



FACULTY OF MATHEMATICS
"ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY

**PREPRINT SERIES OF
"ALEXANDRU MYLLER"
MATHEMATICAL SEMINARY**

FUNCȚII CVAȘI-CONVEXE

Liviu C. Florescu

Nr. 03 – 2007

ISSN 1843 – 0473

$\int M$ ALEXANDRU MYLLER

Bld. Carol I, 11, 700506 – Iași, ROMÂNIA
<http://www.math.uaic.ro/~sm>

Funcții cvasi-convexe¹

Liviu C. Florescu*

*Al. I. Cuza” University, Faculty of Mathematics, Blvd. Carol I, 11, 700506 - Iași, România,
e-mail: lflo@uaic.ro

1 Introducere

Funcțiile cvasi-convexe au fost introduse în 1952 de Ch. B. Morrey, Jr. (vezi [Mo1] și [Mo2]) cu scopul de a caracteriza semicontinuitatea inferioară a funcționalelor

$$I(u) = \int_{\Omega} f(t, u(t), \nabla u(t)) dt,$$

funcționale care apar frecvent în problemele de calcul variațional. Ulterior rezultatele lui Morrey au fost extinse de către Acerbi și Fusco ([AcF]-1984) și de Marcellini ([Mar] - 1985).

Cvasi-convexitatea intervine esențial în teorema următoare:

1.1 Teoremă. *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un domeniu mărginit, $1 \leq p < +\infty$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}_+$ și, $\forall u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$,*

$$I(u) = \int_{\Omega} f(t, u(t), \nabla u(t)) dt.$$

Dacă:

- 1. f este un integrant Carathéodory,*
- 2. există $g : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$ integrant Carathéodory așa fel încât*

$$|f(t, x, y)| \leq g(t, x) \cdot (1 + \|y\|^p), \quad a.p.t. \quad t \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}^m, \forall y \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

¹This work has been supported by ANCS and CNCSIS through grants 2-CEX06-11-10/25.07.2006, 2-CEX06-11-56/25.07.2006, CEX05-D11-23/05.10.2005, GR 214/20.09.2006

3. $f(t, x, \cdot)$ este cvasi-convexă, a.p.t. $t \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}^m$,
atunci, oricare ar fi un șir $(u_j) \subseteq W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ și oricare ar fi
 $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ așa fel încât $u_j \xrightarrow[L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)]{\text{tare}} u$ și $\nabla u_j \xrightarrow[L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})]{\text{slab}} \nabla u$,

$$I(u) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} I(u_j),$$

sau, altfel spus, I este slab inferior semi-continuu pe $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Pentru a ne apropia de definiția cvasi-convexității să considerăm următoarea situație. Fie $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ cubul deschis și mărginit $(0, 1)^n$, $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, $1 \leq p < +\infty$ și fie

$$I : W^{1,p}(Q, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}, I(u) = \int_Q f(\nabla u(x)) dx, \forall u \in W^{1,p}(Q, \mathbb{R}^m).$$

Să presupunem că I este slab inferior semi-continuu pe $W^{1,p}(Q, \mathbb{R}^m)$; alegem $y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\varphi \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$ și, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$, împărțim cubul Q în 2^{kn} subcuburi de latură $\frac{1}{2^k}$, $\{Q_l\}_{l=1}^{2^{kn}}$.

Dacă $x_l = (x_l^1, \dots, x_l^n) \in Q_l$ și $x_l \leq x, \forall x \in Q_l$ (x_l este colțul din stînga jos al cubului Q_l) atunci $Q_l = \prod_{i=1}^n (x_l^i, x_l^i + \frac{1}{2^k})$.

Definim atunci $\varphi_k(x) = \frac{1}{2^k} \cdot \varphi(2^k(x - x_l)) + y \cdot x, \forall x \in Q_l$. Se observă că astfel am definit a.p.t. φ_k pe Q . Oricare ar fi $x \in Q$,

$$\|\varphi_k(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{1}{2^k} \cdot \|\varphi\|_{L^\infty} + \|y\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{2^k} \cdot \|\varphi\|_{L^\infty} + \|y\|_{\mathbb{R}^{m \times n}},$$

de unde rezultă că $\varphi_k \in L^\infty(Q, \mathbb{R}^m) \subseteq L^p(Q, \mathbb{R}^m)$.

Pe de altă parte, $\|\varphi_k(x) - y \cdot x\|_{\mathbb{R}^m} \leq \frac{1}{2^k} \cdot \|\varphi\|_{L^\infty}$ de unde rezultă că $\varphi_k(x) \xrightarrow[Q]{\text{uniform}} y \cdot x$.

