . Aplicăm (a) și extindem f la $g : X \rightarrow [-1, 1]$. Considerăm apoi $D = g^{-1}(-1) \cup g^{-1}(1)$, care este o mulțime închisă deoarece g este o funcție continuă. Dar $g(A) = f(A) \subset (-1, 1)$ și deci $A \cap D = \emptyset$. Aplicăm acum Lema lui Uryson și găsim o funcție continuă $h : X \rightarrow [-1, 1]$ astfel încât $h(D) = \{0\}$ și $h(A) = \{1\}$. Extensia căutată este $F = hg$.

Ipoteza că A este închisă este esențială în Teorema 1.11. De exemplu, $f : (0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dată de $f(x) = \sin 1/x$ nu are o extensie continuă la $[0, 1]$.

Teorema 1.11 se poate generaliza ușor la funcții cu valori în \mathbf{R}^n .

Este interesant de notat că în lucrarea lui Dugundji [33], ca o consecință a Teoremei 1.10, se arată pentru prima dată că, în spații normate infinit dimensionale, sfera unitate închisă nu are proprietatea de punct fix (vezi Capitolul 4). Mai precis, în spații normate infinit dimensionale există funcții continue $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ fără puncte fixe. Vom prezenta în continuare demonstrația dată de Heinrich Steinlein [87] în 1979 pentru această afirmație.

În primul rând să observăm că are loc o ușoară extindere a Teoremei 1.10 și anume:

Propoziția 1.1 *In condițiile Teoremei 1.10, fie D o submulțime densă a lui A . Atunci f are o extensie continuă $F : X \rightarrow Y$ astfel încât $F(x) \in f(A) \cup \text{conv}(f(D))$ pentru orice $x \in X$.*

Demonstrația este aceeași cu cea a Teoremei 1.10 cu singura modificare că x_i în (1.2) este luat din D .

Teorema 1.12 *Fie Y un spațiu normat de dimensiune algebrică infinită și $U = \{x \in Y; \|x\| = 1\}$. Există o funcție continuă $h : B(0, 1) \rightarrow U$ cu proprietatea că $h(x) = x$ pentru orice $x \in U$.*

Demonstrație. Fie L un subspațiu propriu a lui Y care este dens. În spații infinit dimensionale astfel de subspații există, de exemplu, nuclee de funcționale liniare necontinue. Să notăm $B = B(0, 1)$. Se aplică Propoziția 1.1 pentru

$$X = B, \quad A = U, \quad D = U \cap L$$

și f aplicația identică pe U . Există deci $F : B \rightarrow Y$ astfel încât $F(x) = x$ pentru $x \in U$ și

$$F(B) \subset U \cup \text{conv}(U \cap L) = U \cup (B \cap L),$$

și deci $F(B)$ este o submulțime proprie a lui B . Luăm $x_0 \in B(0, 1/3) \setminus F(B)$ și definim

$$G(x) = \frac{(1/2)(x - x_0) + \|x - x_0\|x_0}{\|(1/2)(x - x_0) + \|x - x_0\|x_0\|}$$

dacă $0 < \|x - x_0\| < 1/2$ și

$$G(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

dacă $\|x - x_0\| \geq 1/2$. Funcția căutată este $h = GF$. □

Observația 1.2 Iată un exemplu de funcțională liniară necontinuă pe spațiul infinit dimensional Y . Se consideră $H = \{b_n; n \in \mathbf{N}\}$ o mulțime liniar independentă din $U = \{y; \|y\| = 1\}$ și \mathcal{B} o bază algebrică pentru Y ce include mulțimea H . Definim $f(b_n) = n$ și $f(b) = 0$ pentru $b \in \mathcal{B} \setminus H$. Apoi extindem f prin liniaritate la tot spațiul Y . Este clar că $f(U)$ nu este mărginită, deci f nu este continuă.

Corolarul 1.3 *In spații normate infinit dimensionale există funcții continue $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ fără puncte fixe.*

Demonstrație. Funcția definită prin $f(x) = h(-x)$, unde h este funcția din Teorema 1.11, satisface condiția cerută. \square

Incheiem acest paragraf cu un rezultat de aproximare a unei funcții continue prin funcții lipschitziene. Aparține lui Andrzej Lasota și James A. Yorke (1973).

Teorema 1.13 *Fie D o submulțime nevidă și deschisă din spațiul metric X și $f : D \rightarrow Y$ o funcție continuă, unde Y este un spațiu normat. Atunci f se poate aproxima uniform prin funcții local lipschitziene. Mai precis, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există o funcție local lipschitziană $f_\varepsilon : D \rightarrow Y$ astfel încât*

$$\sup_{x \in D} \|f_\varepsilon(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Mai mult,

$$f_\varepsilon(D) \subset \text{conv}(f(D)).$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Familia $\{f^{-1}(S(f(x), \varepsilon/2)); x \in D\}$ este o acoperire deschisă pentru D . Fie $\{R_i; i \in I\}$ o rafinare deschisă local finită a sa și $\{p_i; i \in I\}$ o partiție local lipschitziană a unității subordonată ei. Pentru fiecare $i \in I$ luăm $x_i \in R_i$ și definim

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} p_i(x) f(x_i).$$

Este clar că f_ε este local lipschitziană și

$$f_\varepsilon(D) \subset \text{conv}(f(D)).$$

Să arătăm că

$$\|f_\varepsilon(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Pentru aceasta, să observăm că dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in R_i$ și există $x(i) \in D$ astfel încât $f(x) \in S(f(x(i)), \varepsilon/2)$ și $f(x_i) \in S(f(x(i)), \varepsilon/2)$. \square

Capitolul 2

Multifuncții

2.1 Definiții, exemple.

În acest capitol prezentăm câteva elemente din teoria aplicațiilor multivoce, adică a aplicațiilor $F : X \rightarrow 2^Y$, X și Y fiind două mulțimi. Prin urmare, fiecărui element $x \in X$ i se asociază o submulțime a lui Y (care poate fi și \emptyset), notată $F(x)$. După cum se va vedea mai jos, mai potrivită este definiția multifuncției ca o *relație*, adică o submulțime a produsului cartezian $X \times Y$ deoarece în multe cazuri structura lui 2^Y este mai săracă decât cea a lui Y . Acest punct de vedere este îmbrățișat în special de economiști, noțiunea utilizată fiind cea de *corespondență*. Noi vom folosi termenul de *multifuncție* și notația $F : X \rightsquigarrow Y$.

Submulțimea $F(x)$ a lui Y se numește *valoarea* lui F în x . Submulțimea

$$\text{Dom}(F) = \{x \in X; F(x) \neq \emptyset\}$$

se numește *domeniul* lui F . O multifuncție se numește *proprie* dacă are domeniul nevid și *strictă* dacă domeniul este întreg spațiul. Mulțimea

$$\text{Im}(F) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

o numim *imaginea* lui F . Dacă $D \subset X$, definim

$$F(D) = \bigcup_{x \in D} F(x).$$

Deci, $\text{Im}(F) = F(X)$. De fapt, o multifuncție F este caracterizată prin *graficul* său, submulțimea lui $X \times Y$ definită prin

$$\text{Graf}(F) = \{(x, y); y \in F(x)\}.$$

Intr-adevăr, dacă \mathcal{F} este o submulțime nevidă a spațiului $X \times Y$, ea este graficul multifuncției $F : X \rightsquigarrow Y$ definită prin

$$F(x) = \{y \in Y; (x, y) \in \mathcal{F}\}.$$

Să observăm că în definiția graficului am considerat multifuncția ca fiind o relație și nu o funcție de la X la 2^Y pentru că am definit $\text{Graf}(F)$ ca fiind o submulțime a lui $X \times Y$ și nu a lui $X \times 2^Y$. *Inversa* F^{-1} a lui F este multifuncția $F^{-1} : Y \rightsquigarrow X$ definită prin

$$F^{-1}(y) = \{x \in X; y \in F(x)\}$$

sau, echivalent,

$$\text{Graf}(F^{-1}) = \{(y, x); (x, y) \in \text{Graf}(F)\}.$$

Notăm că mulțimea $\text{Dom}(F)$ este proiecția mulțimii $\text{Graf}(F)$ pe X iar $\text{Im}(F) = \text{Dom}(F^{-1})$ este proiecția mulțimii $\text{Graf}(F)$ pe Y . Vom spune că o multifuncție este *închisă* (*convexă*) dacă $\text{Graf}(F)$ este mulțime închisă (convexă) în spațiul $X \times Y$. O multifuncție al cărei grafic este con (convex) (închis) se numește proces (*convex*) (*închis*). Dacă $M \subset Y$ notăm

$$F^{-1}(M) = \{x; F(x) \cap M \neq \emptyset\},$$

$$F^{+1}(M) = \{x; F(x) \subset M\}.$$

Este ușor de verificat că

$$F^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus F^{+1}(M),$$

$$F^{+1}(Y \setminus M) = X \setminus F^{-1}(M).$$

Să observăm că atunci când F este funcție, adică $F(x) = \{f(x)\}$ unde $f : X \rightarrow Y$ este o funcție, ambele mulțimi $F^{-1}(M)$ și $F^{+1}(M)$ definite mai sus se reduc la

$$f^{-1}(M) = \{x \in X; f(x) \in M\}.$$

Anticipând puțin, cele două moduri de a defini contraimaginea unei mulțimi conduc la două concepte de continuitate globală pentru multifuncții care extind conceptul de continuitate de la funcții. Astfel, dacă $F^{-1}(M)$ este deschisă în $\text{Dom}(F)$ pentru orice M deschisă în Y , spunem că F este semicontinuă inferior, iar dacă $F^{+1}(M)$ este deschisă în $\text{Dom}(F)$ pentru orice mulțime M deschisă în Y , spunem că F este semicontinuă superior. Ambele noțiuni se reduc la continuitate când F este funcție.

Să prezentăm în continuare câteva exemple semnificative de multifuncții.

Exemplul 2.1 Considerăm $f : X \rightarrow Y$ o funcție și definim multifuncția $F : Y \rightsquigarrow X$ prin

$$F(y) = f^{-1}(y) = \{x; f(x) = y\}.$$

Dacă f nu este surjectivă atunci $\text{Dom}(F)$ nu este tot spațiul Y . Dacă f nu este injectivă atunci F nu este o funcție. Studiul acestei multifuncții este legat de rezolvarea ecuației $f(x) = y$. De exemplu, studiul stabilității în raport cu y a soluțiilor ecuației conduce la studiul continuității multifuncției F .

Exemplul 2.2 (multifuncții parametrizate) Considerăm funcția $f : X \times Z \rightarrow Y$ și definim multifuncția $F : X \rightsquigarrow Y$ prin

$$F(x) = \{f(x, u); u \in Z\}. \quad (2.1)$$

Astfel de multifuncții apar în teoria controlului. Mai general, considerând multifuncția $U : X \rightsquigarrow Z$, funcției f și multifuncției U li se asociază multifuncția $G : X \rightsquigarrow Y$

$$G(x) = \{f(x, u); u \in U(x)\}. \quad (2.2)$$

Legate de aceste multifuncții sunt incluziunile diferențiale. Astfel, considerându-se un sistem dinamic

$$x'(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.3)$$

controlat prin parametrul u (numit *control*), soluțiile ecuațiilor diferențiale (2.3) sunt soluțiile incluziunii diferențiale

$$x'(t) \in F(x(t)) \quad x(0) = x_0,$$

unde F este dată de (2.1) și în care controalele nu apar în mod explicit.

Incluziunea diferențială asociată multifuncției G dată de (2.2), adică

$$x'(t) \in G(x(t)) \quad x(0) = x_0,$$

descrie un sistem dinamic în care apare o lege de feed-back a controalelor admisibile, $u(t) \in U(x(t))$.

Exemplul 2.3 Fie $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$, $G : X \rightsquigarrow Y$ și pentru fiecare $x \in X$ fie problemele de maximizare

$$\sup_{y \in G(x)} f(x, y). \quad (2.4)$$

Funcția $h : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ definită prin

$$h(x) = \sup_{y \in G(x)} f(x, y)$$

se numește *funcția valoare* asociată problemelor (2.4). În teoria optimizării, o problemă de mare interes este studiul multifuncției $F : X \rightsquigarrow Y$ ale cărei valori sunt soluțiile problemelor (2.4), adică

$$F(x) = \{y \in G(x); h(x) = f(x, y)\}.$$

Exemplul 2.4 Considerăm funcția $f : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ și definim $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$ prin

$$F(x) = \begin{cases} f(x) + \mathbf{R}_+ & \text{dacă } f(x) < +\infty \\ \emptyset & \text{dacă } f(x) = +\infty. \end{cases}$$

Este clar că

$$\text{Dom}(F) = \{x; f(x) < +\infty\} = \text{dom}(f)$$

iar

$$\text{Graf}(F) = \{(x, y) \in X \times \mathbf{R}; f(x) \leq y\}.$$

Mulțimea din membrul drept al egalității de mai sus se numește *epigraful* funcției f) și se notează $\text{epi}(f)$.

Se vede că fiecărei funcții care ia valori în $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ i se asociază o multifuncție ca mai sus și reciproc, fiecărei multifuncției cu valori în \mathbf{R} i se poate asocia o funcție a cărui epigraf să fie graficul multifuncției date. Pentru aceasta se definește

$$f(x) = \inf F(x), \quad x \in X.$$

În mod similar, funcției $g : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ i se poate asocia multifuncția $G : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$ prin

$$G(x) = \begin{cases} g(x) - \mathbf{R}_+ & \text{dacă } g(x) > -\infty \\ \emptyset & \text{dacă } g(x) = -\infty, \end{cases}$$

Avem

$$\text{Graf}(G) = \{(x, y) \in X \times \mathbf{R}; g(x) \geq y\}.$$

Mulțimea din membrul drept al egalității de mai sus se numește *hipograf* funcției g) și se notează $\text{hipo}(g)$.

Exemplul 2.5 Fie $f : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ o funcție convexă și proprie. Multifuncția $F : X \rightsquigarrow X^*$ definită prin

$$F(x) = \{x^* \in X^*; f(x) - f(y) \leq \langle x - y, x^* \rangle, \forall y \in X\}$$

se numește *subdiferențiala* funcției f și se notează (de obicei) cu ∂f . Precizăm că $\langle \cdot, \cdot \rangle$ notează dualitatea naturală între X și X^* , adică $\langle x, x^* \rangle = x^*(x)$.

Exemplul 2.6 Fie X spațiu Banach și $F : X \rightsquigarrow X^*$ definită prin

$$F(x) = \{x^* \in X^*; \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}.$$

Această multifuncție se numește *aplicația de dualitate* a spațiului X . Dacă X este spațiu Hilbert atunci F devine izomorfismul canonic dat de Teorema lui Riesz. Deoarece într-un spațiu normat X , pentru fiecare $x \in X$ există $x^* \in X^*$ cu $\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2$ și $\|x^*\| = \|x\|$ (vezi [37, p.111]), rezultă că $\text{Dom}(F) = X$.

2.2 Multifuncții superior semicontinue și multifuncții inferior semicontinue

Toate spațiile topologice considerate în continuare sunt presupuse a fi separate Hausdorff.

Definiția 2.1 Fie X și Y spații topologice și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție. Spunem că F este *superior semicontinuu* în $x_0 \in \text{Dom}(F)$ dacă, pentru orice mulțime deschisă V cu proprietatea $F(x_0) \subset V$, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $F(U) \subset V$. Multifuncția F este superior semicontinuu (global) dacă ea este superior semicontinuu în orice punct din $\text{Dom}(F)$.

Definiția 2.2 Fie X și Y spații topologice și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție. Spunem că F este *inferior semicontinuu* în $x_0 \in \text{Dom}(F)$ dacă, pentru orice mulțime deschisă V cu proprietatea că $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap \text{Dom}(F)$ avem $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Multifuncția F este inferior semicontinuu (global) dacă ea este inferior semicontinuu în orice punct din $\text{Dom}(F)$.

Să considerăm multifuncțiile $F_1 : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ și $F_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definite prin

$$F_1(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{dacă } x = 0 \\ [-1, 1] & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{dacă } x = 0 \\ \{0\} & \text{dacă } x \neq 0. \end{cases}$$

Multifunția F_1 este inferior semicontinuă în orice punct din \mathbf{R} dar nu este superior semicontinuă în $x = 0$. Să justificăm partea finală a afirmației de mai sus. Considerăm $V = (-1/2, 1/2)$, observăm că $F_1(0) \subset V$ dar pentru orice U vecinătate a lui 0 și $x \in U$, $x \neq 0$, avem $F_1(x) = [-1, 1] \not\subset V$. Multifunția F_2 este superior semicontinuă în orice punct din \mathbf{R} dar nu este inferior semicontinuă în $x = 0$. Pentru a demonstra partea finală a acestei afirmații, considerăm $V = (0, 1/2)$ și observăm că $F_2(0) \cap V \neq \emptyset$, dar pentru orice U vecinătate a lui 0 și $x \in U$, $x \neq 0$, avem $F_2(x) = \{0\}$ și deci $F_2(x) \cap V = \emptyset$.

Să facem câteva comentarii asupra terminologiei. Deși ambele concepte introduse în Definițiile 2.1 și 2.2 se reduc la continuitate în cazul funcțiilor, unele legături cu semicontinuitatea inferioară și superioară de la funcții se pot face. În primul rând, dacă privim multifunția F ca o funcție de la X la 2^Y , întrebarea firească este dacă noțiunile de continuitate introduse mai sus corespund continuității clasice pentru anumite topologii pe spațiul 2^Y . Răspunsul este afirmativ. Semicontinuitatea superioară corespunde continuității clasice când pe 2^Y se consideră *topologia superioară* adică topologia generată de baza

$$U = \{[\cdot, G]; G \in \tau\} \cup \{\emptyset\},$$

unde $[\cdot, G]$ notează $\{U \in 2^Y; U \subset G\}$, iar τ este topologia pe Y . Această topologie este similară cu topologia inferioară pe $\overline{\mathbf{R}}$ dacă se înlocuiește \subset cu $>$. Dar topologia inferioară pe $\overline{\mathbf{R}}$ conduce la noțiunea de funcție inferior semicontinuă pentru $f : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Considerații similare se pot face și pentru semicontinuitatea inferioară a multifunțiilor.

Noțiunile de semicontinuitate inferioară și superioară pentru multifunții au fost introduse și studiate, în maniera prezentată aici, de Kazimierz Kuratowski [53] în 1932. Menționăm însă că originea lor este ceva mai veche. În acest context amintim teza de doctorat a lui Florin Vasilescu publicată la *Gauthier-Villars* în 1925 (pentru multifunții din plan) și o lucrare tot din 1925 a lui Robert Lee Moore [68] (aici se folosesc noțiunile de limită inferioară și superioară pentru șiruri de mulțimi).

Propoziția următoare pune în evidență un alt element de legătură între semicontinuitatea multifunțiilor și semicontinuitatea funcțiilor.

Propoziția 2.1 *Fie X spațiu topologic, funcția $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ și multifunția $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$,*

$$F(x) = f(x) + \mathbf{R}_+.$$

(i) Funcția f este inferior semicontinuă dacă și numai dacă multifuncția F este superior semicontinuă;

(ii) Funcția f este superior semicontinuă dacă și numai dacă multifuncția F este inferior semicontinuă.

Demonstrație. (i) Presupunem că f este inferior semicontinuă. Fie $x_0 \in X$ și V o mulțime deschisă în \mathbf{R} astfel încât $F(x_0) \subset V$. Există deci $\alpha < f(x_0)$ cu $(\alpha, \infty) \subset V$. Deoarece f este inferior semicontinuă, există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $f(x) > \alpha$ pentru orice $x \in U$ și deci $F(x) \subset V$ pentru orice $x \in U$. Reciproc, presupunem că F este superior semicontinuă și arătăm că f este inferior semicontinuă. Pentru aceasta, fie $\alpha < f(x_0)$. Avem $F(x_0) \subset (\alpha, \infty)$ și deci există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $F(x) \subset (\alpha, \infty)$ pentru $x \in U$. Aceasta arată că $f(x) > \alpha$ pentru $x \in U$ și deci f este inferior semicontinuă în x_0 .

(ii) Presupunem că f este superior semicontinuă. Fie $x_0 \in X$ și V , deschisă în \mathbf{R} , astfel încât $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Există deci $\alpha \in F(x_0) \cap V$ prin urmare $\alpha \in V$ și $\alpha \geq f(x_0)$. Deoarece V este deschisă, putem presupune că $\alpha > f(x_0)$. Cum f este superior semicontinuă, există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât pentru $x \in U$ avem $f(x) < \alpha$. Prin urmare $\alpha \in F(x) \cap V$ pentru $x \in U$, ceea ce arată că F este inferior semicontinuă în x_0 . Lăsăm pe seama cititorului încheierea demonstrației. De asemenea trimitem la Problemele 6.4 și 6.5. \square

Să prezentăm acum un rezultat de caracterizare a semicontinuităților globale.

Teorema 2.1 Fie X și Y spații topologice. Multifuncția $F : X \rightsquigarrow Y$ este superior semicontinuă dacă și numai dacă pentru orice mulțime D , deschisă în Y , mulțimea

$$F^{+1}(D) = \{x \in \text{Dom}(F); F(x) \subset D\}$$

este deschisă în $\text{Dom}(F)$.

Demonstrație. Presupunem că F este superior semicontinuă în orice punct din $\text{Dom}(F)$. Fie D deschisă în Y . Pentru fiecare $x \in \text{Dom}(F)$ cu $F(x) \subset D$, există o mulțime deschisă U_x astfel încât $x \in U_x$ și $F(U_x) \subset D$. Este clar că $U_x \cap \text{Dom}(F)$ este deschisă în $\text{Dom}(F)$ și

$$\bigcup (U_x \cap \text{Dom}(F)) = \{x \in \text{Dom}(F); F(x) \subset D\},$$

reuniunea din membrul stâng fiind luată după acei x din mulțimea scrisă în membrul drept. Deoarece mulțimea din membrul stâng este deschisă rezultă că mulțimea din

membrul drept este deschisă. Reciproc, fie $x_0 \in \text{Dom}(F)$ și fie V deschisă astfel încât $F(x_0) \subset V$. Atunci mulțimea

$$U = \{x \in \text{Dom}(F); F(x) \subset V\}$$

este deschisă, conține x_0 și $F(U) \subset V$. Demonstrația este încheiată. \square

Teorema 2.2 *Fie X și Y spații topologice. Multifuncția $F : X \rightsquigarrow Y$ este inferior semicontinuă dacă și numai dacă pentru orice mulțime D , deschisă în Y , mulțimea*

$$F^{-1}(D) = \{x; F(x) \cap D \neq \emptyset\}$$

este deschisă în $\text{Dom}(F)$.

Demonstrație. Presupunem că F este inferior semicontinuă în orice punct din $\text{Dom}(F)$. Fie D o mulțime deschisă și fie $x_0 \in \{x; F(x) \cap D \neq \emptyset\}$. Este clar că $x_0 \in \text{Dom}(F)$ și deci există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $F(x) \cap D \neq \emptyset$ pentru $x \in U \cap \text{Dom}(F)$. Aceasta arată că

$$U \cap \text{Dom}(F) \subset \{x; F(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Reciproca se demonstrează analog și o lășăm ca exercițiu. \square

Să mai observăm că F este superior semicontinuă dacă și numai dacă $F^{-1}(\Omega)$ este închisă în $\text{Dom}(F)$ pentru orice mulțime Ω închisă în Y și că este inferior semicontinuă dacă și numai dacă $F^+(\Omega)$ este închisă în $\text{Dom}(F)$ pentru orice mulțime Ω închisă în Y .

Să prezentăm acum și câteva caracterizări ale semicontinuităților în punct.

Teorema 2.3 *Fie X și Y spații metrice, $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție și $x_0 \in \text{Dom}(F)$. Următoarele condiții sunt echivalente:*

- (i) *Multifuncția F este superior semicontinuă în x_0 ;*
- (ii) *Pentru orice mulțime închisă Ω verificând $F(x_0) \cap \Omega = \emptyset$ există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $F(U) \cap \Omega = \emptyset$;*
- (iii) *Pentru orice mulțime închisă Ω și pentru orice șir (x_n) cu $x_n \rightarrow x_0$ și $F(x_n) \cap \Omega \neq \emptyset$ avem $F(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$;*
- (iv) *Pentru orice mulțime deschisă V astfel încât $F(x_0) \subset V$ și orice șir (x_n) , $x_n \rightarrow x_0$, există n_V astfel încât, dacă $n \geq n_V$, avem $F(x_n) \subset V$.*

Demonstrație. (i) \Rightarrow (ii) Fie Ω o mulțime închisă astfel încât $F(x_0) \cap \Omega = \emptyset$. Mulțimea $V = Y \setminus \Omega$ este deschisă și $F(x_0) \subset V$. Din (i), există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $F(U) \subset V$, ceea ce implică $F(U) \cap \Omega = \emptyset$.

(ii) \Rightarrow (iii) Fie Ω o mulțime închisă în Y și fie (x_n) un șir cu $x_n \rightarrow x_0$ și $F(x_n) \cap \Omega \neq \emptyset$. Presupunem că $F(x_0) \cap \Omega = \emptyset$. Conform (ii) există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $F(U) \cap \Omega = \emptyset$. Pentru n suficient de mare avem $x_n \in U$, ceea ce conduce la o contradicție.

(iii) \Rightarrow (iv) Fie V deschisă astfel încât $F(x_0) \subset V$ și fie (x_n) un șir convergent la x_0 . Mulțimea $\Omega = Y \setminus V$ este închisă și $F(x_0) \cap \Omega = \emptyset$. Presupunem, prin reducere la absurd, că pentru orice n există $m > n$ cu proprietatea $F(x_m) \cap \Omega \neq \emptyset$. Se obține astfel un șir pentru care are loc (iii) și deci $F(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$, contradicție.

(iv) \Rightarrow (i) Fie V deschisă astfel încât $F(x_0) \subset V$. Prin reducere la absurd, presupunem că pentru orice vecinătate U a lui x_0 există $x_U \in U$ astfel încât $F(x_U) \not\subset V$. Se obține un șir convergent la x_0 care contrazice (iv). \square

Teorema 2.4 Fie X și Y spații metrice, $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție și $x_0 \in \text{Dom}(F)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Multifuncția F este inferior semicontinuu în x_0 ;
- (ii) Pentru orice $y \in F(x_0)$ și orice V , vecinătate deschisă a lui y , există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât pentru orice $x \in U \cap \text{Dom}(F)$ avem $F(x) \cap V \neq \emptyset$;
- (iii) Pentru orice $y \in F(x_0)$ și orice șir $(x_n) \subset \text{Dom}(F)$ cu $x_n \rightarrow x_0$, există șirul (y_n) cu $y_n \in F(x_n)$ pentru orice n , astfel încât $y_n \rightarrow y$.

Demonstrație. (i) \Rightarrow (ii) Fie $y \in F(x_0)$ și V o vecinătate deschisă a lui y . Avem $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ și deci există U , vecinătate a lui (x_0) , astfel încât pentru $x \in U \cap \text{Dom}(F)$ avem $F(x) \cap V \neq \emptyset$.

(ii) \Rightarrow (iii) Fie $y \in F(x_0)$ și fie șirul $(x_n) \subset \text{Dom}(F)$ cu $x_n \rightarrow x_0$. Considerăm $V = S(y, 1/n)$, aplicăm (ii) și deducem că pentru fiecare n există U_n , vecinătate pentru x_0 , astfel încât, dacă $x \in U_n$, avem $F(x) \cap S(y, 1/n) \neq \emptyset$. Prin urmare, există șirul (k_n) , strict crescător, astfel încât pentru orice $i \geq k_n$ există $y_i \in F(x_i) \cap S(y, 1/n)$. Construim șirul

$$y_{k_1}, y_{k_1+1}, \dots, y_{k_2}, y_{k_2+1}, \dots, y_{k_3}, \dots$$

Acest șir satisface condițiile cerute de (iii).

(iii) \Rightarrow (i) Fie V deschisă astfel încât $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Prin reducere la absurd, presupunem că pentru orice U , vecinătate a lui x_0 , există $x_U \in U \cap \text{Dom}(F)$ astfel încât $F(x_U) \cap V = \emptyset$. Construim astfel un șir (x_n) , $x_n \rightarrow x_0$, ceea ce contrazice (iii). \square

O multifuncție care este în același timp superior semicontinuă și inferior semicontinuă se numește continuă. Să vedem care este legătura dintre continuitatea definită mai sus și cea în metrica Pompeiu–Hausdorff. Amintim că dacă Y este spațiu metric și $I(Y)$ este familia mulțimilor închise și nevide din Y atunci

$$\delta(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A)\right\} \quad (2.5)$$

este o metrică extinsă pe $I(Y)$. Pentru a simplifica scrierea să mai notăm

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B), \quad (2.6)$$

astfel că

$$\delta(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\}.$$

Distanța $e(A, B)$ prezentată mai sus a fost introdusă și utilizată în analiza complexă de Dimitrie Pompeiu în teza sa de doctorat publicată în 1905. Pentru $e(A, B)$ Pompeiu a utilizat termenul de “*écart*” al mulțimii A relativ la mulțimea B . Tot Pompeiu a introdus metrica

$$\gamma(A, B) = e(A, B) + e(B, A)$$

pe spațiul mulțimilor nevide și compacte din plan. Felix Hausdorff, în cartea *Gründzuge der Mengenlehre* [44] din 1914, a extins definiția la spații metrice și a introdus metrica $\delta(\cdot, \cdot)$ echivalentă evident cu metrica $\gamma(\cdot, \cdot)$ introdusă de Pompeiu.

Teorema 2.5 *Fie X și Y spații metrice și fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori închise și nevide.*

(i) *Dacă F este superior semicontinuă în x_0 atunci funcția*

$$x \mapsto e(F(x), F(x_0))$$

este continuă în x_0 . Reciproca este adevărată dacă $F(x_0)$ este compactă.

(ii) *Dacă funcția*

$$x \mapsto e(F(x_0), F(x))$$

este continuă în x_0 atunci F este inferior semicontinuă în x_0 . Reciproca este adevărată dacă $F(x_0)$ este compactă.

(iii) *Dacă F are valori compacte atunci continuitatea ei în x_0 este echivalentă cu continuitatea funcției $x \mapsto \delta(F(x), F(x_0))$ în x_0 .*

Demonstrație. Fie $x_n \rightarrow x_0$, $\varepsilon > 0$ și

$$V = \bigcup_{y \in F(x_0)} S(y, \varepsilon).$$

Deoarece F este superior semicontinuu în x_0 , există n_ε astfel încât pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $F(x_n) \subset V$. Rezultă imediat că $e(F(x_n), F(x_0)) \leq \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. Pentru reciprocă, fie W deschisă cu $F(x_0) \subset W$. Cum $F(x_0)$ este compactă, există $\varepsilon > 0$ astfel încât $V \subset W$. Pentru a demonstra acest fapt considerăm funcția continuă $f(y) = d(y, X \setminus V)$ care-și atinge minimumul pe mulțimea compactă $F(x_0)$. Fie acest minim $\varepsilon' > 0$. Valoarea $\varepsilon = \varepsilon'/2$ satisface condiția cerută. Pe de altă parte, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru $x \in U$ avem $e(F(x), F(x_0)) < \varepsilon/2$, ceea ce implică ușor că $F(x) \subset V$. (ii) Fie V deschisă cu $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$. Presupunem, prin reducere la absurd, că există un șir (x_n) cu $x_n \rightarrow x_0$ și $F(x_n) \cap V = \emptyset$ pentru orice n . Fie $y_0 \in V \cap F(x_0)$ și $S(y_0, r) \subset V$. Atunci

$$S(y_0, r) \cap F(x_n) = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

ceea ce spune că șirul $(d(y_0, F(x_n)))$ nu converge la zero. De aici rezultă că nici șirul $(e(F(x_0), F(x_n)))$ nu converge la zero, ceea ce este o contradicție.

Pentru reciprocă, presupunem că F este inferior semicontinuu în x_0 și că $F(x_0)$ este compactă. Acoperim $F(x_0)$ cu un număr finit de sfere $S(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, cu $y_i \in F(x_0)$. Există U_i , vecinătate pentru x_0 , astfel încât $F(x) \cap S(y_i, \varepsilon) = \emptyset$ pentru $x \in U_i$. Fie

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i$$

și $y \in F(x_0)$. Atunci există i astfel încât $y \in S(y_i, \varepsilon)$. Avem

$$d(y, F(x)) \leq \rho(y, y_i) + d(y_i, F(x)) < 2\varepsilon,$$

deci $e(F(x_0), F(x)) \leq 2\varepsilon$ pentru $x \in U$. Punctul (iii) este consecință a primelor două. □

Următorul exemplu arată că ipoteza $F(x_0)$ compactă este esențială. Fie

$$X = \{0, 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots\},$$

$Y = \mathbf{R}$ și $F : X \rightsquigarrow Y$ definită prin $F(1/n) = \{0, 1, \dots, n\}$ și $F(0) = \mathbf{N}$. Multifuncția F este inferior semicontinuu în 0 pentru că, dacă V este deschisă și intersectează $F(0) = \mathbf{N}$, atunci V intersectează $F(1/n)$ pentru orice n suficient de mare. Pe de altă parte, se vede ușor că $e(F(0), F(1/n)) \rightarrow \infty$ pentru $n \rightarrow \infty$. O proprietate remarcabilă a funcțiilor continue este aceea că au graficul închis. Această proprietate se regăsește la multifuncțiile superior semicontinue.

Teorema 2.6 *Fie X și Y spații metrice și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție superior semicontinuuă și cu valori închise. Presupunem că $\text{Dom}(F)$ este mulțime închisă. Atunci $\text{Graf}(F)$ este mulțime închisă în $X \times Y$.*

Demonstrație. Fie $((x_n, y_n))$ un șir din $\text{Graf}(F)$ convergent la (x_0, y_0) . Presupunem că $(x_0, y_0) \notin \text{Graf}(F)$, deci $y_0 \in Y \setminus F(x_0)$. Deoarece $F(x_0)$ este mulțime închisă, din faptul că Y este regulat, există mulțimile deschise și disjuncte D_1 și D_2 cu $y_0 \in D_1$ și $F(x_0) \subset D_2$. Din Teorema 2.3 (iv), pentru n suficient de mare avem $F(x_n) \subset D_2$. Deci $y_n \in D_2$ pentru n suficient de mare, ceea ce contrazice faptul că $y_n \rightarrow y_0$. \square

Proprietatea de mai sus nu mai este adevărată în cazul multifuncțiilor inferior semicontinue. Este ușor de văzut că multifuncția $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$F(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{pentru } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{pentru } x = 0, \end{cases}$$

nu are grafic închis. Intr-adevăr, șirul $(1/n, 1) \in \text{Graf}(F)$ dar $(0, 1) \notin \text{Graf}(F)$. După cum am precizat deja, multifuncția F este inferior semicontinuuă.

În cazul funcțiilor $f : X \rightarrow Y$, dacă Y este compact și funcția are grafic închis atunci ea este continuă. În cazul multifuncțiilor, după cum vom vedea mai jos, faptul că graficul este închis implică semicontinuitatea superioară. Mai întâi să prezentăm un rezultat de comportare pentru intersecția a două multifuncții.

Amintim că un spațiu topologic este normal dacă, pentru orice două submulțimi închise și disjuncte A și B , există două mulțimi disjuncte și deschise D_1 și D_2 cu $A \subset D_1$ și $B \subset D_2$. În Teorema 1.1 am demonstrat că spațiile metrice sunt normale.

Teorema 2.7 *Fie X și Y spații topologice și $F_1, F_2 : X \rightsquigarrow Y$ astfel încât $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$, pentru orice $x \in X$. Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ definită prin $F(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$. (i) Presupunem că Y este spațiu normal. Dacă F_1 și F_2 sunt superior semicontinue cu valori închise atunci F este superior semicontinuuă.*

(ii) *Dacă F_1 este superior semicontinuuă, are valori compacte iar $\text{Graf}(F_2)$ este mulțime închisă atunci F este superior semicontinuuă.*

Demonstrație. (i) Fie D deschisă în Y și fie

$$A = \{x \in X; F_1(x) \cap F_2(x) \subset D\}.$$

Este clar că pentru $x \in A$ avem $F_1(x) \cap (F_2(x) \setminus D) = \emptyset$. Mulțimile $F_1(x)$ și $F_2(x) \setminus D$ sunt închise și ca atare există V_1 și V_2 deschise și disjuncte, cu $F_1(x) \subset V_1$

și $F_2(x) \setminus D \subset V_2$. Există U_1 și U_2 , vecinătăți ale lui x , astfel încât $F_1(U_1) \subset V_1$ și $F_2(U_2) \subset V_2 \cup D$. Obținem

$$F(U_1 \cap U_2) \subset V_1 \cap (V_2 \cup D) \subset D.$$

(ii) Fie $x_0 \in X$ și V mulțime deschisă astfel încât $F(x_0) \subset V$. Dacă $F_1(x_0) \subset V$, din faptul că F_1 este superior semicontinuă în x_0 , rezultă că există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât pentru $x \in U$ avem $F_1(x) \subset V$. Prin urmare, $F(x) \subset V$, ceea ce antrenează semicontinuitatea superioară a lui F în x_0 . Dacă $F_1(x_0) \not\subset V$, considerăm mulțimea compactă

$$K = F_1(x_0) \cap (Y \setminus V).$$

Pentru fiecare $y \in K$, $y \notin F_2(x_0)$ și deci $(x_0, y) \notin \text{Graf}(F_2)$. Având în vedere că $\text{Graf}(F_2)$ este mulțime închisă, există $U(y)$, vecinătate deschisă a lui x_0 , și $W(y)$, vecinătate deschisă a lui y , astfel încât

$$\text{Graf}(F_2) \cap (U(y) \times W(y)) = \emptyset.$$

Rezultă că pentru orice $x \in U(y)$ avem

$$F_2(x) \cap W(y) = \emptyset. \quad (2.7)$$

Familia $\{W(y); y \in K\}$ este o acoperire deschisă a mulțimii compacte K și deci există o subacoperire finită $\{W(y_i); i = 1, 2, \dots, n\}$. Fie

$$W = \bigcup_{i=1}^n W(y_i).$$

Avem $K \subset W$, deci $F_1(x_0) \subset W \cup V$. Deoarece $W \cup V$ este deschisă iar F_1 este superior semicontinuă în x_0 , există U , vecinătate deschisă a lui x_0 , astfel încât

$$F_1(U) \subset W \cup V. \quad (2.8)$$

Punând

$$U_1 = U \cap \bigcap_{i=1}^n U(y_i),$$

din (2.7) și (2.8) obținem $F_1(U_1) \subset W \cup V$ și $F_2(U_1) \cap W = \emptyset$ deci $(F_1 \cap F_2)(U_1) \subset V$, ceea ce încheie demonstrația. \square

Corolarul 2.1 Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide și cu grafic închis. Dacă Y este spațiu compact atunci F este superior semicontinuă.

Demonstrație. Se aplică Teorema 2.7 (ii) cu $F_2(x) = Y$ pentru orice $x \in X$. \square

Pentru a obține proprietăți de semicontinuitate inferioară pentru $F_1 \cap F_2$, ipotezele sunt destul de severe și nu le vom prezenta aici. Problema 6.12 dă un exemplu când intersecția nu este inferior semicontinuă iar F_1 și F_2 au proprietăți destul de bune. Problema 6.8 arată că ipoteza de compactitate a lui Y în Corolarul 2.1 este esențială. Există multifuncții cu grafic închis și cu valori compacte care nu sunt superior semicontinue.

O altă proprietate a funcțiilor continue care se regăsește la multifuncțiile superior semicontinue este aceea că imaginea unei mulțimi compacte este compactă. Rezultatul nu este valabil pentru multifuncții inferior semicontinue. Există multifuncții inferior semicontinue cu valori compacte definite pe mulțimi compacte, care au mulțimea valorilor nemărginită. Vezi Problema 6.8.

Teorema 2.8 *Fie X un spațiu compact și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție superior semicontinuă cu valori nevide și compacte. Atunci mulțimea $F(X)$ este compactă.*

Demonstrație. Fie $\{D_i; i \in I\}$ o acoperire deschisă a lui $F(X)$. Deoarece $F(x)$ este compactă, pentru fiecare $x \in X$ există $n(x) \in \mathbf{N}$ încât

$$F(x) \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n(x)} D_{i_k}.$$

Să notăm membrul drept al incluziunii precedente cu $D(x)$. Deoarece F este superior semicontinuă, există $U(x)$, vecinătate deschisă a lui x , astfel încât

$$F(U(x)) \subset D(x).$$

Familia $\{U(x); x \in X\}$ este acoperire a lui X și, cum X este compact, există $p \in \mathbf{N}$ astfel încât

$$F(X) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} F(U(x_j)) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} D(x_j) = \bigcup_{1 \leq j \leq p} \bigcup_{1 \leq k \leq n(x_j)} D_{i_k}.$$

\square

În continuare avem în vedere Exemplul 2.2. Ne interesează modul în care proprietăți de continuitate ale funcției f și ale multifuncției U se transferă la multifuncțiile F și G definite de (2.1), respectiv (2.2).

Fie deci $U : X \rightsquigarrow Z$, $f : X \times Z \rightarrow Y$ și $G : X \rightsquigarrow Y$,

$$G(x) = \{f(x, u); u \in U(x)\}.$$

Propoziția 2.2 *Presupunem că X, Y și Z sunt spații metrice.*

(i) *Dacă multifuncția U este superior semicontinuuă cu valori nevide și compacte iar f este continuă atunci multifuncția G este superior semicontinuuă.*

(ii) *Dacă U are valori nevide și este inferior semicontinuuă iar f este continuă atunci G este inferior semicontinuuă.*

Demonstrație. (i) Fie $x_0 \in X$ și V o mulțime deschisă cu proprietatea $G(x_0) \subset V$. Mulțimea V este vecinătate pentru orice $f(x_0, u)$ cu $u \in U(x_0)$. Deoarece f este continuă, există η_u și δ_u astfel încât, dacă $(y, v) \in S(x_0, \eta_u) \times S(u, \delta_u)$, avem $f(y, v) \in V$. Deoarece $U(x_0)$ este compactă, există $\{S(u_i, \delta_{u_i}); i = 1, 2, \dots, n\}$ o acoperire a mulțimii $U(x_0)$. Având în vedere că multifuncția U este superior semicontinuuă, există $\eta_0 > 0$ astfel încât pentru orice $x \in S(x_0, \eta_0)$ avem

$$U(x) \subset \bigcup_{i=1}^n S(u_i, \delta_{u_i}).$$

Luând

$$\eta = \min\{\eta_0, \eta_{u_i}, i = 1, \dots, n\},$$

avem $G(x) \subset V$ pentru orice $x \in S(x_0, \eta)$, ceea ce arată că multifuncția G este superior semicontinuuă.

(ii) Vom folosi caracterizarea cu șiruri a semicontinuității inferioare dată de Teorema 2.4. Fie șirul (x_n) convergent la x și $y \in G(x)$. Există $u \in U(x)$ astfel încât $y = f(x, u)$. Deoarece multifuncția U este inferior semicontinuuă, există șirul (u_n) convergent la u astfel încât $y_n = f(x_n, u_n) \in F(x_n)$ și $y_n \rightarrow y$. Demonstrația este încheiată. \square

Continuăm cu Exemplul 2.3. Fie deci X și Y spații metrice, $G : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide, funcția $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$, funcția $h : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ definită prin

$$h(x) = \sup_{y \in G(x)} f(x, y)$$

și multifuncția $F : X \rightsquigarrow Y$ definită prin

$$F(x) = \{y \in G(x); h(x) = f(x, y)\}.$$

Propoziția 2.3

(i) *Presupunem că funcția f este inferior semicontinuuă pe $X \times Y$ și multifuncția G este inferior semicontinuuă în x_0 . Atunci funcția h este inferior semicontinuuă în x_0 .*

(ii) Presupunem că f este superior semicontinuuă pe $X \times Y$, G este superior semicontinuuă în x_0 și $G(x_0)$ este compactă. Atunci h este superior semicontinuuă în x_0 .

(iii) Dacă f este continuuă pe $X \times Y$, G este continuuă pe X și are valori compacte atunci h este continuuă iar F este superior semicontinuuă.

Demonstrație. (i) Fie $\varepsilon > 0$. Există $y_0 \in G(x_0)$ astfel încât

$$h(x_0) - \varepsilon/2 < f(x_0, y_0).$$

Deoarece f este inferior semicontinuuă în x_0 , există U_1 și V , vecinătăți pentru x_0 și respectiv y_0 , astfel încât pentru orice $x \in U_1$ și $y \in V$ avem

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) - \varepsilon/2.$$

Folosim acum faptul că multifuncția G este inferior semicontinuuă în x_0 și deducem că există U_2 , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $G(x) \cap V \neq \emptyset$ pentru $x \in U_2$. Fie $U = U_1 \cap U_2$. Pentru orice $x \in U$ există $y \in G(x)$ astfel încât

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) - \varepsilon/2 \geq h(x_0) - \varepsilon,$$

deci $h(x) \geq h(x_0) - \varepsilon$, ceea ce arată că h este inferior semicontinuuă.

(ii) Avem de arătat că pentru orice $\varepsilon > 0$ există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $h(x) \leq h(x_0) + \varepsilon$ pentru orice $x \in U$. Cum f este superior semicontinuuă, pentru orice $y \in V$ există $V(y)$, vecinătate deschisă a lui y , și $U(y)$, vecinătate a lui x_0 , astfel încât

$$f(x, z) \leq f(x_0, y) + \varepsilon$$

pentru orice $x \in U(y)$ și $z \in V(y)$. Deoarece mulțimea $G(x_0)$ este compactă, există n vecinătăți $V(y_i)$, $i = 1, \dots, n$, care o acoperă. Fie

$$V = \bigcup_{i=1}^n V(y_i).$$

Avem V deschisă, $G(x_0) \subset V$ și G superior semicontinuuă în x_0 . Prin urmare, există U_0 , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $G(x) \subset V$ pentru $x \in U_0$. Considerăm acum

$$U = U_0 \cap \bigcap_{i=1}^n U(y_i).$$

Când $x \in U$ și $y \in G(x)$ avem $y \in V$, deci există i astfel încât $y \in V(y_i)$. Acest fapt implică

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_i) + \varepsilon \leq h(x_0) + \varepsilon.$$

Obținem astfel $h(x) \leq h(x_0) + \varepsilon$ pentru orice $x \in U$, ceea ce trebuia demonstrat.

(iii) Prima parte rezultă combinând (i) cu (ii). Să arătăm că multifuncția F este superior semicontinuuă. Pentru aceasta, să observăm că F se scrie în forma

$$F(x) = F(x) \cap K(x),$$

unde multifuncția $K : X \rightsquigarrow Y$ este definită prin

$$K(x) = \{y \in Y; h(x) = f(x, y)\}.$$

Deoarece funcțiile f și h sunt continue rezultă că $\text{Graf}(K)$ este mulțime închisă. Este clar că F are valori nevide și deci putem aplica Teorema 2.6 (ii) pentru a deduce că multifuncția F este superior semicontinuuă. \square

Corolarul 2.2 *Fie X și Y spații metrice.*

(i) *Dacă $G : X \rightsquigarrow Y$ este o multifuncție inferior semicontinuuă cu valori nevide, atunci funcția*

$$(x, y) \mapsto d(y, G(x))$$

este superior semicontinuuă.

(ii) *Dacă $f : X \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ este superior semicontinuuă și Y este spațiu compact, atunci funcția*

$$x \mapsto \sup_{y \in Y} f(x, y)$$

este superior semicontinuuă.

Demonstrație. (i) Se aplică Propoziția 2.3 (i) unde în loc de X se ia $X \times Y$, în loc de f se ia funcția $(x, y, z) \mapsto -\rho(y, z)$ iar în loc de G se ia multifuncția $(x, y) \rightsquigarrow G(x)$.

(ii) Se aplică Propoziția 2.3 (ii) cu $G(x) = Y$ pentru orice $x \in X$. \square

În continuare studiem modul cum se transmit proprietățile de continuitate ale multifuncției $F : X \rightsquigarrow Y$ la multifuncțiile $\overline{F} : X \rightsquigarrow Y$ și $\text{conv}F : X \rightsquigarrow Y$ definite prin $\overline{F}(x) = \overline{F(x)}$ și respectiv $\text{conv}F(x) = \text{conv}(F(x))$. Precizăm că \overline{A} înseamnă închiderea mulțimii A iar $\text{conv}(A)$ notează înfășurătoarea convexă a mulțimii A .

Propoziția 2.4 *Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide.*

(i) *Multifuncția F este inferior semicontinuuă dacă și numai dacă multifuncția \overline{F} este inferior semicontinuuă.*

(ii) *Dacă Y este spațiu normal și F este superior semicontinuuă atunci \overline{F} este superior semicontinuuă.*

Demonstrație. (i) Afirmatia rezultă ușor având în vedere că, dacă D este deschisă în Y și A este o submulțime a lui Y , atunci $A \cap D \neq \emptyset$ dacă și numai dacă $\overline{A} \cap D \neq \emptyset$.

(ii) Fie $x_0 \in X$, V deschisă în Y astfel încât $\overline{F(x_0)} \subset V$. Deoarece Y este spațiu normal, există o mulțime deschisă D_1 astfel încât

$$F(x_0) \subset \overline{F(x_0)} \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D$$

(vezi [30, p.86]). Folosim acum faptul că F este superior semicontinuu pentru a deduce că există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $F(U) \subset D_1$. Este clar că

$$\overline{F(U)} \subset \overline{D_1} \subset D,$$

ceea ce încheie demonstrația. □

Multifuncția $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$, definită prin $F(x) = (x - 1, x + 1)$, nu este superior semicontinuu dar \overline{F} este superior semicontinuu. Deci reciproca de la (ii) nu este adevărată (vezi Problema 6.16). De asemenea condiția ca Y să fie normal este esențială. Problema 6.15 oferă un exemplu de multifuncție superior semicontinuu F pentru care \overline{F} nu este superior semicontinuu.

Propoziția 2.5 *Fie X spațiu topologic, Y spațiu normat și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide.*

(i) *Dacă F este inferior semicontinuu atunci $\text{conv}F$ este inferior semicontinuu.*

(ii) *Dacă F este superior semicontinuu și are valori compacte atunci $\text{conv}F$ este superior semicontinuu.*

Demonstrație. (i) Folosim Teorema 2.4 (ii). Fie deci $y \in (\text{conv}F)(x_0)$ și $V = S(y, \varepsilon)$. Există $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ în $[0, 1]$ cu $\sum \lambda_i = 1$ și g_1, \dots, g_n în $F(x_0)$ astfel încât $y = \sum \lambda_i g_i$. Fie $V_i = S(g_i, \varepsilon)$. Deoarece F este inferior semicontinuu în x_0 , există U_i , vecinătăți ale lui x_0 , astfel încât pentru $x \in U_i$ avem $F(x) \cap V_i \neq \emptyset$. Fie $U = \cap U_i$. Arătăm că dacă $x \in U$ atunci $\text{conv}F(x) \cap V \neq \emptyset$. Pentru aceasta fie $z_i \in F(x) \cap V_i$. Este clar că $z = \sum \lambda_i z_i$ satisface condițiile $z \in \text{conv}F(x)$ și $\|z - y\| < \varepsilon$, deci $z \in (\text{conv}F)(x) \cap V$. (ii) Vom folosi Teorema 2.5 (i) și faptul că $e(A, B) < \varepsilon$ implică

$$e(\text{conv}A, \text{conv}B) \leq \varepsilon.$$

Vezi Problema 6.9. □

Studiem acum modul cum se transmit proprietățile de semicontinuitate la compunerea multifuncțiilor. Precizăm că dacă $F : X \rightsquigarrow Y$ și $G : Y \rightsquigarrow Z$ sunt două multifuncții, definim multifuncția $G \circ F : X \rightsquigarrow Z$ prin

$$(G \circ F)(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y).$$

Propoziția 2.6 Fie X, Y, Z spații topologice, $F : X \rightsquigarrow Y$ și $G : Y \rightsquigarrow Z$ multifuncții stricte.

(i) Dacă F și G sunt inferior semicontinue atunci $G \circ F$ este inferior semicontinuu.

(ii) Dacă F și G sunt superior semicontinue atunci $G \circ F$ este superior semicontinuu.

Demonstrație. (i) Fie $x_0 \in X$, $y_0 \in F(x_0)$ și V deschisă în Z astfel încât $G(y_0) \cap V \neq \emptyset$. Deoarece multifuncția G este inferior semicontinuu în y_0 există W , vecinătate deschisă a lui y_0 , astfel încât $G(y) \cap V \neq \emptyset$ pentru oricare $y \in W$. Având în vedere că $F(x_0) \cap W \neq \emptyset$ și F este inferior semicontinuu în x_0 există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $F(x) \cap W \neq \emptyset$ pentru $x \in U$. Vom arăta că

$$(G \circ F)(x) \cap V \neq \emptyset$$

pentru $x \in U$. Intr-adevăr, pentru $x \in U$ există $y \in F(x) \cap W$, deci există $z \in G(y) \cap V$. Este clar că $z \in (G \circ F)(x)$, ceea ce încheie demonstrația punctului (i). Demonstrația punctului (ii) o lășăm ca exercițiu. \square

În cazul când X și Y sunt spații normate, se pot defini și alte concepte de continuitate pe care le vom discuta în continuare.

Definiția 2.3 Fie X, Y spații normate și $F : D \subset X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide. Spunem că F este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuu în $x_0 \in D$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$F(D \cap S(x_0, \delta)) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon).$$

Așadar, în Definiția 2.3 se iau mulțimi deschise V care includ $F(x_0)$ numai de forma $F(x_0) + S(0, \varepsilon)$. Este clar că această noțiune este mai generală decât cea introdusă în Definiția 2.1. Problema 6.10 dă un exemplu de multifuncție care este superior semicontinuu dar nu este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuu. Dacă $F(x_0)$ este compactă, cele două noțiuni sunt echivalente. Intr-adevăr, în acest caz pentru orice mulțime deschisă V cu $F(x_0) \subset V$ există $\varepsilon > 0$ astfel încât $F(x_0) + S(0, \varepsilon) \subset V$.

Definiția 2.4 Fie X și Y spații normate și $F : D \subset X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide. Spunem că F este $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuu în $x_0 \in D$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$F(x_0) \subset F(x) + S(0, \varepsilon)$$

pentru $x \in D \cap S(x_0, \delta)$.

De data aceasta noțiunea “ $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă” este mai restrictivă decât “inferior semicontinuă”. Intr-adevăr, presupunem că F este $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă în x_0 , luăm $y_0 \in F(x_0)$, V o vecinătate a lui y_0 , $\varepsilon > 0$ astfel încât $S(y_0, \varepsilon) \subset V$ și $\delta > 0$ din Definiția 2.4. Dacă $x \in S(x_0, \delta) \cap D$, există $y_1 \in S(0, \varepsilon)$ și $y_2 \in F(x)$ astfel încât $y_0 = y_1 + y_2$. Deci $y_2 \in F(x) \cap S(y_0, \varepsilon)$, ceea ce arată că $F(x) \cap V \neq \emptyset$ pentru $x \in S(x_0, \delta)$.

Cele două noțiuni devin echivalente când $F(x_0)$ este compactă. Pentru a demonstra aceasta, presupunem că F este inferior semicontinuă în x_0 , fixăm $\varepsilon > 0$, acoperim $F(x_0)$ cu familia

$$\{S(y_i, \varepsilon/2); i = 1, \dots, n\}, \quad y_i \in F(x_0),$$

considerăm δ_i astfel încât

$$F(x) \cap S(y_i, \varepsilon/2) \neq \emptyset$$

pentru $x \in S(x_0, \delta_i)$ și luăm

$$\delta = \min\{\delta_i; i = 1, \dots, n\}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Multifuncția $F : [0, 1] \rightsquigarrow \mathbf{R}^2$ definită prin $F(x) = \{(t, xt); t > 0\}$ este inferior semicontinuă dar nu este $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă după cum arată Problema 6.7.

Să prezentăm acum noțiunea de multifuncție superior hemicontinuă. Fie Y spațiu normat, A o submulțime nevidă a lui Y și

$$\sigma(A, y^*) = \sup\{\langle y^*, y \rangle; y \in A\}, \quad y^* \in Y^*.$$

Funcția $y^* \rightarrow \sigma(A, y^*)$ pentru $y^* \in Y^*$ se numește *funcția suport* a mulțimii A .

Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție tare-slab superior semicontinuă, adică F este superior semicontinuă când considerăm pe X topologia tare și pe Y topologia slabă. Fie $y^* \in Y^*$, $x_0 \in X$ și $\varepsilon > 0$. Este clar că

$$V = \{y \in Y; \langle y^*, y \rangle < \sigma(F(x_0), y^*) + \varepsilon\}$$

este o mulțime slab deschisă ce conține $F(x_0)$. Există deci o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $F(U) \subset V$. Aceasta implică faptul că pentru $x \in U$ avem

$$\sigma(F(x), y^*) \leq \sigma(F(x_0), y^*) + \varepsilon,$$

ceea ce spune că funcția $x \mapsto \sigma(F(x), y^*)$ este superior semicontinuă în x_0 . Acest fapt conduce la

Definiția 2.5 Fie X și Y spații normate și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide. Spunem că F este *superior hemicontinuă* în x_0 dacă pentru fiecare $y^* \in Y^*$ funcția

$$x \mapsto \sigma(F(x), y^*)$$

este superior semicontinuă în x_0 .

Am demonstrat mai sus că dacă F este tare–slab superior semicontinuă atunci este superior hemicontinuă. Reciproca are loc în condiții suplimentare asupra lui F și anume atunci când F are valori convexe și slab compacte.

2.3 Incluziuni diferențiale pe mulțimi închise

Incepem această secțiune cu o teoremă de convergență, utilă în stabilirea existenței soluțiilor unor incluziuni diferențiale prin metode aproximative.

Teorema 2.9 Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție superior hemicontinuă cu valori convexe și închise, X și Y fiind spații Banach. Fie I un interval în \mathbf{R} și fie șirurile de funcții măsurabile $x_n : I \rightarrow X$ și $y_n : I \rightarrow Y$ satisfăcând condițiile:

- (i) Pentru aproape toți $t \in I$ și pentru orice V , vecinătate a originii în $X \times Y$, există $n_0 = n_0(t, V)$ astfel încât pentru $n \geq n_0$ avem

$$(x_n(t), y_n(t)) \in \text{Graf}(F) + V.$$

- (ii) Șirul (x_n) converge aproape peste tot (pe scurt, a.p.t.) la o funcție $x : I \rightarrow X$.

- (iii) Șirul $(y_n) \in L^1(I, Y)$ și converge slab la $y \in L^1(I, Y)$.

In aceste condiții, pentru aproape toți $t \in I$ avem $(x(t), y(t)) \in \text{Graf}(F)$.

Demonstrație. Deoarece (y_n) converge slab în $L^1(I, Y)$ la y , există un șir de combinații convexe de forma

$$v_n = \sum_{i \geq n} a_n^i y_i \in \text{conv}\{y_i; i \geq n\}$$

astfel încât v_n converge tare la y . Există deci un subșir (notat tot cu v_n) astfel încât $v_n(t) \rightarrow y(t)$ a.p.t. $t \in I$. Fie acum $t \in I$ astfel încât $x_n(t) \rightarrow x(t)$, $v_n(t) \rightarrow y(t)$ și are loc (i). Vom arăta că $y(t) \in F(x(t))$. Pentru aceasta, fixăm $y^* \in Y^*$ astfel încât $\sigma(F(x(t)), y^*) < \infty$ și fie $\lambda > \sigma(F(x(t)), y^*)$. Deoarece F este superior

hemicontinuă, există U , vecinătate a lui 0 în X , astfel încât $\sigma(F(u), y^*) < \lambda$ pentru $u \in x(t) + U$. Fie k_0 astfel încât pentru $n \geq k_0$ avem

$$x_n(t) \in x(t) + \frac{1}{2}U.$$

Din (i), dacă fixăm $\gamma > 0$, există $n_0 \geq k_0$ și $(u_n, w_n) \in \text{Graf}(F)$ astfel încât $u_n \in x_n(t) + \frac{1}{2}U$ și

$$\|y_n(t) - w_n\| \leq \gamma$$

pentru $n \geq n_0$. Obținem $u_n \in x(t) + U$ și

$$\langle y_n(t), y^* \rangle \leq \langle w_n, y^* \rangle + \gamma \|y^*\| \leq \sigma(F(u_n), y^*) + \gamma \|y^*\| \leq \lambda + \gamma \|y^*\|.$$

Multiplicând inegalitatea cu a_n^i (vezi definiția lui v_n) și sumând obținem

$$\langle v_n(t), y^* \rangle \leq \lambda + \gamma \|y^*\|$$

și apoi

$$\langle y(t), y^* \rangle \leq \lambda + \gamma \|y^*\|.$$

Facem $\lambda \rightarrow \sigma(F(x(t)), y^*)$ și $\gamma \rightarrow 0$ și deducem

$$\langle y(t), y^* \rangle \leq \sigma(F(x(t)), y^*).$$

Deoarece $F(x(t))$ este convexă și închisă obținem $y(t) \in F(x(t))$, ceea ce trebuia demonstrat.

Amintim că pentru o mulțime A convexă și închisă într-un spațiu local convex separat Y avem

$$A = \{y \in Y; \langle y, y^* \rangle \leq \sigma(A, y^*), \forall y^* \in Y^*\},$$

fapt ușor de dovedit folosind o teoremă de separare a mulțimilor convexe prin hiperplane [79, p.111]. \square

Să aplicăm Teorema 2.7 la obținerea unor rezultate de existență pentru incluziuni diferențiale pe mulțimi închise. Să considerăm incluziunea diferențială

$$x'(t) \in F(x(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.9}$$

unde $F : D \rightsquigarrow \mathbf{R}^n$ este o multifuncție cu valori nevide, D fiind o submulțime a lui \mathbf{R}^p . Prin soluție a incluziunii diferențiale (2.9) înțelegem o funcție $x : [0, T] \rightarrow D$ absolut continuă și care satisface (2.9) aproape peste tot.

Teoria incluziunilor diferențiale își are originea în 1936 prin lucrările lui André Marchaud [63] și Stanisław K. Zaremba [100]. Noțiunea de soluție utilizată de ei

diferă de cea dată mai sus. În 1961, Tadeusz Ważewski [98] a demonstrat că cele două noțiuni de soluție sunt echivalente.

Problema care dorim să o discutăm în continuare este cea a existenței soluțiilor lui (2.9) în cazul când D este mulțime închisă.

Spunem că D este *domeniu de viabilitate* pentru incluziunea diferențială (2.9) dacă pentru orice $x_0 \in D$ există o soluție a lui (2.9) cu $x(0) = x_0$. Chiar dacă F este funcție, problema nu se încadrează în teoria clasică de tip Peano. Este clar că va fi importantă comportarea lui F în punctele din $\text{Fr}(D)$. Primul rezultat semnificativ în această direcție aparține lui Mitio Nagumo [71] în 1942, rezultat ce dă o condiție necesară și suficientă de existență pe mulțimi închise în cazul când F este funcție continuă. Condiția la care facem referire, numită *condiție de tangentă*, folosește noțiunea de con tangent în sensul lui Bouligand, noțiune pe care o vom defini în continuare. Pentru detalii și rezultate legate de conul tangent al lui Bouligand, precum și alte conuri tangente, trimitem la [101].

Fie X un spațiu normat și $D \subset X$ o mulțime nevidă. Conul tangent în sensul lui Bouligand la D în punctul $x \in D$ este mulțimea

$$T_D(x) = \{v; \liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} d(x + hv, D) = 0\}.$$

Se verifică ușor că $T_D(x)$ este con închis iar dacă $x \in \text{int}(D)$ atunci $T_D(x) = X$.

Rezultatul lui Nagumo afirmă că dacă F este o funcție continuă și D este închisă, atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca D să fie domeniu de viabilitate pentru (2.9) este ca să fie îndeplinită condiția de tangentă

$$F(x) \in T_D(x), \quad \forall x \in D.$$

Pentru cazul când F este multifuncție, avem următorul rezultat stabilit de Jerrold W. Bebernes și Jerry D. Schuur [13] în 1970.

Teorema 2.10 *Fie $D \subset \mathbf{R}^p$ o mulțime închisă și $F : D \rightsquigarrow \mathbf{R}^p$ o multifuncție superior semicontinuă cu valori nevide compacte și convexe. Atunci D este domeniu de viabilitate pentru incluziunea diferențială (2.9) dacă și numai dacă este îndeplinită condiția de tangentă*

$$F(x) \cap T_D(x) \neq \emptyset, \quad \forall x \in D. \quad (2.10)$$

Demonstrație. Să arătăm mai întâi că (2.10) este necesară ca D să fie domeniu de viabilitate pentru (2.9). Pentru aceasta, să observăm că, deoarece F este superior semicontinuă, există un șir (t_n) cu $t_n \rightarrow 0$, $t_n > 0$, astfel încât pentru $t \leq t_n$ avem

$$F(x(t)) \subset F(x_0) + S(0, 1/2n),$$

unde $x(\cdot)$ este o soluție pentru (2.9) cu $x(0) = x_0$, x_0 fiind fixat în D . Avem așadar

$$x_0 + t_n \left(\frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} x'(s) ds \right) \in D.$$

Din cauza convexității lui $F(x_0)$ avem

$$w_n = \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} x'(s) ds \in F(x_0) + B(0, 1/2n).$$

Prin urmare w_n este de forma $v_n + p_n$ cu $v_n \in F(x_0)$ și $p_n \rightarrow 0$. Deoarece $F(x_0)$ este compactă, $v_n \rightarrow v \in F(x_0)$ (eventual pe un subșir) și deci

$$x_0 + t_n(v + v_n - v + p_n) \in D.$$

Acest fapt implică $v \in T_D(x_0)$ și deci $v \in F(x_0) \cap T_D(x_0)$. Să presupunem acum că are loc condiția de tangență (2.10), să fixăm un $x_0 \in D$ și să arătăm că există o soluție pentru (2.9) cu $x(0) = x_0$. Fie $r > 0$ și $K = D \cap B(x_0, r)$. Este clar că mulțimea K este compactă și deci $F(K)$ este mărginită (chiar compactă după cum rezultă din Problema 2.8). Există $L > 0$ astfel încât $\|y\| \leq L$ pentru $y \in F(x)$ cu $x \in K$. Vom arăta că există o soluție pentru (2.9) pe $[0, T]$ unde $T = r/(L + 1)$. Ideea este de a construi un șir de *soluții aproximative* și apoi, folosind Teorema 2.9 să obținem soluția cerută. Prezentăm în continuare modul de construcție a unui șir de soluții aproximative. Fie $n = 1, 2, \dots$. Din condiția de tangență, pentru fiecare $y \in D$ există $h_y < 1/n$ și $v_y \in F(y)$ astfel încât

$$d(y + h_y v_y, D) < h_y/2n.$$

Considerăm mulțimile

$$V(y) = \{x \in \mathbf{R}^p; d(x + h_y v_y, D) < h_y/2n\},$$

care sunt vecinătăți deschise ale lui y . Există deci $S(y, \eta_y) \subset V(y)$ cu $\eta_y < 1/n$. Mulțimea compactă K poate fi acoperită de q astfel de sfere, $S(y(j), \eta_{y(j)})$. Pentru simplitate, să punem $\eta_j = \eta_{y(j)}$, $h_j = h_{y(j)}$, $v_j = v_{y(j)}$ și $h = \min\{h_j; j = 1, \dots, q\}$. Fie acum $x \in K$. Există j astfel încât $x \in S(y_j, \eta_j) \subset V(y_j)$ și deci există $x_j \in D$ astfel încât

$$\|v_j - \frac{x_j - x}{h_j}\| \leq \frac{1}{h_j} d(x + h_j v_j, D) + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n}.$$

Să notăm $u_j = (x_j - x)/h_j$. Am demonstrat așadar că pentru orice $x \in K$ există $h' \in [h, 1/n]$ și $u \in X$ astfel încât următoarele proprietăți sunt satisfăcute:

- (i) $x + h'u \in D$; $u \in F(K) + B(0, 1)$;

(ii) Există $y \in D$, $v \in F(y)$ cu $\|x - y\| \leq 1/n$ și $\|u - v\| \leq 1/n$.

Vom nota în continuare $B = B(0, 1)$ și $C = F(K) + B$. Aplicăm această schemă pentru x_0 în loc de x și deducem că există $h_0 \in [h, 1/n]$ și $u_0 \in C$ astfel încât $x_1 = x_0 + h_0 u_0 \in D$ și

$$(x_0, u_0) \in \text{Graf}(F) + \frac{1}{n}B \times B.$$

Mai mult, $x_1 - x_0 \in h_0 C$, deci $\|x_1 - x_0\| \leq h_0(L + 1)$, ceea ce implică $\|x_1 - x_0\| \leq r$ dacă $h_0 \leq T$, deci $x_1 \in K$. Repetăm procedeul și deducem că există $h_1 \in [h_0, 1/n]$ și $u_1 \in C$ astfel încât $x_2 = x_1 + h_1 u_1 \in D$,

$$(x_1, u_1) \in \text{Graf}(F) + \frac{1}{n}B \times B,$$

și $x_2 - x_0 \in (h_0 + h_1)C$. Prin urmare, $\|x_2 - x_0\| \leq (h_0 + h_1)(L + 1)$ și $\|x_2 - x_0\| \leq r$ dacă $h_0 + h_1 \leq T$. Am obținut așadar că $x_2 \in K$. Se continuă procedeul și se observă că, deoarece $h_j \in [h, 1/n]$, există un întreg m astfel încât

$$h_0 + h_1 + \dots + h_m \leq T < h_0 + h_1 + \dots + h_{m+1}.$$

Punem

$$t_0 = 0, t_1 = h_0, \dots, t_m = h_0 + \dots + h_m, t_{m+1} = T$$

și definim *soluția aproximativă* $x_n : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^p$ prin

$$x_n(t) = x_{i-1} + (t - t_{i-1})u_{i-1}$$

pentru $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, m + 1$. Să observăm că pentru $t \in (t_{i-1}, t_i)$ avem $|t - t_{i-1}| < 1/n$. De asemenea, deoarece

$$(x_{i-1}, u_{i-1}) \in \text{Graf}(F) + \frac{1}{n}B \times B,$$

pentru $t \in (t_{i-1}, t_i)$ există $(y, v) \in \text{Graf}(F)$ astfel încât

$$\|x'_n(t) - v\| = \|u_{i-1} - v\| \leq \frac{1}{n}$$

și

$$\|x_n(t) - y\| = \|x_n(t) - x_{i-1}\| + \|x_{i-1} - y\| \leq \frac{1}{n}\|u_{i-1}\| + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}(L + 2).$$

Aici am folosit faptul că $u_{i-1} \in C$ și deci $\|u_{i-1}\| \leq L + 1$. Am demonstrat așadar că pentru aproape toți $t \in [0, T]$ avem

$$(x_n(t), x'_n(t)) \in \text{Graf}(F) + \varepsilon(n)B \times B$$

cu $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$, deci condiția (i) din Teorema 2.9 cu $y_n = x'_n$ este îndeplinită. Avem, de asemenea, $\|x'_n(t)\| \leq L + 1$ a.p.t. și $x_n(t) \in \text{conv}(K)$ pentru orice $t \in [0, T]$. Din Teorema Arzelà-Ascoli deducem că, eventual pe un subsir, $x_n(\cdot)$ converge uniform pe $[0, T]$ la o funcție continuă $x(\cdot)$. Din Teorema lui Alaoglu [79, p.145] deducem că, eventual pe un subsir, $x'_n(\cdot)$ converge slab-stelat în $L^\infty(0, T; \mathbf{R}^n)$ și deci slab în $L^1(0, T; \mathbf{R}^n)$ la o funcție y . În sfârșit, deoarece

$$x_n(t) - x_n(s) = \int_s^t x'_n(\tau) d\tau,$$

avem

$$x(t) - x(s) = \int_s^t y(\tau) d\tau,$$

deci $y(t) = x'(t)$ a.p.t.

Prin urmare, toate ipotezele din Teorema 2.9 sunt îndeplinite și deci $x'(t) \in F(x(t))$ a.p.t. În plus, este evident că $x(0) = x_0$. În sfârșit, deoarece $|t - t_{i-1}| \leq 1/n$, $\|u_{i-1}\| \leq L + 1$, $x_{i-1} \in D$ și mulțimea D este închisă, rezultă că $x(t) \in D$ pentru orice $t \in [0, T]$. Demonstrația este încheiată. \square

Să remarcăm că ipoteza ca F să aibă valori convexe este esențială. Fie $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = \{-1\}$ pentru $x > 0$, $F(0) = \{-1, 1\}$ și $F(x) = \{1\}$ pentru $x < 0$. Multifuncția F este superior semicontinuă, are valori compacte, condiția de tangență este verificată dar incluziunea diferențială $x'(t) \in F(x(t))$, $x(0) = 0$, nu are soluție. Într-adevăr, $x'(t) = -1$ dacă $x(t) > 0$, deci $x(t) = -t$ dacă $x(t) > 0$, ceea ce este absurd.

2.4 Selecții, parametrizări, aproximări

Fiind dată o multifuncție $F : X \rightsquigarrow Y$, o *selecție* a sa este o funcție care asociază fiecărui $x \in X$ un element din $F(x)$. Existența unei selecții este asigurată de Axioma alegerii. În probleme concrete interesează existența unor selecții cu anumite proprietăți. Problema 6.20 oferă un exemplu (Problema mariajului) în care se pune problema existenței selecțiilor injective. Dându-se X și Y două mulțimi nevide și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide și finite, atunci condiția

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(F(A)), \quad (2.11)$$

pentru orice mulțime finită $A \subset X$, este suficientă pentru existența selecțiilor injective. Ca model, considerăm următoarea problemă a mariajului, numită astfel de Hermann Weyl. Fie X mulțimea bărbaților (necăsătoriți), Y mulțimea femeilor (necăsătorite) și $F(x)$ mulțimea prietenelor bărbatului x . Condiția (2.11) spune că, pentru fiecare grup de bărbați, numărul lor nu depășește numărul femeilor prietene cu ei. De exemplu, nu este posibil ca doi bărbați să aibă câte o singură prietenă și aceea comună. În această situație, fiecare bărbat se poate căsători cu una din prietenele sale. Vezi Problema 6.20 pentru rezolvare.

În continuare vom cerceta existența selecțiilor cu anumite proprietăți de continuitate. Un alt aspect este acela de a se studia proprietățile unor selecții obținute după reguli prescrise. De exemplu, dacă Y este spațiu Hilbert și $F : X \rightsquigarrow Y$ are valori nevide convexe și închise, atunci se consideră *selecția minimală* $f : X \rightarrow Y$ definită prin $f(x) = m(F(x))$, unde $m(F(x))$ notează elementul de normă minimă din mulțimea convexă și închisă $F(x)$.

Teorema 2.11 *Dacă X este spațiu metric, Y este spațiu Hilbert și $F : X \rightsquigarrow Y$ este o multifuncție continuă cu valori nevide convexe și închise, atunci selecția minimală $f : X \rightarrow Y$ definită prin $f(x) = m(F(x))$ este continuă.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in X$ și $\varepsilon > 0$ fixați. Vom demonstra mai întâi că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru $x \in U$ avem

$$\|f(x)\|^2 \leq \|f(x_0)\|^2 + \varepsilon. \quad (2.12)$$

Pentru aceasta, vom folosi proprietatea multifuncției F de a fi inferior semicontinuu. Schimbând eventual ε , vom demonstra de fapt că pentru $\varepsilon > 0$ există o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru $x \in U$ avem

$$\|f(x)\| \leq \|f(x_0)\| + \varepsilon.$$

Pentru a demonstra acest lucru începem prin a observa că, pentru $\varepsilon > 0$, există $y_0 \in F(x_0)$ astfel încât

$$\|y_0\| < \|f(x_0)\| + \varepsilon.$$

Aplicăm acum Teorema 2.4 (ii) cu $V = S(0, \|f(x_0)\| + \varepsilon)$ și deducem că există U , vecinătate a lui x_0 , astfel încât pentru orice $x \in U$ avem

$$F(x) \subset S(0, \|f(x_0)\| + \varepsilon).$$

De aici rezultă

$$m(F(x)) \in S(0, \|f(x_0)\| + \varepsilon)$$

pentru $x \in U$, ceea ce trebuia demonstrat.

Continuăm demonstrația observând că, dacă $f(x_0) = 0$, atunci (2.12) implică faptul că f este continuă în x_0 . Dacă $\|f(x_0)\| > 0$, folosind proprietatea multifuncției F de a fi superior semicontinuă, deducem că există W , vecinătate a lui x_0 , astfel încât pentru $x \in W$ există $y_x \in F(x_0)$ cu

$$\|f(x) - y_x\| \leq \varepsilon / \|f(x_0)\|. \quad (2.13)$$

Intr-adevăr, folosind Definiția 2.1 cu

$$V = F(x_0) + S(0, \varepsilon / \|f(x_0)\|)$$

deducem existența unei vecinătăți W a lui x_0 astfel încât pentru $x \in W$ avem

$$F(x) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon / \|f(x_0)\|),$$

deci

$$f(x) \in F(x_0) + S(0, \varepsilon / \|f(x_0)\|),$$

și ca atare are loc (2.13). Din (2.13) și inegalitatea lui Cauchy deducem

$$\begin{aligned} \langle f(x_0), f(x) \rangle &= \langle f(x_0), y_x \rangle + \langle f(x_0), f(x) - y_x \rangle \geq \\ &\langle f(x_0), y_x \rangle - \varepsilon. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, o caracterizare variațională a elementului de cea mai bună aproximare pentru o mulțime convexă și închisă în spații Hilbert dă

$$\langle f(x_0), y - f(x_0) \rangle \geq 0$$

pentru orice $y \in F(x_0)$, ceea ce implică

$$\langle f(x_0), f(x) - f(x_0) \rangle \geq -\varepsilon. \quad (2.14)$$

În sfârșit, deoarece

$$\|f(x)\|^2 = \|f(x_0)\|^2 + \|f(x_0) - f(x)\|^2 + 2\langle f(x_0), f(x) - f(x_0) \rangle,$$

din (2.12) și (2.14) avem

$$\|f(x_0) - f(x)\|^2 - 2\varepsilon \leq \|f(x_0) - f(x)\|^2 + 2\langle f(x_0), f(x) - f(x_0) \rangle \leq \varepsilon,$$

deci

$$\|f(x) - f(x_0)\|^2 \leq 3\varepsilon.$$

Demonstrația este încheiată. \square

Vom aplica Teorema 2.11 pentru stabilirea unui rezultat privind problema parametrizării unei multifuncții. Spunem că multifuncția $F : X \rightsquigarrow Y$ este parametrizată dacă se poate pune în evidență o mulțime U și o funcție $f : X \times U \rightarrow Y$ astfel încât

$$F(x) = f(x, U).$$

Să observăm că, dacă F are o parametrizare continuă, fixând $u_0 \in U$, obținem că funcția $x \mapsto f(x, u_0)$ este o selecție continuă a lui F . Așadar, problema parametrizării este mai dificilă decât cea a existenței selecțiilor continue.

Corolarul 2.3 Fie X un spațiu metric și $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}^n$ o multifuncție continuă cu valori nevide convexe și compacte. Atunci există o funcție continuă $f : X \times B \rightarrow \mathbf{R}^n$ astfel încât pentru orice $x \in X$ avem $F(x) = f(x, B)$, unde B este sfera unitate închisă de centru 0 și rază 1 din X .

Demonstrație. Notăm

$$p(x) = \max\{1, \inf_{y \in F(x)} \|y\|\}$$

și definim funcția $f : X \times B \rightarrow \mathbf{R}^n$ prin

$$f(x, u) = \pi(F(x), p(x)u)$$

unde $\pi(F(x), p(x)u)$ notează proiecția elementului $p(x)u$ pe mulțimea convexă și compactă $F(x)$. Este ușor de văzut că $F(x) = f(x, B)$ pentru $x \in X$. Mai rămâne de arătat că funcția f definită mai sus este continuă. Pentru aceasta se utilizează Teorema 2.11 pentru a deduce că funcția p este continuă și apoi Teorema 2.5. \square

Revenind la selecții, să observăm că existența selecțiilor continue este tipică multifuncțiilor inferior semicontinue. Există multifuncții superior semicontinue cu valori convexe și compacte care nu au selecție continuă. De exemplu, multifuncția $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = \{-1\}$ pentru $x < 0$, $F(x) = [-1, 1]$ pentru $x = 0$ și $F(x) = \{1\}$ pentru $x > 0$ nu are selecție continuă.

Vom vedea în continuare că dacă multifuncția $F : X \rightsquigarrow Y$ are o selecție continuă într-o vecinătate a unui punct x_0 , atunci ea este inferior semicontinuă în x_0 .

Definiția 2.6 Spunem că multifuncția strictă $F : X \rightsquigarrow Y$ este local selecționabilă în $x_0 \in X$ dacă pentru $y_0 \in F(x_0)$ există o vecinătate deschisă U a lui x_0 și o funcție continuă $f : U \rightarrow Y$ astfel încât $f(x_0) = y_0$ și $f(x) \in F(x)$ pentru orice $x \in U$.

Propoziția 2.7 *Dacă multifunția F este local selecționabilă în x_0 atunci ea este inferior semicontinuă în x_0 .*

Demonstrație. Fie $y_0 \in F(x_0)$ și V o vecinătate deschisă a lui y_0 . Trebuie să arătăm că există o vecinătate W a lui x_0 astfel încât pentru $x \in W$ avem $F(x) \cap V \neq \emptyset$. Fie $f : U \rightarrow Y$ o selecție locală, continuă, cu $F(x_0) = y_0$ și fie $W \subset U$ o vecinătate deschisă a lui x_0 astfel încât $f(x) \in V$ pentru $x \in W$. Avem $f(x) \in F(x) \cap V$ pentru orice $x \in W$ și demonstrația este încheiată. \square

De asemenea, folosind partiția unității, în anumite condiții existența locală a selecțiilor continue asigură existența unei selecții continue.

Propoziția 2.8 *Fie X un spațiu metric, Y un spațiu liniar topologic și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifunție cu valori nevide și convexe. Presupunem că F este local selecționabilă în orice punct $x_0 \in X$. Atunci F are o selecție continuă.*

Demonstrație. Fiecărui $x \in X$ îi asociem un element $y \in F(x)$ și o selecție continuă (local) $f : U_x \rightarrow Y$, U_x fiind o vecinătate deschisă a lui x . Familia $\{U_x; x \in X\}$ este o acoperire deschisă a lui X . Fie $\{V_i; i \in I\}$ o rafinare deschisă local finită a sa. Pentru fiecare $i \in I$ există $x(i) \in X$ astfel încât $V_i \subset U_{x(i)}$. Considerăm $\{p_i; i \in I\}$ o partiție a unității subordonată familiei $\{V_i; i \in I\}$ și definim

$$f(u) = \sum_{i \in I} p_i(u) f_{x(i)}(u).$$

Dacă i este astfel încât $p_i(u) > 0$ atunci $u \in V_i \subset U_{x(i)}$ și deci $f_{x(i)}(u) \in F(u)$. Cum $F(u)$ este convexă deducem că $f(u) \in F(u)$ pentru orice $u \in X$. \square

Demonstrăm acum rezultatul central din teoria selecțiilor continue obținut de Ernest Michael [65] [66] în 1956.

Teorema 2.12 (Michael) *Fie X un spațiu metric, Y un spațiu Banach și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifunție inferior semicontinuă cu valori nevide convexe și închise. Atunci F are o selecție continuă.*

Pentru demonstrație avem nevoie de

Lema 2.1 *Fie X un spațiu metric, Y un spațiu normat și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifunție inferior semicontinuă cu valori nevide și convexe. Atunci, pentru $r > 0$ există o funcție continuă $f : X \rightarrow Y$ astfel încât $d(f(x), F(x)) < r$, pentru orice $x \in X$.*

Demonstrație. Pentru fiecare $y \in Y$ fie

$$U_y = \{x \in X; d(y, F(x)) < r\}.$$

Mulțimile U_y sunt deschise deoarece

$$U_y = \{x \in X; F(x) \cap S(y, r) \neq \emptyset\}$$

iar F este inferior semicontinuă. Familia $\mathcal{U} = \{U_y; y \in Y\}$ este o acoperire deschisă a lui X . Fie $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ o rafinare deschisă local finită a sa și $\{p_i; i \in I\}$ o partiție a unității subordonată ei. Deci pentru fiecare $i \in I$ există $y(i)$ astfel încât $V_i \subset U_{y(i)}$. Definim

$$f(x) = \sum_{i \in I} p_i(x)y(i).$$

Este clar că f este continuă. În plus, dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in V_i \subset U_{y(i)}$ și deci $d(y(i), F(x)) < r$. De aici, folosind convexitatea lui $F(x)$, deducem că $d(f(x), F(x)) < r$. \square

Demonstrația Teoremei 2.12. Vom construi un șir de funcții continue $f_i : X \rightarrow Y$ astfel încât pentru $x \in X$ să avem

- (a) $\|f_k(x) - f_{k-1}(x)\| < 2^{-k+2}, k \geq 2;$
- (b) $d(f_k(x), F(x)) < 2^{-k}, k \geq 1.$

În acest caz, (a) implică faptul că șirul de funcții (f_n) este uniform Cauchy și deci este convergent la o funcție continuă $f : X \rightarrow Y$, iar din (b) rezultă imediat că $f(x) \in F(x)$ pentru orice $x \in X$. Existența lui f_1 satisfăcând (b) rezultă din Lema 2.1. Presupunem că am construit f_1, f_2, \dots, f_n și construim f_{n+1} care să satisfacă (a) și (b). Pentru aceasta, definim multifuncția $F_{n+1} : X \rightsquigarrow Y$ prin

$$F_{n+1}(x) = \{y \in F(x); \|y - f_n(x)\| < 2^{-n}\}.$$

Din ipoteza inductivă, $F_{n+1}(x) \neq \emptyset$ pentru $x \in X$. Arătăm că F_{n+1} este inferior semicontinuă. Pentru aceasta, fie V deschisă în Y și fie

$$U = \{x \in X; F_{n+1}(x) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Arătăm că U este deschisă. Fie $x_0 \in U$ și $y_0 \in F_{n+1}(x_0) \cap V$. Luăm λ cu proprietatea

$$\|y_0 - f_n(x_0)\| < \lambda < 2^{-n}$$

și considerăm mulțimea

$$Q = \{y \in Y; \|y - f_n(x_0)\| < \lambda\},$$

care este evident nevidă. Fie

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x \in X; F(x) \cap V \cap Q \neq \emptyset\} \\ U_2 &= \{x \in X; \|f_n(x) - f_n(x_0)\| < 2^{-n} - \lambda\}. \end{aligned}$$

Mulțimea U_1 este deschisă pentru că F este inferior semicontinuă. Mulțimea U_2 este deschisă pentru că f_n este continuă. Este ușor de verificat faptul că $x_0 \in U_1 \cap U_2 \subset U$, deci multifuncția F_{n+1} este inferior semicontinuă.

Aplicăm Lema 2.1 multifuncției F_{n+1} și determinăm $f_{n+1} : X \rightarrow Y$ cu proprietatea

$$d(f_{n+1}(x), F_{n+1}(x)) < 2^{-n-1}, \quad \forall x \in X.$$

Obținem

$$\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\| < 2^{-n-1} + 2^{-n} = 2^{-n+1},$$

care implică (a) și

$$d(f_{n+1}(x), F(x)) \leq d(f_{n+1}(x), F_{n+1}(x)) < 2^{-n-1},$$

care implică (b). Demonstrația este încheiată. \square

Corolarul 2.4 *Fie multifuncția F ca în Teorema 2.12. Fie $A \subset X$ o mulțime închisă și fie $\varphi : A \rightarrow Y$ o funcție continuă cu $\varphi(x) \in F(x)$ pentru orice $x \in A$. Atunci φ poate fi extinsă la o selecție continuă a lui F pe întreg spațiul. În particular, dacă se fixează x_0 și y_0 astfel încât $y_0 \in F(x_0)$, atunci există o selecție continuă f a lui F cu $f(x_0) = y_0$.*

Demonstrație. Se consideră multifuncția

$$G(x) = \begin{cases} F(x) & \text{dacă } x \notin A \\ \{\varphi(x)\} & \text{dacă } x \in A \end{cases}$$

și se aplică Teorema 2.12. Vezi Problema 6.23 din care rezultă că G este inferior semicontinuă. \square

Să remarcăm faptul că Teorema 2.12 a lui Michael are loc și dacă X este spațiu compact. În demonstrație se folosește faptul că orice acoperire local finită are o partiție a unității subordonată ei. De asemenea, Y poate fi spațiu local convex metrizabil.

Să prezentăm o aplicație simplă a Teoremei 2.12. Este un exercițiu simplu faptul că dacă X și Y sunt spații Hilbert, un operator surjectiv $T \in L(X, Y)$ are invers la dreapta un operator $S \in L(Y, X)$. Să schițăm demonstrația acestui fapt. Notăm cu $X_1 = \ker T$ și cu $X_2 = X_1^\perp$. Definim operatorul S astfel: pentru $y \in Y$, luăm $x \in X$ cu proprietatea că $Tx = y$ și $\|x\| \leq \gamma\|y\|$, unde γ este o constantă dată de Teorema aplicațiilor deschise (vezi Capitolul 3). Elementul $x \in X$ se scrie în mod unic ca $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in X_1$ și $x_2 \in X_2$. Definim $S(y) = x_2$. Se verifică ușor că operatorul S este bine definit liniar și mărginit. Pentru ultima proprietate observăm că

$$\|S(y)\| = \|x_2\| \leq \|x\| \leq \gamma\|y\|.$$

O problemă naturală este aceea dacă proprietatea de mai sus se menține în cazul când X și Y sunt spații Banach. Răspunsul este negativ. În demonstrația de mai sus s-a folosit în mod esențial faptul că un subspațiu liniar închis are un complement. Precizăm că un subspațiu liniar închis X_1 al lui X are complement dacă există un subspațiu liniar închis X_2 astfel încât

$$X = X_1 \oplus X_2.$$

Problema 6.21 arată că această proprietate este necesară pentru ca un operator liniar continuu și surjectiv să aibă invers la dreapta un operator liniar și continuu. Ori, Joram Lindenstrauss și Lior Tzafriri [61] au demonstrat în 1971 că un spațiu Banach care are proprietatea că orice subspațiu închis are un complement (subspațiu închis), este izomorf cu un spațiu Hilbert. Exemple de subspații închise care nu au complement au fost date mult mai înainte, începând cu Ralph S. Phillips [73] care a arătat în 1940 că c_0 nu are complement în l_∞ . Totuși, Teorema 2.12 arată că

Un operator liniar continuu și surjectiv în spații Banach are invers la dreapta o funcție continuă.

Se pierde eventual liniaritatea. Într-adevăr, fie $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv și fie multifuncția $F : Y \rightsquigarrow X$, $F(y) = T^{-1}y$. Problema 6.28 arată că multifuncția F este inferior semicontinuă. Este un exercițiu simplu faptul că celelalte ipoteze din Teorema 2.12 sunt verificate. Selecția ce rezultă este funcția căutată. Problema 6.32 pune în evidență existența unui invers la dreapta cu proprietăți suplimentare. Vezi de asemenea Problema 6.22 pentru o aplicație în teoria incluziunilor diferențiale.

După cum am văzut, există multifuncții superior semicontinue cu valori compacte și convexe care nu au selecții continue. Pentru multifuncții superior semicontinue se pot obține rezultate de existență a selecțiilor aproximative. Rezultate semnificative în această direcție au fost obținute de Arigo Cellina în anii 1970. Vezi, de exemplu, [29].

Teorema 2.13 Fie X spațiu metric, Y spațiu Banach și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție superior semicontinuă cu valori nevide și convexe. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $f_\varepsilon : X \rightarrow Y$ local lipschitziană cu proprietățile

- (i) $f_\varepsilon(X) \subset \text{conv}F(X)$
- (ii) $\text{Graf}(f_\varepsilon) \subset \text{Graf}(F) + S(0, \varepsilon)$.

Demonstrație. Este suficient să presupunem că multifuncția F este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă. Prin urmare, pentru fiecare $x \in X$ există $\delta(x) > 0$ astfel încât

$$F(S(x, \delta(x))) \subset F(x) + S(0, \varepsilon/2).$$

Putem lua $\delta(x)$ cu proprietatea $\delta(x) < \varepsilon/2$. Familia

$$\mathcal{S} = \{S(x, \delta(x)/4); x \in X\}$$

este o acoperire deschisă a spațiului X . Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o rafinare local finită a sa și $\{p_i; i \in I\}$ o partiție local lipschitziană a unității subordonate ei. Pentru fiecare $i \in I$ luăm $z_i \in F(U_i)$, apoi definim

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} p_i(x) z_i.$$

Să arătăm că f_ε îndeplinește condițiile cerute. Este clar că f_ε este bine definită, local lipschitziană și ia valori în $\text{conv}F(X)$. Deoarece \mathcal{U} este o rafinare a lui \mathcal{S} , pentru fiecare $i \in I$ există $x_i \in X$ astfel încât

$$U_i \subset S(x_i, \delta(x_i)/4).$$

Fie $x \in X$ și fie $I(x)$ acei indici i pentru care $p_i(x) > 0$. Deducem că $x \in U_i$ și deci $x \in S(x_i, \delta(x_i)/4)$ pentru $i \in I(x)$. Fie $\delta(x_j) = \max\{\delta(x_i); i \in I(x)\}$. Notăm cu ρ metrica pe X și observăm că

$$\rho(x_i, x_j) \leq \rho(x_i, x) + \rho(x_j, x) \leq \frac{\delta(x_i)}{4} + \frac{\delta(x_j)}{4} \leq \frac{\delta(x_j)}{2}$$

pentru $i \in I(x)$. Prin urmare,

$$U_i \subset S(x_j, \delta(x_j))$$

și deci

$$z_i \in F(S(x_j, \delta(x_j))) \subset F(x_j) + S(0, \varepsilon/2).$$

Având în vedere că mulțimea $F(x_j) + S(0, \varepsilon/2)$ este convexă, rezultă că

$$f_\varepsilon(x) \in F(x_j) + S(0, \varepsilon/2).$$

În consecință, există $y_j \in F(x_j)$ astfel încât $\|f_\varepsilon(x) - y_j\| < \varepsilon/2$. Obținem astfel

$$\bar{\rho}((x, f_\varepsilon(x)), (x_j, y_j)) \leq \rho(x, x_j) + \rho(f_\varepsilon(x), y_j) \leq \varepsilon,$$

unde $\bar{\rho}$ notează metrica pe spațiul produs $X \times Y$. Ca atare,

$$(x, f_\varepsilon(x)) \in \text{Graf}(F) + S(0, \varepsilon),$$

ceea ce încheie demonstrația. □

Acest rezultat împreună cu Teorema de punct fix a lui Schauder ne conduce la o demonstrație a Teoremei de punct fix a lui Kakutani în cadrul spațiilor Banach. Vezi Capitolul 4.

Teorema 2.14 *Fie K o mulțime convexă și compactă într-un spațiu Banach X și $F : K \rightsquigarrow K$ o multifuncție superior semicontinuă cu valori nevide convexe și compacte. Atunci există $x_0 \in K$ astfel încât $x_0 \in F(x_0)$.*

Demonstrație. Fie (f_n) un șir de funcții continue, $f_n : K \rightarrow X$, astfel încât

$$\text{Graf}(f_n) \subset \text{Graf}(F) + S(0, \varepsilon_n)$$

și $f_n(K) \subset F(K) \subset K$, dat de Teorema 2.13, unde $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Aplicând Teorema de punct fix a lui Schauder deducem că există $x_n \in K$ astfel încât $f_n(x_n) = x_n$, pentru orice $n = 1, 2, \dots$. Șirul (x_n) are un subsșir (pe care-l vom nota tot cu (x_n)) convergent la $x_0 \in K$. Vom arăta că acesta este punctul fix căutat. Într-adevăr, există $(p_n, q_n) \in \text{Graf}(F)$ astfel încât

$$(x_n, f_n(x_n)) \in (p_n, q_n) + S(0, \varepsilon_n),$$

deci

$$\|x_n - p_n\| + \|x_n - q_n\| \leq \varepsilon_n.$$

Deducem că $p_n \rightarrow x_0$, $q_n \rightarrow x_0$ și deci $x_0 \in F(x_0)$. □

Am văzut în Capitolul 1 că o funcție continuă se poate aproxima uniform prin funcții local lipschitziene. Stabilim acum un rezultat de aceeași natură pentru multifuncții. Ideea aproximării multifuncțiilor superior semicontinue în sensul prezentat mai jos aparține, în cazul finit dimensional, lui Stanisław Zaremba [100].

Teorema 2.15 Fie X și Y spații Banach, $D \subset X$ și $F : D \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide convexe și închise. Atunci există $F_n : D \rightsquigarrow Y$, $n \geq 1$, cu următoarele proprietăți

(a) $F(x) \subset F_{n+1}(x) \subset F_n(x) \subset \overline{\text{conv}}F(D \cap S(x, 3\varepsilon_n))$ pentru orice $x \in D$, unde $\varepsilon_n = 3^{-n}$;

(b) Dacă F este local mărginită atunci F_n este local lipschitziană pentru n suficient de mare;

(c) Dacă F este superior semicontinuu atunci, pentru fiecare $x \in D$,

$$\delta(F_n(x), F(x)) \rightarrow 0$$

pentru $n \rightarrow \infty$.

Precizăm că $\delta(A, B)$ este distanța Hausdorff–Pompeiu definită în (2.5).

Demonstrație. Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o rafinare local finită a acoperirii deschise a lui D ,

$$\mathcal{S} = \{S(x, \varepsilon_n) \cap D; x \in D\},$$

și fie $\{p_i; i \in I\}$ o partiție local lipschitziană a unității subordonată ei. Pentru fiecare $i \in I$, fie $x_i \in D$ astfel încât $U_i \subset S(x_i, \varepsilon_n)$. Punem

$$F_n(x) = \sum_{i \in I} p_i(x) C_i,$$

unde

$$C_i = \overline{\text{conv}}F(S(x_i, 2\varepsilon_n) \cap D).$$

Să demonstrăm (a). Dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in U_i \subset S(x_i, \varepsilon_n)$ și deci

$$S(x_i, 2\varepsilon_n) \subset S(x, 3\varepsilon_n).$$

De aici rezultă ușor că

$$F_n(x) \subset \overline{\text{conv}}F(S(x, 3\varepsilon_n) \cap D).$$

In plus avem

$$F(x) \subset F_n(x)$$

pentru orice $n \geq 1$. Pentru a dovedi acest fapt, luăm i astfel încât $p_i(x) > 0$, deducem $x \in S(x_i, 2\varepsilon_n)$ și $F(x) \subset C_i$. Cum $F(x)$ este convexă, rezultă $F(x) \subset F_n(x)$. În sfârșit, să dovedim că

$$F_{n+1}(x) \subset F_n(x).$$

Fie $\{V_j; j \in J\}$, $\{q_j; j \in J\}$, $\{y_j; j \in J\}$ și $\{B_j; j \in J\}$ obținuți în același mod ca $\{U_i; i \in I\}$, $\{p_i; i \in I\}$, $\{x_i; i \in I\}$ și respectiv $\{C_i; i \in I\}$ în cazul în care ε_n se înlocuiește cu ε_{n+1} . Fie, de asemenea,

$$F_{n+1}(x) = \sum_{j \in J} q_j(x) B_j.$$

Avem deci

$$B_j = \overline{\text{conv}} F(S(y_j, 2\varepsilon_{n+1}) \cap D).$$

Arătăm mai întâi că dacă i și j sunt astfel încât $p_i(x) > 0$ și $q_j(x) > 0$, atunci $B_j \subset C_i$. Intr-adevăr, $x \in U_i$, $x \in V_j$, deci $x \in S(x_i, \varepsilon_n)$ și $x \in S(y_j, \varepsilon_{n+1})$. Obținem astfel

$$\|x_i - y_j\| < \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1},$$

deci $S(y_j, 2\varepsilon_{n+1}) \subset S(x_i, 2\varepsilon_n)$, ceea ce conduce la $B_j \subset C_i$. Prin urmare $B_j \subset F_n(x)$ pentru orice j pentru care $q_j(x) > 0$ și deci $F_{n+1}(x) \subset F_n(x)$.

Să demonstrăm acum (b). Fie $x_0 \in D$, fie $\delta > 0$ și $M > 0$ astfel încât $\|y\| \leq M$ pentru $z \in B(x_0, \delta) \cap D$ și $y \in F(z)$. Fie, în plus, $\mu < \delta/2$ astfel încât p_i sunt lipschitziene pe $B(x_0, \mu)$. Deoarece \mathcal{U} este local finită, există indicii i_1, \dots, i_p astfel încât

$$U_i \cap S(x_0, \mu) \neq \emptyset$$

pentru $i \in \{i_1, \dots, i_p\}$ iar dacă $i \notin \{i_1, \dots, i_p\}$ avem $p_i(x) = 0$ pentru $x \in S(x_0, \mu)$. Să arătăm că dacă n este astfel încât $\varepsilon_n < \delta/2$, $i \in \{i_1, \dots, i_p\}$ și $y \in C_i$, avem $\|y\| \leq M$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că dacă $z \in S(x_i, 2\varepsilon_n) \cap D$ și $y \in F(z)$ atunci $\|y\| \leq M$. Este suficient să arătăm că $z \in B(x_0, \delta)$. În acest scop, fie $u_i \in U_i \cap S(x_0, \mu)$. Avem $\|u_i - x_0\| < \delta/2$ și deoarece $U_i \subset S(x_0, \varepsilon_n)$, deducem

$$\|x_i - x_0\| < \varepsilon_n + \delta/2.$$

În sfârșit,

$$\|z - x_0\| \leq \|z - x_i\| + \|x_i - x_0\| \leq 2\varepsilon_n + \varepsilon_n + \delta/2 < \delta.$$

Obținem astfel că, dacă $x, y \in B(x_0, \mu)$,

$$\left\| \sum_{i \in I} p_i(x) c_i - \sum_{i \in I} p_i(y) c_i \right\| \leq ML \|x - y\|$$

pentru orice $c_i \in C_i$, unde L este o constantă Lipschitz pentru p_{i_k} , $k \in \{1, \dots, p\}$, pe $B(x_0, \mu)$. Acest fapt spune că

$$F_n(x) \subset F_n(y) + ML \|x - y\| B(0, 1)$$

pentru $x, y \in B(x_0, \mu)$, ceea ce încheie demonstrația punctului (b).

Să demonstrăm (c). Datorită faptului că $F(x) \subset F_n(x)$, rămâne să arătăm că pentru fiecare $x \in D$, avem

$$\sup_{h \in F_n(x)} d(h, F(x)) \rightarrow 0$$

pentru $n \rightarrow \infty$. Deoarece F este superior semicontinuu, pentru $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$F(S(x, \delta)) \subset F(x) + S(0, \varepsilon),$$

deci, pentru n suficient de mare încât $3\varepsilon_n < \delta$, avem

$$F_n(x) \subset \overline{\text{conv}}F(S(x, 3\varepsilon_n) \cap D) \subset F(x) + S(0, \varepsilon).$$

Obținem astfel

$$\sup_{h \in F_n(x)} d(h, F(x)) \leq \varepsilon,$$

și demonstrația este încheiată. □

Observația 2.1 În demonstrația punctului (c) am dedus că pentru fiecare $x \in D$ și $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}$ astfel încât, pentru $n \geq n(\varepsilon, x)$,

$$F_n(x) \subset F(x) + S(0, \varepsilon).$$

Acest fapt împreună cu (a) implică

$$F(x) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n(x).$$

De asemenea, este clar că fiecare F_n are o selecție continuă.

Prezentăm acum un rezultat de prelungire de tipul Teoremei lui Tietze de la funcții.

Teorema 2.16 *Fie X și Y spații normate, $A \subset X$ o mulțime închisă și nevidă și $F : A \rightsquigarrow Y$ o multifuncție $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuuă cu valori nevide închise mărginite și convexe. Atunci există o extensie $G : X \rightsquigarrow Y$, $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuuă cu valori nevide închise mărginite și convexe și care, în plus, satisface*

$$G(X) \subset \overline{\text{conv}}(F(A)).$$

Demonstrație. Deoarece mulțimea A este închisă, pentru fiecare $x \in X \setminus A$ există $\varepsilon(x) > 0$ astfel încât $S(x, \varepsilon(x)) \cap A = \emptyset$. Familia

$$\mathcal{S} = \{S(x, \varepsilon(x)/8); x \in X \setminus A\}$$

este o acoperire deschisă a mulțimii $X \setminus A$. Fie $\mathcal{U} = \{U_i; i \in I\}$ o rafinare local finită și $\{p_i; i \in I\}$ o partiție local lipschitziană a unității subordonată ei. Construim

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pentru } x \in A \\ \sum_{i \in I} p_i(x)F(x_i) & \text{pentru } x \in X \setminus A, \end{cases}$$

unde $x_i \in A$ este astfel încât

$$d(x_i, U_i) < 2 \inf\{d(x, A); x \in U_i\}. \quad (2.15)$$

Să remarcăm faptul că pentru fiecare $i \in I$ există $x_i \in A$ cu proprietatea (2.15). Pentru aceasta, observăm mai întâi că

$$\inf\{d(x, A); x \in U_i\} > 0.$$

Intr-adevăr, deoarece \mathcal{U} este o rafinare a lui \mathcal{S} , pentru fiecare $i \in I$ există $z_i \in X \setminus A$ astfel încât

$$U_i \subset S(z_i, \varepsilon(z_i)/8) \subset S(z_i, \varepsilon(z_i)) \subset X \setminus A.$$

Dacă $x \in U_i$ și $y \in A$, din prima incluziune de mai sus rezultă

$$\|x - z_i\| < \varepsilon(z_i)/8,$$

iar din ultima incluziune rezultă

$$\|y - z_i\| \geq \varepsilon(z_i).$$

Obținem astfel $\|x - y\| > (7/8)\varepsilon(z_i)$ pentru orice $x \in U_i$ și $y \in A$. Așadar

$$\inf\{d(x, A); x \in U_i\} \geq \frac{7}{8}\varepsilon(z_i) > 0.$$

In particular,

$$\text{diam}(U_i) \leq \inf\{d(x, A); x \in U_i\}. \quad (2.16)$$

Deoarece

$$2 \inf\{d(x, A); x \in U_i\} > \inf\{d(x, A); x \in U_i\},$$

există $x' \in U_i$ astfel încât

$$d(x', A) < 2 \inf\{d(x, A); x \in U_i\}$$

și deci există $x_i \in A$ astfel încât

$$\|x' - x_i\| < 2 \inf\{d(x, A); x \in U_i\}.$$

De aici rezultă (2.15).

Să arătăm că multifuncția F_1 construită mai sus este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă. Fie $x_0 \in X \setminus A$ și V o vecinătate deschisă a lui x_0 astfel încât $V \cap A = \emptyset$. Există un număr finit de elemente din \mathcal{U} , U_{i_k} , $k = 1, \dots, q$, astfel încât

$$U_{i_k} \cap V \neq \emptyset.$$

Deoarece $\text{supp } p_i \subset U_i$, rezultă că pentru $x \in V$ și $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_q\}$ avem $p_i(x) = 0$. Deci pentru $x \in V$,

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^q p_{i_k}(x) F(x_{i_k}).$$

Este clar că F_1 este superior semicontinuă în x_0 . Considerăm acum cazul $x_0 \in \text{Fr}(A)$. Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta_1 > 0$ astfel încât

$$F(x) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon),$$

pentru orice $x \in A$ cu $\|x - x_0\| < \delta_1$. Vom arăta că există $\delta_2 > 0$, $\delta_2 < \delta_1$, astfel încât, dacă $x \notin A$ și $\|x - x_0\| < \delta_2$, avem

$$F_1(x) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon).$$

Pentru aceasta, observăm că dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in U_i$ și, combinând (2.15) și (2.16), obținem

$$\|x - x_0\| < 3d(x, A).$$

Deoarece $x_0 \in A$, $d(x, A) \leq \|x - x_0\|$ și deci

$$\|x_i - x_0\| \leq 4\|x - x_0\|.$$

Prin urmare, considerând $\delta_2 = \delta_1/4$ deducem că pentru $x \in X \setminus A$ cu $\|x - x_0\| < \delta_2$ și pentru acei indici i pentru care $p_i(x) > 0$,

$$F(x_i) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon).$$

De aici, și din convexitatea lui $F(x_0)$, obținem

$$F_1(x) \subset F(x_0) + S(0, \varepsilon) = F_1(x_0) + S(0, \varepsilon).$$

Am demonstrat așadar că multifuncția F_1 este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă pe X . Ea are valori convexe și mărginite dar poate să nu aibă valori închise (pentru că suma a două mulțimi închise poate să nu fie închisă). Pentru a încheia demonstrația luăm $G = \overline{F_1}$ și aplicăm Propoziția 2.4. \square

Capitolul 3

Principiul aplicațiilor deschise

3.1 Teorema Robinson - Ursescu

Unul dintre cele mai profunde rezultate din teoria operatorilor liniari continui în spații Banach este Principiul aplicațiilor deschise publicat de Juliusz Schauder [85] în 1930 și de Banach în faimoasa sa carte *Théorie des opérations linéaires* apărută în 1931 și tradusă în franceză [9] în 1932. Ca și Principiul mărginirii uniforme obținut de Theophil H. Hildebrandt [46] în 1923, Principiul aplicațiilor deschise s-a dovedit deosebit de util într-o varietate largă de probleme. Să enunțăm acest rezultat.

Teorema 3.1 *Fie X și Y spații Banach și $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv. Atunci următoarele afirmații (echivalente între ele) au loc.*

- (a) *T este aplicație deschisă;*
- (b) *Există $\gamma > 0$ astfel încât, pentru fiecare $y \in Y$, există $x \in X$ cu $Tx = y$ și $\|x\| \leq \gamma\|y\|$;*
- (c) *Există $\delta > 0$ astfel încât $B(Tx, t) \subset T(B(x, \delta t))$ pentru orice $x \in X$ și $t > 0$.*
- (d) *Există $\alpha > 0$ astfel încât, pentru orice $(x, y) \in X \times Y$,*

$$d(x, T^{-1}(y)) \leq \alpha\|y - Tx\|.$$

Deși afirmațiile de la (c) și (d) sunt interpretări imediate ale lui (b), le-am enunțat aici pentru că ele sunt esențiale în înțelegerea a ceea ce urmează în acest capitol. Să precizăm că marginea inferioară a valorilor pentru constantele γ , δ și α este $\|(A^*)^{-1}\|$, fapt ușor de arătat. Proprietatea enunțată la (c) afirmă că sfera

centrată în Tx și rază t este acoperită de imaginea prin T a unei sfere de rază δt . În literatura matematică, aceasta se numește proprietatea de *acoperire liniară* în (x, Tx) (dacă se verifică macar pentru t mic). Dacă inegalitatea de la (d) se verifică pentru $y = y_0$ și x într-o vecinătate a lui x_0 cu $(x_0, y_0) \in \text{Graf } T$, se spune că T are proprietatea de *regularitate metrică* în (x_0, y_0) . Această terminologie a fost introdusă Jean-Paul Penot în anii 1980.

Un principiu de bază în analiza neliniară (netedă) este acela că o funcție “satisfacă” local proprietățile derivatei sale. Acest principiu, legat de Teorema aplicațiilor deschise de mai sus, se regăsește în două teoreme clasice ale analizei matematice: teorema spațiului tangent demonstrată de Lazar A. Lyusternik [62] în 1934 și teorema surjecției demonstrată de Lawrence M. Graves [40] în 1950, fiecare fiind legată de câte una dintre cele două interpretări ale Teoremei 3.1.

Astfel, teorema lui Lyusternik afirmă că varietatea liniară tangentă la mulțimea $f^{-1}(y_0)$ în punctul $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ este $\ker f'(x_0)$ unde $f : X \rightarrow Y$ este de clasă C^1 și satisface condiția de regularitate (sau condiția Lyusternik)

$$\text{Im } f'(x_0) = Y.$$

De fapt, demonstrația lui Lyusternik conduce la faptul că există $K > 0$ astfel încât

$$d(x, f^{-1}(y_0)) \leq K \|y_0 - f(x)\|$$

pentru orice $x \in x_0 + \ker f'(x_0)$ suficient de aproape de x_0 și, cu o ușoară modificare a demonstrației, pentru orice $x \in X$ suficient de aproape de x_0 .

Teorema lui Graves afirmă, într-o formă particulară, că dacă $f : X \rightarrow Y$ este de clasă C^1 în x_0 și satisface condiția de regularitate a lui Lyusternik $\text{Im } f'(x_0) = Y$ atunci există $m > 0$ astfel încât, pentru $t > 0$ suficient de mic, imaginea prin f a unei sfere centrată în x_0 de rază t conține sfera de rază mt centrată în $f(x_0)$. De fapt proprietatea are loc pentru x într-o vecinătate a unui punct x_0 , deci are loc proprietatea de acoperire liniară. Abia la începutul anilor 1970, Alexander D. Ioffe și Vladimir M. Tikhomirov au demonstrat că în condițiile teoremei lui Graves are loc proprietatea de regularitate metrică. Vom reveni asupra acestor rezultate în Secțiunea 4 a acestui capitol.

În continuare ne vom ocupa de o extindere a teoremei aplicațiilor deschise la multifuncții cu grafic convex și închis, stabilită în 1975 de Corneliu Ursescu [92] și, independent, în 1976 de Stephen M. Robinson [80]. Acest rezultat a avut un impact major și a determinat o direcție de cercetare deosebit de prolifică.

Teorema 3.2 (Robinson -Ursescu) *Fie X și Y spații Banach și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție convexă și închisă. Fie $y_0 \in \text{int}(\text{Im } F)$ și $x_0 \in F^{-1}(y_0)$. Atunci*

(i) Există $\gamma > 0$ astfel încât

$$B(y_0, \gamma) \subset F(B(x_0, 1));$$

(ii) Există $\alpha > 0$ astfel încât, dacă $y \in B(y_0, \alpha)$, există $x \in F^{-1}(y)$ cu

$$\|x - x_0\| \leq \frac{1}{\alpha} \|y - y_0\|;$$

(iii) Există $\beta > 0$ astfel încât, dacă $y \in B(y_0, \beta)$, $u \in \text{Dom}(F)$ și $v \in F(u)$, există $x \in F^{-1}(y)$ cu

$$\|x - u\| \leq \frac{1}{\beta} (1 + \|u - x_0\|) \|y - v\|;$$

(iv) Există $\beta > 0$ (aceiași de la (iii)) astfel încât, dacă $y \in B(y_0, \beta)$ și $u \in \text{Dom}(F)$,

$$d(u, F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\beta} (1 + \|u - x_0\|) d(y, F(u)).$$

Se vede ușor că (iii) este o proprietate de acoperire liniară iar (iv) de regularitate metrică. După cum se va vedea mai jos, se demonstrează întâi punctul (i), acesta fiind pasul cel mai dificil, apoi se demonstrează (iii). Este clar că (ii) este un caz particular al lui (iii) dacă se ia $u = x_0$ și $v = y_0$. Avem deci:

Există două constante pozitive α și β astfel încât pentru fiecare y cu $\|y - y_0\| \leq \alpha$ există $x \in F^{-1}(y)$ satisfăcând

$$\|x - x_0\| \leq \beta \|y - y_0\|.$$

Înainte de a demonstra această teoremă să facem câteva comentarii. În primul rând să observăm că o consecință imediată este

Corolarul 3.1 În condițiile Teoremei 3.2, pentru orice $V \in \mathcal{V}(x_0)$ avem $F(V) \in \mathcal{V}(y_0)$.

Demonstrație. Pentru $V \in \mathcal{V}(x_0)$ există $\delta > 0$ astfel încât $S(x_0, \delta) \subset V$. Considerând α dat de (ii) și $\gamma > 0$ astfel încât $\gamma < \alpha$ și $\beta\gamma < \alpha\delta$, rezultă imediat că $S(y_0, \gamma) \subset F(V)$. \square

Să remarcăm faptul că în cazul unui operator liniar continuu și surjectiv T , concluzia Corolarului 3.1 este echivalentă cu (c) și deci cu (a). Prin urmare, Teorema 3.1 este un caz particular al Teoremei 3.2. Acest rezultat se poate generaliza în forma următoare.

Corolarul 3.2 Fie X, Y, Z spații Banach, $T \in L(Z, Y)$ și $S \in L(X, Y)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $T(Z) \subset S(X)$;
- (ii) Există $k > 0$ astfel încât $T(B(0, 1)) \subset S(B(0, k))$.

Demonstrație. Implicația (ii) \implies (i) este imediată. Pentru a demonstra reciproca, luăm multifunția $F = T^{-1}S$ și aplicăm Teorema 3.2. \square

Observația 3.1 Proprietățile enunțate la (i) și (ii) au caracterizări duale deosebit de utile în aplicații. Astfel, dacă X este reflexiv, (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) unde

$$(iii) \quad \|T^*y^*\| \leq k\|S^*y^*\| \quad \forall y^* \in Y^*.$$

In general, (iii) este echivalent cu

$$(iv) \quad \{T(z); \|z\| \leq 1\} \subset \overline{\{Sx; \|x\| \leq k\}}.$$

Dacă T este operatorul identic (deci $Z = Y$), atunci (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) fără condiții suplimentare. Acest fapt exprimă că un operator $S \in L(X, Y)$, unde X și Y sunt spații Banach, este surjectiv dacă și numai dacă adjunctul său are invers mărginit pe imaginea sa. Demonstrația acestor fapte o lăsăm ca exercițiu.

Să observăm că afirmația (b) din Teorema 3.1 implică faptul că multifunția $F = T^{-1}$ este lipschitziană de constantă Lipschitz γ , adică,

$$F(x_1) \subset F(x_2) + \gamma\|x_1 - x_2\|B(0, 1) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Rezultatul este adevărat și pentru procese convexe.

Corolarul 3.3 Fie X și Y spații Banach și $F : X \rightsquigarrow Y$ un proces convex închis și surjectiv, adică $F(X) = Y$. Atunci multifunția F^{-1} este lipschitziană.

Demonstrație. Luăm în Teorema 3.2 $x_0 = y_0 = 0$. Prin urmare, există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât, pentru orice $y \in Y$ cu $\|y\| \leq \alpha$, există $x \in F^{-1}(y)$ astfel încât $\|x\| \leq \beta\|y\|$. Deoarece $\text{Graf}(F)$ este con, există $L > 0$ astfel încât, pentru orice $y \in Y$, există $x \in F^{-1}(y)$ cu $\|x\| \leq L\|y\|$. Fixăm acum $y_1, y_2 \in Y$ și luăm $x_1 \in F^{-1}(y_1)$ și $t \in F^{-1}(y_2 - y_1)$ satisfăcând $\|t\| \leq L\|y_1 - y_2\|$. Având în vedere că $\text{Graf}(F)$ este con convex, deducem $x_2 = x_1 + t \in F^{-1}(y_2)$, ceea ce încheie demonstrația. \square

Pentru demonstrația Teoremei 3.2 avem nevoie de câteva chestiuni preliminare.

Definiția 3.1 Fie X un spațiu liniar topologic. O submulțime nevidă a lui X se numește *ideal convexă* dacă pentru orice șir mărginit $(x_n) \subset A$ și orice șir (λ_n) cu $\lambda_n \geq 0$ și $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, seria $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ ori este convergentă la un element din A ori este divergentă.

Dacă X este spațiu Banach, având în vedere că șirul (x_n) este mărginit, rezultă că seria $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ este chiar absolut convergentă. Deci în acest caz mulțimea A este ideal convexă dacă suma seriei este un element din A .

Următoarea leamnă pune în evidență o proprietate remarcabilă a mulțimilor ideal convexe, rezultat obținut de Evgenij A. Lifshits (Lifšic) în 1970 [60].

Lema 3.1 Fie A o mulțime ideal convexă într-un spațiu Banach X . Atunci

$$\text{int}A = \text{int}(\overline{A}).$$

Demonstrație. Arătăm că dacă $y \in \text{int}(\overline{A})$ atunci $y \in \text{int}A$. Este suficient să luăm $y = 0$, altfel lucrăm cu $A - y$ în loc de A . Presupunem deci că $0 \in \text{int}(\overline{A})$. Există $\delta > 0$ astfel încât

$$B(0, \delta) \subset \overline{A} \cap B(0, \delta) \subset \overline{A \cap B(0, \delta)} \subset A \cap B(0, \delta) + B(0, \delta/2).$$

Am folosit aici următorul rezultat [79, p.14], [101]:

Pentru orice submulțime A a unui spațiu liniar topologic,

$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} (A + V),$$

unde \mathcal{V} este un sistem fundamental de vecinătăți ale originii.

In consecință, pentru fiecare $t > 0$ avem

$$B(0, t\delta) \subset t(A \cap B(0, \delta)) + B(0, t\delta/2).$$

Fie $x \in B(0, \delta/2)$. Pentru $t = 1/2$, există $x_1 \in A \cap B(0, \delta)$ și $y_1 \in B(0, \delta/4)$ astfel încât

$$x = \frac{1}{2}x_1 + y_1.$$

Continuând procedeul cu $t = 1/2^2, 1/2^3, \dots, 1/2^n, \dots$ obținem șirurile $(x_n) \subset A \cap B(0, \delta)$, $(y_n) \subset B(0, \delta/2^{n+1})$ cu proprietatea

$$y_n = \frac{1}{2^{n+1}}x_{n+1} + y_{n+1}.$$

Avem

$$\|x - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} x_i\| = \|y_n\| \leq \frac{\delta}{2^{n+1}},$$

deci

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} x_i.$$

Deoarece A este ideal convexă, $x \in A$. Am arătat astfel că $B(0, \delta/2) \subset A$, ceea ce dovedește că $0 \in \text{int}A$ și astfel lema este demonstrată. \square

Lema 3.2 *O mulțime convexă închisă și absorbantă într-un spațiu Banach este vecinătate a originii.*

Demonstrație. Fie A o mulțime convexă închisă și absorbantă în spațiul Banach X . Mulțimea $B = A \cap (-A)$ este convexă închisă simetrică și absorbantă. Deoarece B este absorbantă și convexă avem

$$X = \bigcup_{n \geq 1} nB.$$

Folosind Teorema lui Baire [37, p.102] (vezi și Propoziția 3.3 (ii)), deducem că există n_0 astfel încât $\text{int}(n_0 B) \neq \emptyset$, deci $\text{int}B \neq \emptyset$. Vom arăta că mulțimea B este vecinătate a originii, deci și A este vecinătate a originii. Pentru aceasta, fie $x \in \text{int}B$. Obținem $-x \in \text{int}B$ și, deoarece $\text{int}B$ este mulțime convexă,

$$0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in \text{int}B,$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Demonstrația Teoremei 3.2 Fără a restrânge generalitatea putem presupune că $(x_0, y_0) = (0, 0)$, altfel considerăm multifuncția a cărui grafic este $\text{Graf}(F) - (x_0, y_0)$. Fie deci $0 \in \text{int}(\text{Im}(F))$ și $0 \in F^{-1}(0)$. Considerăm mulțimea $A = F(B(0, 1))$ și arătăm că este ideal convexă și $0 \in \text{int}\bar{A}$. Pentru aceasta, considerăm șirurile $(y_n) \subset A$ (mărginit) și (λ_n) cu $\lambda_n \geq 0$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Există $(x_n) \subset B(0, 1)$ astfel încât $y_n \in F(x_n)$. În plus, seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$ sunt convergente. Deoarece $\text{Graf}(F)$ este mulțime convexă, avem

$$\sum_{n=1}^m \lambda_n y_n + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n \right) y_{m+1} \in F \left(\sum_{n=1}^m \lambda_n x_n + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n \right) x_{m+1} \right)$$

pentru orice $m \geq 1$. Trecând la limită cu $m \rightarrow \infty$ și folosind faptul că $\text{Graf}(F)$ este mulțime închisă, deducem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n \in F \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right).$$

Este ușor de văzut că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in B(0, 1),$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n \in A,$$

ceea ce arată că A este ideal convexă.

Demonstrăm acum că A este absorbantă. Considerăm $y \in Y$ și observăm că există $\lambda > 0$ astfel încât $\lambda y \in \text{Im}(F)$, deoarece $0 \in \text{int}(\text{Im}(F))$. Există deci $x \in X$ astfel încât $\lambda y \in F(x)$. Mai departe, există $\mu \in (0, 1)$ astfel încât $\mu x \in B(0, 1)$ și, deoarece $\text{Graf}(F)$ este convexă,

$$\mu \lambda y = \mu(\lambda y) + (1 - \mu)0 \in F(\mu x + (1 - \mu)0) = F(\mu x) \subset F(B(0, 1)).$$

Așadar, mulțimea \overline{A} este convexă închisă și absorbantă, deci este vecinătate a originii conform Lemei 3.2. Am demonstrat astfel că

$$0 \in \text{int}(\overline{F(B(0, 1))}).$$

Aplicăm Lema 3.1 și deducem că $0 \in \text{int}F(B(0, 1))$. Există deci $\gamma > 0$ astfel încât $B(0, \gamma) \subset F(B(0, 1))$ și deci are loc (i).

Să demonstrăm (iii). Notăm $\beta = \gamma/2$ unde γ este dat de (i) și arătăm că acesta este β cerut de (iii). Fie deci $y \in B(y_0, \beta)$, $u \in \text{Dom}(F)$ și $v \in F(u)$. Fie de asemenea

$$\lambda = \frac{\|y - v\|}{\beta + \|y - v\|}.$$

Avem

$$\|y + \frac{\beta}{\|y - v\|}(y - v) - y_0\| \leq \gamma.$$

Din (i), există $t \in \text{Dom}(F)$ cu proprietatea

$$y + \frac{\beta}{\|y - v\|}(y - v) \in F(t)$$

și $\|t - x_0\| \leq 1$. Deoarece $\lambda\beta/\|y - v\| = 1 - \lambda$, obținem $\lambda y + (1 - \lambda)(y - v) \in \lambda F(t)$ care, împreună cu $(1 - \lambda)v \in (1 - \lambda)F(u)$ și cu faptul că multifuncția F este convexă, implică $y \in F(\lambda t + (1 - \lambda)u)$. Să arătăm că $x = \lambda t + (1 - \lambda)u$ satisface inegalitatea cerută. Avem

$$\begin{aligned} \|x - u\| &= \lambda\|t - u\| \leq \frac{\|y - v\|}{\beta}(\|t - x_0\| + \|u - x_0\|) \leq \\ &\frac{\|y - v\|}{\beta}(1 + \|u - x_0\|), \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația punctului (iii).

În sfârșit să demonstrăm (iv). Pentru aceasta se modifică puțin demonstrația punctului (iii). Dacă $d(u, F^{-1}(y)) = 0$, demonstrația este terminată. Dacă nu, pentru $\varepsilon > 0$ considerăm $v \in F(u)$ astfel încât

$$\|v - y\| \leq d(y, F(u))(1 + \varepsilon).$$

Mai departe se face raționamentul de la (iii) și se obține în final

$$\|x - u\| \leq \frac{\|y - v\|}{\beta}(1 + \|u - x_0\|) \leq \frac{d(y, F(u))(1 + \varepsilon)}{\gamma}(1 + \|u - x_0\|).$$

Deoarece $x \in F^{-1}(y)$ iar ε este arbitrar, demonstrația se încheie. \square

În particular obținem

Corolarul 3.4 *Fie multifuncția F ca în Teorema 3.2. Atunci*

- (i) *Există constantele pozitive r , ρ și ω astfel încât, dacă $\|u - x_0\| < \rho$, $\|y - y_0\| < r$ și $v \in F(u)$, există $x \in \text{Dom}(F)$ cu proprietățile $y \in F(x)$ și $\|x - u\| \leq \omega\|y - v\|$;*
- (ii) *Multifuncția F^{-1} este inferior semicontinuuă pe $\text{int}(\text{Im}(F))$.*

O consecință remarcabilă a Teoremei 3.1 este Teorema graficului închis.

Corolarul 3.5 *Fie X și Y spații Banach și $T : X \rightarrow Y$ un operator liniar și cu grafic închis. Atunci T este continuu.*

Avem mai general

Corolarul 3.6 *Fie X și Y spații Banach și $F : X \rightsquigarrow Y$ un proces convex închis cu $\text{Dom}(F) = X$. Atunci F este multifuncție lipschitziană.*

Demonstrație. Se aplică Corolarul 3.3 procesului convex închis și surjectiv F^{-1} .

\square

Este clar că dacă F este operator liniar, condiția Lipschitz se reduce la condiția de mărginire și deci Corolarul 3.5 rezultă din Corolarul 3.6.

3.2 Teorema lui Baire

Demonstrația Teoremei 3.2 se bazează pe un rezultat fundamental din Analiza matematică și anume Teorema lui Baire. Folosim acest prilej pentru a face câteva comentarii referitoare la acest rezultat. El este frecvent utilizat în forma următoare (vezi, de exemplu, [37, p.102], [101, p.11]).

Propoziția 3.1 *Fie X un spațiu metric complet și (X_n) un șir de mulțimi închise din X . Dacă $X = \cup_{n \in \mathbf{N}} X_n$, există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $\text{int } X_{n_0} \neq \emptyset$.*

Propoziția 3.1 se poate deduce prin complementaritate din

Propoziția 3.2 *Fie X un spațiu metric complet și (X_n) un șir de mulțimi deschise și dense din X . Atunci $\cap_{n \in \mathbf{N}} X_n$ este densă în X .*

Este interesant de observat că Propoziția 3.2 nu rezultă prin complementaritate din Propoziția 3.1. Totuși, se pot stabili unele echivalențe între diferite variante ale propozițiilor enunțate mai sus.

Propoziția 3.3 *Fie X un spațiu metric complet și (X_n) un șir de mulțimi închise din X .*

- (i) *Dacă mulțimea $\cup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ are interior nevid atunci mulțimea $\cup_{n \in \mathbf{N}} \text{int } X_n$ este nevidă.*
- (ii) *Dacă $X = \cup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ atunci există $n_0 \in \mathbf{N}$ astfel încât $\text{int } X_{n_0} \neq \emptyset$.*
- (iii) *Dacă $X = \cup_{n \in \mathbf{N}} X_n$ atunci $\cup_{n \in \mathbf{N}} \text{int } X_n$ este densă în X .*

Propoziția 3.4 *Fie X un spațiu metric complet și (X_n) un șir de mulțimi deschise și dense din X . Atunci*

- (a) *$\cap_{n \in \mathbf{N}} X_n$ este nevidă;*
- (b) *$\cap_{n \in \mathbf{N}} X_n$ este densă în X .*

Este ușor de văzut că, printr-un argument simplu folosind legile lui De Morgan avem: (i) \Leftrightarrow (b) și (ii) \Leftrightarrow (a). De asemenea, să observăm că (iii) rezultă din (i) aplicat mulțimilor închise și cu interior vid, $X_n \setminus \text{int } X_n$. Se obține astfel egalitatea

$$\text{int } \cup (X_n \setminus \text{int } X_n) = \emptyset$$

care, împreună cu incluziunea

$$\cap(X \setminus (X_n \setminus \text{int}X_n)) \subset \cup \text{int}X_n,$$

încheie demonstrația punctului (iii).

Propoziția 3.4 a fost demonstrată de Louis René Baire [5] în 1899 în cazul spațiului \mathbf{R} . Un raționament de același tip se găsește și la William F. Osgood în 1897. Felix Hausdorff publică demonstrația Teoremei lui Baire în cazul general în 1914. Este interesant de precizat că enunțurile prezentate mai sus sunt adevărate și în spații compacte.

Vom prezenta acum două rezultate mai generale decât Propozițiile 3.3 și 3.4 și care sunt echivalente prin complementaritate. În spații metrice complete ele au fost stabilite de Corneliu Ursescu (comunicare personală).

Teorema 3.3 *Fie X un spațiu metric complet sau un spațiu compact. Fie (X_n) un șir de mulțimi închise din X . Atunci*

$$\overline{\bigcup_{n \geq 1} \text{int} X_n} = \text{int} \overline{\bigcup_{n \geq 1} X_n}.$$

Teorema 3.4 *Fie X un spațiu metric complet sau un spațiu compact. Fie (X_n) un șir de mulțimi deschise din X . Atunci*

$$\text{int} \overline{\bigcap_{n \geq 1} X_n} = \text{int} \bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n}.$$

Demonstrația Teoremei 3.4. Incluziunea

$$\text{int} \overline{\bigcap_{n \geq 1} X_n} \subset \text{int} \bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n}$$

este evidentă. Pentru a demonstra incluziunea inversă este suficient să demonstrăm incluziunea

$$\text{int} \bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n} \subset \overline{\bigcap_{n \geq 1} X_n},$$

iar pentru aceasta este suficient să arătăm că pentru orice mulțime nevidă și deschisă U din $\bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n}$, mulțimea $U \cap (\bigcap_{n \geq 1} X_n)$ este nevidă. Fie deci U o mulțime nevidă și deschisă din $\bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n}$. Să observăm că pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ avem $U \subset \overline{X_n}$, deci $U \cap X_n$ este o mulțime deschisă și nevidă. Pentru a arăta că mulțimea $U \cap (\bigcap_{n \geq 1} X_n)$

este nevidă, considerăm un proces inductiv alegând o mulțime nevidă și deschisă V_1 astfel încât

$$\overline{V_1} \subset U \cap X_1.$$

În spații metrice alegem V_1 cu proprietatea suplimentară

$$\text{diam}(\overline{V_1}) \leq 1$$

. Apoi, pentru fiecare număr natural $n > 2$ alegem o mulțime nevidă și deschisă V_n astfel încât

$$\overline{V_n} \subset V_{n-1} \cap X_n.$$

În spații metrice alegem V_n cu proprietatea suplimentară

$$\text{diam}(\overline{V_n}) \leq 1/n.$$

Să observăm că $\overline{V_n} \subset U \cap X_n$.

Mai departe, arătăm că

$$\bigcap_{n \geq 1} \overline{V_n} \neq \emptyset,$$

de unde rezultă imediat că $U \cap \bigcap_{n \geq 1} X_n \neq \emptyset$, ceea ce încheie demonstrația.

Faptul că $\bigcap_{n \geq 1} \overline{V_n} \neq \emptyset$ se bazează pe argumente diferite în funcție de natura spațiului X . Dacă X este spațiu metric complet atunci afirmația se bazează pe faptul că familia $\{\overline{V_n}\}$ este formată din mulțimi închise ale căror diametre converg la zero. Dacă X este spațiu compact atunci familia $\{\overline{V_n}\}$ are proprietatea intersecției finite. \square

Observația 3.2 Să remarcăm că demonstrația de mai sus folosește Axioma alegerii dependente. Vezi Capitolul 5 pentru mai multe comentarii asupra acestor axiome. Este interesant de subliniat că în 1977 Charles E. Blair [18] a demonstrat că Teorema lui Baire implică Axioma alegerii dependente.

Cele două leme de bază, Lema 3.1 și Lema 3.2, utilizate la demonstrația Teoremei Robinson-Ursescu, conduc la un frumos rezultat stabilit de Petr P. Zabreiko [99] în 1969 și pe care îl vom demonstra mai jos. Este interesant că cele trei rezultate fundamentale ale analizei funcționale liniare, teorema aplicațiilor deschise, teorema graficului închis și principiul mărginirii uniforme, se pot demonstra într-o manieră unitară și simplă utilizând Lema lui Zabreiko.

Lema 3.3 (Zabreiko) *Orice seminormă numărabil subaditivă pe un spațiu Banach este continuă.*

Demonstrație. Seminorma p pe spațiul Banach X este numărabil subaditivă dacă $p(\sum_n x_n) \leq \sum_n p(x_n)$ pentru orice serie convergentă $\sum_n x_n$ din X . Este ușor de văzut că, din proprietățile seminormei, este suficient să stabilim continuitatea în origine. Pentru aceasta, considerăm mulțimea $A = \{x; p(x) \leq 1\}$ și observăm că este convexă și absorbantă. Prin urmare, \overline{A} este închisă convexă și absorbantă deci, pe baza Lemei 3.2, este vecinătate a originii. Pe de altă parte, este ușor de arătat, utilizând proprietatea seminormei de a fi numărabil subaditivă, că A este ideal convexă. Se aplică Lema 3.1 și se deduce că A este vecinătate a originii. Acest fapt conduce la continuitatea în origine a seminormei p . \square

Să demonstrăm acum cele trei rezultate fundamentale amintite mai sus, utilizând Lema lui Zabreiko.

Demonstrația Teoremei aplicațiilor deschise (Teorema 3.1) Se consideră seminorma pe Y

$$p(y) = \inf\{\|x\|; x \in X, T(x) = y\}.$$

Pentru a demonstra că este numărabil subaditivă, fixăm $\varepsilon > 0$, luăm seria convergentă $\sum_n y_n$ în Y și construim seria absolut convergentă $\sum_n x_n$ în X astfel: luăm $x_n \in X$ astfel încât $\|x_n\| < p(y_n) + 2^{-n}\varepsilon$ pentru orice n . Facem precizarea că am presupus, fără a restrânge generalitatea, că $\sum_n p(y_n)$ este convergentă. Avem

$$p(\sum_n y_n) \leq \|\sum_n x_n\| \leq \sum_n \|x_n\| < \sum_n p(y_n) + \varepsilon.$$

Cum ε este arbitrar, deducem că p este numărabil subaditivă. Aplicăm Lema 3.3 și deducem că p este continuă, ceea ce conduce ușor la concluzia teoremei. \square

Observația 3.3 O consecință remarcabilă a Teoremei 3.1 este următorul rezultat demonstrat pentru prima dată de Banach în 1929.

Dacă X este spațiu Banach, orice operator bijectiv $T \in L(X)$ este un izomorfism.

Următorul rezultat este Principiul mărginirii uniforme, numit adesea Teorema Banach-Steinhaus deoarece o demonstrație a sa a apărut într-o lucrare de Stefan Banach și Hugo Steinhaus [10] din 1927. De fapt rezultatul a fost publicat mai întâi în 1923 de Theophil Henry Hildebrandt [46] iar rezultate particulare obținuse mai înainte, în 1922, Hans Hahn [42] și Stefan Banach în teza de doctorat. Este interesant că Hahn demonstrează teorema pentru funcționale liniare continue printr-o metodă care nu folosește Teorema lui Baire și care funcționează și în cazul general.

Teorema 3.5 Fie $\{T_i; i \in I\}$ o familie nevidă de operatori din $L(X, Y)$, unde X este spațiu Banach și Y este spațiu normat. Dacă $\sup\{\|T_i x\|; i \in I\}$ este finită pentru fiecare x din X atunci $\sup\{\|T_i\|; i \in I\}$ este finită.

Demonstrație. Considerăm seminorma

$$p(x) = \sup\{\|T_i x\|; i \in I\}.$$

Dacă $\sum_n x_n$ este o serie convergentă în X avem

$$\|T_i(\sum_n x_n)\| = \|\sum_n T_i x_n\| \leq \sum_n \|T_i x_n\| \leq \sum_n p(x_n)$$

pentru orice $i \in I$, de unde rezultă că $p(\sum_n x_n) \leq \sum_n p(x_n)$. Deci p este continuă, fapt care conduce ușor la concluzie. \square

În sfârșit, să demonstrăm Teorema graficului închis, stabilită de S. Banach în 1932 [9].

Teorema 3.6 Fie X și Y spații Banach și $T : X \rightarrow Y$ un operator liniar și cu grafic închis. Atunci T este mărginit.

Demonstrație. Considerăm seminorma pe X

$$p(x) = \|Tx\|$$

și arătăm că este numărabil subaditivă. Fie $\sum_n x_n$ o serie convergentă în X . Avem de arătat că $\|T(\sum_n x_n)\| \leq \sum_n \|Tx_n\|$, deci putem presupune că seria $\sum_n \|Tx_n\|$ este convergentă, care împreună cu completitudinea lui Y implică faptul că seria $\sum_n Tx_n$ este convergentă. Deoarece T are grafic închis, avem $\sum_n Tx_n = T(\sum_n x_n)$. Mai departe demonstrația este imediată. \square

Iată alte aplicații interesante ale teoremei lui Baire.

(1) Mulțimea numerelor raționale nu este de tip G_δ , adică, intersecție numărabilă de mulțimi deschise. Vezi problema 6.33.

(2) Nu există funcții $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care să fie continue pe mulțimea numerelor raționale și discontinue pe mulțimea numerelor iraționale. Vezi Problema 6.34.

De fapt, mulțimea punctelor în care o funcție reală de variabilă reală este continuă este de tip G_δ . Este interesant că există funcții care să fie continue exact pe mulțimea numerelor iraționale, deci mulțimea numerelor iraționale este de tip G_δ . Vezi Problema 6.35.

(3) *Mulțimea funcțiilor f din $C[0, 1]$, pentru care există un punct x_f în $[0, 1]$ în care f este derivabilă la dreapta, este de prima categorie în $C[0, 1]$. Vezi Problema 6.36.*

Amintim că o mulțime este de prima categorie dacă se poate scrie ca o reuniune numărabilă de mulțimi rare (pentru care interiorul aderenței lor este vid). Din vremea lui Newton până la începutul secolului 19, majoritatea matematicienilor presupuneau că o funcție reală definită pe un interval trebuie să fie derivabilă pe aproape tot domeniul de definiție. În 1834, Bernard Bolzano a dat un exemplu de funcție reală continuă pe un interval și nederivabilă în orice punct din acel interval. Aproape un secol după aceea matematicienii au tratat acea funcție ca un caz patologic. În 1931 [8] Stefan Banach a arătat, prin afirmația de mai sus, că “marea majoritate” a funcțiilor reale continue definite pe un interval real nu sunt derivabile în nici un punct.

(4) *Fie X un spațiu Banach. O funcție inferior semicontinuă sau superior semicontinuă, definită pe X cu valori reale, este continuă pe un rezidual (complementara unei mulțimi de prima categorie). Vezi Problema 6.37.*

3.3 Aplicații la controlabilitatea sistemelor liniare

Să prezentăm în continuare o aplicație a Corolarului 3.2 la studiul controlabilității sistemelor liniare infinit dimensionale. Pentru aceasta avem nevoie de câteva elemente de teoria semigrupurilor liniare de clasă C_0 . Nu vom intra în detalii, ci vom prezenta doar un minim necesar. Cititorul poate consulta [11] sau [95] pentru detalii.

Să ne amintim pentru început că dacă X și U sunt spații finit dimensionale iar $A : X \rightarrow X$ și $B : U \rightarrow X$ sunt operatori liniari, atunci soluția ecuației diferențiale

$$y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = x, \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

este dată de formula variației constantelor

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds, \quad (3.2)$$

unde $S(t) = e^{At}$, $t \geq 0$, este soluția fundamentală a ecuației $z'(t) = Az(t)$.

Teoria semigrupurilor liniare în spații Banach extinde conceptul de soluție fundamentală la spații Banach arbitrare și permite definirea cu ajutorul formulei (3.2) a soluției ecuației (3.1) în situații mai generale. O clasă largă de sisteme de control

guverdate de ecuații cu derivate parțiale sunt cazuri particulare ale ecuației (3.1), considerate în spații infinite dimensionale.

Așadar, o familie $S(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, formată din operatori liniari continui care verifică proprietatea semigrupală $S(t+s) = S(t)S(s)$, $t, s \geq 0$, $S(0) = I$ și satisface condiția $\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x$, pentru $x \in X$, se numește *semigrup de clasă C_0* pe X . Legătura dintre A și $S(t)$ este dată de

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h},$$

pentru $x \in \text{Dom}(A)$. Operatorul închis și dens definit A se numește *generatorul infinitesimal* al semigrupului $S(t)$. Dacă $S(t)$ este un semigrup de clasă C_0 atunci funcția $t \mapsto S(t)x$ este continuă pe $[0, \infty)$ pentru orice $x \in X$. În plus, există constantele $\omega \in \mathbf{R}$ și $M \geq 1$ astfel încât

$$\|S(t)\| \leq M \exp(\omega t), \quad \forall t \geq 0.$$

În cele ce urmează ne vom referi la sistemul de control (3.1) cu soluția (3.2) cu $B \in L(U, X)$. Controlul $u(\cdot)$ este din $\mathcal{U} = L^\infty([0, \infty); U)$.

Spunem că sistemul (3.1) este nul controlabil pe $[0, t]$ dacă pentru fiecare $x \in X$ există $u \in \mathcal{U}$ astfel încât $y(\cdot)$ dat de (3.2) verifică $y(t) = 0$, adică toate elementele din X pot fi transferate în origine prin acțiunea controalelor din \mathcal{U} . Să definim operatorul $V(t) : \mathcal{U} \rightarrow X$ prin

$$V(t)u = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

Este ușor de văzut că $V(t)$ este liniar și mărginit. De asemenea, se observă că sistemul (3.1) este nul controlabil pe $[0, t]$ dacă

$$\text{Im}(S(t)) \subset \text{Im}(V(t)).$$

Să presupunem acum că avem restricții asupra controlului, adică mulțimea controalelor admisibile este

$$U_{ad} = \{u \in \mathcal{U}; \|u\| \leq \rho\},$$

ρ fiind o constantă pozitivă fixată. Aplicând Corolarul 3.2, deducem că nula controlabilitate a sistemului (3.1) este echivalentă cu existența unui $\delta > 0$ astfel încât

$$S(t)(B(0, \delta)) \subset V(t)(U_{ad}),$$

adică o întreagă sferă din jurul originii poate fi transferată în origine la timpul t prin acțiunea controalelor admisibile.

Pentru fiecare $t > 0$ definim mulțimea

$$R(t) = \{x \in X; \exists u \in U_{ad}, S(t)x = V(t)u\},$$

adică mulțimea stărilor inițiale care pot fi transferate în origine la timpul t cu controale admisibile. Definim de asemenea domeniul de nulă controlabilitate admisibilă

$$R = \bigcup_{t>0} R(t)$$

și funcția timp minimal

$$T(x) = \inf\{t; x \in R(t)\}, \quad x \in R.$$

Vom demonstra că dacă sistemul (3.1) este nul controlabil pe $[0, t]$ pentru orice $t > 0$, atunci R este deschisă și funcția $T(\cdot)$ este continuă pe R . Pentru aceasta demonstrăm mai întâi

Lema 3.4 *Presupunem că sistemul de control (3.1) este nul controlabil pe $[0, \varepsilon]$. Atunci*

- (a) *Există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât dacă $\|x\| \leq \delta(\varepsilon)$ avem $x \in R(\varepsilon)$;*
- (b) *Pentru orice $x \in R(t)$ și $y \in X$ care satisface*

$$\|y - x\| \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{M \exp(\omega t)}$$

avem $y \in R(t + \varepsilon)$.

Demonstrație. (a) Sistemul fiind nul controlabil pe $[0, \varepsilon]$ avem

$$\text{Im}(S(\varepsilon)) \subset \text{Im}(V(\varepsilon)).$$

Considerând $T = S(\varepsilon)$ și $S = V(\varepsilon)$ în Corolarul 3.2, deducem ușor (a). Pentru (b) pornim de la egalitatea

$$S(t + \varepsilon)y = S(\varepsilon)S(t)(y - x) + S(\varepsilon)S(t)x.$$

Deoarece $\|y - x\| \leq \delta(\varepsilon)/M \exp(\omega t)$, având în vedere că $\|S(t)x\| \leq M \exp(\omega t)\|x\|$, pentru orice $t \geq 0$, obținem $\|S(t)(y - x)\| \leq \delta(\varepsilon)$. Folosind (a), obținem $S(t)(y - x) \in R(\varepsilon)$. Există deci $u_1 \in U_{ad}$ astfel încât

$$S(\varepsilon)S(t)(y - x) = V(\varepsilon)u.$$

Pe de altă parte, deoarece $x \in R(t)$, există $u_2 \in U_{ad}$ astfel încât $S(t)x = V(t)u_2$.
Obținem

$$S(\varepsilon)S(t)x = \int_0^t S(t - \varepsilon - s)Bu_2(s)ds$$

și

$$S(t + \varepsilon)x = \int_t^{t+\varepsilon} S(t + \varepsilon - s)Bu_1(s - t)ds + \int_0^t S(t + \varepsilon - s)Bu_2(s)ds.$$

Punând

$$u(s) = \begin{cases} u_2(s) & \text{dacă } s \in [0, t] \\ u_1(s - t) & \text{dacă } s \in [t, t + \varepsilon], \end{cases}$$

deducem

$$S(t + \varepsilon)y = V(t + \varepsilon)u.$$

Deoarece $u \in U_{ad}$, obținem $y \in R(t + \varepsilon)$, ceea ce trebuia demonstrat. \square

Teorema 3.7 *Presupunem că sistemul (3.1) este nul controlabil pe $[0, t]$ pentru orice $t > 0$. Atunci R este deschisă și funcția timp minimal $T(\cdot)$ este continuă pe R .*

Demonstrație. Faptul că R este deschisă rezultă imediat din Lema 3.2(b).
Observația următoare va fi utilă în demonstrație.

Pentru orice $y \in R$ și $\varepsilon > 0$ avem $y \in R(T(y) + \varepsilon)$.

Intr-adevăr, aceasta rezultă din definiția funcției timp minimal și din faptul că $R(s) \subset R(t)$ pentru $s < t$.

Fie acum $y_0 \in R$ și $\varepsilon > 0$ fixat. Să notăm $\delta = \delta(\varepsilon/2)$ dat de Lema 3.4(a), $\beta(t) = M \exp(\omega t)$ și

$$K = \left\{ y \in X; \|y - y_0\| \leq \frac{\delta}{2\beta(T(y_0) + 2\varepsilon)} \right\}.$$

Fie $y_i \in K$, $i = 1, 2$. Deoarece $\beta(\cdot)$ este crescătoare avem

$$\|y_i - y_0\| \leq \frac{\delta}{2\beta(T(y_0) + \varepsilon/2)}, \quad i = 1, 2.$$

Având în vedere că $y_0 \in R(T(y_0) + \varepsilon/2)$, folosind și Lema 3.4(b), deducem

$$T(y_i) \leq T(y_0) + \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Pe de altă parte,

$$\|y_1 - y_2\| \leq \frac{\delta}{\beta(T(y_0) + 2\varepsilon)}$$

și deci

$$\|y_1 - y_2\| \leq \frac{\delta}{\beta(T(y_i) + \varepsilon/2)}.$$

Utilizăm încă o dată Lema 3.4(b) și obținem $y_1 \in R(T(y_2) + \varepsilon)$ și $y_2 \in R(T(y_1) + \varepsilon)$, ceea ce implică $T(y_1) \leq T(y_2) + \varepsilon$ și $T(y_2) \leq T(y_1) + \varepsilon$. Am arătat astfel că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există

$$\delta_1 = \frac{\delta(\varepsilon/2)}{2\beta(T(y_0) + 2\varepsilon)}$$

care depinde de y_0 și ε , astfel încât pentru orice y_1, y_2 cu $\|y_i - y_0\| \leq \delta_1$, $i = 1, 2$, avem

$$|T(y_1) - T(y_2)| \leq \varepsilon.$$

Deci T este continuă în y_0 . □

Am discutat mai sus problema transferului unei date inițiale în origine. O problemă naturală este aceea a controlabilității exacte pe $[0, t]$ a sistemului (3.1). Mai precis, spunem că sistemul (3.1) este *exact controlabil* pe $[0, t]$ dacă pentru fiecare $z \in X$ există un control $u \in \mathcal{U}$ astfel încât y dat de (3.2) verifică $y(0) = 0$ și $y(t) = z$. Aceasta înseamnă că toate elementele din X pot fi atinse la timpul t prin acțiunea controalelor din \mathcal{U} . Este clar că sistemul (3.1) este exact controlabil pe $[0, t]$ dacă operatorul $V(t)$ este surjectiv. Pe baza principiului aplicațiilor deschise, deducem că proprietatea de controlabilitate exactă a sistemului (3.1) este echivalentă cu existența unui $\delta > 0$ astfel încât $B(0, \delta) \subset V(t)(U_{ad})$, adică punctele dintr-o întreagă sferă din jurul originii pot fi atinse la timpul t prin acțiunea controalelor admisibile.

Observația 3.4 Controlabilitatea exactă în spații infinite dimensionale este destul de restrictivă. Dacă B este compact (cazul ecuațiilor hiperbolice de ordinul al doilea) sau semigrupul $S(t)$ este compact (cazul ecuațiilor parabolice) [95] atunci operatorul $V(t)$ este compact (vezi Teorema 4.13) deci nu este surjectiv. Vezi și Observația 4.6.

3.4 Teorema de inversare locală și Teorema Lyusternik - Graves

Prezentăm în continuare un rezultat de aceeași natură cu Principiul aplicațiilor deschise în cazul funcțiilor diferențiabile. Să ne amintim Teorema 3.1:

Dacă $T \in L(X, Y)$ este surjectiv, există $\gamma > 0$ astfel încât pentru orice $y \in Y$ există $x \in X$ cu $Tx = y$ și $\|x\| \leq \gamma\|y\|$.

În cele ce urmează, oricare din constantele $\gamma > 0$ cu proprietatea de mai sus se va numi *constantă de surjectivitate* pentru operatorul surjectiv T .

Teorema 3.8 (Graves) *Fie X și Y spații Banach, $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv cu $\gamma > 0$ constantă de surjectivitate și $0 < \delta < 1/\gamma$. Fie $U \subset X$ o mulțime deschisă, $x_0 \in U$ și $f : U \rightarrow Y$ o funcție continuă cu proprietatea*

$$\|f(u) - f(v) - T(u - v)\| \leq \delta \|u - v\|$$

pentru orice u și v cu $\|u - x_0\| < r$ și $\|v - x_0\| < r$. În aceste condiții, dacă $\|y - f(x_0)\| < r(1/\gamma - \delta)$, există o soluție a ecuației $f(x) = y$ ce satisface

$$\|x - x_0\| \leq (1/\gamma - \delta)^{-1} \|y - f(x_0)\|.$$

Demonstrație. Construim inductiv un șir (ξ_n) astfel: $\xi_0 = 0$ iar, pentru $n \geq 1$, ξ_n este astfel încât

$$T(\xi_n - \xi_{n-1}) = y - f(x_0 + \xi_{n-1}) \tag{3.3}$$

și

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leq \gamma \|y - f(x_0 + \xi_{n-1})\|. \tag{3.4}$$

Deducem cu ușurință

$$T(\xi_n - \xi_{n-1}) = T(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}) - f(x_0 + \xi_{n-1}) + f(x_0 + \xi_{n-2}),$$

deci

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leq \gamma \delta \|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\| \tag{3.5}$$

dacă $\|\xi_{n-1}\| < r$ și $\|\xi_{n-2}\| < r$. Acest fapt este adevărat pentru orice n . Într-adevăr, observăm mai întâi că din (3.3) și (3.4), $\|\xi_1\| < r(1 - \gamma\delta)$. Deoarece $\xi_0 = 0$, avem (3.5) pentru $n = 2$. De aici se obține

$$\|\xi_2\| = \|\xi_1 + \xi_2 - \xi_1\| \leq \|\xi_1\|(1 + \gamma\delta) < r$$

și deci are loc (3.5) pentru $n = 3$. Presupunem (3.5) adevărată până la n și deducem

$$\|\xi_n\| \leq \|\xi_1\|(1 + \gamma\delta + \dots + (\gamma\delta)^{n-1}) < r, \tag{3.6}$$

ceea ce implică (3.5) pentru $n + 1$. Mai departe, din (3.5) rezultă că șirul (ξ_n) este convergent la ξ , din (3.3) deducem că $y = f(x_0 + \xi)$, din (3.4) avem $\|\xi_1\| \leq \gamma \|y - f(x_0)\|$ iar din (3.6) deducem

$$\|\xi\| \leq (1 - \gamma\delta)^{-1} \|\xi_1\| \leq (1/\gamma - \delta)^{-1} \|y - f(x_0)\|$$

și demonstrația este terminată. □

Corolarul 3.7 Fie $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv cu constanta $\gamma > 0$. Dacă $S \in L(X, Y)$ este astfel încât $\|S - T\| \leq 1/2\gamma$, atunci S este surjectiv cu constanta 2γ .

Demonstrație. Se aplică Teorema 3.8 cu $f = S$ și $x_0 = 0$. În particular, rezultă că mulțimea operatorilor surjectivi este deschisă în $L(X, Y)$. Vezi și Problema 6.24.

□

Înainte de a prezenta următorul rezultat, să amintim noțiunea de diferențiabilitate Fréchet. Fie X și Y spații normate, $U \subset X$ o mulțime deschisă și $f : U \rightarrow Y$ o funcție. Spunem că f este diferențiabilă Fréchet în $x_0 \in U$ dacă există un operator, notat $f'(x_0)$, cu proprietatea că $f'(x_0) \in L(X, Y)$ și

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h) = 0.$$

Spunem că f este de clasă C^1 pe U dacă f este diferențiabilă Fréchet și f' (privită ca funcție de la U în $L(X, Y)$) este continuă în fiecare punct din U .

Să amintim de asemenea următoarea teoremă de medie:

Dacă $f : U \rightarrow Y$ este diferențiabilă Fréchet în orice punct din segmentul $[a, b] \subset U$, atunci

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{u \in [a, b]} \|f'(u)\| \|b - a\|.$$

Pentru demonstrația acestei teoreme precum și pentru alte rezultate legate de diferențiabilitate în spații Banach trimitem la [101].

Teorema 3.9 (Lyusternik-Graves) Fie X și Y spații Banach, $U \subset X$ o mulțime deschisă, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow Y$ o funcție diferențiabilă Fréchet cu f' continuă în x_0 și $f'(x_0)$ surjectivă. În aceste condiții, există constantele pozitive r, ρ și ω astfel încât, dacă $\|p - x_0\| < \rho$ și $\|y - f(x_0)\| < r$, există x ce satisface $f(x) = y$ și

$$\|x - p\| \leq \omega \|y - f(p)\|.$$

Demonstrație. Deoarece f' este continuă în x_0 , există $\rho_1 > 0$ astfel încât, dacă $\|x - x_0\| < \rho_1$, avem $\|f'(x) - f'(x_0)\| < 1/8\gamma$, unde γ este o constantă de surjectivitate pentru operatorul surjectiv $f'(x_0)$. Aplicând Corolarul 3.7 deducem că, pentru $\|p - x_0\| < \rho_1$, $f'(p)$ este surjectiv cu constanta 2γ . Din teorema de medie enunțată mai sus și aplicată funcției $x \mapsto f(x) - f'(p)x$ obținem

$$\|f(u) - f(v) - f'(p)(u - v)\| \leq \|u - v\| \sup_{t \in [a, b]} \|f'(t) - f'(p)\|. \quad (3.7)$$

Din (3.7), dacă $\|p - x_0\| < \rho_1$, avem

$$\|f(u) - f(v) - f'(p)(u - v)\| \leq \frac{1}{4\gamma} \|u - v\| \quad (3.8)$$

pentru $\|u - x_0\| < \rho_1$ și $\|v - x_0\| < \rho_1$. Pe de altă parte, există $\rho_2 > 0$ cu $\rho_2 \leq \rho_1/2$ astfel încât, dacă $\|p - x_0\| < \rho_2$, avem

$$\|f(p) - f(x_0)\| < \frac{\rho_1}{16\gamma}.$$

Să arătăm că $\rho = \rho_2$, $r = \rho_1/8\gamma$ și $\omega = 4\gamma$ verifică toate cerințele concluziei. Fie deci $\|p - x_0\| < \rho$ și $\|y - f(x_0)\| < r$. Observăm că pentru $\|u - p\| < \rho_1/2$ și $\|v - p\| < \rho_1/2$ avem $\|u - x_0\| < \rho_1$, $\|v - x_0\| < \rho_1$ și deci (3.8) arată că suntem în condițiile Teoremei 3.8 cu $T = f'(p)$ și 2γ în loc de γ . Este clar că dacă $\|y - f(x_0)\| < r$ atunci $\|y - f(p)\| < \rho_1/8\gamma$ și deci există o soluție a ecuației $f(x) = y$ care satisface

$$\|x - p\| \leq 4\gamma \|y - f(p)\|.$$

Demonstrația teoremei este încheiată. □

Observația 3.5 Concluzia Teoremei 3.9 afirmă, în particular, că există o vecinătate deschisă V a lui x_0 , conținută în U , care are proprietatea că pentru fiecare $p \in V$ și fiecare S_p , sferă deschisă centrată în p și conținută în V , $f(S_p)$ este vecinătate pentru $f(p)$.

Observația 3.6 Estimarea $\omega = 4\gamma$, unde γ este constanta de surjectivitate a operatorului $f'(x_0)$, nu este cea mai bună. Aceasta provine din faptul că am aplicat Teorema 3.8 cu $\delta = 1/2\gamma$. De fapt, marginea inferioară a valorilor lui ω pentru care are loc teorema de mai sus este γ .

Lawrence M. Graves [40] a demonstrat în 1950 Teorema 3.8 și Corolarul 3.7. Lazar Aronovich Lyusternik [62] (1934) a introdus condiția ca $f'(x_0)$ să fie operator surjectiv și procedeul iterativ prezentat în demonstrația Teoremei 3.8 pentru a obține următorul rezultat.

Corolarul 3.8 (Lyusternik) *Fie f ca în Teorema 3.9 și fie $f(x_0) = 0$. Atunci spațiul tangent la $f^{-1}(0)$ în x_0 este $x_0 + \ker f'(x_0)$.*

Demonstrație. Se aplică Teorema 3.9 cu $y = 0$ și $p \in x_0 + \ker f'(x_0)$ și se deduce că există $x \in f^{-1}(0)$ astfel încât $\|x - p\| \leq \omega \|f(p)\|$, adică

$$d(p, f^{-1}(0)) \leq \omega \|f(p) - f(x_0) - f'(x_0)(p - x_0)\|.$$

De aici se obține imediat

$$\lim_{\substack{p \rightarrow x_0 \\ p \in x_0 + \ker f'(x_0)}} \frac{d(p, f^{-1}(0))}{\|p - x_0\|} = 0,$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Teorema lui Graves se utilizează în obținerea unor rezultate de existență pentru ecuații neliniare plecând de la rezultate similare pentru aproximări liniare ale acestora. Unele probleme, de exemplu cele legate de controlabilitatea cu restricții a sistemelor neliniare au impus următoarea variantă.

Teorema 3.10 *Fie X și Y spații Banach, $D \subset X$ o mulțime deschisă, $x_0 \in D$, $L \subset X$ un con convex închis și $f : D \rightarrow Y$ o funcție diferentiabilă Fréchet cu f' continuă în x_0 și cu proprietatea $f'(x_0)(L) = Y$. Atunci există o vecinătate V a punctului $f(x_0)$ și o constantă $\gamma > 0$ astfel încât, pentru fiecare $y \in V$, ecuația $f(x) = y$ are o soluție în $x_0 + L$ care satisface inegalitatea $\|x - x_0\| \leq \gamma \|y - f(x_0)\|$.*

Demonstrație. Se procedează ca în Teorema 3.8 cu observația că γ este obținută aplicând Teorema aplicațiilor deschise procesului convex închis $F : X \rightarrow Y$ definit prin

$$F(x) = \begin{cases} f'(x_0)x & \text{dacă } x \in L \\ \emptyset & \text{dacă } x \notin L. \end{cases}$$

Ipoteza $f'(x_0)(L) = Y$ asigură faptul că F este surjectiv și deci există $\gamma > 0$ încât, pentru $y \in Y$, există $x \in L$ cu $f'(x_0)x = y$ și $\|x\| \leq \gamma \|y\|$. \square

Teorema 3.9 se mai numește și *Teorema surjecției*, datorită condiției ca $f'(x_0)$ să fie surjectiv. Să ne amintim că pentru Teorema de inversare locală se cere ca $f'(x_0)$ să fie și injectiv. Mai precis avem

Teorema 3.11 (Teorema de inversare locală) *Fie X și Y spații Banach, $U \subset X$ o mulțime deschisă, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow Y$ o funcție de clasă C^1 cu proprietatea că $f'(x_0)$ este un operator bijectiv. Atunci există o vecinătate W a lui $f(x_0)$ în Y și o vecinătate V a lui x_0 în X astfel încât pentru orice $y \in W$ există o soluție unică $x \in V$ a ecuației $f(x) = y$. Mai mult funcția f^{-1} este de clasă C^1 pe W și derivata sa este dată prin $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$. Dacă f este de clasă C^k , $k > 1$, atunci f^{-1} este de clasă C^k .*

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea, luăm $x_0 = 0$ și $f(x_0) = 0$. În plus, este suficient să discutăm inversarea locală a funcției $f'(0)^{-1}f$ și deci suntem conduși la a considera cazul în care $f = I + g$, unde g este de clasă C^1 și $g'(0) = 0$. Aici I este operatorul identitate pe X . Fie $r > 0$ astfel încât $\|g'(u)\| < 1/2$ pentru $\|u\| < r$. Folosind teorema de medie deducem că pentru orice $u, v \in B(0, r)$ avem

$$\|g(u) - g(v)\| \leq \frac{1}{2}\|u - v\|. \quad (3.9)$$

Deci g este o contracție și $\|g(u)\| \leq \|u\|/2$ pentru $\|u\| < r$. Pentru $v \in X$ fixat, punem

$$g_v(u) = v - g(u).$$

Este clar că g_v este o contracție. Mai mult, pentru $u \in B(0, r)$ și $v \in B(0, r/2)$ avem $\|g_v(u)\| \leq r$ și deci, pentru $v \in B(0, r/2)$, g_v este o contracție, duce $B(0, r)$ în ea însăși, prin urmare are un punct fix unic $u \in B(0, r)$ care satisface

$$u = g_v(u) = v - g(u),$$

deci $f(u) = v$. Așadar, putem defini funcția $f^{-1} : B(0, r/2) \rightarrow B(0, r)$. Să arătăm că f^{-1} este de clasă C^1 . Pentru aceasta, arătăm mai întâi ca f^{-1} este lipschitziană. Punem $p = f^{-1}(u)$ și $q = f^{-1}(v)$, adică $p + g(p) = u$ și $q + g(q) = v$. Folosind (3.9) obținem

$$\|p - q\| \leq \|u - v\| + \|g(p) - g(q)\| \leq \|u - v\| + \frac{1}{2}\|p - q\|,$$

deci

$$\|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \leq 2\|u - v\|.$$

Așadar f^{-1} este Lipschitz continuă cu constanta 2.

Fie acum $y \in W = B(0, r/2)$ și $x = f^{-1}(y)$. Să arătăm că

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}. \quad (3.10)$$

Din $x + g(x) = y$ avem $f^{-1}(y) = y - g(f^{-1}(y))$. Având în vedere că funcția g este diferentiabilă în 0 și $g'(0) = 0$ iar f^{-1} este lipschitziană, deducem ușor că funcția $y \mapsto g(f^{-1}(y))$ are diferențiala în punctul 0 egală cu 0. De aici rezultă că $(f^{-1})'(0) = I$. Aceasta implică (3.10) pe baza unor translații care să ducă x și y în origine. Să detaliem acest fapt. Considerăm funcția

$$h(u) = f'(x)^{-1}(f(u + x) - y)$$

și observăm că $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$ și deci, pe baza celor demonstrate mai sus, $(h^{-1})'(0) = I$. Aceasta, împreună cu faptul că $h^{-1}(v) = f^{-1}(y + f'(x)v) - x$, arată că (3.10) este adevărată. În sfârșit, pentru a arăta că f^{-1} este de clasă C^1 observăm că $(f^{-1})'$ apare ca o compunere de trei funcții continue și anume f^{-1} , f' și J , unde operatorul $J : \text{Inv}(X, Y) \rightarrow L(Y, X)$ este definit prin $J(A) = A^{-1}$. Am notat cu $\text{Inv}(X, Y)$ mulțimea operatorilor $A \in L(X, Y)$ care sunt inversabili (bijectivi). Să subliniem faptul că din Teorema aplicațiilor deschise (Teorema 3.1) rezultă că dacă X și Y sunt spații Banach iar $A \in L(X, Y)$ este bijectiv atunci $A^{-1} \in L(Y, X)$. Operatorul J este de clasă C^∞ .

Ultima afirmație din enunț se demonstrează prin inducție. □

Observația 3.7 Teorema de inversare locală dă condiții în care, pentru orice y dintr-o vecinătate a lui y_0 , ecuația $f(x) = y$ poate fi rezolvată unic în x într-o vecinătate a lui x_0 . Demonstrația prezentată mai sus se bazează pe aplicarea Teoremei de punct fix a lui Banach funcției $x \rightarrow (f'(x_0))^{-1}(y - f(x)) + x$ și deci conduce la următoarea procedură iterativă:

$$x_{n+1} = x_n + (f'(x_0))^{-1}(y - f(x_n)).$$

Se poate utiliza și metoda lui Newton:

$$x_{n+1} = x_n + (f'(x_n))^{-1}(y - f(x_n))$$

care dă o convergență mai rapidă (vezi Problema 6.31).

Observația 3.8 În cazul în care $\ker f'(x_0)$ admite un complement închis X_1 , Teorema 3.9 se deduce din Teorema de inversare locală aplicată restricției lui f la $x_0 + X_1$.