Dacă $\varphi_k = (\varphi_k^1, \dots, \varphi_k^m)$ și $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ atunci, $\forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, \forall x \in Q_l$,

$$\frac{\partial \varphi_k^i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(2^k(x - x_l)) + y_{ij},$$

de unde, $\forall x \in Q_l$,

$$\nabla \varphi_k(x) = \nabla \varphi(2^k(x - x_l)) + y$$

și deci

$$\|\nabla \varphi_k(x)\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \leq \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} + \|y\|_{\mathbb{R}^{m \times n}}.$$

Rezultă că $\nabla\varphi_k \in L^\infty(Q, \mathbb{R}^m) \subseteq L^p(Q, \mathbb{R}^m)$ și deci $(\varphi_k) \subseteq W^{1,p}(Q, \mathbb{R}^m)$.

Fie p' conjugatul lui p ; deoarece $\varphi_k(x) \xrightarrow[Q]{\text{uniform}} y \cdot x$, $\forall g \in L^{p'}(Q, \mathbb{R}^m)$,

$$\int_Q \langle \varphi_k, g \rangle dx \rightarrow \int_Q \langle \psi, g \rangle dx,$$

unde $\psi(x) = y \cdot x$. Evident $\psi \in W^{1,p}(Q, \mathbb{R}^m)$ și $\nabla\psi(x) = y$.

Oricare ar fi $h \in L^{p'}(Q, \mathbb{R}^m)$ cu $\|h\|_{L^\infty} < +\infty$,

$$\begin{aligned} \int_Q \langle \nabla\varphi_k - \nabla\psi, h \rangle dx &\leq \|h\|_{L^\infty} \cdot \int_Q \sum_{i=1}^{mn} (\nabla\varphi_k^i - \nabla\psi^i) dx = \\ &= \|h\|_{L^\infty} \cdot \sum_{i=1}^{mn} \sum_{l=1}^{2^{kn}} \int_{Q_l} \nabla\varphi^i(2^k(x - x_l)) dx = \|h\|_{L^\infty} \cdot \sum_{i=1}^{mn} \int_Q \nabla\varphi^i(x) dx. \end{aligned}$$

Dacă $\|h\|_{L^\infty} = +\infty$ atunci există $h_r \in C^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$, $h_r \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{L^{p'}} h$ și deci

$$\begin{aligned} \int_Q \langle \nabla\varphi_k - \nabla\psi, h \rangle dx &= \underbrace{\int_Q \langle \nabla\varphi_k - \nabla\psi, h_r \rangle dx}_{A_{k,r}} + \underbrace{\int_Q \langle \nabla\varphi_k - \nabla\psi, h - h_r \rangle dx}_{B_{k,r}}. \\ |B_{k,r}| &\leq \left(\int_Q \|\nabla\varphi_k - \nabla\psi\|_{\mathbb{R}^m \times n}^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|h - h_r\|_{p'} = \\ &= \left(\sum_1^{2^{kn}} \int_{Q_l} \|\nabla\varphi(2^k(x - x_l))\|_{\mathbb{R}^m \times n}^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|h - h_r\|_{p'} = \\ &= \underbrace{\left(\int_Q \|\nabla\varphi(x)\|_{\mathbb{R}^m \times n}^p dx \right)^{\frac{1}{p}}}_M \cdot \|h - h_r\|_{p'}. \end{aligned}$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ există r_0 a.î. $\|h - h_{r_0}\|_{p'} < \frac{\varepsilon}{2M}$ și există k_0 a.î., $\forall k \geq k_0$, $|A_{k,r_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Rezultă că $\nabla\varphi_k \xrightarrow[L^p]{w} \nabla\psi$ și deci $\varphi_k \xrightarrow[W^{1,p}]{w} \psi$.

Deoarece I este slab inferior semi-continuu pe $W^{1,p}(Q, \mathbb{R}^m)$,

$$I(\psi) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} I(\varphi_k).$$

Pe de altă parte

$$I(\psi) = \int_Q f(\nabla\psi(x))dx = f(y)$$

iar

$$I(\varphi_k) = \sum_{l=1}^{2^{kn}} \int_{Q_l} f(\nabla\varphi(2^k(x - x_l)) + y)dx = \int_Q f(y + \nabla\varphi(x))dx$$

de unde

$$f(y) \leq \int_Q f(y + \nabla\varphi(x))dx.$$

Vom vedea în paragraful următor că aceasta este chiar relația care definește cvasi-convexitatea lui f .

2 Definiții

2.1 Definiție. Fie $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă; f este **cvasi-convexă** dacă $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - mulțime deschisă și mărginită, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$,

$$f(y) \leq \frac{1}{|\Omega|} \cdot \int_\Omega f(y + \nabla\varphi(x))dx.$$

În definiția precedentă $\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \dots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} \dots \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ este matricea jacobiană a funcției $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.

În propoziția următoare vom arăta că definiția cvasi-convexității nu depinde de alegerea domeniului Ω .

Fie $p^1, \dots, p^n \in \mathbb{R}^n$ fixați a.î. $\langle p^i, p^j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ și fie $Q = Q(p^1, \dots, p^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \langle x, p^i \rangle < 1, \forall i = 1, \dots, n\}$. Q este hipercubul de latură 1 care se sprijină pe versorii p^1, \dots, p^n .