Teorema de inversare locală conduce imediat la

Teorema 3.12 (Teorema funcțiilor implicite) *Fie X, Y și Z spații Banach, D o mulțime nevidă și deschisă în $X \times Y$, $F : D \rightarrow Z$ o funcție de clasă C^p , $p \geq 1$, $(u_0, v_0) \in D$ astfel încât $F(u_0, v_0) = 0$ și $F'_v(u_0, v_0)$ este operator bijectiv. În aceste condiții, există $r > 0$ și o vecinătate V a lui v_0 astfel încât, dacă $\|u - u_0\| < r$, există o unică soluție $v = v(u)$ în V a ecuației $F(u, v) = 0$. Mai mult, aplicația $u \mapsto v(u)$ este de clasă C^p și derivata este dată de formula*

$$v'(u) = -(F'_v(u, v(u)))^{-1}F'_u(u, v(u)).$$

Demonstrație. Se aplică Teorema 3.11 funcției $f : D \rightarrow X \times Z$ definită prin $f(u, v) = (u, F(u, v))$. □

Avem și o teoremă a funcțiilor implicite de tip surjectiv.

Teorema 3.13 *Fie X, Y și Z spații Banach, D o mulțime nevidă și deschisă în $X \times Y$, $F : D \rightarrow Z$ o funcție diferentiabilă Fréchet cu F' continuă în $(u_0, v_0) \in D$ astfel încât $F(u_0, v_0) = 0$ și $F'_v(u_0, v_0)$ este operator surjectiv. In aceste condiții, există $r > 0$ și $\omega > 0$ astfel încât, dacă $\|u - u_0\| < r$, există v cu proprietatea $F(u, v) = 0$ și $\|v - v_0\| \leq \omega \|u - u_0\|$.*

Demonstrație. Se consideră funcția $f : D \rightarrow X \times Z$ definită prin $f(u, v) = (u, F(u, v))$. Avem

$$f'(u_0, v_0)(u, v) = (u, F'_u(u_0, v_0)u + F'_v(u_0, v_0)v).$$

Este clar că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 3.9 cu $x_0 = (u_0, v_0)$. Concluzia Teoremei 3.9 cu $p = x_0, y = (u, 0)$ conduce la rezultat. □

Observația 3.9 In condițiile Teoremei 3.13 putem defini o funcție h pe $S(u_0, r)$, continuă în u_0 , astfel încât $h(u_0) = v_0$ și $F(u, h(u)) = 0$ pentru $u \in S(u_0, r)$.

In Teorema 3.9 se presupune că funcția f este diferentiabilă Fréchet și f' este continuă în x_0 . O problemă naturală este dacă se poate presupune că f este doar diferentiabilă în x_0 . Răspunsul este negativ în general dar este pozitiv în cazul când Y este de dimensiune algebrică finită. Mai precis, dacă X este un spațiu Banach de dimensiune infinită, se poate construi o funcție continuă $f : X \rightarrow X$ cu următoarele proprietăți:

- (a) f este diferentiabilă Fréchet în 0 și $f'(0) = I$;
- (b) $f(X)$ nu conține o vecinătate a originii;
- (c) f nu este injectivă pe nici o vecinătate a originii.

O astfel de funcție se poate construi astfel: fie mulțimile $B = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$, $U = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ și $p : B \rightarrow U$ o funcție continuă cu $p(x) = x$ pentru orice $x \in U$. Existența funcției p este dată de Teorema 1.11. Extindem p la X prin $p(x) = x$ dacă $\|x\| > 1$ și considerăm elementul $e \in X$ cu $\|e\| = 1$ și apoi șirurile

$$a_n = \frac{1}{n}e, \quad r_n = \frac{1}{4n^2}, \quad B_n = \{x \in X; \|x - a_n\| < r_n\}.$$

Funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in X \setminus \cup_n B_n \\ r_n p\left(\frac{x-a_n}{r_n}\right) + a_n & \text{dacă } x \in B_n \end{cases}$$

verifică (a), (b), (c).

Pentru a demonstra (a), observăm mai întâi că, dacă $x \in B_n$, avem

$$\|f(x) - x\| \leq r_n + \|x - a_n\| \leq 2r_n.$$

Având în vedere că

$$\|a_n\| - \|x\| \leq \|x - a_n\| \leq r_n,$$

obținem

$$\frac{\|f(x) - x\|}{\|x\|} \leq \frac{2r_n}{\|a_n\| - r_n} \rightarrow 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$ și fie n_0 cu proprietatea că, pentru $n \geq n_0$,

$$2r_n/(\|a_n\| - r_n) < \varepsilon.$$

Un calcul simplu arată că există $\delta > 0$ astfel încât, dacă $x \in B_n$ și $\|x\| < \delta$, avem $n \geq n_0$. Prin urmare, dacă $\|x\| < \delta$ avem $\|f(x) - x\|/\|x\| < \varepsilon$, ceea ce arată că funcția f este diferențiabilă Fréchet în 0 și $f'(0) = I$.

Pentru (b) se demonstrează mai întâi că

$$f(X) = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n.$$

Pentru aceasta este suficient să dovedim că pentru $y \in B_m$ nu există $x \in B_n$ astfel încât

$$r_n p\left(\frac{x - a_n}{r_n}\right) + a_n = y.$$

Aceasta rezultă din faptul că

$$\|r_n p\left(\frac{x - a_n}{r_n}\right) + a_n - a_m\| \geq r_m$$

pentru orice m și n .

În sfârșit, pentru (c), se observă că funcția p nu este injectivă. Pentru aceasta luăm z cu $\|z\| < 1$ și observăm că ecuația $p(x) = p(z)$ are cel puțin două soluții distincte, $x = z$ și $x = p(z)$. De aici rezultă că funcția f nu este injectivă pe nici un B_n . Cum orice vecinătate a originii conține B_n pentru n suficient de mare, afirmația de la (c) este dovedită.

Este interesant de subliniat că, dacă f este doar diferentiabilă fără a fi de clasă C^1 , proprietatea (c) de mai sus poate fi satisfăcută și de funcții pentru care $f'(x_0)$ este un operator bijectiv. Iată de exemplu funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + 2x^2 \sin 1/x$ pentru $x \neq 0$, $f(0) = 0$, are proprietățile:

$$(i) \quad f'(0) = I;$$

(ii) Există un șir x_n convergent la 0 astfel încât $f'(x_n) = 0$ și $f''(x_n) < 0$.

Din (ii) rezultă că f nu este injectivă pe o vecinătate a lui x_n și deci pe nici o vecinătate a originii.

Dacă Y este finit dimensional avem

Teorema 3.14 *Fie X și Y spații Banach cu Y de dimensiune algebrică finită, $U \subset X$ o mulțime deschisă, $x_0 \in U$, $f : U \rightarrow X$ o funcție continuă pe U , diferentiabilă Fréchet în x_0 și astfel încât operatorul $f'(x_0)$ este surjectiv. Atunci există constantele pozitive r și ω astfel încât, dacă $\|y - f(x_0)\| < r$, există o soluție a ecuației $f(x) = y$ cu proprietatea*

$$\|x - x_0\| \leq \omega \|y - f(x_0)\|.$$

Demonstrație. Demonstrația se bazează pe Teorema de punct fix a lui Brouwer. Să presupunem că $x_0 = f(x_0) = 0$. Deoarece $f'(0)$ este operator surjectiv, există o funcție continuă $H : Y \rightarrow X$ astfel încât $f'(0)H = I$; vezi Problema 6.32. Din faptul că f este diferentiabilă Fréchet în 0 se deduce că

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(Hy) - y}{\|y\|} = 0.$$

Există deci r_0 astfel încât

$$\|f(Hy) - y\| \leq \frac{1}{2} \|y\|$$

pentru $\|y\| \leq r_0$. Se aplică acum Teorema de punct fix a lui Brouwer (vezi Problema 6.41) pentru a deduce că, pentru orice $r \leq r_0$, avem

$$B(0, r/2) \subset f(H(B(0, R))).$$

Pentru $y \in Y$ cu $\|y\| \leq r_0/2$ folosim incluziunea de mai sus cu $r = 2\|y\|$ și deducem existența unui $z \in Y$ astfel încât $\|z\| \leq r$ și $f(Hz) = y$. Este clar că $x = Hz$ satisface cerințele teoremei. \square

Incheiem această secțiune cu o aplicație a Teoremei Lyusternik-Graves la teoria multiplicatorilor lui Lagrange pentru problema de minim abstractă:

$$\min f(x) \quad \text{cu restricția} \quad g(x) = 0, \quad (3.11)$$

unde $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ și $g : X \rightarrow Y$ iar X și Y sunt spații normate. De altfel, acesta a fost scopul principal al lui Lyusternik în [62].

Incepem cu un rezultat care scoate în evidență importanța proprietății de regularitate metrică.

Teorema 3.15 *Presupunem că x_0 este soluție a problemei de minim (3.11). Dacă f satisface condiția Lipschitz într-o vecinătate a lui x_0 și g are proprietatea de regularitate metrică în $(x_0, 0)$, atunci există $\alpha > 0$ astfel încât x_0 este punct de minim local (fără restricții) a funcției $f(x) + \alpha\|g(x)\|$.*

Demonstrație. Din ipoteză există $K > 0$, $L > 0$ astfel încât

$$f(x) - f(y) \leq L\|x - y\|, \quad d(x, g^{-1}(0)) \leq K\|g(x)\|$$

pentru x, y într-o vecinătate a lui x_0 . Luăm un astfel de x și fie $u \in g^{-1}(x_0)$ astfel încât $\|x - u\| \leq (K + 1)\|g(x)\|$. Atunci

$$f(x) \geq f(u) - L\|x - u\| \geq f(x_0) - Ld(x, g^{-1}(0)) \geq f(x) - L(K + 1)\|g(x)\|,$$

deci $f(x) + L(K + 1)\|g(x)\| \geq f(x_0)$. □

Observația 3.10 Rezultatul se poate extinde ușor la spații metrice. De asemenea, se pot considera restricții de forma $0 \in G(x)$ unde G este o multifuncție.

Următoarea teoremă este extinderea teoremei clasice a multiplicatorilor lui Lagrange la problema abstractă (3.11).

Teorema 3.16 *Fie spațiile Banach X și Y și funcțiile $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, $g : X \rightarrow Y$. Presupunem că f are un minim local în x_0 relativ la restricția $g(x) = 0$, f și g sunt de clasă C^1 pe o vecinătate a lui x_0 și $g'(x_0)$ este operator surjectiv. Atunci*

(i) $f'(x_0)h = 0$ pentru acei h pentru care $g'(x_0)h = 0$;

(ii) Există $y^* \in Y^*$ astfel încât $f'(x_0) + y^*(g'(x_0)) = 0$.

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că există h astfel încât $g'(x_0)h = 0$ și $f'(x_0)h \neq 0$. Atunci funcția $F : X \rightarrow \mathbf{R} \times Y$ definită prin $F(x) = (f(x), g(x))$ are proprietatea că

$$F'(x_0) = (f'(x_0), g'(x_0)) : X \rightarrow \mathbf{R} \times Y$$

este operator surjectiv. Intr-adevăr, fie $(a, y) \in \mathbf{R} \times Y$. Deoarece $g'(x_0)$ este operator surjectiv, există $u \in X$ încât $g'(x_0)u = y$. Există $\lambda \in \mathbf{R}$ astfel încât $f'(x_0)\lambda h = a - f'(x_0)u$. Este clar că $f'(x_0)(u + \lambda h) = a$ și $g'(x_0)(u + \lambda h) = y$. Deci operatorul $F'(x_0)$ este surjectiv. Aplicăm Teorema 3.9 și deducem că, pentru orice $\varepsilon > 0$, există x cu $\|x - x_0\| < \varepsilon$ și există $\delta > 0$ astfel încât

$$F(x) = (f(x_0) - \delta, 0),$$

ceea ce contrazice ipoteza de minim local. Prin urmare, afirmația de la (i) este demonstrată.

Din (i) deducem că $f'(x_0)$, care este un element din X^* , este ortogonal pe $\ker(g'(x_0))$. Dar

$$\ker(g'(x_0))^\perp = \overline{\text{Im}(g'(x_0)^*)}.$$

Pe de altă parte, $\text{Im}(g'(x_0)^*)$ este mulțime închisă fiindcă $g'(x_0)$ este surjectiv. Deducem astfel existența unui element $y^* \in Y^*$ cu proprietatea

$$f'(x_0) = -g'(x_0)^*(y^*) = -y^*(g'(x_0)).$$

□

3.5 Aplicații la controlabilitatea sistemelor neliniare

Prezentăm o aplicație a Teoremei 3.9 la studiul controlabilității sistemelor neliniare. Considerăm ecuația

$$y'(t) = Ay(t) + Fy(t) + Bu(t), \quad t \geq 0 \tag{3.12}$$

cu condiția inițială $y(0) = x$. Operatorul liniar A generează un semigrup de clasă C_0 , $S(t)$, $t \geq 0$, pe spațiul Banach X , F este o aplicație neliniară de la X la X , iar $B \in L(U, X)$, U fiind un spațiu Banach.

Presupunem că F este lipschitziană pe X , astfel că ecuația integrală

$$y(t) = S(t)x + \int_t^0 S(t-s)F(y(s))ds + \int_t^0 S(t-s)Bu(s)ds$$

are soluție continuă $y : [0, T] \rightarrow X$. Aici $T > 0$ și $u(\cdot) \in L^\infty(0, T; U)$ sunt fixați. Această funcție se consideră drept soluție a ecuației (3.12) pe $[0, T]$. În cele ce urmează vom lua $x = 0$ și vom defini funcția $\phi : L^\infty(0, T; U) \rightarrow X$, prin $\phi(u) = y(T)$, unde $y(\cdot)$ este soluția ecuației

$$y(t) = \int_t^0 S(t-s)F(y(s))ds + \int_t^0 S(t-s)Bu(s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Vom presupune că F este de clasă C^1 pe X și $F(0) = 0$. Un calcul direct arată că, în aceste condiții, funcția ϕ este de clasă C^1 pe $L^\infty(0, T; U)$ și

$$\phi'(0)(v) = z(T),$$

unde $z(\cdot)$ este soluția ecuației liniare

$$z'(t) = (A + F'(0))z(t) + Bv(t), \quad (3.13)$$

cu $z(0) = 0$.

Spunem că sistemul liniar (3.13) este global controlabil pe $[0, T]$ dacă, pentru orice $z_1 \in X$, există $v \in L^\infty(0, T; U)$ astfel încât soluția ecuației (3.13) cu $z(0) = 0$ să verifice $z(T) = z_1$.

Corolarul 3.9 *Presupunem că $F : X \rightarrow X$ este de clasă C^1 și $F(0) = 0$. Presupunem în plus că sistemul liniar (3.13) este global controlabil pe $[0, T]$. Atunci, pentru $\rho > 0$, există $r > 0$ încât pentru orice $x_1 \in X$ cu $\|x_1\| < r$ există $u \in L^\infty(0, T; U)$ cu $\|u\| \leq \rho$ astfel încât soluția ecuației (3.12) cu $y(0) = 0$ să verifice $y(T) = x_1$.*

Altfel spus, dacă sistemul liniarizat este global controlabil atunci sistemul inițial este local controlabil în jurul originii. Demonstrația Corolarului 3.9 este imediată dacă avem în vedere Teorema 3.9.

Capitolul 4

Teoreme de punct fix

Teoria punctelor fixe a fost introdusă de Henri Poincaré în anii 1880. El a arătat că soluțiile unor importante probleme analitice pot fi studiate definindu-se o mulțime X și o funcție $f : X \rightarrow X$ în așa fel încât soluțiile corespund punctelor fixe ale funcției f , adică, punctelor $x \in X$ pentru care $f(x) = x$. Teoria punctelor fixe a început deci, ca răspuns la nevoile analizei neliniare. Poincaré a enunțat prima teoremă de punct fix, într-o lucrare din 1911, în legătură cu soluțiile periodice pentru problema celor trei corpuri din mecanica cerească, teoremă ce a fost demonstrată de George D. Birkhoff [16] în 1913. De fapt, analiza neliniară se bazează pe două teoreme de punct fix:

- Teorema de punct fix a lui Banach, în cadrul spațiilor metrice complete;
- Teorema de punct fix a lui Brouwer, în cadrul mulțimilor convexe și compacte.

Sigur că există numeroase variații sau extensii ale acestora (de exemplu teoremele de punct fix ale lui Schauder, Kakutani, Caristi) ori alte rezultate (de exemplu Teorema lui Ekeland, Inegalitatea lui Ky Fan, Teorema Leray - Schauder) care reprezintă instrumente de bază în studiul unor clase de probleme specifice ale analizei neliniare.

În acest capitol ne vom ocupa de cele două teoreme amintite mai sus precum și de alte rezultate legate de acestea.

4.1 Teorema de punct fix a lui Banach

Fie (X, ρ) un spațiu metric. Spunem că funcția $F : X \rightarrow X$ este *contractie* de constantă $\alpha \in (0, 1)$ dacă pentru orice $x, y \in X$ avem

$$\rho(F(x), F(y)) \leq \alpha \rho(x, y).$$

Problema pe care dorim s-o rezolvăm este ecuația

$$F(x) = x, \quad x \in X,$$

utilizând metoda iterativă:

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n \geq 0, \tag{4.1}$$

unde $x_0 \in X$. O soluție a ecuației de mai sus se numește *punct fix* pentru funcția F .

Teorema 4.1 *Fie (X, ρ) un spațiu metric complet și $F : X \rightarrow X$ o α -contractie. Atunci,*

(i) *F are punct fix unic în X , adică, există un singur element $u \in X$ astfel încât $F(u) = u$;*

(ii) *Pentru fiecare $x_0 \in X$ șirul (x_n) construit iterativ în (4.1) converge la unicul punct fix al funcției F ;*

(iii) *Pentru $n \geq 0$ avem estimarea a priori*

$$\rho(x_n, u) \leq \alpha^n (1 - \alpha)^{-1} \rho(x_1, u)$$

și estimarea a posteriori

$$\rho(x_n, u) \leq \alpha (1 - \alpha)^{-1} \rho(x_n, x_{n-1});$$

(iv) *Viteza de convergență este dată de*

$$\rho(x_{n+1}, u) \leq \alpha \rho(x_n, u), \quad \forall n \geq 0;$$

(v) *Pentru orice $x \in X$ avem*

$$\rho(x, u) \leq \frac{1}{1 - \alpha} \rho(x, F(x)). \tag{4.2}$$

Demonstrație. Fixăm un element arbitrar $x \in X$ și considerăm șirul dat de (4.1) cu $x_0 = x$. Vom arăta că (x_n) este șir Cauchy. Pentru $k \geq 1$ avem

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(F(x_k), F(x_{k-1})) \leq \alpha \rho(x_k, x_{k-1}).$$

Aplicarea repetată a acestei inegalități implică

$$\rho(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k \rho(x_1, x).$$

Acum, folosind inegalitatea triunghiulară pentru $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$, avem

$$\rho(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^n) \rho(x_1, x). \quad (4.3)$$

De aici se obține ușor că $\rho(x_m, x_n) \leq \alpha^n (1 - \alpha)^{-1} \rho(x_1, x)$, ceea ce arată că (x_n) este șir Cauchy, deci convergent la $u \in X$. Trecând la limită în egalitatea $x_{n+1} = F(x_n)$, obținem $F(u) = u$. Unicitatea este imediată. Facem $m \rightarrow \infty$ în (4.3) și obținem estimarea a priori, iar pentru $n = 0$ obținem (4.2). Pentru estimarea a posteriori, facem $m \rightarrow \infty$ în inegalitatea

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leq (\alpha + \alpha^1 + \dots + \alpha^m) \rho(x_n, x_{n-1}).$$

□

Estimarea a priori determină numărul maxim de pași ai iterației necesari pentru obținerea preciziei dorite, cunoscându-se valoarea inițială x_0 și valoarea x_1 . Estimarea a posteriori ne permite să folosim valorile x_n și x_{n-1} pentru a determina acuratețea aproximării x_n . Experiența arată că a doua metodă este mai eficientă.

Teorema 4.1, numită și *principiul contractiilor*, sau *Teorema de punct fix a lui Banach* a fost demonstrată de Stefan Banach [6] în 1922 în cadrul spațiilor normate complete. Ca o leamnă preliminară pentru demonstrarea teoremei funcțiilor implicite, Edouard Goursat a enunțat și a demonstrat un rezultat similar 20 de ani mai devreme, în 1903 [39], pentru contractii de la o sferă închisă din \mathbf{R}^n în ea însăși. Ideea utilizării aproximațiilor succesive în demonstrație provine de la Joseph Liouville (1830), care a utilizat-o pentru prima dată în studiul existenței soluțiilor în teoria ecuațiilor diferențiale liniare. Emile Picard a folosit sistematic metoda aproximațiilor succesive la studiul ecuațiilor neliniare, ordinare și cu derivate parțiale. Primul memoriu al lui Picard dedicat acestei teorii a fost publicat în 1890 [74].

Demonstrația este constructivă, dându-se un mod precis de aproximare a punctului fix. Iată o aplicație simplă. Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție de clasă C^1 și u un punct fix pentru f pentru care $|f'(u)| < 1$. Se verifică ușor că se îndeplinesc condițiile Teoremei 4.1 pentru X un interval închis suficient de mic centrat în u . Deci u se

poate aproxima pornind cu un x_0 adecvat și considerând șirul de iterații prezentat mai sus. Sunt situații când printr-o modificare a funcției se verifică $|f'(u)| < 1$. De exemplu, ecuația $x^3 + x - 1 = 0$ are o singură soluție u , punct fix pentru funcția $f(x) = 1 - x^3$. Se vede ușor că $|f'(u)| > 1$. Dar u este punct fix și pentru funcția

$$g(x) = (1/5)(3x + 2 - 2x^3)$$

pentru care $|g'(u)| < 1$.

În situații practice este necesar să se aproximeze valorile lui $F(x_n)$ din șirul iterațiilor. Apare astfel o problemă firească. Dacă se înlocuiește șirul x_n definit prin (4.1) cu (y_n) unde $y_0 = x$ și y_{n+1} aproximează $F(y_n)$, în ce condiții avem $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = u$, punctul fix al lui F ? Rezultatul următor răspunde la această problemă și a fost obținut de Alexander M. Ostrowski [72] în 1967.

Teorema 4.2 *Fie (X, ρ) un spațiu metric complet, $F : X \rightarrow X$ o α -contractie și $u \in X$ punctul fix al lui F . Fie (ε_n) un șir de numere pozitive convergent la 0, fie $y_0 \in X$ și presupunem că șirul (y_n) satisface*

$$\rho(y_{n+1}, F(y_n)) \leq \varepsilon_n \quad \forall n \geq 1.$$

Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = u$.

Demonstrație. Luăm $y_0 = x$ și considerăm șirul (x_n) dat de (4.1). Avem

$$\rho(x_{m+1}, y_{m+1}) \leq \rho(F(x_m), F(y_m)) + \rho(F(y_m), y_{m+1})$$

$$\leq \alpha \rho(x_m, y_m) + \varepsilon_m \leq \sum_{i=0}^m \alpha^{m-i} \varepsilon_i,$$

$$\rho(y_{m+1}, u) \leq \rho(y_{m+1}, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, u) \leq \sum_{i=0}^m \alpha^{m-i} \varepsilon_i + \rho(x_{m+1}, u).$$

Luăm acum $\varepsilon > 0$. Există $k \in \mathbf{N}$ astfel încât pentru $m \geq k$ avem $\varepsilon_m \leq \varepsilon$. Atunci

$$\sum_{i=0}^m \alpha^{m-i} \varepsilon_i \leq \alpha^{m-k} \sum_{i=0}^k \alpha^{k-i} \varepsilon_i + \varepsilon \sum_{i=k+1}^m \alpha^{m-i}.$$

Obținem

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \alpha^{m-i} \varepsilon_i \leq \varepsilon (\alpha^{k+1} / (1 - \alpha)).$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar iar $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_{m+1}, u) = 0$ obținem $\lim_{m \rightarrow \infty} y_{m+1} = u$. \square

Vezi Problema 6.39 pentru o demonstrație a Teoremei 4.1 pe baza principiului variațional al lui Ekeland.

Să prezentăm un exemplu pentru a ilustra utilitatea principiului contracțiilor. Considerăm ecuația integrală Volterra

$$u(x) = f(x) + \int_0^x g(x, y)u(y)dy, \quad (4.4)$$

unde f și g sunt funcții continue pe $[0, a]$ respectiv $[0, a] \times [0, a]$. Definim operatorul $F : C[0, a] \rightarrow C[0, a]$ prin

$$F(u(x)) = f(x) + \int_0^x g(x, y)u(y)dy$$

și observăm că pentru orice $u, v \in C[0, a]$

$$\|F(u) - F(v)\| \leq aL\|u - v\|,$$

unde $L = \sup\{|g(x, y)|; x, y \in [0, a]\}$. Teorema de punct fix a lui Banach se poate astfel aplica pe orice interval pentru care se verifică inegalitatea $aL < 1$. Aceasta nu e o problemă gravă fiindcă, prin metode standard de prelungire, se poate arăta existența soluției pe $[0, a]$. Pe de altă parte, Adam Bielecki în 1956 [15] a descoperit o altă metodă de a remedia problema. El a introdus o nouă normă pe $C[0, a]$,

$$\|u\|_\lambda = \sup_{0 \leq x \leq a} \exp(-\lambda x)|u(x)|,$$

echivalentă cu norma uniformă și față de care F este (L/λ) -lipschitziană și deci contracție dacă λ este suficient de mare. O altă metodă constă în utilizarea următoarei variante a Teoremei 4.1, aparent mai tare. Vezi demonstrația Teoremei 4.19.

Corolarul 4.1 Fie șirul de funcții F^n definit inductiv prin $F^1 = F$ și $F^{n+1} = F \circ F^n$. Dacă există $k \geq 1$ astfel încât F^k este contracție, atunci F are punct fix unic.

Demonstrație. Fie u punctul fix pentru F^k . Punem în (4.2) $x = F(u)$ și obținem $\rho(u, F(u)) \leq (1 - \alpha)^{-1} \rho(F^k(F(u)), F(u)) = 0$, și deci $F(u) = u$. Pentru unicitate, dacă y este punct fix pentru F atunci el este punct fix și pentru F^k . Deci $y = u$. \square

Observația 4.1 Corolarul de mai sus este interesant și prin faptul că funcția F nu este presupusă nici măcar continuă. Deși rezultatul a fost enunțat în formă abstractă abia în anii 1960, el se regăsește într-o lucrare a lui Georg Hamel din 1922 privind studiul soluțiilor periodice pentru ecuația pendulului.

Următoarea teoremă dă o condiție în care punctul fix al unei contracții depinde continuu de un parametru.

Teorema 4.3 Fie (X, ρ) și (T, r) spații metrice, X complet. Fie $g : X \times Y \rightarrow X$ continuă. Presupunem că există $\alpha \in (0, 1)$ astfel încât

$$\rho(g(x, t), g(y, t)) \leq \alpha \rho(x, y)$$

pentru orice $t \in T$ și $x, y \in X$. Dacă $\varphi(t)$ este unicul punct u pentru care $g(u, t) = u$, atunci φ este continuă de la T la X .

Demonstrație. Fie $t_0 \in T$ și $\varepsilon > 0$. Continuitatea lui g în $(\varphi(t_0), t_0)$ implică existența unui $\delta > 0$ pentru care dacă $r(t, t_0) < \delta$ atunci

$$\rho(g(\varphi(t_0), t), g(\varphi(t_0), t_0)) = \rho(g(\varphi(t_0), \varphi(t_0))) < \varepsilon(1 - \alpha).$$

Fie $r(t_1, t_0) < \delta$. Inegalitatea (4.2) implică

$$\rho(\varphi(t_0), \varphi(t_1)) \leq \frac{\rho(\varphi(t_0), g(\varphi(t_0), t_1))}{1 - \alpha} < \varepsilon,$$

ceea ce trebuia demonstrat. □

O aplicație interesantă a teoremei de mai sus, utilizată în demonstrația teoremei de inversare locală, este următoarea.

Fie X spațiu Banach și $f : X \rightarrow X$ o contracție. Atunci funcția $x \mapsto x + f(x)$ este homeomorfism de la X la X .

Vezi Problema 6.38 pentru demonstrație. Incheiem această secțiune cu o extensie interesantă obținută de Renato Caccioppoli [25] în 1930.

Presupunem că există un șir (c_n) astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ și

$$\rho(F^n(x), F^n(y)) \leq c_n \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Atunci șirul iterațiilor (4.1) converge la unicul punct fix al funcției F .

4.2 Teorema de punct fix a lui Brouwer

Teorema 4.4 (Brouwer) Fie B sfera unitate închisă centrată în origine din spațiul \mathbf{R}^p și $f : B \rightarrow B$ o funcție continuă. Atunci există $x \in B$ astfel încât $f(x) = x$.

Înainte de a demonstra Teorema 4.4, să observăm că ea se poate extinde la cazul când se înlocuiește B cu orice spațiu topologic Ω care este homeomorf cu B . Într-adevăr, fie $g : \Omega \rightarrow B$ un homeomorfism și fie $f : \Omega \rightarrow \Omega$ o funcție continuă. Atunci $g \circ f \circ g^{-1}$ este continuă pe B și ia valori în B . Există deci $y \in B$ astfel încât

$$g \circ f \circ g^{-1}(y) = y.$$

Evident, $x = g^{-1}(y) \in \Omega$ este punct fix pentru f .

Situația cea mai simplă este când Ω este o sferă închisă dintr-un spațiu normat finit dimensional. Mai general, are loc următorul rezultat.

Corolarul 4.2 *Fie Ω o mulțime nevidă convexă și compactă dintr-un spațiu normat finit dimensional, și $f : \Omega \rightarrow \Omega$ o funcție continuă. Atunci există $x \in \Omega$ astfel încât $f(x) = x$.*

Demonstrația Corolarului 4.2 O primă demonstrație, pe care o vom schița doar, se bazează pe faptul că o mulțime convexă nevidă finit dimensională (adică dimensiunea varietății liniare generate de ea este finită), are interiorul relativ nevid [79, p.237]. Prin urmare, o mulțime convexă care are cel puțin două elemente distincte este homeomorfă cu o mulțime convexă cu interior nevid dintr-un spațiu de tipul \mathbf{R}^p cu $p \in \mathbf{N}$. Deci, o mulțime convexă și compactă care nu se reduce la un punct este homeomorfă cu o mulțime închisă convexă mărginită și cu interior nevid din \mathbf{R}^p . Demonstrația se încheie pe baza faptului că într-un spațiu Banach o mulțime convexă închisă mărginită și cu interior nevid este homeomorfă cu sfera unitate închisă centrată în origine [49, p.528].

Vom prezenta în continuare o demonstrație directă. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că spațiul de bază este \mathbf{R}^p . Dacă Ω este o sferă închisă, după cum am remarcat deja, rezultatul este adevărat. Fie $r > 0$ astfel încât $\Omega \subset B(0, r)$. Fie $P : B(0, r) \rightarrow \Omega$ definită prin $P(x) = y$ unde y este unicul punct în Ω cu proprietatea

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|; \forall z \in \Omega\}.$$

Este cunoscut că P este continuă (chiar lipschitziană). Deci

$$f \circ P : B(0, r) \rightarrow \Omega \subset B(0, r)$$

are cel puțin un punct fix $x \in B(0, r)$, adică $f(P(x)) = x$. Având în vedere că $f(P(x)) \in \Omega$, rezultă că $x \in \Omega$. Prin urmare, $P(x) = x$ și deci $f(x) = x$. Demonstrația Corolarului 4.2 este încheiată. \square

Demonstrația Teoremei 4.4 se bazează pe următoarea lemă datorată lui Karol Borsuk [20] (1931).

Lema 4.1 Fie $U = \{x \in \mathbf{R}^p; \|x\| = 1\}$. Nu există o funcție continuă $f : B \rightarrow U$ astfel încât $f(x) = x$ pentru orice $x \in U$.

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că există o funcție f cu proprietățile indicate. Prelungim f la o funcție continuă $f_1 : \mathbf{R}^p \rightarrow U$ prin $f_1(x) = x/\|x\|$ pentru orice x cu $\|x\| > 1$. Aplicând teorema de aproximare a lui Weierstrass, există $f_2 : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ de clasă C^1 astfel încât $\|f_2(x) - f_1(x)\| < 1$ pentru orice x cu $\|x\| \leq 2$. Considerăm funcția $f_3 : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ definită prin

$$f_3(x) = (1 - \varphi(\|x\|))f_1(x) + \varphi(\|x\|)f_2(x),$$

unde $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție de clasă C^1 verificând condițiile

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1, \quad \varphi(t) = 1 \quad \forall t \leq 3/2, \quad \varphi(t) = 0 \quad \forall t \geq 2.$$

Se poate lua de exemplu

$$\varphi(t) = \frac{1}{16}t^3 - \frac{21}{64}t^2 + \frac{9}{16}t - \frac{5}{16}$$

pentru $t \in (3/2, 2)$. Este ușor de văzut că f_3 este de clasă C^1 , $f_3(x) = x/\|x\|$ pentru orice x cu $\|x\| \geq 2$ și

$$\|f_3(x)\| \geq \|f_1(x)\| - \varphi(\|x\|) \cdot \|f_2(x) - f_1(x)\| > \|f_2(x) - f_1(x)\|(1 - \varphi(\|x\|)) \geq 0,$$

dacă $\|x\| < 2$, deoarece

$$1 = \|f_1(x)\| > \|f_2(x) - f_1(x)\|.$$

Definim acum funcția de clasă C^1 , $f_4 : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ prin

$$f_4(x) = \frac{f_3(2x)}{\|f_3(2x)\|}.$$

Se observă că $\|f_4(x)\| = 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^p$ și $f_4(x) = x/\|x\|$ pentru orice x cu $\|x\| \geq 1$. Este clar că f_4 este lipschitziană pe B . Fie L constanta Lipschitz și fie $t \in [0, 1/L)$. Vom arăta în continuare că

$$(I + tf_4)B = (1 + t)B, \tag{4.5}$$

unde I este aplicația identică. Intr-adevăr, pentru $x \in B$ avem

$$\|x + tf_4(x)\| \leq \|x\| + t\|f_4(x)\| \leq 1 + t,$$

iar pentru $x \notin B$ avem

$$\|x + tf_4(x)\| = \left\| x + t \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| + t > 1 + t.$$

Pe de altă parte, alegerea lui t implică faptul că $t\|f'_4(x)\| < 1$ pentru $x \in B$ și deci $I + tf'_4(x)$ este izomorfism iar

$$\det(I + tf'_4(x)) > 0$$

pentru $x \in B$. Aplicând teorema de inversare locală deducem că mulțimea $(I + tf_4)(B)$ este deschisă în $B(0, 1 + t)$. Ea este și închisă, fiind compactă. Deoarece $B(0, 1 + t)$ este conexă, rezultă egalitatea (4.5). Așadar, funcția $I + tf_4 : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1 + t)$ este surjectivă. Ea este și injectivă deoarece, dacă $(I + tf_4)(x) = (I + tf_4)(y)$ avem

$$\|x - y\| = t\|f_4(x) - f_4(y)\| \leq tk\|x - y\|.$$

Având în vedere că $tk < 1$, obținem $x = y$. Folosim acum formula schimbării de variabilă la integrala din \mathbf{R}^p și deducem

$$(1 + t)^p \int_B dy = \int_{B(0, 1+t)} dy = \int_{(I+tf_4)(B)} dy =$$

$$\int_B \det(I + tf'_4(x)) dx = t^p \int_B \det f'_4(x) dx + P_{n-1}(t),$$

unde $P_{n-1}(t)$ este o funcție polinomială de grad cel mult $n - 1$. Prin identificare obținem

$$\int_B \det f'_4(x) dx = \int_B dy \neq 0. \tag{4.6}$$

Pe de altă parte, $\|f_4(x)\|^2 = 1$ implică $(f'_4(x))^*(f_4(x)) = 0$, unde $(f'_4(x))^*$ este adjunctul operatorului liniar $f'_4(x)$. Deoarece $f_4(x) \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^p$, deducem că $\det f'_4(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^p$, ceea ce contrazice (4.6) \square

Demonstrația Teoremei 4.4 Presupunem, prin reducere la absurd, că $f(x) \neq x$ pentru orice $x \in B$. Se poate deduce cu ușurință că există o funcție continuă $h : B \rightarrow [1, \infty)$ astfel încât, funcția definită prin

$$g(x) = f(x) + h(x)(x - f(x))$$

are proprietatea că $\|g(x)\| = 1$ pentru $x \in B$. Mai precis, $g(x)$ este punctul unde semidreapta cu originea în $f(x)$ și care conține x intersectează U . Aplicând Lema 4.1, presupunerea făcută este falsă. \square

Observația 4.2 În demonstrația Lemei 4.1 s-a utilizat teorema de aproximare a lui Weierstrass care este bine cunoscută în cazul unidimensional. Aici însă este vorba de funcția $f_1 : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^p$ continuă pe $B(0, 2)$. Este clar că problema se reduce la aproximarea prin funcții polinomiale ale funcțiilor $g : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}$ continue pe $B(0, 2)$. Rezultatul este adevărat și se bazează pe Teorema Stone-Weierstrass [77, p.16].

În cazul unidimensional, demonstrația teoremei de punct fix a lui Brouwer se poate face pe baza teoremei valorilor intermediare, demonstrată de Bernard Bolzano în 1817:

Dacă o funcție continuă $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ are proprietatea că $g(-1)g(1) \leq 0$ atunci există $c \in [-1, 1]$ astfel încât $g(c) = 0$.

O proprietate similară are loc și în cazul p -dimensional.

Teorema 4.5 *Fie mulțimea*

$$C = \{x = (x_1, \dots, x_p); |x_i| \leq 1, \forall i = 1, \dots, p\}$$

și o funcție continuă $g : C \rightarrow \mathbf{R}^p$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)$. Presupunem că

$$g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \dots, x_p) \geq 0$$

și

$$g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_p) \leq 0,$$

pentru orice $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in C$ și pentru orice $i = 1, \dots, p$. Atunci există $c \in C$ astfel încât $g(c) = 0$.

Pentru demonstrație, vezi Problema 6.40. Henri Poincaré a enunțat acest rezultat în 1883, pentru g diferențiabilă, și a publicat o demonstrație trei ani mai târziu. Faptul că teorema p -dimensională a valorilor intermediare este echivalentă cu teorema lui Brouwer a fost stabilit de Carlo Miranda abia în 1940 [67].

Să prezentăm o altă demonstrație pentru Teorema lui Brouwer în cazul 2-dimensional. Enunțul prezentat mai jos este chiar o versiune ușor mai tare.

Teorema 4.6 *Fie $U = \{x \in \mathbf{R}^2; \|x\| = 1\}$ și $B = \{x \in \mathbf{R}^2; \|x\| \leq 1\}$. Fie funcția $f : B \rightarrow \mathbf{R}^2$ continuă astfel încât $f(U) \subset B$. Atunci f are cel puțin un punct fix.*

Demonstrație. Într-o primă etapă se arată că, dacă o funcție continuă $g : U \rightarrow U$ este homotopă cu o funcție constantă, atunci există o funcție continuă $u : U \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $g(x) = \exp(iu(x))$ pentru orice $x \in U$. Vezi Problema 6.50 pentru

detalii. Am folosit forma complexă pentru ușurința scrierii. Precizăm că funcțiile continue $f : X \rightarrow Y$ și $g : X \rightarrow Y$ sunt homotope dacă există o funcție continuă $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ astfel încât $H(x, 0) = f(x)$ și $H(x, 1) = g(x)$ pe X . În etapa a doua, se arată că, mulțimea U nu este contractibilă, adică aplicația identică pe U nu este homotopă cu o funcție constantă pe U . Vezi Problema 6.51. Demonstrația se încheie observând că, dacă f nu are puncte fixe atunci funcția definită prin

$$H(x, t) = \begin{cases} r(x - 2tf(x)) & \text{dacă } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ r((2 - 2t)x - f((2 - 2t)x)) & \text{dacă } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

unde $r(x) = x/\|x\|$ pentru $x \neq 0$, arată că funcția identică pe U este homotopă cu funcția constantă $r(-f(0))$ ceea ce contrazice faptul că U nu este contractibilă. \square

Observația 4.3 Să remarcăm că dacă U nu este contractibilă atunci se poate demonstra ușor că nu este o retractă a lui B , adică are loc concluzia din Lema 4.1. Într-adevăr, presupunând că există o funcție continuă $f : B \rightarrow U$ astfel încât $f(x) = x$ pentru orice $x \in U$, funcția $H : U \times [0, 1] \rightarrow U$ definită prin $H(x, t) = r((1 - t)x)$ face U contractibilă, adică $H(x, 0) = x$ pentru $x \in U$ și $H(x, 1) = 0$ pentru $x \in U$.

Rezultatul care urmează, cunoscut în literatură sub numele de Teorema Perron-Frobenius, este o aplicație importantă a Teoremei lui Brouwer. Teorema pe care o vom demonstra în cele ce urmează afirmă că orice matrice pătratică ale cărei elemente sunt nenegative are cel puțin un vector propriu cu componente nenegative corespunzător unei valori proprii nenegative. Precizăm că x_i notează componenta de rang i a vectorului coloană $x \in \mathbf{R}^n$.

Teorema 4.7 Fie $A = (a_{ij})$ o matrice pătratică de tipul $n \times n$ cu elemente nenegative. Atunci există $\lambda \geq 0$ și un vector nenul $x \in \mathbf{R}^n$, cu $x_i \geq 0$ pentru $i = 1, 2, \dots, n$, astfel încât $Ax = \lambda x$.

Demonstrație. Definim mulțimea nevidă convexă și compactă

$$K = \left\{ x \in \mathbf{R}^n; x_i \geq 0 \forall i = 1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Dacă există $x_0 \in K$ astfel încât $Ax_0 = 0$, atunci x_0 și $\lambda = 0$ rezolvă problema.

Considerăm acum cazul în care pentru orice $x \in K$ avem $Ax \neq 0$. Cum A este cu elemente nenegative, rezultă că funcția $g : K \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$g(x) = \sum_{i=1}^n (Ax)_i$$

ia numai valori pozitive. Ca atare, putem defini funcția continuă $F : K \rightarrow \mathbf{R}^n$ prin

$$F(x) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i} Ax.$$

Aceasta aplică mulțimea K în ea însăși. Pentru aceasta, este suficient să observăm că $(Ax)_i \geq 0$ pentru orice $x \in K$ și că

$$\sum_{i=1}^n (F(x))_i = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (Ax)_k} \sum_{i=1}^n (Ax)_i = 1.$$

Din Teorema de punct fix a lui Brouwer, deducem că există $x \in K$ cu $F(x) = x$. Ultima egalitate se poate rescrie echivalent sub forma $Ax = \lambda x$ cu $\lambda = \sum_{i=1}^n (Ax)_i$, ceea ce încheie demonstrația. \square

Incheiem acest paragraf cu mențiunea că Luitzen Egbertus Jan Brouwer a publicat Teorema 4.4 în anul 1909 în cazul tridimensional, Jacques Hadamard a demonstrat-o în anul următor în cazul p -dimensional dar pentru funcții diferențiabile. De altfel, Hadamard o numește deja Teorema de punct fix a lui Brouwer, ceea ce sugerează că rezultatul era deja faimos. Prima demonstrație pentru cazul general a fost dată de Brouwer în 1912 [24]. Demonstrația lui Brouwer se bazează pe teoria gradului topologic, introdusă de el ca o alternativă la teoria indexului, a lui Kronecker, utilizată de altfel de Henri Poincaré la demonstrarea teoremei p -dimensionale a valorilor intermediare. Faptul că Lema 4.1 este echivalentă cu Teorema lui Brouwer a fost observat de Karol Borsuk în 1931. Este interesant de precizat că există un alt rezultat echivalent cu Teorema lui Brouwer, și foarte apropiat de Lema lui Borsuk, care fusese dat de Piers Bohl în 1904 și demonstrat de el pentru funcții diferențiabile:

Nu există o funcție continuă $f : C \rightarrow \mathbf{R}^p \setminus \{0\}$ cu proprietatea că $f(x) = x$ pentru x din frontiera lui C ,

unde C este cubul din \mathbf{R}^p , adică mulțimea definită în Teorema 4.5.

Abia în 1930 rezultatul a fost extins de Juliusz Schauder la cazul spațiilor infinite dimensionale. În 1937 John von Neumann iar în 1941 Shizuo Kakutani extind rezultatul la cazul multifuncțiilor. În secțiunile următoare vom prezenta aceste extinderi. Să mai remarcăm că Lema 4.1 are multe demonstrații, cea prezentată aici aparține lui Konrad Gröger și a fost publicată în 1981 [41]. În sfârșit, demonstrația prezentată pentru cazul 2-dimensional (Teorema 4.6) a fost dată de Robert F. Brown în 1974 [24].

4.3 Teorema de punct fix a lui Schauder

În spații infinite dimensionale, Teorema de punct fix a lui Brouwer nu are loc

Teorema 4.8 (Schauder) *Fie K o mulțime convexă și compactă într-un spațiu normat X și $f : K \rightarrow K$ o funcție continuă. Atunci există $x \in K$ astfel încât $f(x) = x$.*

Teorema de punct fix a lui Schauder, enunțată mai sus, este o extensie la spații normate a Teoremei lui Brouwer. Ea a fost demonstrată în 1927 de Juliusz Schauder pentru spații Banach cu bază Schauder. Această ipoteză a fost eliminată în 1930 [84]. Trebuie menționat că într-o lucrare publicată în 1922 [17], George Birkhoff și Oliver Kellogg extinseseră Teorema de punct fix a lui Brouwer pentru funcții continue pe mulțimi compacte și convexe din spații de funcții de tipul $C^k([a, b])$ sau $L^2(a, b)$. Ei au aplicat teorema lor de punct fix la studiul unor probleme la limită neliniare. De altfel, Schauder a dat și el aplicații la problema Cauchy pentru ecuații diferențiale ordinare și pentru anumite probleme la limită pentru ecuații cu derivate parțiale.

În literatură, Teorema lui Schauder apare și în alte variante. Amintim că o funcție $f : M \rightarrow X$ este compactă dacă este continuă și mulțimea $f(E)$ este relativ compactă pentru orice mulțime mărginită $E \subset M$. Dacă f este continuă și $f(M)$ este relativ compactă atunci f este compactă.

Teorema 4.9 *Fie M o mulțime închisă mărginită și convexă a spațiului normat X și $f : M \rightarrow M$ o funcție compactă. Atunci există $x \in M$ astfel încât $f(x) = x$.*

Teorema 4.10 *Fie A o mulțime convexă și închisă în spațiul normat X și f o funcție continuă de la A la o submulțime compactă a lui A . Atunci există $x \in A$ astfel încât $f(x) = x$.*

Să arătăm că cele trei variante prezentate mai sus sunt echivalente. Presupunem că este adevărată Teorema 4.8 și fie A și f ca în Teorema 4.10. Avem $f(A) \subset A_1$ (compactă), $A_1 \subset A$. Deci $f(A) \subset \overline{\text{conv}}(A_1) \subset A$. Deoarece A_1 este compactă, rezultă că $\overline{\text{conv}}(A_1)$ este compactă [49, p.84]. Aplicând Teorema 4.8 pentru $K = \overline{\text{conv}}(A_1)$, obținem concluzia. Presupunem acum că este adevărată Teorema 4.10 și demonstrăm Teorema 4.9. Fie M și f ca în Teorema 4.9. Funcția f fiind compactă și M fiind mărginită, rezultă că $\overline{f(M)}$ este compactă. Deoarece M este închisă, $\overline{f(A)} \subset M$. Rezultă deci concluzia Teoremei 4.9. În sfârșit, dacă presupunem că este adevărată Teorema 4.9, Teorema 4.8 rezultă ușor având în vedere că mulțimile compacte sunt închise și mărginite, iar funcțiile continue definite pe mulțimi compacte sunt compacte.

Demonstrația Teoremei 4.8 Mulțimea K fiind compactă, pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ există o $1/n$ -rețea finită $\{S(a; 1/n); a \in A_n\}$, unde A_n este finită, și câte o funcție continuă $\varphi_n : K \rightarrow X$, astfel încât

$$\|\varphi_n(x) - x\| < 1/n \quad \forall x \in K.$$

Pentru a demonstra acest fapt, definim $\varphi : K \rightarrow X$ prin

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{a \in A} \psi_a(x)a}{\sum_{a \in A} \psi_a(x)}$$

unde $\psi_a(x) = 0$ dacă $\|x - a\| \geq 1/n$ și $\psi_a(x) = 1/n - \|x - a\|$ dacă $\|x - a\| \leq 1/n$. Să arătăm că φ este continuă și

$$\|\varphi(x) - x\| < 1/n$$

pentru orice $x \in K$. Intr-adevăr, să observăm mai întâi că pentru orice $x \in A$ avem

$$\psi_a(x) \geq 0$$

iar pentru orice $x \in K$ avem

$$\sum_{a \in A} \psi_a(x) > 0.$$

Continuitatea lui φ rezultă din faptul că fiecare ψ_a este continuă. Dacă $x \in K$ atunci

$$\varphi(x) - x = \frac{\sum_{a \in A} \psi_a(x)(a - x)}{\sum_{a \in A} \psi_a(x)}.$$

Dacă $\psi_a(x) > 0$ atunci $\|x - a\| < 1/n$. Prin urmare

$$\|\varphi(x) - x\| \leq \frac{\sum_{a \in A} \psi_a(x)\|a - x\|}{\sum_{a \in A} \psi_a(x)} < 1/n.$$

Este clar că

$$\varphi_n(K) \subset \text{conv}(K) = K.$$

Deci $f_n = \varphi_n \circ f$ are proprietatea că $f_n(K) \subset K$. Avem în plus

$$\|f_n(x) - f(x)\| < 1/n, \quad \forall x \in K.$$

Fie acum X_n înfășurătoarea liniară a mulțimilor A_n și fie $\Omega_n = K \cap X_n$. Spațiul liniar X_n este finit dimensional, Ω_n este convexă și compactă în X_n iar $f_n : \Omega_n \rightarrow \Omega_n$ este continuă. Din Corolarul 4.2 rezultă că există $x_n \in \Omega_n$ astfel încât $f_n(x_n) = x_n$.

Deoarece $(f(x_n))$ este un șir din mulțimea compactă K , există un subșir convergent $(f(x_{k_n}))$ la $x_0 \in K$. Ținând cont de faptul că

$$f_{k_n}(x_{k_n}) = x_{k_n},$$

obținem

$$\|x_{k_n} - x_0\| \leq \|f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n})\| + \|f(x_{k_n}) - x_0\| \leq 1/k_n + \|f(x_{k_n}) - x_0\|,$$

ceea ce arată că $x_{k_n} \rightarrow x_0$. Deoarece f este continuă, $f(x_0) = \lim f(x_{k_n}) = x_0$, ceea ce încheie demonstrația. \square

Observația 4.4 În demonstrația de mai sus, în locul funcției φ_n se poate considera funcția de proiecție $P_n : X \rightarrow \Omega_n$. Problema care apare este că această funcție este bine definită și continuă în cazul spațiilor strict normate. Amintim că un spațiu normat este strict normat dacă $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ și $x \neq 0$ implică $y = tx$ pentru un $t \geq 0$. Deoarece Ω_n este compactă, există elemente $\omega_0 \in \Omega_n$ astfel încât

$$\|x - \omega_0\| = \inf\{\|x - \omega\|; \omega \in \Omega_n\}.$$

Având în vedere că X este strict normat și Ω_n este convexă, rezultă unicitatea lui ω_0 . Dar pentru orice spațiu normat separabil X , există o normă echivalentă față de care X este strict normat. În sfârșit, condiția de separabilitate nu deranjează în problema noastră pentru că se poate lucra cu înfășurătoarea liniară a mulțimii K în locul lui X , înfășurătoare care este spațiu separabil deoarece K este compactă.

Să prezentăm în continuare câteva exemple tipice de operatori compacți în spații Banach infinit dimensionale. Este ușor de văzut că în spații finit dimensionale mulțimea operatorilor compacți coincide cu cea a operatorilor continui. Rezultatul central folosit în continuare este Teorema Arzelà-Ascoli.

Teorema 4.11 (Arzelà-Ascoli) *O submulțime K în $C([a, b]; X)$, unde X este spațiu Banach, este relativ compactă dacă și numai dacă mulțimea K este echicontinuă pe $[a, b]$ și pentru fiecare $t \in [a, b]$ secțiunea lui K în t , adică mulțimea $K(t) = \{f(t); f \in K\}$, este relativ compactă în X . Rezultatul este adevărat dacă mulțimea $K(t)$ este relativ compactă pentru t într-o mulțime densă din $[a, b]$.*

În 1889 Cesare Arzelà [3] a demonstrat necesitatea condiției de compactitate iar în 1882-1883 Guido Ascoli [4] a demonstrat suficiența, ambele în $C[a, b] = C([a, b]; \mathbf{R})$. Rezultatul are loc și dacă în loc de $[a, b]$ avem un spațiu compact. În cazul $X = \mathbf{R}$,

condiția ca mulțimile $K(t)$ să fie relativ compacte este echivalentă cu mărginirea în $C[a, b]$. Demonstrația pentru cazul când X este spațiu Banach este esențial aceeași ca în cazul în care $X = \mathbf{R}$. O submulțime S în $C(K)$ este *echicontinuă* dacă pentru orice $x \in K$ și orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate $U_{x,\varepsilon}$ a lui x astfel încât

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

pentru orice $f \in S$ și $y \in U_{x,\varepsilon}$.

Exemplul 4.1 Fie funcția continuă $K : [a, b] \times [a, b] \times [-R, R] \rightarrow \mathbf{R}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ și $R > 0$. Fie $M = \{x \in C[a, b]; \|x\| \leq R\}$ unde pe $C[a, b]$ considerăm norma uzuală $\|x\| = \sup\{|x(t)|; t \in [a, b]\}$. Operatorii $T, S : M \rightarrow C[a, b]$ definiți prin

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t, s, x(s))ds, \quad (Sx)(t) = \int_a^t K(t, s, x(s))ds$$

sunt compacti. Vom face demonstrația pentru S .

Deoarece mulțimea $A = [a, b] \times [a, b] \times [-R, R]$ este compactă, K este mărginită și uniform continuă pe A . Există $\alpha > 0$ cu $|K(t, s, x)| \leq \alpha$ pentru $(t, s, x) \in A$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$|K(t_1, s_1, x_1) - K(t_2, s_2, x_2)| < \varepsilon$$

pentru $(t_i, s_i, x_i) \in A$, $i = 1, 2$, cu

$$|t_1 - t_2| + |s_1 - s_2| + |x_1 - x_2| < \delta.$$

Deci

$$|(Sx)(t)| \leq \alpha(b - a)$$

pentru orice $t \in [a, b]$ și

$$|(Sx)(t_1) - (Sx)(t_2)| \leq (b - a + \alpha)\varepsilon$$

pentru

$$|t_1 - t_2| \leq \min\{\delta, \varepsilon\}.$$

Folosim Teorema Arzelà-Ascoli și deducem că mulțimea $S(M)$ este relativ compactă. Proprietatea de continuitate a operatorului S rezultă prin trecere la limită sub integrală.

Ca aplicație, considerăm ecuația integrală neliniară

$$x(t) = \gamma \int_a^b F(t, s, x(s))ds + \int_a^b G(t, s, x(s))ds. \quad (4.7)$$

Considerăm $A = \{(t, s, x); t, s \in [a, b], |x| \leq R\}$, $a, b, R > 0$, și presupunem că funcțiile $F, G : A \rightarrow \mathbf{R}$ sunt continue, cu $|G(t, s, x)| \leq K|x|^p$ pe A , $p > 1$, $K > 0$. Atunci există $\gamma_0 > 0$ astfel încât ecuația (4.7) are soluție continuă pe $[a, b]$ pentru fiecare γ cu $|\gamma| \leq \gamma_0$. Pentru demonstrație, se alege r suficient de mic astfel încât, notând

$$M = \{x \in C[a, b]; \|x\| \leq R\},$$

să avem $T(M) \subset M$, unde T este operatorul definit prin membrul drept al ecuației. Compactitatea lui T și Teorema lui Schauder rezolvă problema.