2.2 Propoziție. Funcția continuă $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ este cvasi-convexă dacă și numai dacă, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \varphi \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$,

$$f(y) \leq \int_Q f(y + \nabla\varphi(x))dx.$$

Demonstrație. Necesitatea este evidentă.

Să demonstrăm suficiența; fie $y \in \mathbb{R}^{m \times n}$, fie Ω o mulțime deschisă și mărginită în \mathbb{R}^n și fie $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Considerăm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ și $r > 0$ a.î. $S(x^0, r) \supseteq \Omega$ și fie $y^0 = -r \cdot \sum_{j=1}^n p^j \in \mathbb{R}^n$; atunci

$$\Omega \subseteq x^0 + y^0 + 2r \cdot Q \equiv Q_1.$$

Intr-adevăr, dacă $x \in \Omega \subseteq S(x^0, r)$, $\|x - x^0\| < r$ și deci, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left\langle \frac{1}{2r} \cdot (x - x^0 - y^0), p^i \right\rangle = \frac{1}{2r} \cdot \langle x - x^0, p^i \rangle - \frac{1}{2r} \cdot \langle y^0, p^i \rangle = \frac{1}{2r} \cdot \langle x - x^0, p^i \rangle + \frac{1}{2}.$$

$$|\langle x - x^0, p^i \rangle| \leq \|x - x^0\| < r \Rightarrow -r < \langle x - x^0, p^i \rangle < r \Rightarrow$$

$$0 = -r \cdot \frac{1}{2r} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2r} \cdot \langle x - x^0, p^i \rangle + \frac{1}{2} < r \cdot \frac{1}{2r} + \frac{1}{2} = 1.$$

Rezultă că $\frac{1}{2r} \cdot (x - x^0 - y^0) \in Q$, de unde $x \in x^0 + y^0 + 2r \cdot Q \equiv Q_1$.

Prelungim pe φ pe Q_1 dându-i valoarea 0 în afara lui Ω și notăm prelungirea tot cu φ ; evident $\varphi \in C_0^\infty(Q_1, \mathbb{R}^m)$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(y + \nabla \varphi(x)) dx &= \int_{Q_1} f(y + \nabla \varphi(x)) dx - \int_{Q_1 \setminus \Omega} f(y) dx = \\ &= \int_{Q_1} f(y + \nabla \varphi(x)) dx - f(y) \cdot |Q_1 \setminus \Omega|. \end{aligned}$$

Facem schimbarea de variabilă $x = x^0 + y^0 + 2r \cdot t$; atunci

$$x \in Q_1 \iff t = \frac{1}{2r} \cdot (x - x^0 - y^0) \in Q$$

și deci

$$\int_{\Omega} f(y + \nabla \varphi(x)) dx = (2r)^n \cdot \int_Q f(y + (\nabla \varphi)(x^0 + y^0 + 2rt)) dt - f(y) \cdot |Q_1 \setminus \Omega|.$$

Fie $\psi(t) = \frac{1}{2r} \cdot \varphi(x^0 + y^0 + 2rt)$; $\text{supp} \psi = -\frac{1}{2r}(x^0 + y^0) + \frac{1}{2r} \cdot \text{supp} \varphi \subseteq Q$ este compact și evident $\psi \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$. În plus $\nabla \psi(t) = (\nabla \varphi)(x^0 + y^0 + 2rt)$ și astfel

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(y + \nabla \varphi(x)) dx &= (2r)^n \cdot \int_Q f(y + \nabla \psi(t)) dt - f(y) \cdot |Q_1 \setminus \Omega| \geq \\ &\geq |Q_1| \cdot f(y) - |Q_1 \setminus \Omega| \cdot f(y) = |\Omega| \cdot f(y). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

2.3 Observații. (i) Cubul Q din propoziția precedentă poate fi înlocuit cu un cub traslat în orice punct din \mathbb{R}^n . Deci dacă Q este un cub de latură 1 arbitrar din \mathbb{R}^n atunci funcția continuă $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ este cvasi-convexă dacă și numai dacă, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \varphi \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$,

$$f(y) \leq \int_Q f(y + \nabla \varphi(x)) dx.$$

(ii) Dacă în propoziția precedentă p^1, \dots, p^n sunt versorii e^1, \dots, e^n ai bazei canonice din \mathbb{R}^n atunci $Q = (0, 1)^n$.

(iii) Fie $p^1 = \{p_1^1, \dots, p_n^1\}, \dots, p^n = \{p_1^n, \dots, p_n^n\}$, n versori ortogonali doi câte doi din \mathbb{R}^n și $Q(p^1, \dots, p^n)$ cubul care se sprijină pe ei; notăm cu $P = \begin{pmatrix} p_1^1 \cdots p_n^1 \\ \cdots \\ p_1^n \cdots p_n^n \end{pmatrix}$ și cu $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicația definită prin $T(x) = P \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

T este o transformare liniară de schimbare a bazei în \mathbb{R}^n ; $\forall i = 1, \dots, n, T(p^i) = e^i$ și $T(Q(p^1, \dots, p^n)) = (0, 1)^n = Q$.

$\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \varphi \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^m), \varphi \circ T \in C_0^\infty(Q(p^1, \dots, p^n), \mathbb{R}^m)$ (T este homeomorfism și deci $\text{supp}(\varphi \circ T) = T^{-1}(\text{supp} \varphi)$ este o mulțime compactă în $Q(p^1, \dots, p^n)$); atunci $y \cdot P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ și deci

$$\begin{aligned} f(y \cdot P) &\leq \int_{Q(p^1, \dots, p^n)} f(y \cdot P + \nabla(\varphi \circ T)(x)) dx = \\ &= \int_Q f(y \cdot P + \nabla \varphi(z) \cdot P) dz = \int_Q f[(y + \nabla \varphi(z)) \cdot P] dz. \end{aligned}$$

Rezultă că, dacă f este cvasi-convexă atunci și $f(\cdot T)$ este cvasi-convexă.

Putem acum să demonstrăm că orice funcție convexă este cvasi-convexă.

2.4 Propoziție. Orice funcție continuă $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ convexă este cvasi-convexă.

Demonstrație. Fie $Q = (0, 1)^n$; $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \varphi \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$ aplicînd inegalitatea lui Jensen obținem

$$f\left(\int_Q (y + \nabla \varphi(x)) dx\right) \leq \int_Q f(y + \nabla \varphi(x)) dx.$$

Pe de altă parte

$$\begin{aligned} \int_Q (y + \nabla\varphi(x))dx &= y + \left(\int_Q \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)dx \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \\ &= y + \left(\int_{(0,1)^{n-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)dx_i \right) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = y. \end{aligned}$$

Propoziția 2.2 ne asigură că f este cvasi-convexă. ■

Reciproca propoziției 2.4 nu este adevărată.

2.5 Exemplu. Fie funcția $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \det(x)$, adică, dacă $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ atunci $f(x) = x_1x_4 - x_2x_3$.

$$|f(y) - f(z)| \leq (\|y\| + \|z\|) \cdot \|y - z\|, \forall y, z \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

deci f este continuă.

Fie $Q = (0, 1)^2 = (0, 1) \times (0, 1)$ și fie $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^2)$; $\nabla\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$; atunci, $\forall y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$\begin{aligned} f(y + \nabla\varphi(x)) &= \left(y_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) \right) \cdot \left(y_4 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) \right) - \\ &- \left(y_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) \right) \cdot \left(y_3 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) \right) = f(y) + y_4 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) + y_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) - \\ &- y_3 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) - y_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x). \\ \int_Q \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x)dx &= \int_Q \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x)dx = \int_Q \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x)dx = \int_Q \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x)dx = 0 \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} \int_Q \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x) - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x) \cdot \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) \right) dx &= \\ = - \int_Q \varphi_1(x) \cdot \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}(x)dx + \int_Q \varphi_1(x) \cdot \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_1\partial x_2}(x)dx &= 0. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$\int_Q f(y + \nabla\varphi(x))dx = f(y)$$

și conform propoziției 2.2 f este cvasi-convexă.

Funcția f nu este convexă; într-adevăr, dacă $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ atunci $f(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z) = \frac{1}{4} > 0 = \frac{1}{2}f(y) + \frac{1}{2}f(z)$.

În cele ce urmează vom lărgi clasa funcțiilor admisibile φ din definiția cvasi-convexității.

2.6 Teoremă. *Funcția continuă $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ este cvasi-convexă dacă și numai dacă, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - mulțime deschisă și mărginită, $\forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$,*

$$f(y) \leq \frac{1}{|\Omega|} \cdot \int_{\Omega} f(y + \nabla\varphi(x))dx.$$

Demonstrație.

Suficiența este consecința incluziunii $C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) \subseteq W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Necesitatea. Să reamintim procedura standard de aproximare.

Fie $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \rho \geq 0, \rho(-x) = \rho(x), \text{supp}\rho \subseteq B_1, \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$ și, $\forall \varepsilon > 0, \rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \cdot \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. $\forall u \in L^1(\Omega)$ prelungim u la \mathbb{R}^n cu valoarea 0 și notăm prelungirea tot cu u .

Fie $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon, u_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \cdot \rho_\varepsilon(x - y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x - \varepsilon y) \cdot \rho(y)dy$.

Atunci $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ și $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1} u$ iar $\nabla_i u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} u(x - \varepsilon y) \nabla_i \rho(y)dy$.

Oricare ar fi $u \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m), \nabla_i u_\varepsilon = u * \nabla_i \rho_\varepsilon = \nabla_i u * \rho_\varepsilon$. $\forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m), \nabla\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$ și deci $(\nabla\varphi)_\varepsilon \xrightarrow{L^1} \nabla\varphi \left(\nabla\varphi = (\nabla_i \varphi^j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \right)$.