Exemplul 4.2 Fie X spațiu Banach, $(t_0, \xi) \in \mathbf{R} \times X$, $a, b > 0$, $c \in (0, a]$ și

$$P = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times X; |t - t_0| \leq a, \|x - \xi\| \leq b\}.$$

Presupunem că $f : P \rightarrow X$ este compactă și $\|f(t, x)\| \leq k$ pentru $(t, x) \in P$. Operatorul $F : M \rightarrow X$, unde

$$M = \{x \in C([t_0 - c, t_0 + c]; X); \max_{t \in [t_0 - c, t_0 + c]} \|x(t) - \xi\| \leq b\},$$

definit prin

$$(Fx)(t) = \xi + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds$$

este compact. Intr-adevăr, mulțimea $F(M)$ este relativ compactă:

$$\|(Fx)(t) - (Fx)(s)\| \leq k|t - s|$$

pentru $t, s \in [t_0 - c, t_0 + c]$ iar valorile sunt în mulțimea compactă

$$\xi + (t - t_0)\overline{\text{conv}}\{f(s, x(s)); s \in [t_0 - c, t_0 + c]\}.$$

Continuitatea este imediată.

O aplicație importantă a acestui fapt este *Teorema lui Peano în spații Banach*. Se consideră ecuația diferențială în spațiul Banach X ,

$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad x(t_0) = \xi. \quad (4.8)$$

Rezultatul clasic al lui Peano afirmă că, dacă $X = \mathbf{R}^n$ și f este continuă, atunci ecuația (4.8) are cel puțin o soluție. În spații infinit dimensionale rezultatul nu mai este adevărat fără condiții suplimentare asupra lui f . O astfel de condiție este ca f să fie compactă.

Teorema 4.12 *In condițiile date în Exemplul 4.2, luăm $c = \min\{a, b/k\}$. Atunci ecuația diferențială (4.8) are soluție pe $[t_0 - c, t_0 + c]$.*

Demonstrație. Se aplică Teorema de punct fix a lui Schauder operatorului F definit mai sus. Se constată cu ușurință că $F(M) \subset M$. \square

Exemplul 4.3 Fie X și U spații Banach, $S(t)$, $t \geq 0$, un semigrup de clasă C_0 pe X și $B \in L(U, X)$. Fixăm $T > 0$, notăm $I = [0, T]$ și pentru $p > 1$ definim operatorii $F_T : L^p(I; X) \rightarrow X$ și $G_T : L^p(I; U) \rightarrow X$ prin

$$F_T x = \int_0^T S(T-s)x(s)ds, \quad G_T u = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds.$$

În teorema care urmează dăm condiții care asigură compactitatea operatorilor F_T și G_T .

Teorema 4.13 (i) *Dacă $S(t)$ este operator compact pentru fiecare $t > 0$ atunci operatorul F_T este compact.*

(ii) *Dacă B este compact atunci operatorul G_T este compact.*

Demonstrație. Vom face demonstrația pentru $p = 2$, cazul general se adaptează ușor. Să demonstrăm (i). Este suficient să demonstrăm că mulțimea $F_T(P)$ este relativ compactă în X unde

$$P = \{x \in L^2(I; X); \|x\| \leq \alpha\}.$$

Notăm $K = F_T(P)$,

$$K(t) = \left\{ \int_0^t S(t-s)x(s)ds; x \in P \right\}, \quad 0 < t \leq T$$

și observăm că există $\gamma > 0$ astfel încât $\|S(t)\| \leq \gamma$ pentru orice $t \in I$. Pentru $0 < \varepsilon < T$ definim

$$K_\varepsilon = S(\varepsilon)K(T - \varepsilon).$$

Deoarece $K(T - \varepsilon)$ este mărginită în X și $S(\varepsilon)$ este operator compact, urmează că mulțimea K_ε este relativ compactă. Acest fapt, împreună cu inegalitatea

$$\|F_T x - \int_0^{T-\varepsilon} S(T-s)x(s)ds\| \leq \gamma\alpha\sqrt{\varepsilon}$$

arată că mulțimea K este total mărginită, deci este relativ compactă în X .

Să demonstrăm acum (ii). Pentru aceasta folosim un rezultat al lui Juliusz Schauder din 1930:

Un operator liniar continuu de la un spațiu Banach la un spațiu Banach este compact dacă și numai dacă adjunctul lui este compact.

Se vede ușor că

$$G_T^* : X^* \rightarrow L^2(I; U^*) \subset (L^2(I; U))^*$$

este dat de $G_T^*(y) = B^*S(\cdot)^*y$ pentru orice $y \in X^*$. Atragem atenția că nu identificăm $L^2(I; U^*)$ cu $(L^2(I; U))^*$. Identificarea este posibilă în condiții suplimentare pentru X (de exemplu, reflexivitatea). De asemenea, $S(t)^*$ nu este numaidecât semigrup de clasă C_0 . Totuși, funcția $t \mapsto \|B^*S(t)^*y\|$ este măsurabilă și se verifică o inegalitate de tipul $\|S(t)^*\| \leq M \exp(\omega t)$, deci operatorul G^* este bine definit. Cititorul poate găsi informații despre semigrupul adjunct în [95].

Să arătăm deci că operatorul G_T^* de la X^* la $L^2(I; U^*)$, definit mai sus, este compact. Observăm întâi că funcția $t \mapsto B^*S(t)^*$ (cu valori în $L(X^*; U^*)$) este continuă în orice punct $t \geq 0$. Intr-adevăr, avem

$$\|B^*S(t)^* - B^*S(s)^*\| = \|(S(t) - S(s))B\|$$

care tinde la zero pentru $t \rightarrow s$ pentru că

$$\lim_{t \rightarrow s} (S(t) - S(s))x = 0$$

pentru orice $x \in X$, deci pe compacte convergența este uniformă (în particular pe $\{Bu : \|u\| \leq 1\}$). Arătăm acum că mulțimea $J = \{G_T^*y; y \in X^*, \|y\| \leq 1\}$ este relativ compactă în $L^2(I; U^*)$, ceea ce este echivalent cu faptul că are o ε -rețea finită pentru orice $\varepsilon > 0$. Din continuitatea funcției $t \mapsto B^*S(t)^*$, există o divizare $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ a intervalului $[0, T]$ astfel încât

$$\|B^*S(t)^* - B^*S(s)^*\| < \varepsilon/2\sqrt{T}$$

pentru orice $t, s \in \Delta_i$, $i = 1, \dots, n$. De aici se obține că mulțimea

$$J_\varepsilon = \{j(y) = \sum_{i=1}^n B^*S(T - t_i)^*y\chi_{\Delta_i}; \|y\| \leq 1, y \in X^*\}$$

este o $\varepsilon/2$ -rețea pentru J , unde $t_i \in \Delta_i$ sunt puncte fixate. Rămâne să găsim o $\varepsilon/2$ -rețea finită pentru J_ε . Pentru aceasta, observăm că aplicația

$$y \mapsto \alpha(y) = (B^*S(T - t_1)^*y, \dots, B^*S(T - t_n)^*y)$$

de la X^* în spațiul $U^* \times \cdots \times U^*$ este compactă. Deci există o $\varepsilon/2\sqrt{T}$ -rețea finită a mulțimii $\{\alpha(y); \|y\| \leq 1\}$, fie aceasta $\alpha(y_1), \dots, \alpha(y_m)$. Pentru orice $y \in X^*$ cu $\|y\| \leq 1$ există k astfel încât

$$\|\alpha(y) - \alpha(y_k)\| < \varepsilon/2\sqrt{T},$$

ceea ce implică

$$\|j(y) - j(y_k)\|_{L^2(I; U^*)} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} \|B^*S(T-t_i)^*y - B^*S(T-t_i)^*y_k\|^2 dt \right)^{1/2} < \varepsilon/2.$$

Prin urmare, $\{j(y_i); i = 1, \dots, m\}$ este o ε -rețea finită pentru J . □

Observația 4.5 Se poate demonstra un rezultat mai general. Pentru $p > 1$, considerăm operatorii $F : L^p(I; X) \rightarrow C(I; X)$ și $G : L^p(I; U) \rightarrow C(I; X)$ definiți prin

$$(Fx)(t) = \int_0^t S(t-s)x(s)ds, \quad (Gu)(t) = \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

Dacă $S(t)$ este compact pentru orice $t > 0$ atunci F este compact. Dacă B este compact atunci G este compact. Nu vom intra în detalii, doar precizăm că, din cele arătate mai sus, mulțimile $\{(Fx)(t); x \in P\}$ sunt relativ compacte în X pentru orice $t \in [0, T]$. Pentru a încheia demonstrația, utilizăm Teorema Arzelà-Ascoli, dar mai e nevoie de verificarea proprietății de echicontinuitate. Cititorul poate obține detalii din [95, Teorema 6.2.1]. La fel se procedează și pentru G . Vezi și Observația 4.10.

Observația 4.6 O proprietate remarcabilă a operatorilor compacți $V \in L(X, Y)$, unde X și Y sunt spații Banach, iar X este infinit dimensional, este că nu sunt surjectivi. Intr-adevăr, dacă V este surjectiv atunci pe baza principiului aplicațiilor deschise, Teorema 3.1, există $\delta > 0$ astfel încât $B(0, 1) \subset VB(0, \delta)$. Compactitatea lui V implică compactitatea mulțimii $B(0, 1)$, ceea ce este imposibil dacă X este infinit dimensional. Acest fapt are implicații la controlabilitatea exactă a sistemelor liniare infinit dimensionale. Vezi Observația 3.4. O altă implicație este aceea că operatorul F_T nu este compact pentru $p = 1$, deoarece este surjectiv pentru orice semigrup $S(t)$. Intr-adevăr, avem

$$\sup_{t \in [0, T]} \|S(t)^*y\| \geq \|y\| \quad \forall y \in X^*,$$

ceea ce exprimă faptul că adjunctul lui $F_T : L^1(I; X) \rightarrow X$ are invers mărginit pe imaginea sa, deci F_T este surjectiv. Vezi și Observația 3.1.

O altă aplicație a Teoremei de punct fix a lui Schauder este următorul rezultat, numit Principiul Leray-Schauder.

Teorema 4.14 *Fie X un spațiu Banach și $T : X \rightarrow X$ un operator compact. Presupunem că are loc estimarea a priori: există $r > 0$ astfel încât dacă $x = tTx$ cu $t \in (0, 1)$ atunci $\|x\| \leq r$. În aceste condiții, T are punct fix.*

Demonstrație. Definim funcția $f : B(0, 2r) \rightarrow B(0, 2r)$ prin

$$f(x) = \begin{cases} Tx & \text{dacă } \|Tx\| \leq 2r \\ \frac{2rTx}{\|Tx\|} & \text{dacă } \|Tx\| > 2r. \end{cases}$$

Arătăm că funcția f este compactă. Este clar că putem aplica apoi Teorema 4.9 pentru a deduce că există $x \in B(0, 2r)$ astfel încât $f(x) = x$. Într-adevăr, dacă $\|Tx\| \leq 2r$, atunci $Tx = x$. Cazul $\|Tx\| > 2r$ este imposibil deoarece ar rezulta $f(x) = tTx = x$ cu $t = 2r/\|Tx\|$, ceea ce conduce la $\|x\| \leq r$, din ipoteză, și la $\|x\| = \|f(x)\| = 2r$, din definiția lui f . Să arătăm așadar că funcția f este compactă. Este evident continuă. Fie $(x_n) \in B(0, 2r)$. Dacă există un subșir (y_n) pentru care $\|Ty_n\| \leq 2r$ pentru orice n , din compactitatea lui T va exista un subșir (z_n) pe care T , și deci f , va converge. Dacă există un subșir (y_n) pentru care $\|Ty_n\| > 2r$ pentru orice n , atunci există un subșir (z_n) pentru care $1/\|T(z_n)\| \rightarrow p$ și $T(z_n) \rightarrow y$. Prin urmare, $f(z_n) \rightarrow 2rpy$. \square

Să observăm ca nu se presupune că ecuația $x = tTx$ are o soluție pentru $0 < t < 1$. Să observăm, de asemenea, că estimarea a priori este satisfăcută în cazul în care mulțimea $T(X)$ este mărginită. Teorema de mai sus a fost demonstrată în 1934 [58] de Jean Leray și Juliusz Schauder. Ea corespunde următorului principiu: *Estimări a priori conduc la existență*. Ca aplicație, în [58] se dau rezultate de existență pentru problema Dirichlet

$$A_{11}u_{xx} + 2A_{12}u_{xy} + A_{22}u_{yy} = 0 \text{ pe } D, \quad u = g \text{ pe } \text{Fr}(D),$$

unde A_{ij} sunt funcții de forma $A_{ij} = A_{ij}(x, y, u, u_x, u_y)$. Pentru a aplica o teoremă de punct fix, se consideră $A_{ij} = A_{ij}(x, y, z, z_x, z_y)$ cu z fixat și se obține o ecuație liniară în u cu soluția $u = Tz$. Un punct fix pentru T este soluție a problemei neliniare. Pentru a aplica Teorema 4.14 se introduce parametrul $t \in (0, 1)$ prin condiția la frontieră $u = tg$ pe $\text{Fr}(D)$, astfel că problema inițială se reduce la rezolvarea ecuației $u = tTu$ pentru $t = 1$.

Incheiem această secțiune cu

Teorema 4.15 (Ky Fan) *Fie K o mulțime convexă și compactă în spațiul Banach X și $f : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție care satisface condițiile*

- (i) *Pentru orice $y \in K$ funcția $f(\cdot, y)$ este inferior semicontinuuă;*
- (ii) *Pentru orice $x \in K$ funcția $f(x, \cdot)$ este concavă;*
- (iii) *Pentru orice $y \in K$ avem $f(y, y) \leq 0$.*

Atunci există $u \in K$ astfel încât

$$f(u, y) \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

Demonstrație. Prin reducere la absurd, presupunem că pentru orice $x \in K$ există $y \in K$ astfel încât $f(x, y) > 0$. Mulțimea K se poate acoperi cu mulțimile deschise

$$D_y = \{x \in K; f(x, y) > 0\}.$$

Deoarece mulțimea K este compactă, ea se poate acoperi cu un număr finit $D_{y_i}, i = 1, \dots, n$. Fie $\{p_i, i = 1, \dots, n\}$ o partiție a unității subordonate acestei acoperiri și fie funcția $g : K \rightarrow X$ definită prin

$$g(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x)y_i.$$

Aplicând Teorema 4.8, există $v \in K$ astfel încât $g(v) = v$. Din (ii) deducem

$$f(v, v) = f(v, \sum_{i=1}^n p_i(v)y_i) \geq \sum_{i=1}^n p_i(v)f(v, y_i).$$

Este clar că dacă i este astfel încât $p_i(v) > 0$ atunci $v \in D_{y_i}$ și deci $f(v, y_i) > 0$. Se contrazice astfel (iii). \square

Observația 4.7 Rezultatul prezentat mai sus, demonstrat în [56] (1972) și cunoscut în literatură sub numele *Inegalitatea lui Ky Fan*, poate fi interpretat ca un rezultat de existență pentru o inegalitate variațională (generalizată). Vezi și Teorema 5.11 unde Inegalitatea lui Ky Fan se utilizează pentru demonstrație. După cum s-a văzut, demonstrația se bazează pe Teorema de punct fix a lui Schauder. Este interesant că în spații Hilbert se poate demonstra ușor și reciproca: Inegalitatea lui Ky Fan implică Teorema 4.8. Intr-adevăr, dacă $h : K \rightarrow K$ este continuă atunci funcția definită prin $f(x, y) = \langle h(x) - x, y - x \rangle$ satisface ipotezele din Inegalitatea lui Ky Fan. Rezultă că există $\bar{x} \in K$ astfel încât $f(\bar{x}, y) \leq 0$, pentru orice

$y \in K$. Se deduce de aici că \bar{x} este punct fix pentru h . Precizăm că se poate obține un rezultat aparent mai tare și anume:

In condițiile (i) și (ii) avem

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in X} f(x, y) \leq \sup_{x \in X} f(x, x).$$

Să prezentăm o aplicație simplă în matematica economică. Considerăm un sistem economic cu n producători, P_1, \dots, P_n . Producătorul P_i fabrică un număr a_i de produse G_i cu prețul p_i pentru fiecare. Fie $D_{ij}(p)$ cererea de către producătorul P_i pentru produsul G_j . Dorim să găsim un sistem rezonabil de prețuri $p = (p_1, \dots, p_n)$, în ipoteza

$$p_i a_i = \sum_{j=1}^n p_j D_{ij}(p), \quad D_{ii}(p) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Condiția de mai sus spune că producătorii folosesc toate veniturile ca să obțină alte produse. Avem următorul rezultat:

Există un sistem de prețuri $\bar{p} > 0$ astfel încât

$$a_j \geq \sum_{i=1}^n D_{ij}(\bar{p}) \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Interpretarea este următoarea: există un sistem de prețuri pentru care cererea este mai mică sau egală cu oferta. Pentru demonstrație, se consideră

$$X = \{p \in \mathbf{R}^n; p \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$$

$$F_j(p) = \sum_{i=1}^n D_{ij}(p), \quad f(p, q) = \langle p, F(q) \rangle - \langle p, q \rangle. \quad \text{🗨️}$$

Ipoteza pusă asigură că $f(p, p) = 0$ pentru orice $p \in X$, deci există $\bar{p} \in X$ cu $f(\bar{p}, q) \leq 0$ pentru orice $q \in X$. Acest fapt conduce la $F(\bar{p}) \leq a$, ceea ce trebuia demonstrat.

4.4 Teoreme de punct fix pentru multifuncții

Incepem această secțiune cu o generalizare a Teoremei de punct fix a lui Banach. Amintim că

$$\delta(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A)\}$$

definește metrica Pompeiu-Hausdorff.

Teorema 4.16 Fie $F : X \rightsquigarrow X$ o multifuncție cu valori nevide și închise pe spațiul metric complet (X, ρ) . Presupunem că există $0 < k < 1$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ avem

$$\delta(F(x), F(y)) \leq k\rho(x, y).$$

Atunci F are cel puțin un punct fix $u \in X$ (adică $u \in F(u)$).

Demonstrație. Alegem un r astfel încât $k < r < 1$, luăm $x_0 \in X$ și apoi alegem $x_1 \in F(x_0)$ cu $\rho(x_0, x_1) > 0$. Avem

$$d(x_1, F(x_1)) \leq \delta(F(x_0), F(x_1)) < r\rho(x_0, x_1),$$

deci există $x_2 \in F(x_1)$ cu $\rho(x_2, x_1) < r\rho(x_0, x_1)$. Repetând procedeul, determinăm un șir (x_n) astfel încât

$$x_{n+1} \in F(x_n), \quad \rho(x_n, x_{n+1}) < r^n \rho(x_0, x_1), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

De aici, prin procedeul standard utilizat în demonstrația Teoremei 4.1, obținem că șirul (x_n) este convergent la un element $u \in X$. Să arătăm că acesta este punctul fix căutat. Intr-adevăr, aceasta rezultă din

$$d(x_{n+1}, F(u)) \leq \delta(F(x_n), F(u)) \leq k\rho(x_n, u) \rightarrow 0$$

și din faptul că mulțimea $F(u)$ este închisă. □

Teorema de mai sus a fost demonstrată de Sam B. Nadler Jr. în 1969 [70]. Este interesant că, spre deosebire de cazul funcțiilor, punctul fix poate să nu fie unic. Cazul banal este când F este constantă, dar Jean Saint Raymond a demonstrat în 1994 [82] următorul rezultat:

Fie C este o submulțime convexă și închisă a unui spațiu Banach X și contractia $F : C \rightsquigarrow C$ cu valori închise. Dacă x_0 este punct fix și $F(x_0)$ are cel puțin două elemente, atunci există un punct fix al lui F diferit de x_0 .

Continuăm cu Teorema de punct fix a lui Kakutani. Înainte de a da această importantă teoremă, să amintim câteva lucruri despre șirurile generalizate. Pentru detalii se poate consulta [79, p.225]. Dacă pe I este definită o preordine (relație reflexivă și tranzitivă) atunci, spunem că I este dirijată dacă pentru $i_1, i_2 \in I$ există $i_3 \in I$ încât $i_1 \preceq i_3$ și $i_2 \preceq i_3$. Un șir generalizat în X este o funcție de la o mulțime dirijată de indici la X . Se notează $(x_i)_{i \in I}$ sau doar (x_i) . Șirurile generalizate se mai numesc șiruri Moore-Smith după numele celor care le-au introdus în 1922: Eliakim H. Moore și Henry L. Smith [69]. Teoria generală a limitelor dezvoltată de Moore și Smith a fost făcută independent și de Mauro Picone într-o carte care a apărut anul

următor [75]. Termenul englezesc este "net" utilizat pentru prima dată de John L. Kelley în 1950. Un element $x_0 \in X$ este punct limită pentru șirul (x_i) , dacă pentru fiecare vecinătate V a lui x_0 și pentru fiecare $i \in I$ există $j \in I$ cu $i \preceq j$ astfel încât $x_j \in V$. Amintim următorul rezultat:

O mulțime K este compactă dacă și numai dacă fiecare șir generalizat din K are un punct limită în K .

Teorema 4.17 *Fie K o mulțime convexă și compactă dintr-un spațiu local convex separat X . Fie $F : K \rightsquigarrow K$ o multifuncție superior semicontinuuă cu valori nevide închise și convexe. Atunci există $x_0 \in K$ astfel încât $x_0 \in F(x_0)$.*

Demonstrație. Fie $\{V_i; i \in I\}$ un sistem fundamental de vecinătăți deschise convexe echilibrate și absorbante pentru originea lui X . Pentru i fixat, deoarece K este compactă, există $J(i)$, mulțime finită, și $x_{ij}, j \in J(i)$ astfel încât familia $\{x_{ij} + V_i; j \in J(i)\}$ este o acoperire deschisă a lui K . Fie $\{p_{ij}; j \in J(i)\}$ o partiție a unității subordonate ei, și fie funcția $f_i : K \rightarrow X$ definită prin

$$f_i(x) = \sum_{j \in J(i)} p_{ij}(x)y_{ij},$$

unde y_{ij} este un element oarecare în $F(x_{ij})$. Mulțimea

$$K_i = \text{conv}\{y_{ij}; j \in J(i)\}$$

este convexă și compactă în spațiul finit dimensional generat de $\{y_{ij}; j \in J(i)\}$, f_i este continuă, $f_i(K_i) \subset K_i$, și deci, aplicând Teorema de punct fix a lui Brouwer, există $x_i \in K_i$ cu $f_i(x_i) = x_i$. Se obține astfel un șir generalizat $(x_i)_{i \in I}$, unde pe I introducem ordinea $i \preceq j$ dacă $V_j \subset V_i$. Din proprietățile sistemului de vecinătăți, rezultă ușor că I este dirijată. Deoarece mulțimea K este compactă, șirul generalizat (x_i) are un punct limită $x_0 \in K$. Vom arăta că acesta este punctul fix căutat. Prin reducere la absurd, presupunem că $x_0 \notin F(x_0)$. Aplicăm o teoremă de separare a mulțimilor convexe prin hiperplane [79, p.111], [101, p.24] și deducem că există o mulțime convexă și deschisă W , cu $W \supset F(x_0)$ și $x_0 \notin W$. Se aplică acum proprietatea de semicontinuitate a multifuncției F și deducem că există V , vecinătate a lui x_0 , astfel încât $F(x) \subset W$ pentru $x \in V$. Se poate evident lua V și cu proprietatea

$$V \cap W = \emptyset.$$

Mai departe, $V - x_0$ este vecinătate a originii și deci există $i \in I$ astfel încât

$$V_i + V_i \subset V - x_0.$$

Folosim acum proprietatea că x_0 este punct limită pentru șirul (x_i) și deducem că există $j \succeq i$ (prin urmare $V_j \subset V_i$) cu $x_j \in x_0 + V_i$. Deci

$$x_j + V_j \subset x_0 + V_i + V_i \subset V.$$

Reținem deci că există $j \in I$ cu $x_j + V_j \subset V$. Vom arăta că $x_j \in W$, ceea ce este fals. Intr-adevăr, avem

$$x_j = f_j(x_j) = \sum_{\alpha \in J(j)} f_{j\alpha}(x_j)y_{j\alpha} \in W$$

deoarece, dacă $f_{j\alpha}(x_j) > 0$, atunci $x_j \in x_{j\alpha} + V_j$, deci $x_{j\alpha} \in V$ și deci $y_{j\alpha} \in W$ iar W este convexă. Demonstrația este terminată. \square

Shizuo Kakutani a demonstrat acest rezultat în 1941 în cazul finit dimensional [48]. Trebuie menționat însă că o versiune echivalentă cu cea a lui Kakutani fusese obținută în 1937 de John von Neumann [97] (vezi Problema 6.45). În cazul spațiilor local convexe ea a fost obținută independent în 1952 de Ky Fan [55] și Irving L. Glicksberg [38]. Demonstrația lui Glicksberg se bazează pe rezultatul lui Kakutani. Menționăm că Glicksberg pune ipoteza ca multifuncția F să aibă grafic închis ceea ce, în condițiile date, este echivalentă cu semicontinuitatea superioară (vezi Capitolul 2). Menționăm de asemenea că Frederic Bohnenblust și Samuel Karlin [19] (1950) demonstrează o variantă a acestei teoreme în spații Banach. Toate aceste rezultate sunt cazuri particulare ale unei teoreme obținute de Edward G. Begle [14] în 1950, într-un cadru mai general, chiar neconvex.

Corolarul 4.3 (Bohnenblust și Karlin) *Fie M o mulțime nevidă închisă și convexă în spațiul Banach X , $F : M \rightsquigarrow M$ o multifuncție superior semicontinuuă cu valori nevide închise și convexe și $F(M)$ relativ compactă. Atunci F are punct fix.*

Demonstrația este imediată dacă aplicăm Teorema 4.17 mulțimii

$$K = \overline{\text{conv}}F(M) \subset M.$$

În cazul când F este funcție, se regăsește Teorema de punct fix a lui Tikhonov publicată în 1935 [91].

Corolarul 4.4 (Tikhonov) *Fie $f : K \rightarrow K$ o funcție continuă, unde K este nevidă compactă și convexă într-un spațiu local convex separat. Atunci f are punct fix.*

Când K este submulțime a unui spațiu Banach, rezultatul aparține lui Schauder, obținut în 1930 [84] (vezi Teorema 4.9). Este interesant de menționat că Schauder obține în 1927 [83] o variantă apropiată de cazul local convex și anume

Corolarul 4.5 Fie X un spațiu Banach reflexiv și separabil, fie $M \subset X$ o mulțime nevidă convexă închisă și mărginită și fie $f : M \rightarrow M$ o funcție slab secvențial continuă. Atunci f are punct fix.

Demonstrația se poate face aplicând Corolarul 4.4 când X este înzestrat cu topologia slabă. În acest cadru M este slab compactă, topologia slabă pe M este metrizabilă iar f este continuă.

Prezentăm acum un rezultat, al lui Felix E. Browder din 1968 [23], util la demonstrarea existenței soluțiilor unor inegalități variaționale (Problema 6.48) sau în probleme de minimax (Teorema 5.13).

Teorema 4.18 (Browder) Fie K o mulțime nevidă compactă și convexă a unui spațiu liniar topologic X și fie $F : K \rightsquigarrow K$ o multifuncție cu valori nevide și convexe. Presupunem că $F^{-1}(y)$ este deschisă în K pentru orice $y \in K$. Atunci F are punct fix.

Demonstrație. Deoarece mulțimea K este compactă, există y_1, y_2, \dots, y_n puncte în K astfel încât familia $\{F^{-1}(y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ este o acoperire pentru K . Fie $\{p_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ o partiție a unității subordonate ei,

$$K_0 = \text{conv}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$$

și

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x)y_i, \quad x \in K_0.$$

Funcția f este continuă, $f(K_0) \subset K_0$, deci putem aplica Teorema de punct fix a lui Brouwer în spațiul finit dimensional generat de y_1, y_2, \dots, y_n . Fie $x_0 \in K_0$ astfel încât $f(x_0) = x_0$. Vom arăta că $x_0 \in F(x_0)$ dovedind că $f(x) \in F(x)$ pentru $x \in K_0$. Într-adevăr, dacă $p_i(x) > 0$ atunci $x \in F^{-1}(y_i)$, deci $y_i \in F(x)$. Cum $F(x)$ este convexă rezultă că $f(x) \in F(x)$, ceea ce încheie demonstrația. \square

Observația 4.8 Demonstrația teoremei de mai sus poate face apel și la Teorema de punct fix a lui Schauder. Mai precis, funcția f este de fapt o selecție continuă a lui F , selecție ce îndeplinește condițiile Teoremei lui Schauder.

4.5 Ecuatii semiliniare în spații Banach

În acest paragraf vom prezenta rezultate de existență pentru ecuații semiliniare în spații infinite dimensionale, folosind teoreme de punct fix.

Fie X un spațiu Banach, A generatorul unui semigrup de clasă C_0 pe X , notat $S(t)$, $t \geq 0$, și funcția $f : X \rightarrow X$. Considerăm ecuația diferențială

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)), \quad y(0) = x. \quad (4.9)$$

O funcție $y \in C(I; X)$, unde $I = [0, T]$, se numește soluție continuă (pe scurt, *soluție*) a ecuației (4.9) dacă y satisface ecuația integrală

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(y(s))ds, \quad t \in I.$$

Teorema 4.19 *Dacă f este lipschitziană pe X atunci, pentru orice $x \in X$ și orice $T > 0$, ecuația (4.9) are soluție unică pe $[0, T]$.*

Demonstrație. Fixăm $x \in X$ și $T > 0$, notăm $I = [0, T]$ și definim operatorul F pe $C(I, X)$ prin

$$(Fy)(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(y(s))ds. \quad (4.10)$$

Pentru $y, z \in C(I; X)$ și $t \in I$, definim

$$\rho_t(y, z) = \sup_{s \in [0, t]} \|y(s) - z(s)\|.$$

Fie L constanta Lipschitz pentru f și K o constantă pentru care are loc

$$\sup_{t \in I} \|S(t)\| \leq K.$$

Este ușor de verificat că, pentru $n \in \mathbf{N}$ și $t \in I$, avem

$$\rho_t(F^n y, F^n z) \leq \frac{(LKt)^n}{n!} \rho_t(y, z).$$

De aici rezultă că, pentru n suficient de mare, F^n este o contracție. Din Corolarul 4.1 rezultă că F are punct fix unic în $C(I, X)$, care este unica soluție a ecuației (4.9). \square

Observația 4.9 Deoarece T este arbitrar, soluția poate fi continuată pe $[0, \infty)$. Menționăm că, utilizând aceeași tehnică de demonstrație, se pot obține variante mai generale. De exemplu, dacă f este lipschitziană pe mulțimi mărginite, atunci se obține soluție locală. De asemenea, se poate considera f depinzând și de t (continuu), sau se poate perturba ecuația (4.9) cu o funcție $g \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty), X)$.

În cazul în care X este reflexiv și $x \in D(A)$, soluția dată de Teorema 4.19 este clasică.

Teorema 4.20 Fie X spațiu Banach reflexiv, f lipschitziană pe X , $x \in D(A)$, $T > 0$ și $y \in C([0, T]; X)$ o soluție a ecuației (4.9). Atunci $y \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; X)$ și $y'(t) = Ay(t) + f(y(t))$ pentru orice $t \in [0, T]$.

Demonstrație. Nu vom intra în detalii ci vom prezenta doar etapele importante. Se verifică mai întâi că $y : [0, T] \rightarrow X$ este lipschitziană și deci $f \circ y : [0, T] \rightarrow X$ este lipschitziană. Rezultă că $f \circ y \in W^{1, \infty}([0, T]; X)$ ceea ce conduce la concluzie. Pentru detalii se poate consulta [95, cap.6] sau [26]. \square

Revenind la Teorema 4.19, ipoteza că f este lipschitziană poate fi slăbită, dacă se impune o ipoteză mai tare asupra semigrupului. Mai precis, dacă $S(t)$ este semigrup compact, adică dacă operatorul $S(t)$ este compact pentru orice $t > 0$, atunci se poate aplica teorema de punct fix a lui Schauder operatorului F definit mai sus.

Teorema 4.21 Presupunem că A generează un semigrup compact iar f este continuă și mărginită pe mulțimi mărginite. Atunci, pentru fiecare $x \in X$, există $T > 0$ astfel încât ecuația (4.9) are o soluție $y \in C([0, T]; X)$.

Demonstrație. Din ipoteză, există $\alpha > 0$ astfel încât $\|f(\xi)\| \leq \alpha$ pentru $\xi \in B(x, 1)$. În plus, din proprietățile semigrupului, există $\tau > 0$ astfel încât $\|S(t)x - x\| < 1/2$ pentru orice $t \in [0, \tau]$, și există $\beta \geq 1$ astfel încât $\|S(t)\| \leq \beta$ pentru orice $t \in [0, \tau]$. Definim $T = \min\{\tau, 1/2\alpha\beta\}$, $I = [0, T]$ și

$$M = \{y \in C(I; X); y(t) \in B(x, 1), \forall t \in [0, T]\}.$$

Este imediat că M este submulțime închisă mărginită și convexă a spațiului $C(I; X)$. Definim operatorul F pe M prin (4.10) și observăm că $F(M) \subset M$ iar F este funcție continuă. Pentru a arăta că F are punct fix, utilizăm Teorema 4.10. Mai avem de arătat că $F(M)$ este relativ compactă în $C(I; X)$. Vom utiliza Teorema Arzelà-Ascoli. Pentru aceasta, notăm $K = F(M)$ și $K(t) = \{(Fy)(t); y \in M\}$ și arătam

că fiecare $K(t)$ pentru $t \in I$ este relativ compactă în X , iar K este echicontinuă. Vezi Teorema 4.11. Deoarece $K(0) = \{x\}$, este suficient să considerăm cazul $t > 0$. Pentru $0 < \varepsilon < t \leq T$, definim

$$K_\varepsilon(t) = S(t)x + S(\varepsilon)K(t - \varepsilon).$$

Deoarece $K(t - \varepsilon)$ este mărginită în X și $S(\varepsilon)$ este operator compact, urmează că mulțimea $K_\varepsilon(t)$ este relativ compactă pentru $t \in (\varepsilon, T]$.

Acest fapt, împreună cu inegalitatea

$$\|(Fy)(t) - S(t)x - \int_0^{t-\varepsilon} S(t-s)f(y(s))ds\| \leq MK\varepsilon,$$

arată că pentru $t > 0$ mulțimea $K(t)$ este total mărginită, deci este relativ compactă în X .

Pentru echicontinuitate observăm mai întâi că, pentru $t > \tau > 0$, $h > 0$ și $y \in M$ avem

$$\begin{aligned} (Fy)(t+h) - (Fy)(t) &= S(t)(S(h)x - x) + \int_0^{t-\tau} (S(t+h-s) - S(t-s))f(y(s))ds + \\ &\int_{t-\tau}^t (S(t+h-s) - S(t-s))f(y(s))ds + \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(y(s))ds. \end{aligned}$$

De aici se deduce

$$\begin{aligned} \|(Fy)(t+h) - (Fy)(t)\| &\leq \beta\|S(h)x - x\| + \alpha \int_0^{t-\tau} \|S(t+h-s) - S(t-s)\|ds + \\ &2\alpha\beta\tau + \alpha\beta h, \end{aligned}$$

pentru orice $y \in M$. În plus,

$$\|(Fy)(h) - (Fy)(0)\| \leq \|S(h)x - x\| + \alpha\beta h, \quad \forall y \in M.$$

Ultimele două inegalități, împreună cu afirmația (vezi [95]):

Dacă $S(t)$ este un semigrup compact atunci $\|S(\cdot)\|$ este funcție continuă pe $(0, \infty)$,

arată că mulțimea $F(M)$ este echicontinuă și astfel demonstrația este terminată. \square

Observația 4.10 Demonstrația de mai sus arată, în particular, că operatorul $x \mapsto P(x)$ de la $L^p(0, T; X)$ în $C([0, T]; X)$, $p > 1$, definit prin

$$P(x)(t) = \int_0^t S(t-s)x(s) ds$$

este compact.

Capitolul 5

Probleme de optimizare

5.1 Principiul Brezis - Browder

Prezentăm în această secțiune un rezultat remarcabil, pe de o parte prin simplitatea enunțului și eleganța demonstrației, iar pe de altă parte prin multitudinea și diversitatea aplicațiilor. Acest rezultat, numit în cele ce urmează Principiul Brezis-Browder, a fost publicat în 1976 de Haïm Brezis și Felix Browder [21]. Este un principiu de ordonare, de obținere a elementelor maximale cu anumite proprietăți, similar cu lema lui Zorn. Farmecul acestui rezultat constă în aceea că nu se bazează pe Axioma alegerii ci pe o axiomă mai slabă, *Axioma alegerii dependente*, utilizată frecvent în matematică. De asemenea, Principiul Brezis-Browder are o interpretare fizică interesantă legată de principiul entropiei din termodinamică. Vezi comentariile ce urmează după demonstrația Teoremei 5.1.

Să prezentăm câteva observații privind Axioma Alegerii.

Axioma alegerii. *Dacă \mathcal{F} este o familie de submulțimi nevide ale lui X , atunci există o funcție $f : \mathcal{F} \rightarrow X$ cu proprietatea că $f(A) \in A$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$.*

Pentru a înțelege mai bine sensul acestei axiome, să considerăm exemplul clasic al lui Bertrand Russell, unde \mathcal{F} este o mulțime de perechi de pantofi, $\{A_i; i \in I\}$. Funcția

$$f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, \quad f(A_i) = \text{pantoful stâng al perechii } A_i,$$

selectează evident un pantof din fiecare pereche, printr-un procedeu bine determinat. Dacă însă \mathcal{F} este o mulțime de perechi de ciorapi, atunci nu putem defini o funcție $f : \mathcal{F} \rightarrow \bigcup A_i$ care să selecteze un ciorap din fiecare pereche, $f(A_i) \in A_i$,

printr-un procedeu dat, deoarece o pereche de ciorapi este formată din două obiecte identice. Se poate demonstra că o astfel de funcție de selecție există atunci când \mathcal{F} este finită, printr-un argument inductiv. Dar în matematică ne putem imagina mulțimi infinite de perechi, și în acel caz avem nevoie de Axioma alegerii care să garanteze existența unei funcții de selecție.

Axioma alegerii este echivalentă cu

Lema lui Zorn *Dacă X este o mulțime parțial ordonată astfel încât orice lanț în X este majorat, atunci X conține cel puțin un element maximal.*

Axioma alegerii este de asemenea echivalentă cu

Teorema lui Zermelo *Dată o mulțime X , există o relație binară pe X față de care X este bine ordonată.*

Amintim că o relație binară pe o mulțime X , notată “ \preceq ”, se numește *preordine* dacă este reflexivă și tranzitivă. Mulțimea X se numește *parțial ordonată* dacă există o preordine pe X care este și antisimetrică, adică

$$a \preceq b, \quad b \preceq a \implies a = b.$$

O mulțime parțial ordonată X se numește *bine ordonată* dacă fiecare submulțime nevidă a sa are un prim element, adică pentru fiecare $A \neq \emptyset$, $A \subset X$, există $a_0 \in A$ satisfăcând condiția $a_0 \leq a$ pentru orice $a \in A$. Lema lui Zorn este echivalentă și cu varianta în care relația binară este doar preordine.

Axioma alegerii și echivalentele sale amintite mai sus sunt utile la demonstrarea unor rezultate fundamentale cum sunt teorema Hahn-Banach de prelungire a funcționalelor liniare, teorema de existență a bazelor algebrice pentru spații liniare, teorema lui Tikhonov privind compactitatea spațiului produs, teorema de existență a partiției unității în spații paracompacte (vezi Capitolul 1), teorema de existență a mulțimilor de numere reale care nu sunt Lebesgue măsurabile și multe altele.

Chiar înainte de a fi formulată precis de Ernst Zermelo, Axioma alegerii a fost utilizată în mod mascat în matematica clasică și în special în analiză. Este interesant de subliniat că, după cum s-a observat ulterior, multe din aceste aplicații clasice pot fi justificate doar pe baza unor axiome mai slabe, de exemplu, Axioma alegerii dependente sau Axioma alegerii numărabile.

Axioma alegerii dependente *Fie R o relație binară pe o mulțime nevidă A , cu proprietatea că pentru fiecare $x \in A$ mulțimea $\{y \in A; xRy\}$ este nevidă. Atunci, pentru fiecare $\xi \in A$ există un șir $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, de elemente ale lui A , astfel încât $x_1 = \xi$ și $x_n R x_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.*

Această axiomă permite obținerea unui șir în care fiecare element este dependent de precedentul. De altfel, aceasta se folosește destul de frecvent în raționamente în care se pune în evidență un șir (x_n) după ce am pus în evidență, inductiv,

x_n pentru fiecare n . Vezi, de exemplu, demonstrația Teoremei lui Cesàro de la șiruri de numere reale [78, p.56]. De asemenea, această axiomă se utilizează în demonstrația Teoremei lui Baire, Teorema 3.4. Mai mult, în 1977 Charles E. Blair [18] a demonstrat că Teorema lui Baire implică Axioma alegerii dependente.

Axioma alegerii dependente este mai slabă decât Axioma alegerii [36].

Axioma alegerii numărabile Dacă $\mathcal{F} = \{F_n; n \in \mathbf{N}\}$ este o familie numărabilă de submulțimi nevide ale lui X , atunci există un șir (x_n) cu proprietatea că $x_n \in F_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

Această axiomă este suficientă pentru demonstrația faptului că o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile este numărabilă sau în teorema de caracterizare cu șiruri a punctelor de acumulare.

În cele ce urmează, X este o mulțime pe care s-a definit o preordine “ \preceq ”.

Teorema 5.1 (Brezis - Browder) Fie (X, \preceq) o mulțime parțial ordonată și $S : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ o funcție. Presupunem următoarele ipoteze:

(i) Fiecare șir crescător (x_n) în X , cu proprietatea că șirul $(S(x_n))$ este strict crescător, este majorat;

(ii) Funcția S este monoton crescătoare.

Atunci, pentru fiecare element $x_0 \in X$ există $\bar{x} \in X$ astfel încât $x_0 \preceq \bar{x}$ și $S(x) = S(\bar{x})$ pentru orice x cu proprietatea $\bar{x} \preceq x$.

Demonstrație. Într-o primă etapă, presupunem că funcția S este majorată. Considerăm un element fixat $x_0 \in X$ și construim inductiv un șir crescător (x_n) astfel: dacă x_n este determinat, considerăm

$$X_n = \{x \in X; x_n \leq x\}$$

și

$$\beta_n = \sup\{S(x); x \in X_n\}.$$

Dacă x_n verifică concluzia, atunci demonstrația se încheie. Dacă nu, atunci $\beta_n > S(x_n)$ și deci putem determina x_{n+1} astfel încât $x_n \leq x_{n+1}$ și

$$S(x_{n+1}) > \beta_n - \frac{\beta_n - S(x_n)}{2}. \tag{5.1}$$

Am construit astfel un șir (aici se folosește Axioma alegerii dependente) crescător (x_n) care are proprietatea că șirul $(S(x_n))$ este strict crescător. Datorită condiției (i), el este majorat, adică există $\bar{x} \in X$ astfel încât $x_n \preceq \bar{x}$ pentru orice n . Arătăm că acesta este elementul căutat în enunț. Prin reducere la absurd, presupunem că

există $y \in X$ astfel încât $\bar{x} \preceq y$ și $S(\bar{x}) < S(y)$. Pe de altă parte șirul $(S(x_n))$ este crescător și mărginit (deoarece am presupus că funcția S este majorată) și deci este convergent. Mai mult,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(x_n) \leq S(\bar{x})$$

și $y \in X_n$ pentru orice n . Avem deci $\beta_n \geq S(y)$. Folosim acum (5.1) și deducem

$$2S(x_{n+1}) - S(x_n) \geq \beta_n \geq S(y), \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Trecând la limită cu $n \rightarrow \infty$ obținem $S(\bar{x}) \geq S(y)$, ceea ce este absurd. Demonstrația este încheiată în cazul când funcția S este majorată.

Considerăm acum cazul general și luăm funcția

$$S_1 : X \rightarrow (-\pi/2, \pi/2], \quad S_1(x) = \arctan S(x).$$

Funcția S_1 este crescătoare și majorată, deci există un element $\bar{x} \in X$ care satisface concluzia teoremei cu S_1 în loc de S . Dar

$$\arctan S(\bar{x}) = \arctan S(x) \implies S(\bar{x}) = S(x),$$

ceea ce demonstrează concluzia în cazul general. □

Să facem câteva comentarii asupra acestui rezultat. În varianta prezentată în [21], funcția S se presupune cu valori reale, chiar majorată. De asemenea, ipoteza (i) este mai tare și anume:

(i') *Fiecare șir crescător în X este majorat.*

Extinderea, în ambele direcții, aparține lui Corneliu Ursescu. Ipoteza (i) este verificată, de exemplu, dacă mulțimea $S(X)$ este finită. Precizăm că posibilitatea ca funcția S să fie nemărginită este utilă atunci când se discută existența soluțiilor saturate la sisteme diferențiale. Vezi Corolarul 5.1.

Să prezentăm acum o interpretare a Principiului Brezis-Browder în termodinamică. Din legea a doua a termodinamicii rezultă că fiecare sistem închis are entropia S o funcție crescătoare în timp. Stările cu entropie maximă corespund stărilor cu echilibru stabil. Să introducem în mulțimea stărilor sistemului o relație de ordine astfel: $x \preceq y$ înseamnă că sistemul poate trece de la starea x la starea y după un anumit timp. Un șir crescător înseamnă o posibilă evoluție în timp a sistemului. Concluzia teoremei asigură tocmai existența unei stări de echilibru stabil x . Dacă sistemul este în x atunci entropia S nu mai crește.

5.2 Aplicații ale Principiului Brezis-Browder la incluziuni diferențiale

Prezentăm mai întâi o aplicație a Teoremei Brezis - Browder la existența soluțiilor maximale pentru incluziuni diferențiale. De obicei, aceste rezultate se obțin în literatură folosind Lema lui Zorn care este echivalentă cu Axioma alegerii. Aici vom folosi Teorema Brezis - Browder și deci numai Axioma alegerii dependente.

Fie incluziunea diferențială

$$x'(s) \in F(x(s)) \quad (5.2)$$

unde $F : D \rightsquigarrow V$ este o multifuncție cu valori nevide și D este o submulțime nevidă a spațiului finit dimensional V .

Prin *soluție* a incluziunii diferențiale (5.2) înțelegem o funcție absolut continuă $x : [0, a) \rightarrow V$ care verifică (5.2) pentru aproape toți $s \in [0, a)$ și $x(s) \in D$ pentru orice $s \in [0, a)$. O soluție este *saturată* dacă nu există o altă soluție $y : [0, b) \rightarrow V$ a lui (5.2) cu proprietatea că $a < b$ și x să fie egală cu restricția lui y la $[0, a)$.

Demonstrăm mai întâi următoarea propoziție.

Propoziția 5.1 *Fie X o familie de soluții $x : [0, a) \rightarrow V$ ale incluziunii diferențiale (5.2), fie $S : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ funcția dată prin $S(x) = a$ și fie “ \preceq ” preordinea pe X dată prin $x \preceq y$ dacă și numai dacă $S(x) \leq S(y)$ și x coincide cu restricția lui y la $[0, S(x))$. Presupunem în plus că fiecare șir crescător în X este majorat. Atunci fiecare element al lui X este majorat de un element maximal al lui X .*

Demonstrație. Să observăm mai întâi că funcția S este crescătoare. Putem aplica Teorema 5.1 și deducem că pentru fiecare $x \in X$ există $y \in X$ astfel încât $x \preceq y$ și $S(y) = S(x)$ pentru $z \in X$ cu $y \preceq z$. Deoarece $y = z$ atunci când $S(y) = S(z)$ și $y \preceq z$, urmează că y este maximal în X . \square

Corolarul 5.1 *Orice soluție a incluziunii diferențiale (5.2) este restricția unei soluții saturate.*

Demonstrație. Notăm cu X mulțimea tuturor soluțiilor $x : [0, \sigma) \rightarrow V$ pentru (5.2) și aplicăm Propoziția 5.1. Să remarcăm că un element y este maximal în X dacă și numai dacă este soluție saturată pentru (5.2). \square

Demonstrația existenței soluțiilor saturate în maniera prezentată mai sus apare pentru prima dată în [27]. Trebuie subliniat faptul că nu este esențial ca X să fie

finit dimensional. Important este să avem un concept de soluție pentru incluziunea diferențială considerată. Vezi, de exemplu, incluziunea diferențială semiliniară (5.3) în spații Banach.

Prezentăm acum o altă demonstrație a teoremei de viabilitate folosind Principiul Brezis-Browder. Vom considera o incluziune diferențială semiliniară în spații Banach. Ne vom ocupa doar de demonstrarea faptului că D este domeniu de viabilitate în ipoteza că este îndeplinită condiția de tangentă. Vezi și 2.10.

Fie X un spațiu Banach, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ generatorul infinitesimal al unui semigrup de clasă C_0 , $S(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, D o submulțime a lui X și $F : D \rightsquigarrow X$ o multifuncție cu valori nevide închise convexe și mărginite. Considerăm incluziunea diferențială semiliniară

$$\frac{du}{dt}(t) \in Au(t) + F(u(t)) \quad t \geq 0 \quad (5.3)$$

și condiția inițială

$$u(0) = \xi. \quad (5.4)$$

Funcția $u : [0, T] \rightarrow D$ este o *soluție continuă* pentru (5.3) și (5.4) dacă există $f \in L^1([0, T]; X)$, cu $f(t) \in F(u(t))$ a.p.t. $t \in (0, T)$ și astfel încât

$$u(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s) ds$$

pentru $t \in [0, T]$.

Să considerăm următoarea condiție de tangentă

(\mathcal{CT}): Pentru fiecare $\xi \in D$ există $y \in F(\xi)$, un șir (t_n) descrescător la 0 și un șir (p_n) convergent la 0 astfel încât

$$S(t_n)\xi + t_n(y + p_n) \in D$$

pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$.

Să observăm că în cazul în care $A = 0$, (\mathcal{CT}) se reduce la condiția de tangentă ce apare în Teorema 2.10. În plus, ea este echivalentă cu următoarea condiție de tangentă modificată.

(\mathcal{CTM}): Pentru fiecare $\xi \in D$ există $y \in F(\xi)$, un șir (t_n) descrescător la 0 și un șir (p_n) convergent la 0 astfel încât

$$S(t_n)\xi + \int_0^{t_n} S(t_n-s)y ds + t_n p_n \in D$$

pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$.

Următoarea propoziție reprezintă un rezultat de existență a soluțiilor “aproximative” pentru (5.3) satisfăcând (5.4).

Propoziția 5.2 Fie X un spațiu Banach real, D o mulțime nevidă și local închisă din X , $F : D \rightsquigarrow X$ o multifuncție local mărginită și cu valori nevide, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ generatorul infinitesimal al unui semigrup de clasă C_0 , $S(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$. Dacă D satisface condiția de tangență (CT) atunci pentru fiecare $\xi \in D$ există $r > 0$, $T > 0$ și $K > 0$ astfel încât mulțimea $D \cap B(\xi, r)$ este închisă și pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ și fiecare vecinătate $V = B(0, 1/n)$ a originii există cinci funcții măsurabile $f : [0, T] \rightarrow X$, $g : [0, T] \rightarrow X$, $\alpha : [0, T] \rightarrow [0, T]$, $\beta : \{(t, s); 0 \leq s < t \leq T\} \rightarrow [0, T]$ și $u : [0, T] \rightarrow X$ satisfăcând

- (i) $s - \frac{1}{n} \leq \alpha(s) \leq s$, $u(\alpha(s)) \in D \cap B(\xi, r)$ și $f(s) \in F(u(\alpha(s)))$, a.p.t. $s \in [0, T]$
- (ii) $\|f(s)\| \leq K$ a.p.t. $s \in [0, T]$
- (iii) $u(T) \in D \cap B(\xi, r)$
- (iv) $g(s) \in V$ a.p.t. $s \in [0, T]$, $\beta(t, s) \leq t$ pentru $0 \leq s < t \leq T$ și funcția $t \mapsto \beta(t, s)$ este neexpansivă pe $(s, T]$

și

$$u(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s) ds + \int_0^t S(\beta(t, s))g(s) ds \quad (5.5)$$

pentru fiecare $t \in [0, T]$.

Demonstrație. Să luăm $\xi \in D$ arbitrar și să alegem $r > 0$, $T > 0$, și $K > 0$ astfel încât $D \cap B(\xi, r)$ este închisă și

$$\|y\| \leq K \quad (5.6)$$

pentru fiecare $x \in D \cap B(\xi, r)$ și $y \in F(x)$ și

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|S(t)\xi - \xi\| + TM e^{\omega T} (K + 1) \leq r, \quad (5.7)$$

unde $M > 0$ și $\omega \geq 0$ sunt astfel încât $\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}$ pentru fiecare $t \geq 0$. Aceasta este posibil deoarece D este închisă, F este local mărginită și $S(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, este un semigrup de clasă C_0 .

Fie $n \in \mathbf{N}^*$ și fie $V = B(0, 1/n)$. Incepem prin a defini funcțiile f , g , α , β și u pe un interval suficient de mic $[0, \delta]$ și apoi vom arăta cum se extind la întregul interval $[0, T]$. Având în vedere condiția de tangență modificată (CTM), există $y \in F(\xi)$, $\delta > 0$ and $p \in V$, depinzând de n și satisfăcând

$$S(\delta)\xi + \int_0^\delta S(\delta-s)y ds + \delta p \in D.$$

Să definim $u : [0, \delta] \rightarrow X$ prin

$$u(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)y ds + tp \quad (5.8)$$

pentru fiecare $t \in [0, \delta]$. Să remarcăm că, deoarece

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)y ds + tp = \xi$$

uniform pentru $p \in X$ cu $\|p\| \leq 1$ și $y \in X$ cu $\|y\| \leq K$, putem alege $\delta \in (0, \frac{1}{n}]$, destul de mic încât u , y și p să satisfacă următoarele relații

- (j) $y \in F(u(0))$
- (jj) $\|y\| \leq K$
- (jjj) $u(\delta) \in D \cap B(\xi, r)$
- (jv) $p \in V$.

Punând $f(s) = y$, $g(s) = p$, $\alpha(s) = 0$ și $\beta(t, s) = 0$ pentru $s \in [0, \delta]$ și $0 \leq s < t \leq \delta$, din (j) – (jv) și (5.8), deducem ușor că (f, g, α, β, u) satisfac (i) – (iv) și (5.5) cu T înlocuit cu δ .

În continuare, arătăm că pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ există cel puțin o cvintuplă (f, g, α, β, u) a cărui domeniu se notează cu $D(T)$, unde, pentru $a \in \mathbf{R}_+$

$$D(a) = [0, a] \times [0, a] \times [0, a] \times \{(t, s); 0 \leq s < t \leq a\} \times [0, a],$$

satisfăcând (i) – (iv) și (5.5). Pentru aceasta vom folosi Teorema Brezis-Browder. Fie \mathcal{U} mulțimea acelor (f, g, α, β, u) definite pe $D(a)$ cu $a \leq T$ și satisfăcând (i) – (iv) și (5.5) pe $[0, a]$. Această mulțime este nevidă deoarece u definit de (5.8) aparține lui \mathcal{U} . Pe \mathcal{U} introducem o ordine parțială în modul următor. Spunem că $(f_u, g_u, \alpha_u, \beta_u, u)$ definit pe $D(a)$ și $(f_v, g_v, \alpha_v, \beta_v, v)$ definit pe $D(b)$ satisfac

$$(f_u, g_u, \alpha_u, \beta_u, u) \leq (f_v, g_v, \alpha_v, \beta_v, v)$$

dacă $a \leq b$, $f_u(s) = f_v(s)$, $g_u(s) = g_v(s)$, $\alpha_u(s) = \alpha_v(s)$ a.p.t. $s \in [0, a]$ și $\beta_u(t, s) = \beta_v(t, s)$ pentru $0 \leq s < t \leq a$. Fie de asemenea funcția crescătoare $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ definită prin $S((f, g, \alpha, \beta, u)) = a$.