Rezultă că $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și $\text{supp}\varphi_\varepsilon \subseteq \text{supp}\varphi + B_\varepsilon$ este compact; $\text{supp}\varphi = K \subseteq \Omega$, deci există $\varepsilon_0 > 0$ a.î. $K^\varepsilon = \text{supp}\varphi + B_\varepsilon \subseteq \Omega, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$ și deci $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Din ipoteză, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0,$

$$(*) \quad f(y) \leq \frac{1}{|\Omega|} \cdot \int f(y + \nabla\varphi_\varepsilon(x))dx.$$

Dar $\nabla\varphi_\varepsilon = (\nabla\varphi)_\varepsilon$; într-adevăr, $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$

$$(\nabla_i \varphi^j)_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla_i \varphi^j)(y) \cdot \rho_\varepsilon(x - y)dy = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^j(y) \cdot \nabla_i(\rho_\varepsilon(x - y))dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^j(y) \cdot (\nabla_i \rho_\varepsilon)(x-y) dy = \nabla_i(\varphi_\varepsilon^i)(x).$$

Deci $\nabla \varphi_\varepsilon = (\nabla \varphi)_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla \varphi$ și astfel există un subșir al lui $(\nabla \varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ convergent a.p.t. la $\nabla \varphi$. Pe de altă parte $\nabla \varphi_\varepsilon$ este continuă cu suport compact în Ω ; rezultă că există $M > 0$ a.î. $\|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \leq M$. Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}^{m \times n}$, f este mărginită pe $B(y, M)$ și atunci putem aplica teorema lui Lebesgue

$$\int_{\Omega} f(y + \nabla \varphi_\varepsilon(x)) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(y + \nabla \varphi(x)) dx.$$

Rezultă atunci din (*)

$$f(y) \leq \frac{1}{|\Omega|} \cdot \int_{\Omega} f(y + \nabla \varphi(x)) dx. \quad \blacksquare$$

2.7 Exemplu. În teorema precedentă nu putem relaxa condiția $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ la condiția $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Într-adevăr, așa cum am observat în exemplul 2.5, funcția $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \det(x)$ este cvsi-convexă. Fie $Q = (0, 1) \times (0, 1)$ și $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită prin $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$, $\forall (x_1, x_2) \in Q$. Atunci $\varphi \in L^\infty(Q, \mathbb{R}^2)$ iar $\nabla \varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; deci $\nabla \varphi \in L^\infty(Q, \mathbb{R}^{2 \times 2})$, de unde $\varphi \in W^{1,\infty}(Q, \mathbb{R}^2)$.

Totuși, dacă $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, atunci

$$0 = f(y) > \int_Q f(y + \nabla \varphi(x)) dx = - \int_0^1 2x_1 dx_1 = -1.$$

Putem însă extinde caracterizarea din teorema 2.6 la clasa funcțiilor periodice din $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Fie $Q = (0, 1)^n$; funcția $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ este Q -periodică dacă, $\forall i = 1, \dots, n, \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, funcția de o variabilă g definită prin $g(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ este periodică cu perioada 1.

2.8 Teoremă. Fie $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă; f este cvasi-convexă dacă și numai dacă, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, φ funcție Q -periodică,

$$f(y) \leq \int_Q f(y + \nabla \varphi(x)) dx.$$

Demonstrație. Suficiența urmează din faptul că orice funcție $\varphi \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R}^m)$ poate fi extinsă la o funcție Q -periodică din $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Necesitatea. Presupunem că f este cvasi-convexă, $y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ și $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este o funcție Q -periodică; definim $\varphi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ prin $\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \cdot \varphi(kx)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Atunci $\varphi_k \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ și $\|\varphi_k\|_{L^\infty} = \frac{1}{k} \cdot \|\varphi\|_{L^\infty}$ iar $\|\nabla \varphi_k\|_{L^\infty} = \|\nabla \varphi\|_{L^\infty}$.

Fie $Q_p = \{x \in Q : d(x, \text{Fr}Q) > \frac{1}{p}\}$; $|Q \setminus Q_p| \rightarrow 0$.

Fie $\psi_p \in C_0^\infty(Q, \mathbb{R})$ a.î. $0 \leq \psi_p \leq 1$ iar $\psi_p|_{Q_p} = 1$ și fie $M_p = \|\nabla \psi_p\|_{L^\infty} < +\infty$. Există un subsir al șirului $(\varphi_k)_k, (\varphi_{k_p})_p$ a.î. $\|\varphi_{k_p}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{M_p+1}, \forall p \in \mathbb{N}$. Putem alege acest subsir a.î.

$$\liminf_k \int_Q f(y + \nabla \varphi_k(x)) dx = \lim_p \int_Q f(y + \nabla \varphi_{k_p}(x)) dx.$$