Fie

$$\mathcal{L} = \{(f_i, g_i, \alpha_i, \beta_i, u_i) : D(a_i) \rightarrow X \times X \times [0, a_i] \times [0, a_i] \times X; i \in \mathbf{N}\}$$

un șir crescător în \mathcal{U} . Definim un majorant al lui \mathcal{L} astfel. Punem

$$a^* := \sup\{a_i; i \in \mathbf{N}\}.$$

Dacă $a^* = a_i$ pentru un $i \in \mathbf{N}$, $(f_i, g_i, \alpha_i, \beta_i, u_i)$ este clar un majorant pentru \mathcal{L} . Dacă $a_i < a^*$ pentru fiecare $i \in \mathbf{N}$, definim

$$f(s) = f_i(s), \quad g(s) = g_i(s), \quad \alpha(s) = \alpha_i(s)$$

pentru $i \in \mathbf{N}$ și a.p.t. $s \in [0, a_i]$ și

$$\beta(t, s) = \begin{cases} \beta_i(t, s) & \text{dacă } 0 \leq s < t \leq a_i < a^* \\ \lim_i \beta_i(a_i, s) & \text{dacă } 0 \leq s < a_i < t = a^*. \end{cases}$$

Observăm acum că (f, g, α, β, u) , unde f, g, α și β sunt definiți ca mai sus iar u este dat de (5.5), satisface (i), (ii) și (iv). Mai mult, deoarece pentru fiecare $s \in [0, a^*]$, funcția $t \mapsto \beta(t, s)$ este neexpansivă pe $(s, a^*]$ și $f, g \in L^\infty([0, a^*]; X)$, un argument simplu pe baza Teoremei lui Lebesgue [77] arată că u este continuă pe $[0, a^*]$. Deci există

$$\lim_i u_i(a_i) = u^* = u(a^*) \quad (5.9)$$

în X . Deoarece din (iii), $u_i(a_i) \in D \cap B(\xi, r)$ pentru fiecare $i \in \mathbf{N}$, iar $D \cap B(\xi, r)$ este închisă, din (5.9) deducem că u satisface (iii). În plus

$$(f_i, g_i, \alpha_i, \beta_i, u_i) \leq (f, g, \alpha, \beta, u)$$

pentru fiecare $i \in \mathbf{N}$ și astfel \mathcal{U} satisface ipotezele Teoremei 5.1. Fie (f, g, α, β, u) în \mathcal{U} cu domeniul $D(a)$ care satisface concluzia Teoremei 5.1.

Să arătăm că $a = T$. Pentru aceasta presupunem prin absurd că $a < T$ și fie $\xi_a = u(a)$ care aparține lui $D \cap B(\xi, r)$. Din (i), (ii), (iii), (iv), (5.5), (5.6) și (5.7) obținem

$$\begin{aligned} \|\xi_a - \xi\| &\leq \|S(a)\xi - \xi\| + \int_0^a \|S(a-s)f(s)\| ds + \int_0^a \|S(\beta(a,s))g(s)\| ds \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq a} \|S(t)\xi - \xi\| + aMe^{\omega a}(K + M_0) < r. \end{aligned}$$

Din condiția de tangentă combinată cu inegalitatea de mai sus deducem că există $y_a \in F(\xi_a)$, $\delta_a \in (0, \frac{1}{n}]$ cu $a + \delta_a \leq T$ și $p_a \in V$ astfel încât

$$S(\delta_a)\xi_a + \int_0^{\delta_a} S(\delta_a - s)y_a ds + \delta_a p_a \in D \cap B(\xi, r). \quad (5.10)$$

Definim \tilde{f} , \tilde{g} , $\tilde{\alpha}$ și $\tilde{\beta}$ pe $[0, a + \delta_a]$ în modul următor:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{dacă } t \in [0, a] \\ y_a & \text{dacă } t \in [a, a + \delta_a], \end{cases}$$

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) & \text{dacă } t \in [0, a] \\ p_a & \text{dacă } t \in [a, a + \delta_a], \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{dacă } t \in [0, a] \\ a & \text{dacă } t \in [a, a + \delta_a], \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}(t, s) = \begin{cases} \beta(t, s) & \text{dacă } 0 \leq s < t \leq a \\ t - a + \beta(a, s) & \text{dacă } 0 \leq s < a < t \leq a + \delta_a \\ 0 & \text{dacă } a \leq s < t \leq a + \delta_a \end{cases}$$

și

$$\tilde{u}(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)\tilde{f}(s) ds + \int_0^t S(\tilde{\beta}(t, s))\tilde{g}(s) ds$$

pentru $t \in [0, a + \delta_a]$. Pentru a obține o contradicție e suficient să arătăm că $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{u}) \in \mathcal{U}$. Este clar că \tilde{f} , \tilde{g} , $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ și \tilde{u} satisfac (i), (ii), (iv) și (5.5). Pentru a arăta (iii), să observăm mai întâi că

$$\tilde{u}(t) = S(t-a)\xi_a + \int_a^t S(t-s)y_a ds + (t-a)p_a$$

pentru $t \in [a, a + \delta_a]$ și deci $\tilde{u}(a + \delta_a) \in D$. În plus, din (5.10), (i), (ii), (iv), (5.6), și (5.7), obținem

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(t) - \xi\| &\leq \|S(t)\xi - \xi\| + \int_0^t \|S(t-s)\tilde{f}(s)\| ds + \int_0^t \|S(\tilde{\beta}(t, s))\tilde{g}(s)\| ds \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \|S(t)\xi - \xi\| + TM e^{\omega T} (K + M_0) \leq r \end{aligned}$$

pentru fiecare $t \in [0, a + \delta_a]$ și deci $\tilde{u}(a + \delta_a) \in B(\xi, r)$. Obținem că (iii) este satisfăcută și deci $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{u}) \in \mathcal{U}$. Este clar că $(f, g, \alpha, \beta, u) \leq (\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{u})$ și

$$S((f, g, \alpha, \beta, u)) < S((\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{u}))$$

ceea ce este în contradicție cu (iii) din Teorema 5.1. □

Suntem în măsură să prezentăm acum un rezultat de viabilitate pentru incluziunea diferențială (5.3).

Teorema 5.2 Fie X un spațiu Banach reflexiv, D o mulțime nevidă local închisă în X și $F : D \rightsquigarrow X$ o multifuncție cu valori închise convexe care este tare-slab superior semicontinuuă și local mărginită. Fie $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ generatorul infinitesimal al unui semigrup compact de clasă C_0 , $S(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$. Atunci, o condiție suficientă ca D să fie domeniu de viabilitate pentru (5.3) este condiția de tangență (CT).

Demonstrație. Fie $\mathcal{V} = \{B(0, \frac{1}{n}); n \in \mathbf{N}^*\}$ un sistem fundamental de vecinătăți ale originii pentru topologia tare a lui X . În baza Propoziției 5.2, pentru fiecare $\xi \in D$ există $r > 0$, $T > 0$, $K > 0$ astfel încât $D \cap B(\xi, r)$ este închisă în X și pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ există cel puțin o soluție aproximativă $(f_n, g_n, \alpha_n, \beta_n, u_n)$ definită pe $D(T)$, unde $V_n = B(0, \frac{1}{n})$, satisfăcând

$$(l) \quad s - \frac{1}{n} \leq \alpha_n(s) \leq s, \quad u_n(\alpha_n(s)) \in D \cap B(\xi, r) \text{ și } f_n(s) \in F(u_n(\alpha_n(s))), \text{ a.p.t. } s \in [0, T]$$

$$(ll) \quad \|f_n(s)\| \leq K \text{ a.p.t. } s \in [0, T]$$

$$(lll) \quad u_n(T) \in D \cap B(\xi, r)$$

$$(lv) \quad g_n(s) \in V_n \text{ a.p.t. } s \in [0, T], \quad \beta_n(t, s) \leq t \text{ pentru } 0 \leq s < t \leq T \text{ și funcția } t \mapsto \beta_n(t, s) \text{ este neexpansivă pe } (s, T]$$

și

$$u_n(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f_n(s) ds + \int_0^t S(\beta_n(t, s))g_n(s) ds \quad (5.11)$$

pentru fiecare $t \in [0, T]$. Să remarcăm că (5.11) poate fi rescrisă în forma

$$u_n(t) - \int_0^t S(\beta_n(t, s))g_n(s) ds = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f_n(s) ds \quad (5.12)$$

pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ și $t \in [0, T]$. Din (ll) avem că $\{f_n; n \in \mathbf{N}^*\}$ este mărginit în $L^\infty([0, T]; X)$. Deoarece semigrupul $S(t) : X \rightarrow X$, $t \geq 0$, este compact, din [94, p.47] urmează că există $u \in C([0, T]; X)$ astfel încât, cel puțin pe un subșir, avem

$$\lim_n \left(u_n(t) - \int_0^t S(\beta_n(t, s))g_n(s) ds \right) = u(t)$$

uniform pentru $t \in [0, T]$. Pe de altă parte, din (lv), avem că $g_n(s) \in V_n$ pentru fiecare $n \in \mathbf{N}^*$ și a.p.t. $s \in [0, T]$. Astfel

$$\lim_n \int_0^t S(\beta_n(t, s))g_n(s) ds = 0$$

uniform pentru $t \in [0, T]$ și deci,

$$\lim_n u_n(t) = u(t)$$

uniform pentru $t \in [0, T]$. Având în vedere că, din (l),

$$\lim_n \alpha_n(t) = 0$$

uniform pentru $t \in [0, T]$, urmează ușor că

$$\lim_n u_n(\alpha_n(t)) = u(t)$$

uniform pentru $t \in [0, T]$ și deci, din (l), $u(t) \in D \cap B(\xi, r)$ pentru fiecare $t \in [0, T]$. Să observăm că există $f \in L^2([0, T]; X)$ astfel încât, cel puțin pe un subșir,

$$\lim_n f_n = f$$

slab în $L^2([0, T]; X)$. Din Teorema 2.9 deducem că $f(t) \in F(u(t))$ a.p.t. $t \in [0, T]$. Trecând la limită în ambii membri ai egalității (5.12) pentru $n \rightarrow \infty$ deducem că u este soluție slabă pentru (5.3) și (5.4) și aceasta completează demonstrația. □

Teorema 5.2 a fost demonstrată în [28] folosind Lema lui Zorn.

Prezentăm în continuare o aplicație interesantă în teoria semigrupurilor.

Propoziția 5.3 *Fie X un spațiu Banach, $S(t)$, $t \geq 0$, un semigrup de clasă C_0 pe X și $D \subset X$ o mulțime închisă. Presupunem condiția*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} d(S(t)x, D) = 0, \quad \forall x \in D.$$

Atunci $S(t)x \in D$ pentru orice $x \in D$ și $t \geq 0$.

Demonstrație. Dacă X este reflexiv, se aplică Teorema 5.2. În cazul general, se poate da o demonstrație directă folosind Principiul Brezis-Browder. Vezi Problema 6.64. □

5.3 Principiul variațional al lui Ekeland

In continuare, vom deduce din Teorema Brezis-Browder un rezultat fundamental din Analiza funcțională neliniară și anume Principiul variațional al lui Ekeland [35].

Teorema 5.3 Fie (X, ρ) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ o funcție inferior semicontinuuă, mărginită inferior, cu proprietatea că există $x \in X$ astfel încât $f(x) \neq \infty$. Pentru $\varepsilon > 0$ fie $x_0 \in X$ cu proprietatea

$$f(x_0) < \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon.$$

Fie $\delta > 0$. Atunci, există $\bar{x} \in X$ cu următoarele proprietăți:

- (a) $f(\bar{x}) \leq f(x_0)$;
- (b) $\rho(\bar{x}, x_0) \leq \delta$;
- (c) $f(x) > f(\bar{x}) - \frac{\varepsilon}{\delta} \rho(\bar{x}, x)$, pentru $x \neq \bar{x}$.

Demonstrație. Fără a restrânge generalitatea vom considera $\delta = 1$ (altfel schimbăm metrica). Definim pe X ordinea:

$$x \preceq y \iff f(x) - \varepsilon \rho(x, y) \geq f(y),$$

și aplicăm Teorema 5.1 cu $S = -f$. Se verifică ușor proprietățile de preordine pentru relația “ \preceq ” definită mai sus. De asemenea funcția S este crescătoare. Să arătăm că orice șir crescător este majorat. Fie (x_n) un șir crescător. Pentru $n \leq m$ avem

$$f(x_n) - f(x_m) \geq \varepsilon \rho(x_n, x_m). \tag{5.13}$$

Prin urmare, șirul $(f(x_n))$ este descrescător și minorat, deci este convergent. Din (5.13) obținem că (x_n) este șir Cauchy, deci convergent. Vom arăta că limita sa, notată y , este un majorant pentru (x_n) . Aceasta rezultă din relația (5.13) făcând $m \rightarrow \infty$ și ținând seama că f este inferior semicontinuuă, deci

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) \leq f(y).$$

Obținem

$$f(x_n) - f(y) \geq \varepsilon \rho(x_n, y),$$

ceea ce arată că $x_n \preceq y$, pentru orice n . Așadar, putem aplica Teorema 5.1 și deducem că, pentru orice $x_0 \in X$ există $\bar{x} \in X$ astfel încât

$$f(x_0) - \varepsilon \rho(x_0, \bar{x}) \geq f(\bar{x}) \tag{5.14}$$

și

$$f(\bar{x}) - \varepsilon\rho(\bar{x}, x) \geq f(x) \implies f(\bar{x}) = f(x). \quad (5.15)$$

Din (5.15) deducem

$$x \neq \bar{x} \implies f(x) > f(\bar{x}) - \varepsilon\rho(x, \bar{x}). \quad (5.16)$$

Intr-adevăr, presupunând contrariul, din (5.15) obținem $f(\bar{x}) = f(x)$, apoi $\rho(x, \bar{x}) \leq 0$ și deci $x = \bar{x}$.

Așadar, am demonstrat că în condițiile teoremei, pentru orice $x_0 \in X$ există $\bar{x} \in X$ care verifică (5.14) și (5.15). Dar (5.15) este tocmai (c), (5.14) implică imediat (a), iar dacă pe x_0 îl alegem ca în enunț, din (5.14) avem

$$\varepsilon\rho(x_0, \bar{x}) \leq f(x_0) - f(\bar{x}) \leq f(x_0) - \inf_{x \in X} f(x) < \varepsilon$$

și deci (b). Teorema este astfel complet demonstrată. \square

Rezultatul prezentat mai sus, demonstrat de Ivar Ekeland în 1974 [35], s-a dovedit extrem de util în numeroase domenii: teoria optimizării, teoria controlului optimal, teoreme de punct fix, analiză globală.

Iată o interpretare foarte simplă în teoria optimizării. Pentru existența unui punct de minim al unei funcționale f există rezultate de tip Teorema lui Weierstrass (vezi Secțiunea care urmează). Dacă acestea nu funcționează atunci se caută soluții aproximative. Teorema 5.3 oferă astfel de soluții. Mai precis, \bar{x} dat de Teorema 5.3 este punct de minim pentru funcția perturbată

$$x \mapsto f(x) + \frac{\varepsilon}{\delta} \rho(\bar{x}, x).$$

Condiția (b) localizează acest punct. Este clar că există un balans: dacă δ este mic atunci se știe mai bine poziția lui \bar{x} dar perturbarea este mai mare. Situația de mijloc ar fi $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Să observăm că existența punctului x_0 din enunțul Teoremei 5.3 este asigurată întotdeauna de caracterizarea infimumului deci putem să renunțăm la ea, în schimb pierdem informația de la concluzie. Avem deci

Corolarul 5.2 *Fie X și f ca în Teorema 5.3. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\bar{x} \in X$ cu proprietățile*

- (i) $f(\bar{x}) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon$;
- (ii) $f(x) \geq f(\bar{x}) - \varepsilon\rho(x, \bar{x}), \quad \forall x \in X.$

Corolarul 5.3 Fie X spațiu Banach și f diferențiabilă Gateaux, inferior semicontinuă și mărginită inferior. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\bar{x} \in X$ cu proprietățile

$$(i) \quad f(\bar{x}) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon;$$

$$(iii) \quad \|f'(\bar{x})\| \leq \varepsilon.$$

Demonstrație. Aplicăm Corolarul 5.2 și obținem \bar{x} care verifică (i) și apoi luăm în (ii) $x = \bar{x} + t y$ unde y este arbitrar în X și $t > 0$. Obținem

$$\frac{f(\bar{x} + t y) - f(\bar{x})}{t} \geq -\varepsilon \|y\|.$$

Trecem la limită cu $t \rightarrow 0$ și obținem $f'(\bar{x})(y) \geq -\varepsilon \|y\|$ pentru orice $y \in X$, deci $|f'(\bar{x})(y)| \leq \varepsilon \|y\|$, ceea ce conduce la (iii). \square

Observația 5.1 Dacă \bar{x} este punct de minim pentru f atunci (i) și (iii) se verifică pentru $\varepsilon = 0$. Dar în absența punctelor de minim putem să determinăm puncte care “aproape minimizează” f și “aproape satisfac condiția necesară”. Mai precis, condițiile $f(\bar{x}) = \inf_{x \in X} f(x)$ și $f'(\bar{x}) = 0$ sunt satisfăcute cu oricâtă acuratețe dorim. Să mai observăm că din (i) și (iii) rezultă existența unui șir minimizant (x_n) , adică $f(x_n) \rightarrow \inf_{x \in X} f(x)$, cu proprietatea $f'(x_n) \rightarrow 0$. Acest fapt arată că următoarea condiție de tip Palais - Smale asigură existența punctelor de minim.

(PS) Dacă $f'(x_n) \rightarrow 0$ iar șirul $(f(x_n))$ este mărginit atunci șirul (x_n) are un subșir convergent.

Intr-adevăr, din condiția (PS) rezultă că un subșir al lui (x_n) converge la $x_0 \in X$ iar din continuitatea lui f urmează $f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x)$.

Incheiem această secțiune cu o aplicație a Teoremei lui Ekeland in teoria punctelor fixe. Mai precis, vom prezenta o extindere a teoremei contractiilor a lui Banach.

Fie deci (X, ρ) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ o funcție. Celebrul principiu al contractiilor afirmă că dacă există un număr $\varepsilon \in (0, 1)$ astfel încât

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \rho(x, y), \quad \forall x, y \in X, \tag{5.17}$$

atunci f are un punct fix unic (Teorema 4.1). O funcție care verifică (5.17) cu $\varepsilon \in (0, 1)$ se numește contractie. Să introducem o noțiune mai slabă și anume cea de contractie direcțională. Pentru aceasta, să precizăm că într-un spațiu metric (X, ρ) , pentru $x, y \in X$ definim *segmentul deschis* $]x, y[$ ca fiind mulțimea punctelor $z \in X$ distincte de x și y care au proprietatea

$$\rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y).$$

Spunem că o funcție $f : X \rightarrow X$ este *contractie direcțională* dacă este continuă și există $\varepsilon \in (0, 1)$ cu următoarea proprietate: dacă $x \in X$ este astfel încât $f(x) \neq x$ atunci există y în $]x, f(x)[$ astfel încât

$$\frac{\rho(f(x), f(y))}{\rho(x, y)} \leq \varepsilon.$$

Este clar că într-un spațiu metric *convex*, adică un spațiu metric cu proprietatea că segmentul deschis $]x, y[$ cu $x \neq y$ este nevid, orice contractie este o contractie direcțională. Iată un exemplu de contractie direcțională care nu este contractie. În spațiul \mathbf{R}^2 cu metrica

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

luăm funcția

$$f(x, y) = \left(\frac{3x}{2} - \frac{y}{3}, x + \frac{y}{3} \right).$$

Vezi Problema 6.65.

Teorema 5.4 *Intr-un spațiu metric complet, orice contractie direcțională are cel puțin un punct fix.*

Demonstrație. Fie (X, ρ) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ o contractie direcțională. Definim $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ prin

$$F(x) = \rho(x, f(x))$$

și observăm că F este continuă și mărginită inferior. Ideea este de a găsi un punct x care să minimizeze F și mai mult $F(x) = 0$. Este clar că acel x va fi punct fix pentru f . Lipsa unor condiții de compactitate este o problemă pentru atingerea unui punct de minim. Tocmai aici intervine Teorema lui Ekeland. Teorema 5.3 asigură existența unui punct x cu proprietatea că pentru orice $y \in X$ avem

$$\rho(y, f(y)) \geq \rho(x, f(x)) - \frac{1 - \varepsilon}{2} \rho(x, y).$$

Dacă $x = f(x)$ atunci demonstrația se încheie. Dacă nu, deoarece f este contractie direcțională, există $y \neq x$ care satisface

$$\rho(x, y) + \rho(y, f(x)) = \rho(x, f(x))$$

și

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \rho(x, y).$$

Avem

$$0 \leq \varepsilon \rho(x, y) - \rho(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \rho(x, y) - \rho(f(y), y) + \rho(y, f(x)) =$$

$$(\varepsilon - 1)\rho(y, x) - \rho(f(y), y) + \rho(x, f(x)) \leq \frac{\varepsilon - 1}{2}\rho(x, y).$$

Cum $\varepsilon < 1$, obținem $x = y$. Contradicția la care am ajuns încheie demonstrația. \square

5.4 Probleme de extrem. Metode directe în calculul variațiilor

Problematika studiată în această secțiune pornește de la două rezultate clasice ale analizei matematice, și anume:

Teorema lui Weierstrass O funcție continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, are un minim și un maxim pe $[a, b]$.

Teorema lui Fermat Dacă $c \in \text{int } I$ este un punct de extrem pentru funcția $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ și f este derivabilă în c , atunci $f'(c) = 0$.

Teorema lui Weierstrass se poate extinde la cazul $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ cu M o mulțime compactă dintr-un spațiu topologic (separat Hausdorff). În particular, dacă X este spațiu liniar finit dimensional, M poate fi marginită și închisă. În spații infinite dimensionale, rezultatul nu mai este adevărat pentru mulțimi mărginite și închise (acestea nefiind numai decât compacte). Acest fapt se suplinește prin condiții de continuitate mai tare. Pe de altă parte, se observă că pentru existența punctului de minim semicontinuitatea inferioară este suficientă.

Pornind de la aceste observații, vom prezenta în această secțiune o serie de rezultate privind existența punctelor de minim, numite în literatură *metode directe în calculul variațiilor*. Este evident că ne putem limita doar la probleme legate de puncte de minim, pentru cele de maxim considerându-se funcția $-f$.

Să ne oprim acum asupra teoremei lui Fermat. În esență, aceasta spune că dacă f este derivabilă pe o mulțime deschisă din \mathbf{R} , atunci punctele de minim din acea mulțime sunt soluții ale ecuației

$$f'(x) = 0,$$

numită de Joseph Louis Lagrange *ecuația lui Euler*. Acest rezultat se extinde ușor la cazul spațiilor Banach, derivabilitatea înlocuindu-se cu diferențiabilitatea Gateaux.

În acest mod, obținem o metodă importantă de rezolvare a ecuațiilor de tip Euler, rezolvând probleme de minim. Aceasta metodă provine de la Leonhard Euler (1744). În 1766 el introduce termenul *calculul variațiilor*. În acest context, *principiul lui Dirichlet* are un rol fundamental. Acest principiu afirmă existența unei soluții a problemei de minim (problema lui Dirichlet):

$$\min \int_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy, \quad u = g \text{ pe } \text{Fr}(D),$$

care este implicit soluție a problemei la limită pentru ecuația lui Laplace în plan:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ pe } D, \quad u = g \text{ pe } \text{Fr}(D),$$

și care reprezintă ecuația lui Euler pentru problema de minim a lui Dirichlet.

Principiul lui Dirichlet, numit astfel de Bernhard Riemann în 1857, a fost criticat de Karl Weierstrass (1870) pe motivul că problema existenței punctelor de minim nu este rezolvată. Weierstrass a dat un exemplu de problemă variațională care nu are soluție (are infimum dar acesta nu se atinge). Vezi Problema 6.53. Limitele acestei abordări constau în faptul că spațiul de funcții pe care se consideră problema de minim, $C^1(\overline{D})$, este prea restrâns și sărac în proprietăți care, după cum vom vedea în continuare, sunt esențiale în studiul problemelor variaționale. De exemplu, nu este reflexiv. Aceste limite au fost sesizate de David Hilbert care, într-o faimoasă conferință prezentată la Congresul mondial al matematicienilor de la Paris din 1900, a afirmat importanța principiului lui Dirichlet în rezolvarea problemelor la limită, dar a sugerat ideea generalizării conceptului de soluție. Acest demers a reprezentat o cotitură în dezvoltarea ulterioară a matematicii, conducând la apariția spațiilor Hilbert și a ideii de ortogonalitate în acestea, introducerea integralei Lebesgue și a spațiilor (complete) de funcții integrabile, introducerea spațiilor Sobolev și a ideii de reflexivitate.

Ne ocupăm acum de studiul existenței în probleme de minim. Fie $f : M \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, unde $M \subset X$ iar X este spațiu topologic, și fie problema de minim

$$\min_{x \in M} f(x) = m. \tag{5.18}$$

Rezultatul central este cuprins în următoarea teoremă.

Teorema 5.5 *Fie X un spațiu topologic. Presupunem că, pentru fiecare $\alpha \in \mathbf{R}$, mulțimile de nivel*

$$M_\alpha = \{x \in M; f(x) \leq \alpha\}$$

sunt compacte. Atunci, f este mărginită inferior pe M și își atinge infimumul, adică problema de minim (5.18) are soluție în M . În particular, concluzia este adevărată dacă se presupune că f este inferior semicontinuă iar M este compactă. Concluzia este adevărată dacă se impune condiția, mai slabă, că mulțimile de nivel sunt secvențial compacte.

Demonstrație. Fie $m = \inf_{x \in M} f(x)$. Dacă $m = \infty$, $f = \infty$ și concluzia este clară. Dacă $m < \infty$, fie $m < \alpha_0 < \infty$. Este clar că intersecția unui număr finit de mulțimi de tipul M_α cu $m < \alpha \leq \alpha_0$ este nevidă. Din proprietatea intersecției finite aplicată mulțimii compacte M_{α_0} , există

$$x_0 \in \bigcap_{m < \alpha \leq \alpha_0} M_\alpha.$$

De aici se obține ușor că $m = f(x_0)$, ceea ce încheie demonstrația primei părți. Dacă f este inferior semicontinuă și M este compactă, atunci mulțimile de nivel sunt închise în M și deci compacte.

Presupunem acum că mulțimile de nivel sunt secvențial compacte. Fie (x_n) un șir minimizant, adică un șir în M pentru care $f(x_n) \rightarrow m$. Fie $r > m$ fixat. Atunci $x_n \in M_r$ pentru n suficient de mare. Deoarece mulțimea M_r este secvențial compactă, există un subsir al lui (x_n) , notat (x_{n_k}) , ce converge la un element $x_0 \in M_r$. Fie acum $m < \alpha < r$. Se aplică raționamentul de mai sus pentru (x_{n_k}) și M_α și obținem

$$x_0 \in \bigcap_{\alpha > m} M_\alpha,$$

ceea ce încheie demonstrația. □

Dacă M nu este mărginită, în spații Banach se impune o condiție de coercivitate asupra funcției f . În plus, se utilizează topologia slabă pentru a evita condiția de compactitate în topologia tare, destul de restrictivă. Acest fapt este facilitat de rezultate fine de analiză funcțională, cum sunt:

(Alaoglu) *O mulțime mărginită din dualul unui spațiu normat este slab stelat relativ compactă.*

În particular,

O mulțime mărginită într-un spațiu Banach reflexiv este slab relativ compactă.

(Eberlein-Smulian) *O mulțime într-un spațiu Banach este slab compactă dacă și numai dacă este slab secvențial compactă.*

Intr-un spațiu Banach, dacă M este slab relativ compactă, atunci închiderea sa slabă coincide cu închiderea slab secvențială.

(Mazur) *O mulțime convexă într-un spațiu Banach este slab închisă dacă și numai dacă este tare închisă.*

Cititorul interesat poate găsi demonstrațiile rezultatelor de mai sus în [79].

Amintim că într-un spațiu Banach X , o mulțime M este *slab secvențial închisă* dacă pentru fiecare șir (x_n) din M , convergent slab la x_0 , avem $x_0 \in M$. Mulțimea M este *slab secvențial compactă* dacă fiecare șir în M are un subșir slab convergent la un element din M .

Amintim, de asemenea, că o funcție $f : M \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ este *slab secvențial inferior semicontinuuă* pe M dacă, pentru orice $x \in M$ și orice șir (x_n) din M slab convergent la x , avem

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Spunem că f este *coercivă* atunci când, $f(x) \rightarrow \infty$ dacă $\|x\| \rightarrow \infty$, $x \in M$

Teorema 5.6 *Fie X un spațiu Banach reflexiv și $M \subset X$ o mulțime slab secvențial închisă. Fie $f : M \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ o funcție coercivă și slab secvențial inferior semicontinuuă pe M . Atunci, f este mărginită inferior pe M și își atinge infimumul. Concluzia rămâne adevărată dacă X este dualul unui spațiu normat separabil iar convergența slabă se înlocuiește cu cea slab stelată.*

Demonstrație. Fie (x_n) un șir minimizant în M , deci $f(x_n) \rightarrow m = \inf_{x \in M} f(x)$. Din condiția de coercivitate, șirul (x_n) este mărginit. Deoarece X este reflexiv, există un subșir al său, pe care-l vom nota tot cu (x_n) , convergent slab la $x_0 \in X$. Deoarece M este slab secvențial închisă, $x_0 \in M$. În sfârșit, din ipoteza asupra funcției f obținem

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = m.$$

În cazul când X este dualul unui spațiu normat, se folosește Teorema lui Alaoglu. Demonstrația este încheiată. \square

Observația 5.2 Teorema 5.6 se poate deduce din precedenta dacă se observă că, în condiția de coercivitate, avem

$$\inf_{x \in M} f(x) = \inf_{x \in M \cap B(x_0, R)} f(x),$$

unde x_0 este un element fixat din M .

Următorul corolar pune în evidență situații care apar destul de frecvent. El se bazează pe teoremele anterioare și pe Problema 6.54. Amintim că f este *convexă* pe mulțimea convexă M dacă

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

pentru orice $x, y \in M$ și orice $t \in [0, 1]$. Dacă inegalitatea de mai sus este strictă pentru $x \neq y$ și $t \in (0, 1)$, atunci spunem că funcția f este *strict convexă*. Este ușor de văzut că pentru o funcție strict convexă există cel mult un punct de minim.

Corolarul 5.4 *Presupunem că una din următoarele condiții are loc.*

(i) X este spațiu Banach, M este slab secvențial compactă, f este slab secvențial inferior semicontinuu pe M ;

(ii) X este reflexiv, M este convexă mărginită și închisă, f este slab secvențial inferior semicontinuu pe M ;

(iii) X este reflexiv, M este convexă mărginită și închisă, f este inferior semicontinuu pe M și convexă (sau mai general, cu mulțimile de nivel convexe);

(iv) X este reflexiv, M este convexă și închisă, f este coercivă, slab secvențial inferior semicontinuu pe M ;

(v) X este reflexiv, M este convexă și închisă, f este coercivă, inferior semicontinuu pe M și convexă (sau mai general, cu mulțimile de nivel convexe).

Atunci, f este mărginită inferior pe M și își atinge infimumul.

Să prezentăm acum un exemplu semnificativ, și anume *problema variațională pătratică*. Principiul lui Dirichlet este un caz particular.

Fie X un spațiu normat și $a : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară, adică liniară în fiecare argument. Spunem că forma biliniară a este:

mărginită, dacă există o constantă $k > 0$ astfel încât

$$\|a(x, y)\| \leq k \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in X;$$

simetrică, dacă $a(x, y) = a(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$;

pozitivă, dacă $0 \leq a(x, x)$ pentru orice $x \in X$;

strict pozitivă, dacă $0 < a(x, x)$ pentru $x \neq 0$;

tare pozitivă sau coercivă, dacă există o constantă $c > 0$ astfel încât

$$c\|x\|^2 \leq a(x, x), \quad \forall x \in X.$$

Este ușor de verificat că funcția a este continuă în ambele argumente.

Să considerăm $b \in X^*$ și funcționala pătratică

$$f(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - b(x),$$

căreia dorim să-i studiem existența minimului pe mulțimi convexe din X .

Teorema 5.7 Fie X un spațiu Banach reflexiv, $M \subset X$ o mulțime convexă și închisă și $a : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară mărginită și simetrică pe X . Presupunem că una din următoarele condiții este adevărată.

(i) a este pozitivă și M este mărginită;

(ii) a este tare pozitivă.

Atunci, funcționala pătratică f are punct de minim în M . Dacă a este strict pozitivă atunci punctul de minim este unic.

Dacă $M = X$, atunci x este punct de minim pentru f dacă și numai dacă este soluție a ecuației variaționale

$$a(x, y) = b(y), \quad \forall y \in X.$$

Demonstrație. Să notăm $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$, pentru $x, y \in M$ și $t \in \mathbf{R}$ și să observăm că

$$\varphi(t) = 2^{-1}t^2a(y - x, y - x) + t(a(x, y - x) - b(y - x)) + 2^{-1}a(x, x) - b(x).$$

Dacă forma biliniară este pozitivă, atunci funcția φ este convexă, deci are loc inegalitatea

$$\varphi(t) \leq (1 - t)\varphi(0) + t\varphi(1), \quad \forall t \in [0, 1],$$

ceea ce conduce ușor la convexitatea funcției f . Dacă a este strict pozitivă, atunci f este strict convexă. Așadar, în cazul (i) concluzia rezultă din Corolarul 5.4 (iii). Dacă a este tare pozitivă atunci,

$$f(x) \geq c\|x\|^2 - \|b\| \|x\|,$$

ceea ce implică proprietatea de coercivitate pentru f . Prin urmare, în cazul (ii) concluzia rezultă din Corolarul 5.4 (v). Ultima parte a teoremei rezultă din faptul că x este punct de minim pentru f dacă și numai dacă 0 este punct de minim pentru φ , ceea ce echivalează cu $\varphi'(0) = 0$. \square

Ultima parte a teoremei anterioare arată echivalența dintre problema de minim și ecuația de tip Euler corespunzătoare. Este clar că dacă f este diferențiabilă în punctul de minim x , interior mulțimii M , atunci în mod necesar $f'(x) = 0$. Interesant este că în cazul convex are loc și reciproca.

Teorema 5.8 Fie $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție diferențiabilă Gateaux, convexă și coercivă pe spațiul Banach reflexiv X . Atunci problema de minim pentru f pe X este echivalentă cu ecuația $f'(x) = 0$, $x \in X$. În plus, cele două probleme au soluție. Dacă f este strict convexă, soluția este unică.

Demonstrație. Demonstrația primei părți se bazează pe următoarea inegalitate remarcabilă, satisfăcută de funcțiile convexe derivabile pe o mulțime convexă M .

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle, \quad \forall x, y \in M. \quad (5.19)$$

Pentru demonstrație, notăm $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$. Este clar că $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ este convexă, derivabilă și cu derivata crescătoare. De aici obținem

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \geq \varphi'(0), \quad 0 < \theta < 1, \quad (5.20)$$

ceea ce implică inegalitatea dorită.

Faptul că problema de minim are soluție rezultă din Corolarul 5.4 (iv) și Problemele 6.55 și 6.56. În esență, din problemele citate deducem:

O funcție convexă și derivabilă Gateaux este slab secvențial inferior semicontinuă.

Demonstrația este încheiată. □

Să revenim acum și să aplicăm rezultatele de mai sus la Problema lui Dirichlet. Considerăm problema variațională

$$\min 2^{-1} \int_D \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 dx - \int_D f u dx; \quad u = g \text{ pe } \text{Fr}(D). \quad (5.21)$$

Aici D este o mulțime deschisă și mărginită în \mathbf{R}^n , $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ și $\partial_i u = \partial u / \partial \xi_i$. Împreună cu (5.21) să considerăm problema la limită pentru ecuația lui Laplace

$$-\Delta u = f \text{ pe } D; \quad u = g \text{ pe } \text{Fr}(D). \quad (5.22)$$

După cum am precizat mai sus, important este cadrul în care se lucrează. De exemplu, dacă $g : \text{Fr}(D) \rightarrow \mathbf{R}$ și $f : \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}$ sunt continue, atunci o funcție $u \in C^2(\bar{D})$, soluție pentru problema (5.21), este soluție și pentru problema (5.22). Dificultatea constă în obținerea existenței pentru problema (5.21). Rezultatul principal este dat de

Propoziția 5.4 *Presupunem că D este mărginită și deschisă în \mathbf{R}^n , $f \in L^2(D)$ și $g \in H^1(D)$. Atunci*

(i) *Problema (5.21) are soluție unică $u \in H^1(D)$;*

(ii) *Aceasta este unica soluție generalizată $u \in H^1(D)$ a problemei (5.22).*

Aici condiția la frontieră pentru problema (5.21) este în sensul $u - g \in H_0^1(D)$ iar soluția generalizată pentru (5.22) este în sensul

$$\int_D \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v dx = \int_D f v dx \quad \forall v \in H_0^1(D), \quad u - g \in H_0^1(D).$$

Demonstrație. Amintim că spațiul $H_0^1(D)$ este închiderea mulțimii $C_0^\infty(D)$ în spațiul Hilbert $H^1(D)$. Spațiul $H^1(D)$ constă din funcțiile $u \in L^2(D)$ care au derivate generalizate $\partial_i u \in L^2(D)$ pentru $i = 1, \dots, n$. Produsul scalar este dat de

$$\langle u, v \rangle = \int_D (uv - \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v) dx.$$

Punem $X = H_0^1(D)$ și definim

$$a(u, v) = \int_D \sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v dx, \quad b_1(v) = \int_D f v dx,$$

pentru orice $u, v \in H^1(D)$. Facem schimbarea de variabilă $w = u - g$ și obținem problema de minim

$$\min 2^{-1} a(w, w) - b(w), \quad w \in X,$$

unde am pus $b(w) = b_1(w) - a(w, g)$. Pentru a aplica Teorema 5.7, avem de verificat că forma biliniară a este mărginită și tare pozitivă. Mărginirea rezultă ușor pe baza inegalității lui Schwarz. Faptul că a este tare pozitivă rezultă din inegalitatea Poincaré-Friedrichs:

Există o constantă $C > 0$ astfel încât pentru orice $u \in H_0^1(D)$ avem

$$C \int_D u^2 dx \leq \int_D \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2 dx.$$

□

Incheiem această secțiune cu un comentariu de natură istorică. Aplicarea metodelor directe din calculul variațiilor la probleme la limită pentru ecuații diferențiale neliniare de ordinul doi a fost făcută în 1915 de Leon Lichtenstein [59], într-o lucrare ce conține toate ingredientele de bază ale prezentării actuale: considerarea unui șir minimizant (u_n) ; demonstrarea mărginirii lui (u_n) în spațiul Sobolev $H_0^1(I)$, I fiind un interval, și folosirea acestei mărginiri pentru a se obține un subsir convergent la u ; folosirea semicontinuității slabe a patratului normei din $H_0^1(I)$ pentru a arăta că u este punct de minim; folosirea ecuației lui Euler pentru a arăta că soluția (slabă) u este soluția clasică.

5.5 Inegalități variaționale

Să observăm că dacă a este punct de minim pentru funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ atunci, în mod necesar avem $f'(a) \geq 0$, iar dacă b este punct de minim atunci $f'(b) \leq 0$. Prin urmare, dacă $c \in [a, b]$ este punct de minim atunci avem inecuația

$$f'(c)(x - c) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

numită în literatură *inecuație* sau *inegalitate variațională*. Este ușor de văzut că rezultatul se poate extinde la spații Banach, pentru funcții diferentiabile Gateaux pe mulțimi convexe.

Este clar că, în general, dacă c este soluție a inegalității variaționale, nu rezultă că este punct de extrem pentru f . Pentru funcții convexe avem următorul rezultat.

Teorema 5.9 *Fie X un spațiu normat, $M \subset X$ o mulțime convexă și $f : M \rightarrow X$ o funcție convexă și Gateaux diferentiabilă. Atunci, x este punct de minim pentru f dacă și numai dacă*

$$\langle f'(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M. \quad (5.23)$$

Demonstrație. Considerăm funcția $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$, $t \in [0, 1]$ unde $x, y \in M$ sunt fixați. Dacă x este punct de minim pentru f atunci $\varphi(t) \geq 0$ pentru orice $t \in [0, 1]$, ceea ce implică $\varphi'(0) \geq 0$. Acest fapt conduce la (5.23). Reciproc, dacă x este o soluție pentru (5.23), atunci $\varphi'(0) \geq 0$. Deoarece funcția φ este convexă urmează că φ' este crescătoare, ceea ce implică (5.20). De aici obținem $f(y) \geq f(x)$ pentru orice $y \in M$ și astfel demonstrația este încheiată. \square

In particular, pentru problema variațională pătratică avem

Corolarul 5.5 *Fie problema de minim*

$$\min_{x \in M} \frac{1}{2}a(x, x) - b(x) = m \quad (5.24)$$

și inegalitatea variațională

$$a(x, y - x) \geq b(y - x), \quad \forall y \in M. \quad (5.25)$$

Dacă X este spațiu Banach reflexiv, $M \subset X$ este convexă și închisă, $a : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ este biliniară mărginită simetrică și tare pozitivă iar $b \in X^$ atunci, problemele (5.24) și (5.25) sunt echivalente și au exact o soluție.*

In plus, dacă M este con, (5.25) este echivalentă cu problema

$$a(x, x) = b(x), \quad a(x, z) \geq b(z) \quad \forall z \in M. \quad (5.26)$$

Demonstrație. La fel ca în demonstrația Teoremei 5.7 rezultă că funcționala $f(x) = 2^{-1}a(x, x) - b(x)$ este strict convexă și diferențiabilă Gateaux. Concluzia primei părți urmează combinând Teorema 5.7 și Teorema 5.9. Când M este convex, amintim mai întâi că dacă $u, v \in M$ atunci $u + v \in M$. Presupunem că are loc (5.25). Dacă punem $y = x + z$ obținem inegalitatea din (5.26) iar dacă punem $y = 2x$ și $y = 0$ obținem egalitatea din (5.26). Cealaltă implicație este imediată, prin scădere. \square

Observația 5.3 Dacă luăm $a(x, y) = \langle x, y \rangle$ și X este spațiu Hilbert, obținem cunoscuta caracterizare a elementului de normă minimă u într-o mulțime M convexă mărginită și închisă: $\langle u, y - u \rangle \geq 0$ pentru orice $y \in M$.

Rezultatul de mai sus se poate aplica problemei

$$\begin{aligned} -\Delta u - cu &= f \quad \text{pe } D, \\ u &\geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} - g \geq 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g \right) u = 0 \quad \text{pe } \text{Fr}(D), \end{aligned}$$

unde $c > 0$, D este o mulțime mărginită din \mathbf{R}^n cu frontiera suficient de regulată. Considerăm spațiul $X = H_0^1(D)$, mulțimea $M = \{u \in X; u(x) \geq 0, \text{ a.p.t. } x \in \text{Fr}(D)\}$, forma biliniară

$$a(u, v) = \int_D \left(\sum_{i=1}^n \partial_i u \partial_i v + cuv \right) dx$$

și funcționala liniară

$$b(v) = \int_{\text{Fr}(D)} gvd\sigma + \int_D fvdv.$$

Condiția $c > 0$ asigură coercivitatea. Soluția inegalității variaționale (5.26) dată de Corolarul 5.5 este tocmai soluția generalizată a problemei considerate.

După cum se vede din Teorema 5.7 și Corolarul 5.5, existența soluțiilor pentru inegalitatea variațională (5.25) rezultă din existența soluțiilor pentru problema de minim (5.24). Dacă forma biliniară a nu este simetrică, atunci se poate considera inecuația (5.25) dar ea nu mai provine dintr-o problemă variațională. În acest caz, în spații Hilbert se poate obține un rezultat de existență pentru (5.25) folosind Teorema de punct fix a lui Banach. Următorul rezultat aparține lui Guido Stampacchia [86] (1964).

Teorema 5.10 Presupunem că X este spațiu Hilbert, forma biliniară a este mărginită și tare pozitivă, $M \subset X$ este convexă și închisă și $b \in X$. Atunci inegalitatea variațională (5.25) are soluție unică în M .

Demonstrație. Să observăm că, deoarece forma biliniară a este mărginită, există un unic operator liniar continuu $A : X \rightarrow X$ cu

$$a(x, y) = \langle Ax, y \rangle \quad \forall x, y \in X.$$

Fixăm $t > 0$ și $z \in X$ și considerăm inegalitatea variațională

$$\langle x, y - x \rangle \geq \langle z, y - x \rangle - t(\langle z, y - x \rangle - \langle b, y - x \rangle) \quad \forall y \in M. \quad (5.27)$$

Din cele de mai sus, pentru fiecare $z \in M$, problema (5.27) are soluție unică în M , pe care o vom nota Fz . Vom arăta că putem alege t astfel încât operatorul $F : M \rightarrow M$ este o contracție. Pentru aceasta, fie $z_1, z_2 \in M$ și $x_1 = Fz_1$, $x_2 = Fz_2$. Punem $x = x_1, y = x_2$ și apoi $x = x_2, y = x_1$ în (5.27) și obținem prin adunare

$$-\|x_1 - x_2\|^2 \geq -\langle (I - tA)(z_1 - z_2), x_1 - x_2 \rangle.$$

De aici urmează

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|(I - tA)(z_1 - z_2)\|.$$

Un calcul simplu arată că

$$\|(I - tA)u\|^2 \leq l^2 \|u\|^2,$$

pentru orice $u \in X$, unde

$$l^2 = 1 + t^2 \|A\|^2 - 2tc.$$

Aici constanta c provine din condiția că forma patratică a este tare pozitivă: $a(x, x) \geq c\|x\|^2$ pentru orice $x \in X$. Să observăm că din condiția aceasta rezultă și $c \leq \|A\|$. Este clar că dacă alegem t astfel încât $0 < t < 2c/\|A\|^2$, avem $l < 1$ și

$$\|Fz_1 - Fz_2\| \leq l\|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in M.$$

Așadar, F are punct fix care este soluție a inegalității variaționale (5.25). □

Inegalitatea (5.25) este de forma

$$\langle A(x), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M, \quad (5.28)$$

pe care o vom numi tot inegalitate variațională chiar dacă A nu este numaidacă un operator potențial, adică de tipul $A = f'$.

Teoria inegalităților variaționale de forma (5.28) s-a dovedit deosebit de utilă în diverse domenii. Ea s-a dezvoltat sistematic începând cu anii 1960 prin lucrările lui Gaetano Fichera (1964, problema Signorini), Guido Stampacchia (1965, ecuații

diferențiale eliptice cu coeficienți discontinui), Philip Hartman și Guido Stampacchia, Felix Browder (1966, inegalități variaționale cu operatori neliniari monotoni), Haïm Brézis (1968, inegalități variaționale cu operatori pseudo-monotoni).

Să prezentăm un rezultat de existență pentru (5.28) în cazul în care M este convexă și compactă iar A este continuă.

Teorema 5.11 *Fie X spațiu Banach, $M \subset X$ o mulțime convexă și compactă și $A : X \rightarrow X^*$ o funcție continuă. Atunci, inegalitatea variațională (5.28) are cel puțin o soluție în M .*

Demonstrație. Se consideră funcția $f(x, y) = -\langle A(x), y - x \rangle$ și se aplică Teorema 4.15. □

Ipoteza de compactitate a mulțimii M se poate slăbi, impunând în schimb ipoteze mai tari asupra funcției A . Un rezultat important în această direcție aparține lui Stepan Karamardian [50] publicat în 1971. Deși rezultatul are loc în spații Banach reflexive, pentru a simplifica expunerea îl vom prezenta în spațiul \mathbf{R}^n .

Teorema 5.12 *Fie M un con convex închis și $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ continuă și tare monotonă pe M , adică*

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle \geq c\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in M.$$

Atunci inegalitatea variațională (5.28) are soluție unică în M .

Demonstrație. Din condiția de monotonie avem

$$\langle A(x), x \rangle \geq \langle A(0), x \rangle + c\|x\|^2, \quad \forall x \in M.$$

De aici rezultă că dacă $x \in M \setminus K$ unde

$$K = \{x \in M; \|x\| \leq \|A(0)\|/c\},$$

avem $\langle A(x), x \rangle > 0$. Pentru fiecare $y \in M$ fie

$$D_y = \{x \in K; \langle A(x), y - x \rangle \geq 0\}.$$

Mulțimile D_y sunt închise în compactul K și vrem să arătăm că au proprietatea intersecției finite. Pentru aceasta, considerăm $\{y_1, \dots, y_m\} \subset M$ și aplicăm Teorema

5.11 mulțimii convexe și compacte $D = \text{co}(K \cup \{y_1, \dots, y_m\})$. Există deci $x_0 \in D$ astfel încât are loc

$$\langle A(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0, \quad \forall x \in D.$$

În particular, $\langle A(x_0), y_i - x_0 \rangle \geq 0$ pentru $i = 1, \dots, m$ și $\langle A(x_0), x_0 \rangle \leq 0$ (deoarece $0 \in D$), și deci $x_0 \in K$. Avem deci

$$x_0 \in \bigcap_{1 \leq i \leq m} D_{y_i}.$$

Prin urmare, familia de mulțimi închise $\{D_y; y \in M\}$ are proprietatea intersecției finite. Deoarece K este mulțime compactă, avem

$$\bigcap_{y \in M} D_y \neq \emptyset.$$

Este clar că orice punct al intersecției de mai sus este soluție a inegalității variaționale (5.28).

Pentru unicitate, observăm că dacă x_1 și x_2 sunt soluții atunci avem $\langle A(x_i), x_i \rangle = 0$, $i = 1, 2$; $\langle A(x_1), x_2 \rangle \geq 0$ și $\langle A(x_2), x_1 \rangle \geq 0$. De aici obținem

$$c\|x_1 - x_2\|^2 \leq \langle A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2 \rangle \leq 0,$$

deci $x_1 = x_2$. Demonstrația este astfel încheiată. □

Observația 5.4 Deoarece mulțimea M este con convex, inegalitatea (5.28) este echivalentă cu problema

$$\langle A(x), x \rangle = 0; \quad \langle A(x), y \rangle \geq 0, \quad \forall y \in M.$$

În cazul în care M este conul pozitiv, adică $M = \{x \in \mathbf{R}^n; x \geq 0\}$, este ușor de văzut că problema de mai sus este echivalentă cu sistemul

$$A(x) = y; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad \langle x, y \rangle = 0,$$

care apare în diverse probleme de teoria jocurilor, mecanică, economie.

5.6 Teorema de minimax

Fie A și B mulțimi nevide și $f : A \times B \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție. Un element $(x_0, y_0) \in A \times B$ se numește *punct șa* pentru f dacă

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \quad \forall (x, y) \in A \times B.$$

Condiția de mai sus este echivalentă cu

$$\max_{y \in B} f(x_0, y) = f(x_0, y_0) = \min_{x \in A} f(x, y_0).$$

Exemplul standard este $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, cu punctul șa $(0, 0)$. Înainte de a demonstra teorema principală, să enunțăm o lemă. Vezi Problema 6.67 pentru demonstrație.

Lema 5.1 *Funcția f are punct șa dacă și numai dacă are loc relația*

$$\min_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \max_{y \in B} \inf_{x \in A} f(x, y). \quad (5.29)$$

Dacă (x_0, y_0) este punct șa, atunci $f(x_0, y_0)$ este valoarea comună a celor două expresii din (5.29).

Teorema care urmează, numită *Teorema de minimax*, dă condiții de existență a unui punct șa.

Teorema 5.13 *Fie X un spațiu Banach reflexiv și A, B submulțimi nevide convexe mărginite și închise. Fie $f : A \times B \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție care verifică ipotezele*

- (i) *Funcția $f(\cdot, y)$ este inferior semicontinuuă și convexă pe A pentru fiecare $y \in B$;*
- (ii) *funcția $f(x, \cdot)$ este superior semicontinuuă și concavă pe B pentru fiecare $x \in A$.*

Atunci

- (a) *Funcția f are un punct șa;*
- (b) *Punctul (x_0, y_0) este punct șa pentru f dacă și numai dacă are loc*

$$\min_{x \in A} \max_{y \in B} f(x, y) = \max_{y \in B} \min_{x \in A} f(x, y). \quad (5.30)$$

Dacă (x_0, y_0) este punct șa pentru f , atunci $f(x_0, y_0)$ este valoarea comună a celor două expresii din (5.30).

Demonstrație. Să notăm

$$\alpha = \min_{x \in A} \max_{y \in B} f(x, y); \quad \beta = \max_{y \in B} \min_{x \in A} f(x, y).$$

Arătăm mai întâi că α și β există. Vom face demonstrația pentru β , pentru α fiind analog. Din Corolarul 5.4, pentru fiecare $y \in B$ există $z(y) \in A$ cu

$$f(z(y), y) = \min_{x \in A} f(x, y).$$

Să notăm $h(y) = -f(z(y), y)$. Reținem inegalitatea

$$-f(x, y) \leq h(y) \quad \forall x \in A. \quad (5.31)$$

Vom arăta că funcția $h : B \rightarrow \mathbf{R}$ este inferior semicontinuă și convexă. Va exista atunci $\min_{y \in B} h(y)$ și apoi $b = -\min_{y \in B} h(y)$. Demonstrăm că h este convexă. Din (ii) și (5.31) avem

$$-f(x, ty_1 + (1-t)y_2) \leq -tf(x, y_1) - (1-t)f(x, y_2) \leq th(y_1) + (1-t)h(y_2).$$

pentru orice $x \in X$ deci și pentru $x = z(ty_1 + (1-t)y_2)$. Demonstrăm acum că h este secvențial semicontinuă inferior. Fie șirul (y_n) în B convergent la y . Din (5.31) avem $-f(z(y), y_n) \leq h(y_n)$. Trecem la limită și folosim (ii) pentru a obține $-f(z(y), y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} h(y_n)$. Așadar, putem aplica Corolarul 5.4 și deducem că funcția h are punct de minim pe B , deci β există și $\beta = -\min_{y \in B} h(y)$. Analog pentru α . În continuare arătăm că $\alpha = \beta$. Este ușor de văzut că $\beta \leq \alpha$. Pentru a demonstra inegalitatea inversă, aplicăm o teoremă de punct fix, Teorema 4.18. Pentru aceasta, înzestram X și Y cu topologia slabă, luăm $\varepsilon > 0$, punem $s = \alpha - \varepsilon$, $t = \beta + \varepsilon$ și construim multifunția $F : A \times A \rightsquigarrow A \times B$,

$$F(x, y) = \{(u, v) \in A \times B; f(u, y) < t, f(x, v) > s\}.$$

Este ușor de văzut că F are valori nevide și convexe. În plus, $A \times B$ este slab compactă. Rămîne să dovedim că $F^{-1}(u, v)$ este relativ slab deschisă. Acest fapt rezultă ușor din

$$F^{-1}(u, v) = \{(x, y) \in A \times B; f(u, y) < t, f(x, v) > s\},$$

având în vedere că mulțimile $\{x \in A; f(x, v) \leq s\}$ și $\{y \in B; f(u, y) \geq t\}$ sunt convexe și închise, deci slab închise în A și respectiv B . Prin urmare, aplicăm Teorema 4.18 și deducem că există un punct fix pentru F , adică $(x, y) \in F(x, y)$. Avem $\alpha - \varepsilon = s < f(x, y) < t = \beta + \varepsilon$. Cum ε este arbitrar obținem $\alpha \leq \beta$. Demonstrația se încheie dacă avem în vedere Lema 5.1. \square

Observația 5.5 Concluzia teoremei anterioare are loc și în cazul în care funcțiile $f(\cdot, y)$ și $-f(x, \cdot)$ au mulțimile de nivel convexe, adică sunt cvasiconvexe în loc sa fie convexe.

Teorema 5.13 a fost demonstrată de John von Neumann [96] în \mathbf{R}^n în 1928, în legătură cu teoria jocurilor creată de el. Cazul general aparține lui Ky Fan (1952).

Teoria jocurilor constă în determinarea unei balanțe optimale la o competiție între mai mulți parteneri. Să considerăm doi jucători P și Q care au la îndemână câte o mulțime de strategii A și B . Dacă P alege strategia $x \in A$ iar Q alege strategia $y \in B$, notăm $f(x, y)$ pierderea lui P și deci câștigul lui Q . Dacă (x_0, y_0) este punct șa pentru f , avem

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \quad \forall (x, y) \in A \times B.$$

Dacă P alege strategia x_0 , atunci câștigul lui Q este cel mult egal cu $f(x_0, y_0)$ și maximul va fi realizat dacă Q alege strategia y_0 . Invers, dacă Q alege strategia y_0 , pierderea lui P este cel puțin egală cu $f(x_0, y_0)$ și minimul va fi realizat dacă P alege strategia x_0 . Prin urmare, strategia (x_0, y_0) asigură balanța optimală a intereselor celor doi jucători. Din acest motiv, punctul șa (x_0, y_0) al funcției f se numește *strategie optimală*. Teorema 5.13 oferă condiții de existență a strategiilor optimale. Dacă mulțimile A și B sunt finite și au mai multe elemente, nu sunt convexe și deci teorema nu se aplică. Totuși von Neumann a rezolvat acest inconvenient astfel: se introduce un factor probabilistic, adică jucătorii fac alegerea pe baza unor probabilități fixe. Mai precis, preupunem că P are strategiile a_1, \dots, a_n iar Q are strategiile b_1, \dots, b_m . Jucătorul P alege strategia a_i cu probabilitatea p_i iar Q alege strategia b_j cu probabilitatea q_j . Considerăm mulțimile

$$A = \left\{ p \in \mathbf{R}^n; 0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^n p_i = 1 \right\}$$

$$B = \left\{ q \in \mathbf{R}^m; 0 \leq q_j \leq 1, \sum_{j=1}^m q_j = 1 \right\},$$

și definim funcția $F : A \times B \rightarrow \mathbf{R}$ prin

$$F(p, q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(a_i, b_j) p_i q_j.$$

Perechea (p, q) se numește *strategie mixtă* iar $F(p, q)$ reprezintă câștigul sperat de jucătorul Q . Considerații probabilistice arată că $F(p, q)$ este media câștigurilor lui Q dacă se joacă de multe ori.