Definim $\theta_p = \psi_p \cdot \varphi_{k_p} \in W_0^{1,\infty}(Q, \mathbb{R}^m)$. Deoarece f este cvasi-convexă,

$$\begin{aligned} f(y) &\leq \int_Q f(y + \nabla \theta_p(x)) dx = \int_{Q_p} f(y + \nabla \theta_p(x)) dx + \int_{Q \setminus Q_p} f(y + \nabla \theta_p(x)) dx = \\ &= \int_{Q_p} f(y + \nabla \varphi_{k_p}(x)) dx + \int_{Q \setminus Q_p} f(y + \psi_p(x) \cdot \nabla \varphi_{k_p}(x) + \varphi_{k_p}(x) \otimes \nabla \psi_p(x)) dx = \\ &= \int_Q f(y + \nabla \varphi_{k_p}(x)) dx + \varepsilon_p, \end{aligned}$$

unde $\varepsilon_p =$

$$= \int_{Q \setminus Q_p} [f(y + \psi_p(x) \cdot \nabla \varphi_{k_p}(x) + \varphi_{k_p}(x) \otimes \nabla \psi_p(x)) - f(y + \nabla \varphi_{k_p}(x))] dx.$$

$$\|\psi_p(x) \cdot \nabla \varphi_{k_p}(x)\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \leq \|\nabla \varphi_{k_p}(x)\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \leq \|\nabla \varphi_{k_p}\|_{L^\infty} \leq \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} < +\infty.$$

$$\|\varphi_{k_p}(x) \otimes \nabla \psi_p(x)\|_{\mathbb{R}^{m \times n}} \leq \|\varphi_{k_p}(x)\|_{\mathbb{R}^m} \cdot \|\nabla \psi_p(x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\varphi_{k_p}\|_{L^\infty} \cdot \|\nabla \psi_p\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq \frac{M_p}{M_p + 1} < 1.$$

Din inegalitățile de mai sus rezultă că, atunci când x parcurge $Q \setminus Q_p$, $y + \psi_p(x) \cdot \nabla \varphi_{k_p}(x) + \varphi_{k_p}(x) \otimes \nabla \psi_p(x)$ parcurge mulțimea mărginită independentă de p , $y + B(0, \|\nabla \varphi\|_{L^\infty}) + B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$; de asemenea $y + \nabla \varphi_{k_p}(x)$ parcurge

$y + B(\underline{0}, \|\nabla\varphi\|_{L^\infty})$. Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}^{m \times n}$, f conservă mulțimile mărginite; fie deci $M = \sup_{x \in Q \setminus Q_p} \|f(y + \psi_p(x) \cdot \nabla\varphi_{k_p}(x) + \varphi_{k_p}(x) \otimes \nabla\psi_p(x))\|$; atunci $|\varepsilon_p| \leq 2M \cdot |Q \setminus Q_p| \rightarrow 0$ și deci

$$(1) \quad f(y) \leq \lim_p \left[\int_Q f(y + \nabla\varphi_{k_p}(x)) dx + \varepsilon_p \right] = \lim_p \int_Q f(y + \nabla\varphi_{k_p}(x)) dx + \lim_p \varepsilon_p = \liminf_k \int_Q f(y + \nabla\varphi_k(x)) dx.$$

Acum

$$\int_Q f(y + \nabla\varphi_k(x)) dx = \int_Q f(y + (\nabla\varphi)(kx)) dx \stackrel{(x=\frac{1}{k}z)}{=} \frac{1}{k^n} \cdot \int_{kQ} f(y + \nabla\varphi(z)) dz.$$

Dar $kQ \doteq \cup_{j=1}^{k^n} (x_j + Q)$, unde x_j este colțul din stînga jos al fiecărui sub-cub de latură 1 obținut prin divizarea cubului kQ (\doteq deoarece neglijăm fețele acestor sub-cuburi).

Deoarece $\nabla\varphi$ este Q -periodică

$$\int_Q f(y + \nabla\varphi_k(x)) dx = \frac{1}{k^n} \cdot k^n \cdot \int_Q f(y + \nabla\varphi(x)) dx$$

și deci

$$(2) \quad \liminf_k \int_Q f(y + \nabla\varphi_k(x)) dx = \int_Q f(y + \nabla\varphi(x)) dx.$$

Din (1) și (2) rezultă

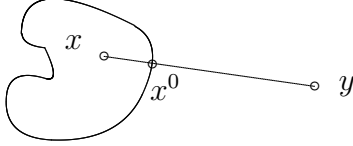
$$f(y) \leq \int_Q f(y + \nabla\varphi(x)) dx. \quad \blacksquare$$

2.9 Observație. Folosind observația 2.3, (iii) putem înlocui cubul $Q = (0, 1)^n$ din teorema precedentă cu un cub $Q(p^1, \dots, p^n)$ sprijinit pe versorii ortogonali doi câte doi $p^1, \dots, p^n \in \mathbb{R}^n$.

În cele ce urmează pregătim terenul pentru a caracteriza funcțiile cvasi-convexe prin intermediul funcțiilor lipschitziene ce se anulează pe frontieră.