Este clar că sunt îndeplinite ipotezele din Teorema 5.13, deci putem afirma că există o strategie mixtă optimală (p_0, q_0) și are loc egalitatea

$$F(p_0, q_0) = \min_{p \in A} \max_{q \in B} F(p, q) = \max_{q \in B} \min_{p \in A} F(p, q).$$

5.7 Controlabilitate și timp optimal pentru sisteme semiliniare

În această secțiune ne ocupăm de problema controlabilității în timp optimal pentru sistemul descris de ecuația

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u(t) \quad (5.32)$$

unde operatorul A generează un semigrup de clasă C_0 , $S(t)$, $t \geq 0$, pe spațiul Banach reflexiv X , f este o funcție lipschitziană și $u(\cdot)$ este un control ce ia valori în $U = B(0, r)$.

Problema timpului optimal constă în a atinge o mulțime țintă \mathcal{T} în timp minim pornind dintr-un punct inițial x și folosind controale admisibile, $u(\cdot)$, adică funcții măsurabile de la $[0, \infty)$ la U . Vom considera aici cazul când ținta este $\mathcal{T} = \{0\}$.

Pentru un control admisibil $u(\cdot)$, considerăm soluția ecuației (5.32) care satisface condiția inițială $y(0) = x$, adică, funcția $y \in C([0, \infty), X)$ care satisface

$$y(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)[f(y(s)) + u(s)]ds. \quad (5.33)$$

Conform Teoremei 4.19, pentru fiecare control u soluția există și este unică. Numim această soluție traiectorie a sistemului (5.32) și o notăm $y(\cdot, x, u)$. Pentru $t \geq 0$ considerăm mulțimea de controlabilitate la timpul t

$$\mathcal{R}(t) = \{x \in X; y(t, x, u) = 0 \text{ pentru un control admisibil } u(\cdot)\},$$

mulțimea de controlabilitate

$$\mathcal{R} = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}(t)$$

și funcția timp optimal (funcția lui Bellman) $T : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$

$$T(x) = \inf \{t; x \in \mathcal{R}(t)\}.$$

Un control pentru care infimumul se atinge se numește *optimal* pentru x . Teorema următoare pune în evidență condiții suficiente de existență a controalelor optimale.

Teorema 5.14 *Dacă X este reflexiv și separabil iar semigrupul $S(t)$ este compact, atunci pentru fiecare $x \in \mathcal{R}$ există cel puțin un control optimal. În cazul liniar ($f=0$), proprietatea are loc fără condiția ca semigrupul să fie compact.*

Demonstrație. Fie (u_n) un șir de controale admisibile și un șir (t_n) descrescător și convergent la $T(x)$ cu proprietatea $y(t_n, x, u_n) = 0$. Extindem u_n pe $[0, t_1]$ punând $u_n(s) = 0$ pentru $s \in (t_n, t_1)$. Conform teoremei lui Alaoglu, și ținând cont de separabilitatea lui X și deci a lui $L^1(0, t; X)$ putem presupune că u_n converge slab-stelat în $L^\infty(0, t; X)$ la un control admisibil u . Mai departe argumentele sunt diferite. Dacă $f = 0$, se ia $x^* \in X^*$, se scrie

$$\langle x^*, y(t_n, x, u_n) \rangle = \langle x^*, S(t_n)x \rangle + \int_0^{t_1} \langle S^*(t_n - t)x^*, u_n(t) \rangle dt.$$

Trecând la limită cu $n \rightarrow \infty$, eventual pe un subșir, ajungem la $y(T(x), x, u) = 0$. În cazul general, se folosește compactitatea operatorului

$$\varphi \mapsto \int_0^t S(t-s)\varphi(s)ds$$

(vezi Observația 4.10) pentru a trece la limită. \square

O proprietate remarcabilă a funcției timp optimal este dată de principiul programării dinamice al lui Bellman. Comentarii asupra acestui principiu vor fi făcute la sfârșitul acestei secțiuni.

Pentru orice $x \in \mathcal{R}$ și orice control u ,

$$T(x) \leq t + T(y(t, x, u)) \quad (5.34)$$

pentru orice $t > 0$ pentru care $y(t, x, u) \in \mathcal{R}$, cu egalitate în cazul când u este optimal.

Demonstrația acestui rezultat va fi dată în Teorema 5.17.

În cele ce urmează vom pune în evidență câteva proprietăți ale mulțimii de controlabilitate și ale funcției timp optimal. Să prezentăm mai întâi o lemă în care evidențiem proprietăți ale traiectoriilor sistemului (5.32). Peste tot în această secțiune presupunem că f este L -lipschitziană pe X , $f(0) = 0$ iar ω este o constantă pentru care $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$ pentru orice $t > 0$. În general, semigrupul verifică o inegalitate de forma $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, inegalitate care se poate reduce la cazul $M = 1$ prin considerarea unei norme echivalente cu cea inițială.

Lema 5.2 (a) Pentru orice $x \in X$ și orice control u avem

$$\|y(t, x, u)\| \leq e^{(L+\omega)t} \left(\|x\| + \frac{r}{L+\omega} \right) - \frac{r}{L+\omega} \quad \forall t \geq 0.$$

În cazul $L + \omega = 0$ membrul drept al inegalității de mai sus este $\|x\| + rt$.

(b) Pentru orice $x, z \in X$ și orice control u avem

$$\|y(t, x, u) - y(t, z, u)\| \leq e^{(L+\omega)t} \|x - z\| \quad \forall t \geq 0. \quad (5.35)$$

Demonstrație. Demonstrația se bazează pe inegalitatea lui Gronwall:

Fie φ , h și k funcții date de la $[t_0, T)$ în \mathbf{R} , unde $T \leq +\infty$. Dacă φ este continuă, $h \in L_{\text{loc}}^\infty([t_0, T))$, $k \in L_{\text{loc}}^1([t_0, T); \mathbf{R}_+)$ și

$$\varphi(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t k(s)\varphi(s)ds$$

pentru orice $t \in [t_0, T)$, atunci

$$\varphi(t) \leq h(t) + \int_{t_0}^t h(s)k(s) \exp\left(\int_s^t k(u)du\right) ds$$

pentru orice $t \in [t_0, T)$, unde $\exp(a) = e^a$.

Pentru demonstrația primei părți a lemei, se aplică inegalitatea lui Gronwall pentru funcțiile $\varphi(t) = e^{-\omega t} \|y(t, x, u)\|$, $h(t) = \|x\| + (r/\omega)(1 - e^{-\omega t})$ și $k(t) = L$. Pentru (b), $\varphi(t)$ și $k(t)$ sunt ca mai sus iar $h(t) = \|x - z\|$. \square

Propoziția 5.5 Fie $R \geq 0$ astfel încât $(L + \omega)R < r$.

(i) In cazul $L + \omega > 0$, pentru orice $x \in X$ cu

$$R < \|x\| < r/(L + \omega),$$

există un control u^* astfel încât traiectoria $y(t, x, u^*)$ atinge $B(0, R)$ în timp finit și satisface inegalitatea

$$\|y(t, x, u^*)\| \leq e^{(L+\omega)t} \left(\|x\| - \frac{r}{L + \omega} \right) + \frac{r}{L + \omega} \quad (5.36)$$

pentru orice

$$0 \leq t \leq \tilde{t} \leq \frac{1}{L + \omega} \log \frac{\frac{r}{L+\omega} - R}{\frac{r}{L+\omega} - \|x\|},$$

unde \tilde{t} este cel mai mic t pentru care $y(t, x, u^*) \in B(0, R)$.

(ii) In cazul $L + \omega \leq 0$, proprietatea de mai sus are loc pentru orice $x \in X$ iar inegalitatea din (5.36) se rescrie

$$\|y(t, x, u^*)\| \leq \|x\| - rt \quad (5.37)$$

pentru orice

$$0 \leq t \leq \tilde{t} \leq (\|x\| - R)r^{-1}.$$

Demonstrație. (i) Considerăm întâi $R > 0$ și funcția

$$F_R(y) = \begin{cases} -\frac{r}{R}y & \text{dacă } \|y\| \leq R \\ -r\frac{y}{\|y\|} & \text{dacă } \|y\| \geq R, \end{cases}$$

Observăm că este lipschitziană și considerăm ecuația

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)) + F_R(y(t)) \quad t > 0. \quad (5.38)$$

Pentru $x \in D(A)$, pe fiecare interval $I = [0, T]$, ecuația (5.38) are o soluție unică satisfăcând $y(0) = x$. Mai mult, ea este soluție clasică (vezi Teorema 4.20), adică $y \in C^1(I; X)$ și satisface (5.38) pe I .

Inmulțim ecuația (5.38) cu $y(t)$ și obținem

$$\|y(t)\| \frac{d}{dt} \|y(t)\| \leq (L + \omega) \|y(t)\|^2 - r \|y(t)\|,$$

pentru $t \in [0, \tilde{t}]$, unde \tilde{t} este maximum valorilor lui t pentru care $y(t) \notin B(0, R)$. Obținem

$$\|y(t)\| \leq \|x\| - rt + (L + \omega) \int_0^t \|y(s)\| ds, \quad \forall t \in [0, \tilde{t}],$$

care, în cazul $L + \omega \leq 0$ implică (5.37) și, în cazul $L + \omega > 0$ implică (5.36) pe baza inegalității lui Gronwall. Este clar că există un \tilde{t} ca mai sus fiindcă, altfel, lucrăm pe orice $[0, T]$ și (5.36) sau (5.37) forțează existența unui \tilde{t} . Prin urmare (5.36) și (5.37) au fost demonstrate pentru $x \in D(A)$. Prin densitate, ele au loc pentru orice $x \in X$. Controlul cerut este

$$u^*(t) = -ry(t)/|y(t)|. \quad (5.39)$$

În cazul $R = 0$, observăm că dacă $R_1 < R_2$ atunci avem $\tilde{t}_1 > \tilde{t}_2$ iar soluțiile corespunzătoare $y_1(\cdot)$ și $y_2(\cdot)$ satisfac

$$y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in [0, \tilde{t}_2].$$

Cu alte cuvinte, traiectoriile ecuației (5.38) nu depind de $R > 0$ până ating $B(0, R)$. Luăm un șir R_n descrescător și convergent la 0 și obținem un șir \tilde{t}_n crescător și convergent la \bar{t} care satisface inegalitățile cerute la (i) sau (ii). Demonstrația se încheie considerând controlul dat de (5.39) pe $[0, \bar{t}]$. \square

Teorema 5.15 (i) *Mulțimea de controlabilitate \mathcal{R} este deschisă și funcția timp optimal este local lipschitziană pe \mathcal{R} . Mai precis, avem*

(ii) In cazul $L + \omega > 0$, pentru orice $\rho \in (0, r/(L + \omega))$ avem

$$T(x) \leq \frac{\|x\|}{r - \rho(L + \omega)}$$

pentru x satisfăcând $\|x\| \leq \rho$. Notând

$$\gamma = \frac{1}{r - \rho(L + \omega)},$$

dacă $x \in \mathcal{R}$ și z este astfel încât

$$\|z - x\| \leq \rho e^{-(L+\omega)T(x)},$$

atunci $z \in \mathcal{R}$ și

$$T(z) \leq T(x) + \gamma e^{(L+\omega)T(x)} \|x - z\|.$$

(iii) In cazul $L + \omega \leq 0$ avem $\mathcal{R} = X$ și

$$T(x) \leq \frac{\|x\|}{r}$$

pentru orice $x \in X$. Mai mult, pentru orice $x, z \in X$ avem

$$|T(z) - T(x)| \leq \frac{1}{r} \|x - z\|.$$

(iv) Pentru orice $x \in \mathcal{R}$ și $z \notin \mathcal{R}$ avem

$$T(x) \geq -\frac{1}{L + \omega} \log \frac{\|x - z\|}{\rho}.$$

In particular,

$$\lim_{z \rightarrow x} T(z) = \infty \quad \forall x \in \text{Fr}\mathcal{R}. \quad (5.40)$$

Demonstrație. Punctul (i) rezultă din celelalte. Să demonstrăm (ii). Observăm mai întâi că, din Propoziția 5.5, avem

$$T(x) \leq \frac{1}{L + \omega} \log \frac{\frac{r}{L+\omega} - R}{\frac{r}{L+\omega} - \|x\|},$$

ceea ce, printr-un calcul elementar, conduce ușor la prima parte a concluziei. Mai departe, pentru simplificarea expunerii, presupunem existența controalelor optime. In cazul general, concluzia se obține printr-un procedeu de aproximare.

Deoarece $y(T(x), x, u) = 0$, din (5.35) deducem

$$\|y(T(x), z, u)\| \leq e^{(L+\omega)T(x)} \|x - z\| \leq \rho,$$

deci $y(T(x), z, u) \in \mathcal{R}$ ceea ce implică $z \in \mathcal{R}$ și

$$T(y(T(x), z, u)) \leq \gamma e^{(L+\omega)T(x)} \|x - z\|.$$

Aplicăm acum principiul programării dinamice (5.34) și obținem concluzia dorită. Un argument similar dă (iii). Pentru a demonstra (iv), observăm că suntem în situația când $L + \omega > 0$. Prin reducere la absurd, presupunem că

$$(L + \omega)T(x) < -\log \|x - z\|/\rho.$$

Avem

$$\|x - z\| < \rho e^{-(L+\omega)T(x)},$$

ceea ce, folosind (ii), implică $z \in \mathcal{R}$. □

Observația 5.6 Teorema de mai sus arată că

$$\lim_{z \rightarrow 0} T(z) = 0. \tag{5.41}$$

Următoarea teoremă arată că dacă semigrupul $S(t)$ este compact atunci funcția timp optimal este secvențial slab continuă. Pentru aceasta folosim următorul rezultat.

Lema 5.3 *Presupunem că X este spațiu Banach, f este lipschitziană pe X și $S(t)$ este semigrup compact. Fie $0 < a < t$, (x_n) un șir slab convergent la x și (u_n) slab convergent la u în $L^2(0, t; X)$. Atunci,*

$$y(\cdot, x_n, u_n) \rightarrow y(\cdot, x, u)$$

în $C([a, t]; X)$, cel puțin pe un subșir.

Demonstrație. Demonstrația este standard și se bazează pe compactitatea operatorului

$$\varphi \mapsto \int_0^s S(s - \tau)\varphi(\tau) d\tau$$

de la $L^2(0, T; X)$ la $C([0, T]; X)$. Vezi Observația 4.10. □

Teorema 5.16 *Presupunem că semigrupul $S(t)$ este compact. Atunci, pentru $R \geq 0$ au loc următoarele proprietăți.*

(i) *Dacă $x \in \mathcal{R}$ și $x_n \rightarrow x$ slab, atunci pentru n suficient de mare avem $x_n \in \mathcal{R}$. Mai mult, $T(x_n) \rightarrow T(x)$.*

(ii) *Pentru orice $x \notin \mathcal{R}$ și pentru orice șir (x_n) slab convergent la x avem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \infty.$$

Demonstrație. Pentru a demonstra prima parte din (i), luăm $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încât

$$y(\varepsilon, x, 0) \in \mathcal{R}$$

(acest fapt este posibil deoarece \mathcal{R} este mulțime deschisă), luăm $u_n = 0$ și, din Lema 5.3, deducem că pe un subșir avem

$$y(\varepsilon, x_n, 0) \in \mathcal{R}$$

pentru n suficient de mare. Asta implică faptul că pe un subșir avem $x_n \in \mathcal{R}$ pentru n suficient de mare. Deci orice șir slab convergent la x are un subșir în \mathcal{R} (slab convergent la x), ceea ce arată că prima parte din (i) are loc. În continuare, luăm

$$T^* = \limsup_{n \rightarrow \infty} T(x_n),$$

luăm un subșir (x_{n_k}) astfel încât $T(x_{n_k}) \rightarrow T^*$ și fixăm $\varepsilon > 0$. Din Lema 5.3, putem presupune (extragând eventual un subșir) că

$$y(\varepsilon, x_{n_k}, 0) \rightarrow y(\varepsilon, x, 0).$$

Deci

$$T(y(\varepsilon, x_{n_k}, 0)) \rightarrow T(y(\varepsilon, x, 0)).$$

Folosim principiul programării dinamice (5.34) și obținem

$$T(x_{n_k}) \leq \varepsilon + T(y(\varepsilon, x_{n_k}, 0)),$$

deci

$$T^* \leq \varepsilon + T(y(\varepsilon, x, 0)).$$

Trecem la limită cu $\varepsilon \rightarrow 0$ și obținem

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \leq T(x).$$

Am arătat așadar că funcția $T(\cdot)$ este secvențial superior semicontinuă. Să demonstrăm acum că $T(\cdot)$ este secvențial inferior semicontinuă în $x \in \mathcal{R}$. Luăm

$$T^\# = \liminf_{n \rightarrow \infty} T(x_n)$$

și un subșir (x_{n_k}) astfel încât $T(x_{n_k}) \rightarrow T^\#$. Într-o primă etapă, presupunem că $T^\# > 0$. Fixăm $0 < \varepsilon < T^\#$ și luăm u_{n_k} controlul optimal pentru x_{n_k} . Pe baza Lemei 5.3, putem presupune că există un control u astfel încât

$$y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}) \rightarrow y(\varepsilon, x, u),$$

țare. Folosim din nou principiul programării dinamice și deducem

$$T(x_{n_k}) = \varepsilon + T(y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k})).$$

De aici obținem

$$T(y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k})) \leq M$$

pentru un $M > 0$. Fie k_0 astfel încât

$$|y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}) - y(\varepsilon, x, u)| \leq \rho e^{-(L+\omega)M}$$

pentru $k > k_0$. Din Teorema 5.15 obținem $y(\varepsilon, x, u) \in \mathcal{R}$ și

$$T(y(\varepsilon, x, u)) \leq -T(y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k})) + \gamma e^{(L-\omega)M} |y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}) - y(\varepsilon, x, u)|$$

pentru $k > k_0$. Prin urmare,

$$\begin{aligned} T(x_{n_k}) &= \varepsilon + T(y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k})) \\ &\geq \varepsilon + T(y(\varepsilon, x, u)) - \gamma e^{(L-\omega)M} |y(\varepsilon, x_{n_k}, u_{n_k}) - y(\varepsilon, x, u)|. \end{aligned}$$

Facem $n \rightarrow \infty$ și apoi $\varepsilon \rightarrow 0$ și obținem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T(x_n) \geq T(x).$$

În etapa următoare presupunem $T^\# = 0$ și demonstrăm $T(x) = 0$. Pentru aceasta, luăm $\varepsilon > 0$ și pentru fiecare x_{n_k} luăm un control v_k pe $[0, \varepsilon]$ definit după cum urmează: pe $[0, T(x_{n_k})]$, v_k egalează controlul optimal iar pe $[T(x_{n_k}), \varepsilon]$, v_k este un control care forțează traiectoria să rămână în $B(0, R)$. Acest fapt este posibil din cauza Propoziției 5.5. De fapt, putem atinge originea și apoi rămânem acolo deoarece $f(0) = 0$. Deoarece,

$$y(\varepsilon, x_{n_k}, v_k) \rightarrow y(\varepsilon, x, u)$$

pentru un control u , deducem

$$y(\varepsilon, x, u) \in B(0, R)$$

deci $T(x) \leq \varepsilon$. Cum acest fapt are loc pentru orice $\varepsilon > 0$ deducem $T(x) = 0$.

Pentru a demonstra (ii), considerăm $x \notin \mathcal{R}$, considerăm un șir (x_n) în \mathcal{R} slab convergent la x și presupunem, prin reducere la absurd, că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T(x_n) < \infty.$$

Raționăm ca în demonstrația semicontinuității inferioare și deducem

$$y(\varepsilon, x, u) \in \mathcal{R}.$$

Deci $x \in \mathcal{R}$. Contradicția la care am ajuns arată că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \infty,$$

ceea ce încheie demonstrația. □

Revenim acum la principiul programării dinamice. Presupunem că pentru fiecare $x \in \mathcal{R}$ există un control optimal. Vezi Teorema 5.14.

Teorema 5.17 *O funcție $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este funcția timp optimal dacă și numai dacă satisface următoarele condiții:*

(i) *Pentru orice $x \in \mathcal{R}$ există un control u și $\sigma > 0$ astfel încât*

$$T(y(t, x, u)) \leq T(x) - t \quad \forall t \in [0, \sigma];$$

(ii) *Pentru orice $x \in \mathcal{R}$, orice control u și orice $t \geq 0$ pentru care $y(t, x, u) \in \mathcal{R}$ avem*

$$T(y(t, x, u)) \geq T(x) - t;$$

(iii) $\lim_{z \rightarrow 0} T(z) = 0$;

(iv) $\lim_{z \rightarrow x} T(z) = \infty \quad \forall x \in \text{Fr}\mathcal{R}$;

(v) *Funcția T este mărginită inferior.*

Demonstrație. Funcția timp optimal verifică (iii), (iv) pe baza Teoremei 5.15 și (v). Să arătăm că satisface (i). In primul rând trebuie observat că dacă $y(t, x, u) \in \mathcal{R}$ atunci $x \in \mathcal{R}$. Considerăm u controlul optimal pentru x și $\sigma = T(x)$. Luăm $t \in [0, \sigma]$ și observăm că

$$y(T(x) - t, y(t, x, u), u) = 0$$

de unde rezultă (i). Pentru (ii), luăm $x \in \mathcal{R}$, un control oarecare u și $y(t, x, u) \in \mathcal{R}$. Fie v un control optimal pentru $y(t, x, u)$. Se verifică ușor că

$$y(s, y(t, x, u), v) = y(t + s, x, w)$$

pentru $s > 0$, unde $w(\theta) = u(\theta)$ pentru $\theta \in (0, t)$ și $w(\theta) = v(\theta - t)$ pentru $\theta \in (t, t + s)$. Cum $y(T(y(t, x, u)), y(t, x, u), v) = 0$, obținem $y(t + T(y(t, x, u)), x, w) = 0$ deci

$$T(x) \leq t + T(y(t, x, u)).$$

Să demonstrăm acum reciproca. Intr-o primă etapă, arătăm că putem înlocui (i) cu

(vi) Pentru orice $x \in \mathcal{R}$ există un control u și $\sigma \in (0, \infty)$ astfel încât $y(\sigma, x, u) = 0$ și $T(y(t, x, u)) \leq T(x) - t$ pentru orice $t \in [0, \sigma]$.

Să demonstrăm acest fapt. Restrângem sistemul de control la mulțimea $\mathcal{R} \setminus \{0\}$, folosim Principiul Brezis-Browder (Teorema 5.1) și deducem că există o traiectorie saturată $y(t, x, u)$ definită pe $[0, \sigma]$ care să verifice (i). Dar, din (v) rezultă că σ este finit iar din (iv) rezultă că

$$y(\sigma, x, u) \notin \text{Fr}\mathcal{R}.$$

Rămâne $y(\sigma, x, u) = 0$, deci (vi) are loc.

Să presupunem că avem o funcție, s-o notăm cu T_1 , care verifică (vi), (ii), (iii), (iv) și (v). Facem $t \rightarrow \sigma$ în (vi), folosim (iii) (deci $T(y(\sigma, x, u)) = 0$) și obținem $T_1(x) \geq \sigma \geq T(x)$.

Luăm în (ii) toate traiectoriile care ating ținta și obținem $T_1(x) \leq T(x)$. \square

Funcția *valoare* (în cazul nostru funcția timp optimal) într-o problemă generală de control este utilă în obținerea unei legi de feedback care să dea traiectoria optimală. Această metodă generală de rezolvare a problemelor de control se numește metoda programării dinamice. Funcția valoare este soluția unei ecuații cu derivate parțiale de tip Hamilton-Jacobi care în cazul problemei timpului optimal se numește ecuația lui Bellman. Cititorul interesat poate consulta [12] pentru rezultate în această direcție. In studiul existenței și unicității ecuației lui Bellman, ca de altfel a oricărei ecuații care provine dintr-o problemă de control optimal, principiul de optimalitate al lui Bellman joacă un rol central. El a fost formulat în 1953 de Richard Bellman.

Capitolul 6

Probleme și soluții

Problema 6.1 Fie $\mathcal{V} = \{V_i; i \in I\}$ o familie local finită de submulțimi ale lui X . Atunci

(a) $\overline{\mathcal{V}} = \{\overline{V_i}, i \in I\}$ este local finită;

(b) $\cup_{i \in I} \overline{V_i} = \overline{\cup_{i \in I} V_i}$.

Soluție (a) Fie $x \in X$ și U o vecinătate deschisă a sa astfel încât $U \cap V_i = \emptyset$, cu excepția unui număr finit de indici. Dar $U \cap V_i = \emptyset$ implică $V_i \subset X \setminus U$. Deoarece $X \setminus U$ este închisă rezultă $\overline{V_i} \subset X \setminus U$ și deci $\overline{V_i} \cap U = \emptyset$.

(b) Este clar că $\cup_{i \in I} \overline{V_i} \subset \overline{\cup_{i \in I} V_i}$. Fie $x \notin \cup_{i \in I} \overline{V_i}$. Folosind (a), există o vecinătate deschisă U a lui x care intersectează cel mult un număr finit de mulțimi $\overline{V_i}$. Dacă nu intersectează nici una atunci $U \cap (\cup_{i \in I} V_i) = \emptyset$ și deci $x \notin \overline{\cup_{i \in I} V_i}$. Dacă U intersectează $\overline{V_{i_1}}, \dots, \overline{V_{i_n}}$ atunci mulțimea $U \cap (\cap_{j=1}^n (X \setminus \overline{V_{i_j}}))$ este o vecinătate deschisă a lui x care nu intersectează $\cup_{i \in I} V_i$. Deci $x \notin \overline{\cup_{i \in I} V_i}$.

Problema 6.2 Să se arate printr-o demonstrație directă că \mathbf{R} cu topologia uzuală este spațiu paracompact.

Soluție Fie \mathcal{U} o acoperire deschisă. Pentru fiecare n alegem un număr finit de elemente din \mathcal{U} care acoperă intervalul $[n, n+1]$ și intersectăm pe fiecare cu intervalul $(n-1, n+2)$. Se obține o familie de mulțimi deschise V_n . Atunci familia $\mathcal{V} = \cup_{n \in \mathbf{Z}} V_n$ este o rafinare local finită a lui \mathcal{U} .

Problema 6.3 Fie X un spațiu metric, $g : X \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție inferior semicontinuă, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție superior semicontinuă astfel încât $f(x) < g(x)$ pentru orice $x \in X$. Atunci există o funcție local lipschitziană, $h : X \rightarrow \mathbf{R}$, astfel încât $f(x) < h(x) < g(x)$ pentru orice $x \in X$.

Soluție Pentru fiecare număr rațional r considerăm mulțimea deschisă

$$U_r = \{x; f(x) < r\} \cap \{x; g(x) > r\}.$$

Familia $\{U_r\}$ este o acoperire deschisă a lui X . Fie $\{V_i; i \in I\}$ o rafinare local finită a sa și $\{p_i; i \in I\}$ o partiție local lipschitziană a unității subordonată ei. Pentru fiecare $i \in I$, fie $r(i)$ numărul rațional pentru care $V_i \subset U_{r(i)}$. Definim

$$h(x) = \sum_{i \in I} r(i)p_i(x)$$

și arătăm că aceasta este funcția căutată. Intr-adevăr, fie $x \in X$ și $i \in I$ cu proprietatea că $p_i(x) > 0$. Avem $x \in U_{r(i)}$ și deci $f(x) < r(i) < g(x)$. Așadar,

$$f(x) = f(x) \sum p_i(x) < \sum r(i)p_i(x) = h(x) < g(x) \sum p_i(x) = g(x).$$

Problema 6.4 Fie X spațiu Banach. Considerăm funcțiile mărginite $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât ψ este superior semicontinuu, φ este inferior semicontinuu și $\psi(x) \leq \varphi(x)$ pentru orice $x \in X$. Să se arate că multifuncția $F : X \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = [\psi(x), \varphi(x)]$ este inferior semicontinuu.

Soluție Fie $x_0 \in X$ și V un interval deschis în \mathbf{R} cu

$$V \cap F(x_0) \neq \emptyset.$$

Există $v_1, v_2 \in V$ cu $\psi(x_0) < v_1$ și $\varphi(x_0) > v_2$. Datorită proprietăților de continuitate pentru ψ și φ avem

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \psi(x) \leq \psi(x_0) < v_1$$

și

$$v_2 < \varphi(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

Rezultă că există o vecinătate U a lui x_0 pentru care $\psi(x) < v_1$ și $v_2 < \varphi(x)$ pentru $x \in U$, ceea ce asigură că

$$F(x) \cap V \neq \emptyset$$

pentru $x \in U$.

Să observăm că are loc și afirmația:

Dacă $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$ este inferior semicontinuu cu valori compacte și convexe atunci există ψ și φ ca mai sus astfel încât $F(x) = [\psi(x), \varphi(x)]$.

Problema 6.5 Fie X spațiu Banach. Considerăm funcțiile mărginite $\psi, \varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât ψ este inferior semicontinuu, φ este superior semicontinuu și $\psi(x) \leq \varphi(x)$ pentru orice $x \in X$. Să se arate că multifuncția $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = [\psi(x), \varphi(x)]$ este superior semicontinuu.

Soluție Fie $x_0 \in X$ și mulțimea V deschisă în \mathbf{R} astfel încât $F(x_0) \subset V$. Există deci v_1, v_2 astfel încât $[v_1, v_2] \subset V$ și

$$v_1 < \psi(x_0) \leq \varphi(x_0) < v_2.$$

Obținem

$$v_1 < \psi(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} \psi(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \leq \varphi(x_0) < v_2,$$

ceea ce conduce la existența unei vecinătăți U a lui x_0 pentru care

$$v_1 < \psi(x) \leq \varphi(x) < v_2$$

pentru $x \in U$. Prin urmare, $F(x) \subset V$ pentru orice $x \in U$. Ca și în Problema 6.4, să observăm că orice multifuncție $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$ superior semicontinuă cu valori convexe și compacte are forma indicată în enunț.

Problema 6.6 Fie X și Y spații Banach și $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv. Atunci, pentru orice mulțime compactă $B \subset Y$, există o mulțime compactă $A \subset X$ astfel încât $B \subset T(A)$.

Soluție Se ia $A = T^{-1}(B)$ și se aplică faptul că T^{-1} este multifuncție inferior semicontinuă. Vezi și Problema 6.28. Altfel, se ia inversa la dreapta a funcției T , fie ea f , și apoi se ia $B = f(A)$.

Problema 6.7 Să se arate că multifuncția $F : [0, 1] \rightsquigarrow \mathbf{R}^2$ definită prin $F(x) = \{(t, xt); t > 0\}$ este inferior semicontinuă pe $[0, 1]$ dar nu este $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă în nici un punct din $[0, 1]$.

Soluție Fie șirul (x_n) , $x_n \rightarrow x_0$, fie $(t_0, x_0 t_0) \in F(x_0)$ și fie șirul (t_n) , $t_n > 0$, $t_n \rightarrow t_0$. Este clar că $y_n = (t_n, x_n t_n) \in F(x_n)$ și $y_n \rightarrow y_0$. Să arătăm că F nu este $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă în $x_0 = 0$. Presupunem contrariul și deducem că există $\delta > 0$ astfel încât pentru $x \in [0, 1] \cap S(0, \delta)$ avem $F(0) \subset F(x) + S(0, 1)$. Deci, pentru $n \in \mathbf{N}$ există $t_n > 0$ astfel încât

$$(n - t_n)^2 + x^2 t_n^2 < 1.$$

Deducem astfel că șirul t_n este mărginit și apoi ajungem la o contradicție.

Problema 6.8 Determinați $F : X \rightsquigarrow \mathbf{R}$ care să fie inferior semicontinuă și cu valori compacte, X să fie mulțime compactă din \mathbf{R} , iar $F(x)$ să fie nemărginită.

Soluție Se ia $X = [0, 1]$ și $F : [0, 1] \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = 0$ dacă $x = 0$ și $F(x) = [0, 1/x]$ pentru $x > 0$.

Problema 6.9 Fie X spațiu normat și $A, B \subset X$ mulțimi nevide. Arătați că $e(A, B) < \varepsilon$ implică

$$e(\operatorname{conv}A, \operatorname{conv}B) \leq \varepsilon,$$

unde $e(A, B)$ este definit în (2.6).

Soluție Fie $x \in \operatorname{conv}A$. Există $(\lambda_i), i = 1, \dots, n$ și $x_i \in A$ astfel încât $x = \sum \lambda_i x_i$. Din faptul că $e(A, B) < \varepsilon$, există $y_i \in B$ astfel încât $\|x_i - y_i\| < \varepsilon$. Obținem $\|x - y\| < \varepsilon$ unde

$$y = \sum \lambda_i y_i \in \operatorname{conv}B.$$

Prin urmare, pentru orice $x \in \operatorname{conv}A$ avem $d(x, \operatorname{conv}B) < \varepsilon$ și deci

$$e(\operatorname{conv}A, \operatorname{conv}B) \leq \varepsilon.$$

Problema 6.10 Să se arate că multifuncția $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}^2$ definită prin $F(x) = \{x\} \times (0, \infty)$ este $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuu dar nu este superior semicontinuu.

Soluție Fie $\varepsilon > 0$ și $\delta = \varepsilon$. Se verifică ușor că $F(S(0, \varepsilon)) \subset F(0) + S(0, \varepsilon)$. Inșă, dacă se ia

$$V = \{(x, y); \|y\| < 1/\|x\|\}$$

și $x \neq 0$, este clar că $F(x) \not\subset V$.

Problema 6.11 Considerăm o funcție $f : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât pentru $0 \leq t \leq s \leq T$, $f(s) + s \geq f(t) + t$. Presupunem în plus că există o constantă M astfel încât pentru orice $t \in [0, T)$,

$$\liminf_{s \downarrow t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \leq M.$$

Atunci f este lipschitziană pe $[0, T]$.

Soluție Considerăm mulțimea închisă $D = \operatorname{epi}(f)$ și arătăm că este domeniu de viabilitate pentru ecuația diferențială

$$\begin{cases} \theta'(s) = 1 \\ \psi'(s) = M, \end{cases}$$

Pentru aceasta, trebuie să arătăm că este verificată condiția de tangentă. Din ipoteză, există un șir $h_n \downarrow 0$ astfel încât

$$f(t + h_n) \leq f(t) + M(h_n + 1/n),$$

relație care se scrie în forma

$$(t, f(t)) + h_n((1, M) + (0, 1/n)) \in \text{epi}(f),$$

ceea ce arată că $(1, M) \in T_D((t, f(t)))$. Deci condiția de tangență se verifică pentru punctele graficului funcției f . Celelalte puncte sunt interioare lui D , deci condiția de tangență se verifică automat. Aplicăm Teorema 2.10 și deducem că pentru $s < T - t$ avem $(t + s, f(t) + M s) \in D$. Deci pentru $t \leq t_1 < T$ avem

$$f(t) + M(t_1 - t) \geq f(t_1).$$

Deoarece f este inferior semicontinuă, inegalitatea de mai sus este verificată și pentru $t_1 = T$. Aceasta, împreună cu cealaltă ipoteză asupra lui f implică

$$-(t_1 - t) \leq f(t_1) - f(t) \leq M(t_1 - t)$$

pentru $0 \leq t \leq t_1 \leq T$. Prin urmare, funcția f este lipschitziană cu constanta $M + 1$.

Problema 6.12 Fie $F_1, F_2 : [0, 1] \rightsquigarrow \mathbf{R}^2$ definite astfel: $F_1(x)$ este triunghiul ABC iar $F_2(x)$ este triunghiul ONA unde punctele A, B, C, N, O au coordonatele respectiv $(1, 0), (0, 1), (0, x), (1, -1)$ și $(0, 0)$. Să se arate că multifuncția $F : [0, 1] \rightsquigarrow \mathbf{R}^2$ definită prin $F(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$ nu este inferior semicontinuă deși F_1 și F_2 sunt inferior semicontinue cu valori compacte și convexe.

Soluție Este evident că F_1 și F_2 sunt inferior semicontinue, $F(x)$ este segmentul OA dacă $x = 0$ și punctul A dacă $x \in (0, 1]$. Multifuncția F nu este inferior semicontinuă în origine. Într-adevăr, pentru $x_n = 1/n$ și $y_0 = \{O\} \in F(0)$, avem $F(x_n) = \{A\}$ și deci nu există $y_n \in F(x_n)$ astfel ca $y_n \rightarrow y_0$.

Problema 6.13 În Problema 6.12, F_2 este constantă și închisă. Să se arate că dacă F_2 este constantă deschisă iar F_1 este inferior semicontinuă atunci $F_1 \cap F_2$ este inferior semicontinuă.

Soluție Fie $F_1 : X \rightsquigarrow Y$ inferior semicontinuă și $A \subset Y$ deschisă astfel încât $F_1(x) \cap A \neq \emptyset$ pentru $x \in X$. Fie D deschisă în Y . Avem de arătat că mulțimea $\{x; F_1(x) \cap A \cap D \neq \emptyset\}$ este deschisă, afirmație care rezultă din semicontinuitatea inferioară a lui F_1 și din faptul că $A \cap D$ este deschisă.

Problema 6.14 Fie $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție strictă. Să se arate că dacă $F^{-1}(y)$ este deschisă pentru orice $y \in Y$ atunci F este local selecționabilă.

Soluție Fie $x_0 \in X$ și $y_0 \in F(x_0)$. Este clar că mulțimea $U = F^{-1}(y_0)$ conține x_0 și este deschisă. Funcția constantă $f : U \rightarrow Y$, $f(x) = y_0$, rezolvă problema.

Problema 6.15 Fie mulțimea $Y = \{1, 2, 3\}$ pe care considerăm topologia dată de mulțimile deschise $\emptyset, Y, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3\}$. Fie $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow Y$ definită prin

$$F(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } x \leq 0 \\ \{1, 3\} & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Arătați că F este superior semicontinuu dar \overline{F} nu este superior semicontinuu. Care dintre ipotezele Propoziției 2.4 (ii) nu este îndeplinită în acest caz ?

Soluție Se aplică Teorema 2.1 de caracterizare a multifuncțiilor superior semicontinue. Pentru aceasta se iau toate mulțimile D , deschise în Y , se calculează $F^{+1}(D)$ și se constată că sunt deschise în \mathbf{R} . De exemplu, dacă $D = \{2, 3\}$ atunci $F^{+1}(D) = \emptyset$. Multifuncția \overline{F} este definită prin

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } x \leq 0 \\ y & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Se vede că $(\overline{F})^{+1}(\{1, 3\}) = (-\infty, 0]$, ceea ce arată că \overline{F} nu este superior semicontinuu. Spațiul topologic Y nu este normal.

Problema 6.16 Construiți o multifuncție $F : X \rightsquigarrow Y$ care nu este superior semicontinuu dar pentru care \overline{F} este superior semicontinuu.

Soluție Considerăm $F : \mathbf{R} \rightsquigarrow \mathbf{R}$ definită prin $F(x) = (x - 1, x + 1)$. Este clar că $\{x; F(x) \subset (-1, 1)\} = \{0\}$, ceea ce, conform Teoremei 2.1, implică faptul că F nu este superior semicontinuu. Arătăm acum că \overline{F} este superior semicontinuu. Pentru aceasta putem aplica Teorema 2.5 (i), deoarece \overline{F} are valori compacte. Arătăm că $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ implică $e(F(x_1), F(x_2)) < \varepsilon$. Aceasta revine la următorul fapt: dacă $|x_1 - x_2| < \varepsilon$ și $x_1 - 1 < y < x_1 + 1$, atunci există z cu

$$x_2 - 1 < z < x_2 + 1$$

încât $|y - z| < \varepsilon$. Ultima afirmație rezultă imediat luând $z = y + x_2 - x_1$. Prin urmare, pentru fiecare $x_0 \in \mathbf{R}$, funcția $x \mapsto e(F(x), F(x_0))$ este continuă și deci, conform Teoremei 2.5 (i), multifuncția F este superior semicontinuu în x_0 .

Problema 6.17 Dați o demonstrație directă a Corolarului 2.1.

Soluție Să presupunem că X și Y sunt spații metrice. Altfel lucrăm cu șiruri generalizate. Vom folosi Teorema 2.3 (iv). Pentru aceasta, fie $x_0 \in X$, fie mulțimea deschisă V astfel încât $F(x_0) \subset V$ și fie (x_n) un șir convergent la x_0 . Presupunem că $F(x_n) \not\subset V$ pentru n suficient de mare. Există deci un subșir (x_m) astfel încât

$$F(x_m) \cap (Y \setminus V) \neq \emptyset, \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Se obține șirul (y_m) cu $y_m \in F(x_m)$ și (y_m) aparținând mulțimii compacte $Y \setminus V$. Există deci un subșir al lui (y_m) notat (y_k) astfel încât $y_k \rightarrow y_0 \in Y \setminus V$. Obținem astfel că $y_0 \notin F(x_0)$, ceea ce este în contradicție cu faptul că $\text{Graf}(F)$ este mulțime închisă.

Problema 6.18 Fie $F : [0, \infty) \rightsquigarrow [0, \infty)$ definită prin

$$F(x) = \begin{cases} [0, x] \cup \{\frac{1}{x}\} & \text{dacă } x > 0 \\ \{0\} & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se arate că $\text{Graf}(F)$ este mulțime închisă iar F nu este superior semicontinuă.

Soluție Fie șirurile $(u_n), (v_n)$ astfel încât $v_n \in F(u_n)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $u_n \rightarrow u$ și $v_n \rightarrow v$. Dacă $u > 0$, atunci este evident că $v \in F(u)$. Dacă $u = 0$, trebuie să arătăm că $v = 0$. Avem $v_n \in [0, u_n]$ sau $v_n = 1/u_n$. Deoarece șirul (v_n) este convergent și $u_n \rightarrow 0$, avem $v_n \in [0, u_n]$ pentru orice n suficient de mare și deci $v_n \rightarrow 0$. Multifuncția F nu este superior semicontinuă în origine deoarece, luând $V = [0, 1)$ (mulțime deschisă în $[0, \infty)$), avem $F(0) \subset V$ și $\{x; F(x) \subset V\} = \{0\}$. Prin urmare nu există U , vecinătate a lui 0, încât $F(U) \subset V$.

Problema 6.19 Fie funcțiile ψ și φ ca în Problema 6.4. Să se arate că există o funcție continuă f astfel încât

$$\psi(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

pentru orice $x \in X$.

Soluție Se aplică Teorema de selecție a lui Michael multifuncției

$$F(x) = [\psi(x), \varphi(x)].$$

Problema 6.20 (Teorema mariajului) Fie X și Y două mulțimi nevide și $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție cu valori nevide și finite. Presupunem

$$\text{card}(A) \leq \text{card}(F(A))$$

pentru orice mulțime finită $A \subset X$. Atunci F are o selecție injectivă.

Soluție În cazul când X este finită, demonstrația se face prin inducție după $n = \text{card}(X)$. Pentru $n = 1$ se alege un element $y \in F(x)$. Presupunem rezultatul adevărat pentru orice X cu $\text{card}(X) < n$ și luăm un X cu $\text{card}(X) = n$. Se disting două cazuri:

(i) $\text{card}(A) < \text{card}(F(A))$ pentru orice $A \subset X$, $A \neq X$. În acest caz se ia $x_0 \in X$ și $y_0 \in F(x_0)$ și se aplică presupunerea inductivă pentru $X \setminus \{x_0\}$ și $Y \setminus \{y_0\}$. Construcția selecției este evidentă.

(ii) Măcar pentru un $A \subset X$, $A \neq X$, avem $\text{card}(A) = \text{card}(F(A))$. În această situație $\text{card}(A) < n$. Aplicăm presupunerea inductivă și construim o selecție injectivă pe A . Considerăm o nouă multifuncție $F_1 : X \setminus A \rightsquigarrow Y \setminus F(A)$ care verifică ipoteza din enunț și deci se aplică din nou ipoteza inductivă. Dacă mulțimea X este infinită, considerăm fiecare $F(x)$ topologizat cu topologia discretă, deci $F(x)$ este spațiu compact separat Hausdorff. Luăm produsul cartezian $\mathcal{F} = \times_{x \in X} F(x)$ și, conform teoremei lui Tychonoff, spațiul \mathcal{F} este compact. Fie $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o mulțime finită din X și \mathcal{G} acea submulțime din \mathcal{F} pentru care $p(x_i) \neq p(x_j)$ pentru $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Aici $p(x_i)$ înseamnă componenta din $F(x_i)$ a elementului din \mathcal{F} . Mulțimea \mathcal{G} este închisă și nevidă (conform pasului precedent). Clasa tuturor mulțimilor \mathcal{G} are proprietatea intersecției finite (tot din pasul precedent, pe baza faptului că reuniunea finită a unor mulțimi finite este finită) și deci intersecția tuturor este nevidă. Este clar că un element din această intersecție este selecția căutată. Soluția prezentată aici a fost dată de Paul Halmos și Herbert Vaughan [43].

Problema 6.21 Fie X și Y spații Banach și $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv. Următoarele afirmații sunt echivalente :

- (i) Există $S \in L(Y, X)$ cu proprietatea $T \circ S = I$;
- (ii) Există un subspațiu liniar închis E a lui X astfel încât

$$X = \ker T \oplus E.$$

Să se deducă de aici că, dacă X este spațiu Hilbert, atunci afirmația de la (i) este adevărată.

Soluție Presupunem (ii) și definim $T_1 : E \rightarrow Y$ prin $T_1(x) = T(x)$. Este ușor de văzut că T_1 este liniar bijectiv și continuu. Deci $S = T_1^{-1}$ are aceleași proprietăți și în plus verifică $T \circ S = I$. Presupunem acum (i). Este clar că $(S \circ T)^2 = S \circ T$ și $\ker S \circ T = \ker T$. Pe de altă parte, dacă există un operator $A \in L(X, X)$ cu $A^2 = A$, atunci se verifică ușor că $A(X)$ este mulțime închisă și

$$X = \ker A \oplus A(X).$$

Problema 6.22 Fie $t_0 \in \mathbf{R}$ și $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $(t_0, x_0) \in D \subset \mathbf{R}^{n+1}$, D deschisă și $F : D \rightsquigarrow \mathbf{R}^n$ inferior semicontinuă cu valori nevide închise și convexe. Atunci incluziunea diferențială

$$x'(t) \in F(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

are o soluție $x(t)$ de clasă C^1 pe o vecinătate a lui t_0 . În plus, există o soluție de clasă C^1 care este maximală.

Soluție Se aplică teorema de selecție a lui Michael, se determină o selecție continuă $f : D \rightarrow \mathbf{R}^n$ a lui F și se aplică teorema clasică a lui Peano.

Problema 6.23 Fie X și Y spații metrice, $F : X \rightsquigarrow Y$ o multifuncție inferior semicontinuă, $A \subset X$ o mulțime închisă și nevidă și $f : A \rightarrow Y$ o funcție continuă cu $f(x) \in F(x)$ pentru orice $x \in A$. Să se arate că multifuncția $G : X \rightsquigarrow Y$ definită prin $G(x) = \{f(x)\}$ pentru $x \in A$ și $G(x) = F(x)$ pentru $x \notin A$ este inferior semicontinuă. Să se deducă faptul că dacă Y este spațiu Banach atunci f se poate prelungi la tot spațiul cu păstrarea continuității.

Soluție Vom folosi caracterizarea cu șiruri a semicontinuității inferioare. Fie $x_0 \in X$, $y_0 \in G(x_0)$ și $x_n \rightarrow x_0$. Dacă $x_0 \in A$ atunci $y_0 = f(x_0)$. Pentru acele valori n pentru care $x_n \in A$, considerăm $y_n = f(x_n)$ iar pentru celelalte considerăm $y_n \in F(x_n)$ dat de semicontinuitatea inferioară pentru F în x_0 . Este clar că $y_n \in G(x_n)$ și $y_n \rightarrow y_0$. Dacă $x_0 \notin A$, cum A este închisă, se poate considera $x_n \notin A$ pentru orice n și se ia $y_n \in F(x_n) = G(x_n)$ cu $y_n \rightarrow y_0$. Pentru partea a doua, se ia $F(x) = Y$ pentru orice $x \in X$, se construiește G ca mai sus și apoi se aplică Teorema de selecție a lui Michael.

Problema 6.24 Să se arate că dacă A este o mulțime convexă și închisă într-un spațiu liniar topologic și $0 \in A$ atunci A este ideal convexă.

Soluție. Fie (λ_n) un șir cu $\lambda_n \geq 0$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$, fie (x_n) un șir în A mărginit astfel încât seria $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ este convergentă. Luăm $m \geq 1$ și scriem

$$\sum_{n=1}^m \lambda_n x_n + \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} \lambda_n \right) 0 \in A.$$

Cum A este închisă,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \in A.$$

Problema 6.25 Fie X și Y spații Banach, $T \in L(X, Y)$ și L un con convex închis în X . Presupunem că $T(L) = Y$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încât, dacă $\|S - T\| < \delta$, avem $S(L) = Y$. În plus, există $\gamma > 0$ încât pentru $S \in L(X, Y)$ cu $\|S - T\| < \delta$ avem: pentru orice $y \in Y$ ecuația $Sx = y$ are o soluție $x \in L$ care verifică $\|x\| \leq \gamma\|y\|$.

Soluție. Se procedează ca în demonstrația Teoremei lui Graves. Pentru $y \in Y$ se construiește inductiv un șir (ξ_n) astfel: $\xi_0 = 0$ iar ξ_n cu $n \geq 1$ este astfel încât

$$T(\xi_n - \xi_{n-1}) = y - S(\xi_{n-1}),$$

$$\xi_n - \xi_{n-1} \in L,$$

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leq \omega\|y - S(\xi_{n-1})\|.$$

Acest fapt este posibil deoarece procesul convex închis

$$F(x) = \begin{cases} Tx & \text{pentru } x \in L \\ \emptyset & \text{pentru } x \notin L \end{cases}$$

este surjectiv și deci, pe baza Teoremei 3.2, există $\omega > 0$ astfel încât, dacă $y \in Y$, există $x \in L$ cu $Tx = y$ și $\|x\| \leq \omega\|y\|$. Deducem

$$T(\xi_n - \xi_{n-1}) = (T - S)(\xi_{n-1} - \xi_{n-2}),$$

deci

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leq \delta\omega\|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\|.$$

Dacă $\delta < 1/2\omega$ avem

$$\|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leq \frac{1}{2}\|\xi_{n-1} - \xi_{n-2}\|.$$

Obținem astfel că șirul (ξ_n) este Cauchy, deci convergent. Fie ξ limita sa. Deducem în final că $\xi \in L$, $y = S\xi$, $\|\xi_1\| \leq \omega\|y\|$,

$$\|\xi_n\| \leq \|\xi_1\| + \|\xi_2 - \xi_1\| + \cdots + \|\xi_n - \xi_{n-1}\| \leq$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\omega\|y\| \leq 2\omega\|y\|,$$

deci $\|\xi\| \leq 2\omega\|y\|$. Așadar, concluzia are loc cu $\delta < 1/2\omega$ și $\gamma = 2\omega$.

Problema 6.26 Să se arate că mulțimea operatorilor surjectivi din $L(X, Y)$ este deschisă.

Soluție. Rezultă din Problema 6.25 luând $L = X$. Să prezentăm o altă soluție. Se știe [101] că operatorul $T \in L(X, Y)$ este surjectiv dacă și numai dacă există $\gamma > 0$ astfel încât

$$\|T^*y^*\| \geq \gamma\|y^*\|, \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Fie $S \in L(X, Y)$ cu $\|T - S\| < \gamma$. Avem

$$\|S^*y^*\| \geq -\|(S^* - T^*)y^*\| + \|T^*y^*\| \geq (\gamma - \|T^* - S^*\|)\|y^*\|.$$

Problema 6.27 Fie X, Y, Z spații Banach, $A \in L(X, Z)$ și $B \in L(Y, Z)$ astfel încât $A(X) \subset B(Y)$. Să se arate că există o funcție continuă $f : Y \rightarrow X$ cu proprietatea $Af = B$.

Soluție Se consideră multifuncția $F(y) = A^{-1}By$ care, pe baza Corolarului 3.2, verifică ipotezele Teoremei de selecție a lui Michael. Selecția furnizată de această teoremă este funcția cerută.

Problema 6.28 Fie X și Y spații Banach și $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv. Atunci multifuncția $F : Y \rightsquigarrow X$ definită prin $F(y) = T^{-1}(y)$ este inferior semicontinuă. Multifuncția F nu este superior semicontinuă dacă $\ker(T) \neq \{0\}$.

Soluție Se aplică principiul aplicațiilor deschise. Prin urmare, $T(D)$ este deschisă dacă D este deschisă. Se verifică ușor că $F^{-1}(D) = T(D)$. Pentru ca F să fie superior semicontinuă ar trebui ca T să ducă orice mulțime închisă într-o mulțime închisă, ceea ce, în condițiile date este fals. Pentru a dovedi acest fapt, luăm

$$A = \left\{n x_0 + \frac{1}{n}x_1; \quad n \geq 1\right\},$$

unde $x_0 \in \ker(T)$, $x_0 \neq 0$ iar x_1 este astfel încât $Tx_1 \neq 0$. Mulțimea A este închisă iar mulțimea

$$T(A) = \left\{\frac{1}{n}Tx_1; \quad n \geq 1\right\}$$

nu este închisă. Intr-adevăr, $0 \in \overline{T(A)}$ și $0 \notin T(A)$.

Problema 6.29 Fie X și Y spații Banach, $K \subset X$ și $M \subset Y$ mulțimi nevide convexe și închise, $T \in L(X, Y)$, $C(y) = \{x \in K; Tx \in M + y\}$ și $x_0 \in C(0)$. Presupunem că $0 \in \text{int}(T(K) - M)$. Atunci există $\gamma > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in K$ și $y \in Y$ cu $\|y\| \leq \gamma$,

$$d(x, C(y)) \leq \frac{1}{\gamma}d(Tx - y, M)(1 + \|x - x_0\|).$$

Soluție Se aplică Teorema 3.2 multifuncției definite prin $F(x) = Tx - M$ pentru $x \in K$ și $F(x) = \emptyset$ pentru $x \notin K$. Este clar că

$$d(y, F(x)) = d(Tx - y, M).$$

Problema 6.30 *In condițiile Problemei 6.29 presupunem în plus că mulțimile K și M sunt conuri și $T(K) - M = Y$. Arătați că multifuncția C este lipschitziană.*

Soluție Se arată cu ușurință că multifuncția C verifică ipotezele Corolarului 3.6.

Problema 6.31 *Să se demonstreze Teorema de inversare locală (Teorema 3.11) stabilind convergența algoritmului lui Newton*

$$x_{n+1} = x_n + f'(x_n)^{-1}(y - f(x_n))$$

la soluția ecuației $f(x) = y$.

Soluție Pentru $k \in (0, 1)$ alegem $r > 0$ astfel încât

$$\|f'(x) - f'(x_0)\| \leq \frac{k}{3\|f'(x_0)^{-1}\|}$$

pentru orice $x \in B(x_0, r)$ și

$$\|f(x_1) - f(x_2) - f'(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \frac{k\|x_1 - x_2\|}{3\|f'(x_0)\|} \quad (6.1)$$

pentru orice $x_i \in B(x_0, r)$, $i = 1, 2$. Considerăm $A = I - f'(x_0)^{-1}f'(x)$ și observăm că, din prima inegalitate de mai sus, avem $\|A\| \leq k/3$ pentru $x \in B(x_0, r)$. Prin urmare, $I - A$ este inversabil și

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq 3/(3 - k).$$

Obținem astfel că, dacă $x \in B(x_0, r)$, $f'(x)$ este inversabil și

$$\|f'(x)^{-1}\| \leq \frac{3}{3 - k}\|f'(x_0)^{-1}\|.$$

Considerăm acum y verificând

$$\|f'(x_0)^{-1}(f(x_0) - y)\| < r(1 - k)$$

și construim șirul (x_n) prin algoritmul lui Newton. Este clar că $x_1 \in B(x_0, r)$. Presupunem că x_1, \dots, x_n aparțin mulțimii $B(x_0, r)$ și observăm că

$$\|f(x_n) - y\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\| \leq \frac{2k\|x_n - x_{n-1}\|}{3\|f'(x_n)^{-1}\|}$$

și

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{3}{3-k} \|f'(x_0)^{-1}\| \|f(x_n) - y\|.$$

Se deduce astfel că $x_{n+1} \in B(x_0, r)$, (x_n) este șir Cauchy, deci converge la o soluție a ecuației $f(x) = y$. Din (6.1) rezultă ușor că soluția este unică în $B(x_0, r)$.