2.10 Lemă. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și mărginită; $\forall x \in \bar{\Omega}, \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, d(x, y) \geq d(x, \text{Fr}\Omega)$.

Demonstrație. Presupunem, prin reducere la absurd, că există $x \in \bar{\Omega}$, există $y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ a.î. $d(x, y) < d(x, \text{Fr}\Omega)$; atunci $x \in \Omega$ deoarece, în cazul în care am presupune că $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega = \text{Fr}\Omega$, $d(x, y) < d(x, \text{Fr}\Omega) = 0$.



Fie $t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : (1-t)x + ty \in \Omega\}$ și $x^0 = (1-t_0)x + t_0y$; atunci există $t_n \uparrow t_0$ a.î.

$(1-t_n)x + t_ny \in \Omega$ de unde $x^0 \in \bar{\Omega}$.

Dacă am presupune că $x^0 \in \Omega$ atunci ar exista $r > 0$ a.î. $B(x^0, r) \subseteq \Omega$. Fie, în această situație,

$t_1 = t_0 + \frac{r}{\|x-y\|} > t_0$ și $x^1 = (1-t_1)x + t_1y = x^0 + \frac{r}{\|x-y\|} \cdot (y-x)$; atunci $\|x^1 - x^0\| = \frac{r}{\|x-y\|} \cdot \|y-x\| = r$ și deci $x^1 \in B(x^0, r) \subseteq \Omega$ ceea ce este absurd deoarece $t_1 > t_0$.

Rezultă că $x^0 \in \bar{\Omega} \setminus \Omega = \text{Fr}\Omega$ și atunci $d(x, y) = \|x-y\| < d(x, \text{Fr}\Omega) \leq d(x, x^0) = t_0 \cdot \|x-y\|$, de unde $t_0 > 1$! Astfel ipoteza făcută este falsă. ■

2.11 Lemă. Fie $\varphi \in \text{Lip}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ a.î. $\varphi|_{\text{Fr}\Omega} = 0$ și fie $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și mărginită cu $\bar{\Omega} \subseteq \Omega_1$; prelungim φ la Ω_1 dându-i valoarea 0 pe $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$.

Atunci $\varphi \in \text{Lip}(\Omega_1, \mathbb{R}^m)$ și

$$L(\varphi, \Omega_1) = L(\varphi, \bar{\Omega}) = \sup \left\{ \frac{\|\varphi(x) - \varphi(y)\|}{\|x-y\|} : x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y \right\}.$$

Demonstrație. Fie $x, y \in \Omega_1$ arbitrari;

- 1). Dacă $x, y \in \bar{\Omega}$ atunci $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L(\varphi, \bar{\Omega}) \cdot \|x-y\|$.
- 2). Dacă $x \in \bar{\Omega}, y \in \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$ atunci, $\forall z \in \text{Fr}\Omega$,

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \varphi(z)\| \leq L(\varphi, \bar{\Omega}) \cdot \|x-z\|,$$

de unde, folosind lema 2.10,

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L(\varphi, \bar{\Omega}) \cdot d(x, \text{Fr}\Omega) \leq L(\varphi, \bar{\Omega}) \cdot \|x-y\|.$$

- 3). Dacă $x, y \in \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$, $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = 0 \leq L(\varphi, \bar{\Omega}) \cdot \|x-y\|$.

În toate cazurile $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L(\varphi, \bar{\Omega}) \cdot \|x-y\|$; deci φ este lipschitziană iar $L(\varphi, \Omega_1) = L(\varphi, \bar{\Omega})$. ■

Următoarea caracterizare a cvasi-convexității este folosită ca definiție în [Mo1] (definiția 2.2).

2.12 Teoremă. Funcția continuă $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ este cvasi-convexă dacă și numai dacă, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - mulțime deschisă și mărginită, $\forall \varphi \in \text{Lip}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ cu $\varphi|_{\text{Fr}\Omega} = 0$,

$$f(y) \leq \frac{1}{|\bar{\Omega}|} \cdot \int_{\bar{\Omega}} f(y + \nabla \varphi(x)) dx.$$

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că f este cvasi-convexă și fie $y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - deschis și mărginit și $\varphi \in \text{Lip}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ cu $\varphi|_{\text{Fr}\Omega} = 0$.