Problema 6.32 Fie X și Y spații Banach și $T \in L(X, Y)$ un operator surjectiv. Să se arate că pentru fiecare $\lambda > 1$ există o funcție continuă și omogenă $f : Y \rightarrow X$, astfel încât $T \circ f = I$ și

$$\|f(y)\| \leq \lambda \inf\{\|x\|; Tx = y\}.$$

Soluție Considerăm funcția $\gamma : Y \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin

$$\gamma(y) = \inf\{\|x\|; Tx = y\}.$$

Arătăm că este continuă. Pentru aceasta, se verifică ușor că are proprietățile normei, iar apoi, pe baza Teoremei aplicațiilor deschise, există $k > 0$ încât pentru orice $y \in Y$ există $x \in X$ cu $Tx = y$ și $\|x\| \leq k\|y\|$. Aceasta arată că $\gamma(y) \leq k\|y\|$. Deci funcția γ este continuă în origine și deci este continuă peste tot. De fapt γ este o normă echivalentă cu norma lui Y . Considerăm $U(0, 1) = \{y \in Y; \|y\| = 1\}$ și definim multifuncția $F : U(0, 1) \rightsquigarrow X$ prin

$$F(y) = \begin{cases} T^{-1}(y) \cap \{x \in X; \|x\| < \lambda\gamma(y)\} & \text{dacă } \gamma(y) > 0 \\ \emptyset & \text{dacă } \gamma(y) = 0. \end{cases}$$

Multifuncția F este inferior semicontinuă deoarece, pentru o mulțime D deschisă în X , $F^{-1}(D)$ este mulțimea acelor $y \in U(0, 1)$ cu proprietatea că există $x \in D$ cu $T(x) = y$ și $\|x\| < \lambda\gamma(y)$. Această mulțime este deschisă în $U(0, 1)$ și deci în $\text{Dom}(F)$. În sfârșit, multifuncția $F_1 = \overline{F}$ este inferior semicontinuă și are valori închise și convexe. Fie g o selecție continuă a sa, rezultată din Teorema de selecție a lui Michael. Definim

$$h(y) = \|y\|g(y/\|y\|)$$

pentru $y \neq 0$ și $h(0) = 0$. Funcția h are proprietățile cerute lui f cu excepția faptului că este numai pozitiv omogenă. Funcția căutată este

$$f(y) = (h(y) - h(-y))/2.$$

Problema 6.33 *Mulțimea numerelor raționale nu se poate scrie ca o intersecție numărabilă de mulțimi deschise (nu este de tip G_δ).*

Soluție Presupunem, prin reducere la absurd, că avem $\mathbf{Q} = \cap W_n$ cu W_n deschise. Pentru fiecare $q \in \mathbf{Q}$ fie $V_q = \mathbf{R} \setminus \{q\}$ și

$$\mathcal{A} = \{W_n; n \in \mathbf{N}\} \cup \{V_q; q \in \mathbf{Q}\}.$$

Mulțimile din \mathcal{A} sunt deschise și dense în \mathbf{R} . Conform Teoremei lui Baire (Propoziția 6.25), intersecția lor este densă în \mathbf{R} . Pe de altă parte, $\cap W_n \subset \mathbf{Q}$ iar $\cap V_q \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, contradicție.

Problema 6.34 *Nu există funcții $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue pe \mathbf{Q} și discontinue pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.*

Soluție Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție. Pentru fiecare $n = 1, 2, \dots$ definim mulțimea

$$U_n = \bigcup \{U; U \text{ deschisă în } \mathbf{R}, \text{diam} f(U) < \frac{1}{n}\}.$$

Este ușor de văzut că mulțimile U_n sunt deschise și dense în \mathbf{R} . Mai mult, $C = \cap U_n$ este exact mulțimea punctelor în care f este continuă. Am arătat așadar că mulțimea punctelor în care f este continuă este de tip G_δ . Rezolvarea se încheie dacă se are în vedere Problema 6.33.

Problema 6.35 *Să se construiască o funcție $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care să fie continuă pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ și discontinuă pe \mathbf{Q} .*

Soluție Se consideră o funcție bijectivă $h : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$, se ia $q_n = f(n)$ și apoi se definește $f(q_n) = 1/n$ pe \mathbf{Q} și $f(x) = 0$ pe $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Problema 6.36 *Pentru fiecare număr natural n , fie U_n mulțimea funcțiilor $f \in C[0, 1]$ astfel încât pentru fiecare $x \in [0, 1 - n^{-1}]$,*

$$\sup \left\{ \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right|; x < y < x + \frac{1}{n} \right\} > n.$$

Demonstrați că fiecare U_n este deschisă și densă în $C[0, 1]$. Deduceți de aici că mulțimea funcțiilor $f \in C[0, 1]$, pentru care există un punct $x_f \in [0, 1)$ în care f este derivabilă la dreapta, este de prima categorie.

Soluție Fixăm $n_0 \in \mathbf{N}$. Pentru a arăta că U_{n_0} este deschisă, este suficient să arătăm că dacă (f_m) este un șir în $C[0, 1] \setminus U_{n_0}$ convergent la f_0 în $C[0, 1]$, atunci $f_0 \in C[0, 1] \setminus U_{n_0}$. Faptul că U_{n_0} este densă în $C[0, 1]$ rezultă din Teorema de aproximare a lui Weierstrass. Așadar, mulțimea $C[0, 1] \setminus (\cap U_n)$ este de prima categorie în $C[0, 1]$. Faptul că o funcție din mulțimea $C[0, 1]$, care este derivabilă la dreapta într-un punct din $[0, 1)$, nu poate să aparțină oricărui U_n încheie rezolvarea.

Problema 6.37 *Să se arate că o funcție superior semicontinuuă definită pe un spațiu Banach cu valori reale este continuuă pe un rezidual.*

Soluție Fie funcția superior semicontinuuă $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, $\mathbf{Q} = \{r_n, n \in \mathbf{N}\}$, $A_n = f^{-1}(-\infty, r_n)$ și $D_n = A_n \setminus \text{int} \overline{A_n}$. Mulțimile D_n sunt rare și f este superior semicontinuuă în fiecare punct al complementarei mulțimii $\cup D_n$. Intr-adevăr, presupunem $x \notin \cup D_n$ și $\alpha > f(x)$. Alegem $r_k \in (f(x), \alpha)$. Deoarece $x \notin D_k$ avem

$$x \in \text{int} \overline{A_k} = f^{-1}(-\infty, r_k] \subset f^{-1}(-\infty, \alpha).$$

Problema 6.38 *Fie X spațiu Banach și $f : X \rightarrow X$ o contracție. Atunci funcția $\theta : X \rightarrow X$ definită prin $\theta(x) = x + f(x)$ este homeomorfism de la X la X .*

Soluție Funcția θ este continuuă și injectivă. Considerăm funcția $g : X \times X \rightarrow X$ definită prin $g(x, y) = y - f(x)$. Funcția $x \mapsto g(x, y)$ are punct fix unic $\varphi(y)$. Obținem

$$\varphi(y) = y - f(\varphi(y))$$

adică $\theta(\varphi(y)) = y$, ceea ce arată că θ este funcție surjectivă iar φ este inversa sa la dreapta. Cum este și injectivă, funcția θ este bijectivă, inversa ei este φ care este continuuă conform Teoremei 4.3.

Problema 6.39 *Demonstrați Teorema de punct fix al lui Banach folosind Principiul lui Ekeland.*

Soluție Enunțul este dat în Teorema 4.1 iar Principiul lui Ekeland în Teorema 5.3. Considerăm $f(x) = \rho(x, F(x))$ și $\varepsilon = f(x)$. Dat $\delta > 0$, există z astfel încât $\rho(x, z) \leq \delta$ și

$$f(u) + (\varepsilon/\delta)\rho(u, z) \geq f(z), \forall u.$$

Punem $u = F(z)$. Atunci,

$$f(u) = \rho(F(z), F(F(z))) \leq \alpha \rho(z, F(z)) = \alpha f(z),$$

deci

$$(\alpha + \varepsilon/\delta)f(z) \geq f(z).$$

Dacă alegem $\delta > (1 - \alpha)^{-1}\varepsilon$ obținem $f(z) = 0$. Deci z este punctul fix căutat. Cum δ poate fi ales arbitrar cu proprietatea $\delta > (1 - \alpha)^{-1}\varepsilon$, obținem imediat

$$\rho(x, z) \leq (1 - \alpha)^{-1}\varepsilon,$$

ceea ce încheie rezolvarea dacă avem în vedere că $\varepsilon = \rho(x, F(x))$.

Problema 6.40 Fie mulțimea

$$C = \{x = (x_1, \dots, x_p); |x_i| \leq 1, \forall i = 1, \dots, p\}$$

și funcția continuă $g : C \rightarrow \mathbf{R}^p$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_p)$. Presupunem

$$g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -1, x_{i+1}, \dots, x_p) \geq 0; \quad g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_p) \leq 0$$

pentru orice $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in C$ și $i = 1, \dots, p$. Atunci există $x^* \in C$ astfel încât $g(x^*) = 0$.

Soluție Intr-o primă etapă presupunem că inegalitățile din ipoteză sunt stricte. Punem $f_i(x) = x_i - \varepsilon_i g_i(x)$. Există $\varepsilon_i > 0$ cu $-1 \leq f_i(x) \leq 1$ pe C pentru orice i . Deci se poate aplica Teorema de punct fix a lui Brouwer. În etapa a doua presupunem inegalitățile din ipoteză și considerăm funcția $g^\varepsilon(x) = g(x) - \varepsilon x$, $\varepsilon > 0$. Aplicând rezultatul din prima etapă deducem că există $x_\varepsilon \in C$ astfel încât $g^\varepsilon(x_\varepsilon) = 0$. Există un șir (x_{ε_n}) convergent și fie x^* limita sa pentru $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Obținem așadar $g(x^*) = 0$, ceea ce încheie rezolvarea.

Am arătat că dacă Teorema de punct fix a lui Brouwer este adevărată atunci rezultă Teorema 4.5. Avem de fapt echivalență între cele două teoreme. Intr-adevăr, fiind dată funcția continuă $f : C \rightarrow C$, notăm $g(x) = f(x) - x$ și observăm că sunt verificate inegalitățile din Teorema 4.5. Prin urmare există $x^* \in C$ astfel încât $g(x^*) = 0$ și x^* este punct fix pentru f .

Problema 6.41 Fie $r_0 > 0$, Y un spațiu finit dimensional și $g : Y \rightarrow Y$ o funcție continuă cu proprietatea $\|g(y) - y\| \leq (1/2)\|y\|$ pentru $\|y\| \leq r_0$. Arătați că pentru $0 < r \leq r_0$ avem $B(0, r/2) \subset g(B(0, r))$.

Soluție Fixăm $y \in B(0, r/2)$ și aplicăm Teorema de punct fix a lui Brouwer (Teorema 4.4) funcției $h(z) = -g(z) + z + y$. Este ușor de văzut că h duce sfera $B(0, r)$ în ea însăși deci există $z_0 \in B(0, r)$ astfel încât

$$-g(z_0) + z_0 + y = z_0$$

și deci $y = g(z_0)$.

Problema 6.42 Fie funcția $g : l_2 \rightarrow l_2$ definită prin $g(x) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$, unde $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$, și funcția $f : l_2 \rightarrow l_2$ definită prin

$$f(x) = \frac{1 - \|x\|}{2}e + g(x),$$

unde $e = (1, 0, \dots)$. Arătați că $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$, f este continuă dar nu are nici un punct fix.

Soluție Se verifică ușor că g este liniară și $\|g(x)\| = \|x\|$. Prin urmare, g este continuă și $g(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$. Mai mult, f este continuă și $\|f(x)\| \leq 1/2 + \|x\|/2$, deci $f(B(0, 1)) \subset B(0, 1)$. Să arătăm că f nu are nici un punct fix. Prin reducere la absurd, presupunem că există $x_0 = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ cu proprietatea $f(x_0) = x_0$. Un calcul simplu arată că $\eta_1 = (1 - \|x_0\|)/2$, $\eta_2 = \eta_1, \dots$. Deci $\eta_n = (1 - \|x_0\|)/2$ pentru orice $n = 1, 2, \dots$. Deoarece $x_0 \in l_2$, urmează $\eta_n = 0$ pentru orice n și $\|x_0\| = 1$, contradicție.

Problema 6.43 Fie X spațiul Banach al funcțiilor $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mărginite și continue, înzestrat cu norma supremum. Fie

$$K = \{f \in X; \|f\| \leq 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1, \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -1\}.$$

Să se arate că mulțimea K este mărginită convexă și închisă în X dar nu are proprietatea de punct fix, adică există $F : K \rightarrow K$ continuă fără puncte fixe. Să se deducă de aici că mulțimea K nu este compactă.

Soluție Definim $F : X \rightarrow X$ prin $F(f)(t) = f(t - 1)$. Este clar că F este continuă (este liniară și mărginită) și $\|F(f)\| = \|f\|$. În plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(f)(t) = 1$ și $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(f)(t) = -1$. Totuși F nu are punct fix. Presupunem că $F(f_0) = f_0$. Deci $f_0(t - 1) = f_0(t)$ pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Rezultă de aici că $f_0(0) = f_0(k)$ pentru \mathbf{Z} , ceea ce contrazice faptul că $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_0(k) = 1$ și $\lim_{t \rightarrow -\infty} f_0(k) = -1$.

Problema 6.44 Fie X un spațiu Banach, $T : X \rightarrow X$ o funcție continuă care duce mulțimi mărginite în mulțimi compacte și are proprietatea

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Atunci, pentru fiecare $\lambda > 0$ și $y \in X$, ecuația $x = \lambda T(x) + y$ are soluție în X .

Soluție Fie funcția $f : X \rightarrow X$ definită prin $f(x) = \lambda T(x) + y$. Vom arăta că există $\gamma > 0$ astfel încât dacă $\|x\| \leq \gamma$ atunci $\|f(x)\| \leq \gamma$. Se aplică apoi Teorema lui Schauder. Este clar că

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Deci există $M > 0$ astfel încât dacă $\|x\| > M$ avem $\|f(x)\| \leq \|x\|$. Pe de altă parte, există $r > 0$ astfel încât dacă $\|x\| \leq M$ atunci $\|f(x)\| \leq r$. Dacă $r \leq M$ se ia $\gamma = M$ iar dacă $r > M$ se ia $\gamma = r$.

Problema 6.45 (von Neumann) Fie X și Y mulțimi nevide convexe compacte în \mathbf{R}^m și respectiv \mathbf{R}^n . Fie M și N submulțimi închise în $X \times Y$ astfel încât mulțimile $M_x = \{y; (x, y) \in M\}$ și $N_y = \{x; (x, y) \in N\}$ sunt nevide și convexe pentru orice $x \in X$ și $y \in Y$. Atunci $M \cap N \neq \emptyset$.

Soluție Se consideră multifuncția $F : X \times Y \rightsquigarrow X \times Y$ definită prin

$$F(x, y) = N_y \times M_x$$

și aplicăm Teorema lui Kakutani. Mulțimea $X \times Y$ este convexă și compactă în $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ iar F are valori închise și convexe. În plus $\text{Graf}(F)$ este închis. Corolarul 2.1 implică faptul că F este superior semicontinuu deci are cel puțin un punct fix (x_0, y_0) . Rezultă $x_0 \in N_{y_0}$ și $y_0 \in M_{x_0}$, deci $(x_0, y_0) \in M \cap N$.

Este interesant de observat că rezultatul lui von Neumann este de fapt echivalent cu cel al lui Kakutani. Într-adevăr, dacă presupunem adevărată afirmația din Problema 6.45 și considerăm K, F și X ca în Teorema lui Kakutani, punem $M = \text{Graf}(F)$, $N = \{(x, x); x \in X\}$ și observăm că elementele mulțimii $M \cap N$ sunt puncte fixe pentru F .

Problema 6.46 Fie X spațiu compact și $F : X \rightsquigarrow X$ o multifuncție superior semicontinuuă cu valori închise. Atunci, există o mulțime compactă $C \subset X$ astfel încât $F(C) = C$.

Soluție Considerăm $X_n = F(X_{n-1})$, $n \geq 1$, cu $X_0 = X$. Avem $X_n \subset X_{n-1}$, deci $C = \bigcap X_n$ este nevidă și compactă. Mai mult, $F(C) \subset C$. Pentru incluziunea reciprocă, presupunem $c_0 \in C \setminus F(C)$ și separăm $F(C)$ și c_0 prin G_1 și G_2 disjuncte și deschise. Mulțimea $F^{-1}(G_1)$ este deschisă și conține C . În plus, $X_n \subset F^{-1}(G_1)$ pentru n suficient de mare, de unde rezultă $X_{n+1} \subset G_1$, deci $C \subset G_1$, contradicție cu faptul că $c_0 \in G_2$.

Problema 6.47 Fie mulțimea $K \subset l_2$ definită prin

$$K = \{x = (\xi_n); |\xi_n| \leq \frac{1}{n}\}$$

și funcția continuă $f : K \rightarrow K$. Să se arate că f are cel puțin un punct fix.

Soluție Arătăm că mulțimea K este convexă și compactă și apoi aplicăm Teorema lui Schauder. Convexitatea fiind evidentă, să demonstrăm compactitatea.

Pentru $\varepsilon > 0$, fie n_ε astfel încât

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon^2.$$

Considerăm mulțimea $K_\varepsilon \subset K$,

$$K_\varepsilon = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_\varepsilon}, 0, \dots)\}.$$

Deoarece

$$K \subset K_\varepsilon + \varepsilon B(0, 1),$$

și având în vedere că mulțimea K_ε este compactă, urmează că mulțimea K este total mărginită, deci compactă.

Să prezentăm o altă demonstrație a compactității mulțimii K . Pentru aceasta vom arăta că mulțimea K este homeomorfă cu spațiul produs $\prod_{n \in \mathbf{N}} I_n$ unde $I_n = I = [0, 1]$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Pentru aceasta, definim $\psi : \prod_{n \in \mathbf{N}} I_n \rightarrow K$ prin

$$\psi((\xi_n)) = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, \dots).$$

Este evident că funcția ψ este bijectivă. Să arătăm că ψ este continuă. Fie $x = (\xi_n)$, $\varepsilon > 0$, n_ε încât

$$\sum_{n > n_\varepsilon} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^3}{8}$$

și

$$U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_{n_\varepsilon} \times I \times I \times \dots$$

o vecinătate a lui x , unde

$$U_i = \{x_i \in I; |x_i - \xi_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n_\varepsilon}}\}.$$

Dacă $\bar{x} = (\eta_n) \in U$, avem

$$\sum_{n=1}^{n_\varepsilon} \left| \frac{1}{n} \xi_n - \frac{1}{n} \eta_n \right|^2 < \sum_{n=1}^{n_\varepsilon} |\xi_n - \eta_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

și

$$\sum_{n > n_\varepsilon} \left\| \frac{\xi_n}{n} - \frac{\eta_n}{n} \right\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Am obținut așadar că, dacă $\bar{x} \in U$,

$$\|\psi(x) - \psi(\bar{x})\| < \varepsilon$$

și deci ψ este continuă în x . Faptul că ψ^{-1} este continuă urmează dintr-un rezultat general (și ușor de demonstrat) care afirmă că dacă ψ este bijectivă și continuă de la un spațiu compact la un spațiu separat Hausdorff atunci f^{-1} este continuă. Trebuie să precizăm însă că pentru a rezolva problema noastră nu e nevoie ca ψ să fie homeomorfism ci e suficient să fie surjectivă deoarece imaginea printr-o funcție continuă a unui spațiu compact este compactă. Subliniem că aici se aplică Teorema lui Tychonoff care afirmă că un produs de spații compacte este spațiu compact. Precizăm că Andrei N. Tikhonov a publicat rezultatul în 1935 [90] și că în 1950 John Kelley [51] a arătat că ea este echivalentă cu axioma alegerii.

Problema 6.48 Folosind Teorema 4.18, să se arate că inegalitatea variațională

$$\langle T(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K$$

are soluție $x_0 \in K$ în ipoteza că $T : K \subseteq X \rightarrow X^*$ este continuă iar K este nevidă convexă și compactă în spațiul Banach X .

Soluție Presupunem, prin reducere la absurd, că pentru orice $x_0 \in K$ există $x \in K$ încât

$$\langle T(x_0), x - x_0 \rangle < 0.$$

Definim multifuncția $F : K \rightsquigarrow K$ prin

$$F(x_0) = \{x \in K; \langle T(x_0), x - x_0 \rangle < 0\}$$

și observăm că $F(x_0)$ este nevidă și convexă. Să arătăm că $F^{-1}(x)$ este deschisă în K pentru fiecare $x \in K$. Observăm că

$$F^{-1}(x) = \{x_0 \in K; \langle T(x_0), x - x_0 \rangle < 0\}.$$

Arătăm că mulțimea $K \setminus F^{-1}(x)$ este închisă. Fie (x_n) un șir din $K \setminus F^{-1}(x)$ cu $x_n \rightarrow y$. Avem $\langle T(x_n), x - x_n \rangle \geq 0$ și din continuitatea lui T deducem $\langle T(y), x - y \rangle \geq 0$. Obținem astfel $y \in K \setminus F^{-1}(x)$. Folosim Teorema 4.18 pentru a conchide că există $x_0 \in K$ astfel încât $x_0 \in F(x_0)$, ceea ce este în contradicție cu definiția lui $F(x_0)$.

Problema 6.49 Se consideră sistemul de ecuații

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

unde $g_i : B(0, r) \rightarrow \mathbf{R}$ sunt funcții continue. Presupunem că

$$\sum_{i=1}^p g_i(x)x_i \geq 0$$

pentru $\|x\| = r$. Aici $x = (x_i)$. Să se arate că sistemul are cel puțin o soluție.

Soluție Fie $g = (g_1, \dots, g_p)$ și presupunem că $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in B(0, r)$. Definim funcția

$$f(x) = -rg(x)/\|g(x)\|$$

care este continuă și satisface $f(B(0, r)) \subset B(0, r)$. Fie x un punct fix pentru f asigurat de Teorema de punct fix a lui Brouwer. Este clar că $\|x\| = r$ și în plus

$$\sum_{i=1}^p g_i(x)x_i = -\frac{1}{r}\|g(x)\| \sum_{i=1}^p f_i(x)x_i = -\frac{1}{r}\|g(x)\| \sum_{i=1}^p x_i^2 < 0.$$

Contradicția la care am ajuns asigură existența unei soluții pentru ecuația $g(x) = 0$.

Problema 6.50 Fie $U = \{x \in \mathbf{R}^2; \|x\| = 1\}$. Presupunem că funcția continuă $g : U \rightarrow U$ este homotopă cu o funcție constantă pe U . Arătați că există o funcție continuă $u : U \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $g(x) = \exp(iu(x))$ pentru orice $x \in U$.

Soluție Fie $H : U \times [0, 1] \rightarrow U$ o funcție continuă cu proprietatea că $H(x, 0) = c$ și $H(x, 1) = f(x)$ pentru orice $x \in U$. Deoarece H este uniform continuă, există $\delta > 0$ astfel încât

$$\|H(x, t) - H(x, t')\| < \delta$$

pentru $|t - t'| < \delta$ și $x \in U$. Fie $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ o divizare a intervalului $[0, 1]$ astfel încât $|t_{j+1} - t_j| < \delta$. Vom arăta că dacă $H(x, t_j)$ este de forma $\exp(iu_j(x))$ atunci și $H(x, t_{j+1})$ este de aceeași formă. Deoarece

$$\|H(x, t_{j+1}) - H(x, t_j)\| < \delta$$

avem că $H(x, t_{j+1}) \neq -H(x, t_j)$ și deci $H(x, t_{j+1})/H(x, t_j) \neq -1$. Definim funcția $\lambda : U \rightarrow \mathbf{R}$ încât $\lambda(x)$ să egaleze măsura în radiani a punctului $H(x, t_{j+1})/H(x, t_j)$ de pe cercul trigonometric. Este clar că $H(x, t_{j+1}) = \exp(iu_{j+1}(x))$ unde $u_{j+1}(x) = \lambda(x) + u_j(x)$. Cum $H(x, t_0) = c$ este de forma $\exp(iu_0(x))$ urmează că și $f(x) = H(x, t_n)$ este de forma cerută.

Problema 6.51 *Arătați că mulțimea U definită în Problema 6.50 este contractibilă, adică aplicația identică pe U nu este homotopă cu o funcție constantă.*

Soluție Presupunem contrariul și, conform Problemei 6.50, deducem că există o funcție continuă $u : U \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât $x = \exp(iu(x))$ pe U . Definim $g : U \rightarrow \{-1, 1\}$ prin

$$g(x) = \frac{u(x) - u(-x)}{|u(x) - u(-x)|}.$$

Este clar că g este bine definită, continuă și ia ambele valori -1 și 1 deoarece $g(-x) = -g(x)$. Acest fapt este în contradicție cu proprietatea mulțimii U de a fi conexă.

Problema 6.52 *Fie $\alpha \in \mathbf{R}$ și $g \in C[a, b]$. Atunci ecuația integrală*

$$f(t) = \alpha \int_a^b \sin g(t) dt + g(t)$$

are o soluție $f \in C[a, b]$.

Soluție Se aplică Principiul Leray-Schauder (Teorema 4.14).

Problema 6.53 *Arătați că funcția $f(x) = \int_{-1}^1 (tx(t))^2 dt$ nu are punct de minim pe mulțimea $M = \{x \in C^1[-1, 1]; x(-1) = 0, x(1) = 1\}$.*

Acesta este exemplul dat de Weierstrass în 1870 pentru a arăta că o problemă de minim în calculul variațiilor nu are întotdeauna soluție.

Soluție Se consideră șirul (x_n) definit prin

$$x_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\arctan nt}{\arctan n}.$$

Un calcul simplu arată că

$$f(x_n) = \frac{1}{2n^2 \arctan n} \int_{-n}^n \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds \leq \frac{1}{2n^2 \arctan n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{(1+s^2)^2} ds.$$

Este clar că $\inf_{x \in U} f(x) = 0$ iar (x_n) este un șir minimizant. Pe de altă parte, dacă x ar fi punct de minim, am avea $tx(t) = 0$ pentru orice $t \in [-1, 1]$ ceea ce ar conduce la faptul că funcția x este constantă, în contradicție cu $x(-1) = 0$ și $x(1) = 1$.

Un alt exemplu, mai simplu, de problemă de minim în calculul variațiilor care nu are soluție este oferit de funcția definită prin $f(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$ și de mulțimea $M = \{x \in C^1[0, 1]; x(0) = 0, x(1) = 1\}$. Este ușor de văzut că șirul de funcții definit prin $x_n(t) = t^n$ este șir minimizant.

Problema 6.54 Fie X un spațiu Banach, $M \subset X$ o mulțime convexă și închisă și $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție inferior semicontinuuă și convexă. Atunci f este secvențial inferior semicontinuuă.

Soluție Pentru fiecare $r \in \mathbf{R}$ mulțimea de nivel $M_r = \{x \in M; f(x) \leq r\}$ este convexă și închisă. Dacă, prin reducere la absurd, concluzia ar fi falsă ar exista un șir (x_n) în M convergent slab la x și

$$f(x) > \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Există deci un număr r astfel încât $r < f(x)$ și $x_n \in M_r$ pentru orice $n \geq n_0$. Deci $x \in M_r$, ceea ce reprezintă o contradicție.

Problema 6.55 Fie X un spațiu Banach, $M \subset X$ o mulțime convexă și închisă și $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție Gateaux diferentiabilă cu derivata f' monotonă pe M . Atunci f este secvențial inferior semicontinuuă.

Soluție Funcționala $f' \in X^*$ este monotonă dacă

$$\langle f'(y) - f'(x), y - x \rangle \geq 0, \forall x, y \in M.$$

Notăm $\varphi(t) = f(x + t(y - x))$ pentru $x, y \in M$. Atunci $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ este convexă și φ' este monotonă. Din Teorema de medie a lui Lagrange avem

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\theta) \geq \phi'(0), \quad 0 < \theta < 1,$$

adică

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle$$

pentru orice $x, y \in M$. Dacă x_n converge slab la x , punem în inegalitatea precedentă x_n în loc de y și obținem

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Problema 6.56 Fie X un spațiu Banach, $M \subset X$ o mulțime convexă și închisă și $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție Gateaux diferentiabilă pe M . Atunci f este convexă dacă și numai dacă f' este monotonă pe M .

Soluție Se introduce funcția φ ca în problema precedentă și se observă ușor că f' este monotonă dacă și numai dacă φ' este crescătoare.

Problema 6.57 (Caristi - Kirk) Fie (X, ρ) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție inferior semicontinuuă și mărginită inferior. Fie $T : X \rightarrow X$ o funcție care satisface condiția

$$\rho(x, Tx) \leq f(x) - f(Tx), \quad \forall x \in X.$$

Atunci T are un punct fix.

Soluție Se aplică Corolarul 5.2 cu $\varepsilon = 1/2$ și apoi se ia în (ii) $x = T\bar{x}$.

Observație Teorema Caristi-Kirk este interesantă prin faptul că dă existența unui punct fix pentru o funcție careia nu i se impune nici o condiție de continuitate.

Problema 6.58 Să se extindă enunțul din problema precedentă la cazul multifuncțiilor.

Soluție Dacă (X, ρ) și f sunt ca în problema precedentă iar $F : X \rightsquigarrow X$ este o multifuncție care verifică relația

$$\rho(x, y) \leq f(x) - f(y) \quad \forall (x, y) \in \text{Graf}(F),$$

atunci există $\bar{x} \in X$ încât $F(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.

Problema 6.59 (O generalizare a principiului Brezis-Browder). Fie X o mulțime cu preordinea “ \preceq ” și fie $F : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție care satisface proprietățile:

(i) $F(x, y) \geq 0$ dacă $y \preceq x$;

(ii) $F(x, \cdot)$ este descrescătoare pentru fiecare $x \in X$;

(iii) $F(\cdot, y)$ este majorată pe mulțimea $\{z \in X; y \preceq z\}$;

(iii) Orice șir crescător (x_n) în X este majorat și $\liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_{n+1}, x_n) = 0$.

Atunci, pentru fiecare $x \in X$ există $y \in X$ cu $x \preceq y$ și

$$y \preceq z \implies F(z, y) = 0.$$

Soluție Fie $x \in X$. Construim inductiv un șir (x_n) cu $x_1 = x$ astfel: dacă x_1, \dots, x_n sunt definiți, fie $a = \sup\{F(z, x_n); x_n \preceq z\}$. Este clar că $0 \leq a < \infty$. Dacă $a = 0$, considerăm $y = x_n$. Dacă $a > 0$, fie $c < 1$ fixat. Există x_{n+1} cu $x_n \preceq x_{n+1}$ și $F(x_{n+1}, x_n) \geq ca$. Obținem astfel un șir crescător (x_n) . Fie y un majorant al său. Arătăm că acesta este elementul dorit. Fie z astfel încât $y \preceq z$. Avem

$$0 \leq F(z, y) \leq F(z, x_n) \leq a \leq c^{-1}F(x_{n+1}, x_n).$$

De aici deducem $F(z, y) = 0$. Principiul Brezis-Browder se obține de aici luând $F(x, y) = S(x) - S(y)$.

Problema 6.60 Fie $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ diferentiabilă Gateaux și $f' = A+B$. Presupunem

- (i) $f(x) \rightarrow +\infty$ pentru $\|x\| \rightarrow +\infty$;
- (ii) A are invers continuu pe X^* și B este compact.

Să se arate că f satisface condiția Palais - Smale (PS).

Soluție Dacă șirul $(f(x_n))$ este mărginit atunci din (i) rezultă că șirul (x_n) este mărginit. Compactitatea lui B asigură existența unui subșir (să-l notăm tot cu (x_n)) încât (Bx_n) converge, prin urmare (Ax_n) converge și deci (x_n) converge.

Problema 6.61 Fie V un spațiu Banach și $S(t)$, $t \geq 0$, un semigrup de clasă C_0 care este contractant, adică $\|S(t)\| \leq 1$ pentru orice $t \geq 0$. Fie $L > 0$, $T > 0$ și F o submulțime a lui V . Pe $F \times [0, T]$ introducem relația: $(v, t) \preceq (w, s)$ dacă $t \leq s$ și $\|S(s-t)v - w\| \leq L(s-t)$. Să se arate că \preceq este ordine parțială pe $F \times [0, T]$.

Soluție Reflexivitatea și antisimetria sunt evidente. Fie acum $(v, t) \preceq (w, s)$ și $(w, s) \preceq (u, r)$. Avem $\|S(s-t)v - w\| \leq L(s-t)$ și

$$\|S(r-s)w - u\| \leq L(u-s).$$

Dar

$$\begin{aligned} \|S(r-t)v - u\| &\leq \|S(r-s)S(s-t)v - S(u-s)w\| + \|S(r-s)w - u\| \leq \\ &\|S(s-t)v - w\| + \|S(r-s)w - u\|. \end{aligned}$$

Problema 6.62 In condițiile Problemei 6.61 presupunem că F este închisă. Considerăm funcția $S : F \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $S(v, t) = t$. Să se arate că sunt verificate ipotezele (i) și (ii) din Teorema 5.1.

Soluție Condiția (ii) este evidentă. Pentru (i), fie $((v_n, t_n))$ un șir crescător pe $F \times [0, T]$. Șirul (t_n) este convergent. Arătăm că (v_n) este șir Cauchy, deci convergent, deoarece F este mulțime închisă. Este clar că avem

$$\|S(t_{n+k} - t_n)v_n - v_{n+k}\| \leq L(t_{n+k} - t_n). \tag{6.2}$$

Șirul (t_n) fiind convergent, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ încât pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $L(t_{n+k} - t_n) < \varepsilon$. Pentru $n \geq n_\varepsilon$ și $k, l \in \mathbf{N}$ obținem

$$\|v_{n+k} - v_{n+l}\| \leq \|S(t_{n+k} - t_n)v_n - S(t_{n+l} - t_n)v_n\| + 2\varepsilon.$$

Fixăm $n \geq n_\varepsilon$ și facem $k \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$ și deducem că membrul drept al inegalității de mai sus are limita 2ε . Deci există n'_ε încât pentru $k, l \geq n'_\varepsilon$ avem

$$\|v_{n+k} - v_{n+l}\| \leq 3\varepsilon,$$

ceea ce arată că (x_n) este șir Cauchy. Fie $t_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Facem $k \rightarrow \infty$ în relația (6.2) și deducem

$$\|S(t_0 - t_n)x_n - x_0\| \leq L(t_0 - t_n),$$

ceea ce arată că $(v_n, t_n) \leq (v_0, t_0)$ pentru orice n .

Problema 6.63 *In condițiile Problemei 6.62 presupunem în plus că*

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} d(S(t)v, D) = 0, \quad \forall v \in D. \quad (6.3)$$

Să se arate că dacă (\bar{v}, \bar{t}) satisface condiția (iii) din Teorema 5.1 atunci $\bar{t} = T$.

Soluție Presupunem, prin reducere la absurd, că $\bar{t} < T$. Vom arăta că există $(v, t) \in F \times [0, T]$ cu $(\bar{v}, \bar{t}) \leq (v, t)$ și $t > \bar{t}$. Intr-adevăr, aplicăm (6.3) cu \bar{v} și deducem că există $t' < T - \bar{t}$ astfel încât

$$d(S(t')\bar{v}, D) < Lt'.$$

Prin urmare există $v \in D$ încât $\|S(t')\bar{v} - v\| < Lt'$. Luând și $t = \bar{t} + t'$, rezolvarea se încheie.

Problema 6.64 *Demonstrați Propoziția 5.3.*

Soluție Pentru cazul când $C = 0$ și semigrupul este contractant se aplică rezultatele Problemelor 6.61, 6.62 și 6.63 astfel: se ia $T > 0$, $L > 0$, $v \in F$ și se introduce ordinea din Problema 6.61. Problema 6.62 asigură că ipotezele Teoremei 5.1 sunt verificate. Prin urmare, aplicăm concluzia cu $x_0 = (v, 0)$. Deci există (\bar{v}, \bar{t}) care satisface (iii). Dar Problema 6.63 afirmă că $\bar{t} = T$. Așadar, pentru $(v, 0)$ există (\bar{v}, T) cu $(v, 0) \leq (\bar{v}, T)$. Aceasta înseamnă

$$\|S(T)v - \bar{v}\| \leq LT.$$

Cum $\bar{v} \in F$, deducem $d(S(T)v, F) \leq LT$. Deoarece L este arbitrar, obținem $d(S(T)v, F) = 0$.

Problema 6.65 In spațiul \mathbf{R}^2 cu metrica

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

luăm funcția

$$f(x, y) = \left(\frac{3x}{2} - \frac{y}{3}, x + \frac{y}{3} \right).$$

Arătați că f este contracție direcțională dar nu este contracție.

Soluție Avem

$$\rho(f(x_1, y_1), f(x_2, y_1)) = \frac{5}{2}|x_1 - x_2|,$$

ceea ce arată că f nu este contracție. Pentru a arăta că f este contracție direcțională, fie $f(x, y) \neq (x, y)$. Notând $(a, b) = f(x, y)$, avem $b \neq y$ pentru că altfel ar rezulta și $a = x$. Orice element de forma (x, z) cu z între b și y aparține segmentului deschis $]x, y), f(x, y)[$. Dar pentru astfel de puncte avem

$$\frac{\rho(f(x, z), f(x, y))}{\rho((x, z), (x, y))} = \frac{2}{3}.$$

Să remarcăm că, datorită Teoremei 5.4, f are cel puțin un punct fix. Spre deosebire de contracții (care au punct fix unic), contracțiile direcționale pot să aibă mai multe puncte fixe. Acesta e cazul și pentru funcția f dată mai sus. Toate elementele de forma $(x, 3x/2)$ sunt puncte fixe pentru f .

Problema 6.66 Fie (X, ρ) un spațiu metric compact și $F : X \rightarrow X$ o funcție care verifică

$$\rho(F(x), F(y)) < \rho(x, y)$$

pentru orice $x, y \in X$ cu $x \neq y$. Atunci F are punct fix unic u . Mai mult, șirul aproximațiilor succesive $F^n(x)$ converge la u pentru orice $x \in X$.

Soluție Funcția

$$f(x) = \rho(x, F(x)), \quad x \in X,$$

își atinge minimumul în u . Dacă $F(u) \neq u$ avem

$$f(F(u)) = \rho(F(u), F^2(u)) < \rho(u, F(u)) = f(u),$$

ceea ce este fals. Prin urmare, u este punct fix pentru F . Să luăm $x \in X$ și să considerăm șirul aproximațiilor succesive $(F^n(x))$. Dacă $F^k(x) = u$ pentru un $k \in \mathbf{N}$ atunci $F^n(x) = u$ pentru $n \geq k$. Altfel, șirul $\rho(F^n(x), u)$ este strict descrescător

și deci convergent la $r \geq 0$. Cum X este compact, șirul $(F^n(x))$ are un subșir $(F^{n_k}(x))$ convergent, să zicem la $z \in X$. Obținem

$$r = \rho(z, u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(F^{n_k}(x), u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(F^{n_k+1}(x), u) \leq \rho(F(z), u).$$

Este clar că de aici obținem $z = u$. Așadar, orice subșir convergent al șirului $(F^n(x))$ converge la u și deci șirul $(F^n(x))$ converge la u .

Problema 6.67 *Funcția $f : A \times B \rightarrow \mathbf{R}$ are punct șa dacă și numai dacă are loc relația*

$$\min_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \max_{y \in B} \inf_{x \in A} f(x, y). \quad (6.4)$$

Dacă (x_0, y_0) este punct șa, atunci $f(x_0, y_0)$ este valoarea comună a celor două expresii din (6.4).

Soluție Amintim că (x_0, y_0) este punct șa pentru f dacă

$$f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x, y_0) \quad \forall (x, y) \in A \times B. \quad (6.5)$$

Presupunem (6.4). Există $x_0 \in A$ și $y_0 \in B$ astfel încât

$$\sup_{y \in B} f(x_0, y) = \inf_{x \in A} f(x, y_0).$$

Cum întotdeauna avem

$$\inf_{x \in A} f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq \sup_{y \in B} f(x_0, y),$$

rezultă că (x_0, y_0) este punctul șa căutat. Reciproc, din (6.5) obținem

$$\sup_{y \in B} f(x_0, y) = f(x_0, y_0) = \inf_{x \in A} f(x, y_0).$$

Având în vedere că

$$\inf_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) \leq \sup_{y \in B} f(x_0, y), \quad \inf_{x \in A} f(x, y_0) \leq \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} f(x, y), \quad (6.6)$$

urmează

$$\inf_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) \leq \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} f(x, y).$$

Deoarece inegalitatea inversă este imediată, avem egalitate. De asemenea, avem egalitate și în (6.6). Obținem astfel

$$f(x_0, y_0) = \sup_{y \in B} f(x_0, y) = \min_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \inf_{x \in A} f(x, y_0) = \max_{y \in B} \min_{x \in A} f(x, y).$$

Bibliografie

- [1] Aubin J.-P., Cellina A., *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, 1984.
- [2] Aubin J.-P., Frankowska H., *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, 1990.
- [3] Arzelà C., Funzioni di linee, Atti della R. Accad. dei Lincei Rendiconti della Cl.Si. Fis. mat. Nat., (4) 5, 1889, 342-348
- [4] Ascoli G., Le curve limite di una varieta data di curve, Atti della R. Accad. dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 18, 1882-1883, 521-586.
- [5] Baire L. R., Sur les fonctions de variable réelles, Ann. Mat. Pura Appl., (3) 3, 1899, 1-222.
- [6] Banach S., Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, Fund. Math., 3, 1922, 133-181.
- [7] Banach S., Sur les fonctionelles linéaires, Studia Math., 1, 1929, 211-216 și 223-239.
- [8] Banach S., Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, Studia Math., 3, 1931, 174-179.
- [9] Banach S., *Théorie des Opérations linéaires*, Monografie matematyczne, Warsaw, 1932.
- [10] Banach S, Steinhaus H., Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math., 9, 1927, 50-61.
- [11] Barbu V., *Semigrupuri de Contractii Neliniare în Spații Banach*, Editura Academiei, București, 1974.
- [12] Barbu V., *Metode Matematice în Optimizarea Sistemelor Diferențiale*, Editura Academiei, București, 1989.

- [13] Bebernes J. W., Schuur J.D., The Ważewski topological method for contingent equations, *Ann. Mat. Pura Appl.*, (4) 87, 1970, 271-279.
- [14] Begle E. G., A fixed point theorem, *Ann. of Math.*, (2) 51, 1950, 544-550.
- [15] Bielecki A., Une remarque sur la méthode de Banach- Caccioppoli-Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, 4, 1956, 261-264.
- [16] Birkhoff G. D., Proof of Poincaré's geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 14, 1913, 14-22.
- [17] Birkhoff G. D., Kellogg O. D., Invariant points in function space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 23, 1922, 96-115.
- [18] Blair C. E., The Baire category theorem implies the principle of dependent choices, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 25, 1977, 933-934.
- [19] Bohnenblust H., Karlin S., On a theorem of Ville, In: *Contributions to the theory of games*, Kuhn and Tucker Eds., 155-160, University Press, Princeton, 1950.
- [20] Borsuk K., Sur les rétractes, *Fund. Math.*, 17, 1931, 152-170.
- [21] Brézis H., Browder F., A general principle on ordered sets in nonlinear functional analysis, *Adv. in Mathematics*, 21, 1976, 355-364.
- [22] Brown R.F., Elementary consequences of the noncontractibility of the circle, *Amer. Math. Monthly*, 81, 1974, 247-252.
- [23] Browder F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.*, 177, 1968, 283-301.
- [24] Brouwer L.E.J., Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, 71, 1912, 97-115.
- [25] Caccioppoli R., Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale, *Ren. Accad. Naz. Lincei*, 11, 1930, 794-799.
- [26] Cazenave T., Haraux A., *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

- [27] Cârjă O., Ursescu C., The characteristics method for a first order partial differential equation, An. Ști. Univ. "Al.I.Cuza" Iași Sect. I a Mat., 39, 1993, 367 - 396.
- [28] Cârjă O., Vrabie I. I., Some new viability results for semilinear differential inclusions, NoDEA, 4, 1997, 401-424.
- [29] Cellina A., Approximation of set-valued functions and fixed points theorems, Ann. Mat. Pura Appl., 82, 1969, 17-24.
- [30] Costinescu O., *Elemente de topologie generală*, Editura tehnică, București, 1969.
- [31] Deimling K., *Multivalued Differential Equations*, Walter de Gruyter, 1992.
- [32] Dieudonné J.A., Une généralisation des espaces compacts, J. Math. Pures Appl., 23, 1944, 65-76.
- [33] Dugundji J., An extension of Tietze's theorem, Pacific J. Math., 1, 1951, 353-367.
- [34] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [35] Ekeland I., On the variational principle, J. Math. Anal. Appl., 74, 1974, 324-353.
- [36] Feferman S., Independence of the axiom of choice from the axiom of independence choices, J. Sym. Logic, 29, 1967, 226.
- [37] Gheorghiu N., *Introducere în Analiza Funcțională*, Editura Academiei, București, 1974.
- [38] Glicksberg I.L., A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 1952, 170-174.
- [39] Goursat E., Sur la théorie des fonctions implicites, Bull. Soc. Math. France, 31, 1903, 184-192.
- [40] Graves L.M., Some mapping theorems, Duke Math. J., 17, 1950, 111-114.
- [41] Gröger K., A simple proof of the Brouwer fixed point theorem, Math. Nachr., 102, 1981, 293-295.

- [42] Hahn H., Über Folgen linearen Operationen, *Monatsh. math. Phys.*, 32, 1922, 3-88.
- [43] Halmos P., Vaughan H., The marriage problem, 72, 1950, 214-215.
- [44] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Verlag von Veit, Leipzig, 1914.
- [45] Hill L.S., Properties of certain aggregate functions, *Amer. J. Math.*, 49, 1927, 419-432.
- [46] Hildebrandt T. H., On uniform limitedness of sets of functional operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 29, 1923, 309-315.
- [47] Holmes R., *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer, 1975.
- [48] Kakutani S., A generalization of Brouwer's fixed-point theorem, *Duke Math. J.*, 8, 1941, 457-459.
- [49] Kantorovici L.V., Akilov G.P., *Analiză Funcțională*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986.
- [50] Karamardian S., Generalized complementarity problem, *J. Optim. Theory Appl.*, 8, 1971, 161-168.
- [51] Kelley J.L., The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice, *Fund. Math.*, 37, 1950, 75-76.
- [52] Klein E., Thompson A.C., *Theory of Correspondences*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [53] Kuratowski K., Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés, *Fund. Math.*, 18, 1932, 148-180.
- [54] Kuratowski K., *Topology*, Academic Press, New York, 1966.
- [55] Ky Fan, Fixed-point and minimax theorems in locally convex linear spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 38, 1952, 121-126.
- [56] Ky Fan, A minimax inequality and applications, in: *Inequalities III*, 103-113, Academic Press, New York, 1972.
- [57] Ky Fan, Glicksberg I., Some geometric properties of the spheres in a normed linear space, *Duke Math. J.*, 25, 1958, 553-568.

- [58] Leray J, Schauder J., Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 51, 1934, 45-78.
- [59] Lichtenstein L., Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Methode der unendlichvielen Variablen, J. Reine Angew. Math., 145, 1915, 24-85.
- [60] Lifshits E.A., Ideally convex sets, Funct. Anal. Appl., 4, 1970, 330-331, tradus din Funkts. Anal. Prilozh., 4, 1970, 76-77
- [61] Lindenstrauss J, Tzafriri L, On the complemented subspaces problem, Israel J. Math., 9, 1971, 263-269.
- [62] Lyusternik L.A., Conditional extrema of functionals, Mat. Sb., 41, 1934, 390-401.
- [63] Marchaud A., Sur les champs continus de demi-cones convex et leur integrales, Comp. math., 3, 1936, 89-127.
- [64] Megginson R. E., *An Introduction to Banach Spaces Theory*, Springer, 1998.
- [65] Michael E., Continuous selections I, Ann. Math., 63, 1956, 361-382.
- [66] Michael E., Continuous selections II, Ann. Math., 64, 1956, 562-580.
- [67] Miranda C., Un'osservazione su un teorema di Brouwer, Boll. Un. Mat. Ital., (2) 3, 1940, 527.
- [68] Moore R. L., Concerning upper semicontinuous collections of continua, Trans. Amer. Math. Soc., 27, 1925, 416-428.
- [69] Moore E. H., Smith H. L., A general theory of limits, Amer. J. Math., 44, 1922, 102-121.
- [70] Nadler S. B. Jr., Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math., 30, 1969, 475-488.
- [71] Nagumo M., Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 24, 1942, 551-559.
- [72] Ostrowski A.M., The round-off stability of iterations, Z. Angew. Math. Mech., 47, 1967, 77-81.
- [73] Phillips R. S., On linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 48, 1940, 516-541.

- [74] Picard E., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivés partielles et la méthode des approximations successives, J. Math. Pures Appl. 6, 1890, 145-210.
- [75] Picone M., *Lezioni di analisi infinitesimale*, vol. 1, Circolo Matematico di Catania, Catania, Italy, 1923.
- [76] Popa E., *Culegere de Probleme de Analiză Funcțională*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [77] Precupanu A., *Analiză Matematică. Funcții Reale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
- [78] Precupanu A., *Bazele Analizei Matematice*, Editura Universității "Al.I.Cuza" Iași, Iași, 1993.
- [79] Precupanu T., *Spații Liniare Topologice și Elemente de Analiză Convexă*, Editura Academiei, București, 1992.
- [80] Robinson S., Regularity and stability for convex multivalued functions, Math. Oper. Res., 1, 1976, 130-143.
- [81] Rudin M.E., A new proof that metric spaces are paracompact, Proc. Am. Math. Soc., 20, 1969, 603.
- [82] Saint Raymond J., Multivalued contractions, Set-Valued Anal., 2, 1994, 559-571.
- [83] Schauder J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math.Z., 26, 1927, 63-98.
- [84] Schauder J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Math., 2, 1930, 171-180.
- [85] Schauder J., Über lineare, vollstetige funktionaloperationen, Studia Mat., 2, 1930, 183-196.
- [86] Stampacchia G., Formes bilinéaires coercitives sur les ensemble convexes, C. R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964, 4413-4416.
- [87] Steinlein H., On two results of J. Dugundji about extensions of maps and retractions, Proc. Amer. Math. Soc., 77, 1979, 289-290.

- [88] Stone A.H., Paracompactness and product spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54, 1948, 977-982.
- [89] Tychonoff A.N., Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Anal.*, 102, 1930, 544-561.
- [90] Tychonoff A. N., Über einen Funktionenraum, *Math. Ann.*, 111, 1935, 767-776.
- [91] Tychonoff A. N., Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.*, 111, 1935,
- [92] Ursescu C., Multifunctions with closed convex graph, *Czech. Math. J.*, 25, 1975, 438-441.
- [93] Urysohn P., Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, 94, 1925, 262-295.
- [94] Vrabie I. I., *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions*, Second Edition, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **75**, Longman, 1995.
- [95] Vrabie I. I., *Semigrupuri de Operatori Liniari și Aplicații*, Editura Universității "Al.I.Cuza", Iași, 2001.
- [96] Von Neumann J., Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Math. Ann.*, 100, 1928.
- [97] Von Neumann J., Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Browserschen Fixpunktsatzes, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, Vienna 8, 1937, 73-83.
- [98] T. WAŻEWSKI, Sur une condition équivalent à l'équation au contingent, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. e Phys.*, **9** (1961), pp. 865-867.
- [99] Zabrejko P.P., A theorem for semiadditive functionals, *Functional Anal. Appl.*, 3, 1969, 70-72.
- [100] Zaremba S.K., Sur les equations au paratingent, *Bull. Sci. Math.*, 60, 1936, 139-160.
- [101] Zălinescu C., *Programare Matematică în Spații Infinit Dimensionale*, Editura Academiei, București, 1999.
- [102] Zeidler E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications; Part I: Fixed-Point Theorems, Part II: Monotone Operators, Part III: Variational Methods and Optimization, Parts IV/V: Applications to Mathematical Physics*, Springer, 1984.

Index

- șir generalizat, 110
- acoperire, 3
 - deschisă, 3
 - liniară, 59
- axioma
 - alegerii, 3, 42, 117
 - alegerii dependente, 67, 118
 - alegerii numărabile, 119
- con tangent, 39
- condiția de tangentă, 39
- condiția Lyusternik, 58
- contractie, 88
- control, 19
- control optimal, 19
- controlabilitate, 70, 85, 149
- corespondență, 17
- ecuația
 - integrală Volterra, 91
- ecuația lui Laplace, 134
- ecuații
 - semiliniare, 114
- familie local finită, 3
- incluziune diferențială, 19, 38, 121
- inegalități variaționale, 141
- inegalitatea
 - lui Gronwall, 151
 - lui Ky Fan, 108
- lema
 - lui Borsuk, 93
 - lui Urysohn, 10
 - lui Zabreiko, 67
 - lui Zorn, 3, 118
- metrica Pompeiu-Hausdorff, 26
- mulțime
 - de prima categorie, 70
 - echicontinuă, 102
 - ideal convexă, 61
- multifuncție, 17
 - $\varepsilon - \delta$ inferior semicontinuă, 35
 - $\varepsilon - \delta$ superior semicontinuă, 35
 - închisă, 18
 - convexă, 18
 - inferior semicontinuă, 21
 - local selecționabilă, 45
 - parametrizată, 19
 - proprie, 17
 - strictă, 17
 - superior hemicontinuă, 36
 - superior semicontinuă, 21
- multiplicatorii lui Lagrange, 84
- optimizare, 20
- parametrizare, 45
- partiția unității, 1, 8, 12
- principiul
 - aplicațiilor deschise, 57
 - Brezis-Browder, 119
 - contractiilor, 89, 131
 - graficului închis, 69

- Leray-Schauder, 107
- lui Dirichlet, 134
- lui Ekeland, 129
- mărginirii uniforme, 57, 68
- programării dinamice, 150, 157
- problema
 - mariajului, 43
- problema lui Dirichlet, 134
- proces convex, 18, 64
- punct
 - limită, 111
- punct fix, 15, 88
- rafinare, 3
- regularitate metrică, 59
- rezidual, 70
- selecție, 42
 - aproximativă, 49
 - continuă, 45, 46
 - injectivă, 42, 43
 - minimală, 43
- semigrup
 - liniar de clasă C_0 , 70
 - compact, 115
- sistem
 - nul controlabil, 72
 - exact controlabil, 74
 - global controlabil, 86
 - local controlabil, 86
- spațiu
 - normal, 2
 - paracompact, 3
 - regulat, 2
- subacoperire, 3
- teorema
 - de punct fix a lui Brouwer, 92
 - lui Baire, 65
 - aplicațiilor deschise, 68
- Arzelà-Ascoli, 101
- de inversare locală, 78
- de medie, 76
- de minimax, 146
- de punct fix a lui Schauder, 99
- de punct fix a lui Banach, 89
- de punct fix a lui Browder, 113
- de punct fix a lui Kakutani, 51, 111
- de punct fix a lui Tikhonov, 112
- de selecție a lui Michael, 46
- funcțiilor implicite, 80
- funcțiilor implicite de tip surjectiv, 81
- graficului închis, 64
- lui Baire, 62
- lui Dugundji, 13
- lui Graves, 58, 75
- lui Karamardian, 144
- lui Lyusternik, 58, 77
- lui Peano, 103
- lui Schauder, 105
- lui Zermelo, 3, 118
- Lyusternik-Graves, 76
- Perron-Frobenius, 97
- Robinson-Ursescu, 58
- valorilor intermediare, 96
- teoria jocurilor, 148
- timp minimal, 72
- timp optimal, 150
- viabilitate, 39, 122