Fie $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și mărginită a.î. $\bar{\Omega} \subseteq \Omega_1$; prelungim φ la Ω_1 dându-i valoarea 0 pe $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$. Lema 2.11 ne asigură că $\varphi \in \text{Lip}(\Omega_1, \mathbb{R}^m)$; atunci φ este uniform continuă pe Ω_1 și deci este mărginită (φ este mărginită pe $\bar{\Omega}$!). Rezultă că $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ și, cum $\text{supp}\varphi \subseteq \bar{\Omega}$ care este compact, $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Datorită teoremei 2.6

$$f(y) \leq \frac{1}{|\Omega_1|} \cdot \int_{\Omega_1} f(y + \nabla \varphi(x)) dx = \frac{1}{|\Omega_1|} \cdot f(y) \cdot |\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}| + \frac{1}{|\Omega_1|} \cdot \int_{\bar{\Omega}} f(y + \nabla \varphi(x)) dx$$

de unde

$$\frac{|\bar{\Omega}|}{|\Omega_1|} \cdot f(y) \leq \frac{1}{|\Omega_1|} \cdot \int_{\bar{\Omega}} f(y + \nabla \varphi(x)) dx.$$

Suficiența. Fie $y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și mărginită și $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$; considerăm $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă, mărginită și convexă a.î. $\bar{\Omega} \subseteq \Omega_1$ și prelungim φ și $\nabla \varphi$ cu valoarea 0 pe $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}$; atunci $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega_1, \mathbb{R}^m)$. Într-adevăr, deoarece $\text{supp}\varphi = K \subseteq \Omega$ este compact, există un deschis G a.î. $K \subseteq G \subseteq \bar{G} \subseteq \Omega$, \bar{G} este compact și există $\psi_0 \in C_0^\infty(\Omega_1, \mathbb{R}), 0 \leq \psi_0 \leq 1$ a.î. $\psi_0|_{\bar{G}} = 1$ și $\psi_0|_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0$; $\text{supp}\psi_0 \subseteq \bar{\Omega}$, $\nabla \psi_0|_K = 0$ și $\nabla \varphi|_{\Omega \setminus G} = 0$.

Atunci, $\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_1, \mathbb{R})$ și $\forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$,

$$(1) \begin{cases} \int_{\Omega_1} \varphi_j(x) \cdot \nabla_i \psi(x) dx = \int_K \varphi_j(x) \cdot \nabla_i \psi(x) dx = \\ = \int_K \varphi_j(x) \cdot \psi_0(x) \cdot \nabla_i \psi(x) dx = \int_K \varphi_j(x) \cdot \nabla_i (\psi \cdot \psi_0)(x) dx - \\ - \int_K \varphi_j(x) \cdot \psi(x) \cdot \nabla_i \psi_0(x) dx = \int_{\bar{\Omega}} \varphi_j(x) \cdot \nabla_i (\psi \cdot \psi_0)(x) dx. \end{cases}$$

Deoarece $\psi \cdot \psi_0 \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$,

$$(2) \begin{cases} \int_{\bar{\Omega}} \varphi_j(x) \cdot \nabla_i (\psi \cdot \psi_0)(x) dx = - \int_{\bar{\Omega}} \nabla_i \varphi_j(x) \cdot \psi(x) \cdot \psi_0(x) dx = \\ = - \int_G \nabla_i \varphi_j(x) \cdot \psi(x) \cdot \psi_0(x) dx = - \int_G \nabla_i \varphi_j(x) \cdot \psi(x) dx = \\ = - \int_{\Omega_1} \nabla_i \varphi_j(x) \cdot \psi(x) dx. \end{cases}$$

Din (1) și (2) rezultă că, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}, \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega_1, \mathbb{R})$,

$$\int_{\Omega_1} \varphi_j(x) \cdot \nabla_i \psi(x) dx = - \int_{\Omega_1} \nabla_i \varphi_j(x) \cdot \psi(x) dx$$

(am prelungit $\nabla\varphi$ prin $\nabla_i\varphi_j(x) = 0, \forall x \in \Omega_1 \setminus \Omega$).

De aici rezultă că $\nabla_i\varphi_j$ este i - derivata slabă a lui φ_j pe Ω_1 ; deci $\nabla\varphi$ este gradientul slab al lui φ pe Ω_1 .

Este evident că $\varphi, \nabla\varphi \in L^\infty(\Omega_1, \mathbb{R}^m)$ și deci $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega_1, \mathbb{R}^m)$.

Deoarece Ω_1 este convex, $\varphi \in \text{Lip}(\Omega_1, \mathbb{R}^m)$ de unde $\varphi \in \text{Lip}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$ și $\varphi|_{\text{Fr}\Omega} = 0$.

De fapt am demonstrat că $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m) \implies \varphi \in \text{Lip}(\Omega_1, \mathbb{R}^m)$.

Din ipoteză rezultă că

$$f(y) \leq \frac{1}{|\bar{\Omega}|} \cdot \int_{\bar{\Omega}} f(y + \nabla\varphi(x)) dx = \frac{1}{|\bar{\Omega}|} \cdot \int_{\Omega} f(y + \nabla\varphi(x)) dx + \frac{1}{|\bar{\Omega}|} \cdot f(y) \cdot |\bar{\Omega} \setminus \Omega|,$$

de unde

$$f(y) \leq \frac{1}{|\Omega|} \cdot \int_{\Omega} f(y + \nabla\varphi(x)) dx.$$

Teorema 2.6 ne asigură că f este cvasi-convexă. ■

În continuare vom introduce o noțiune mai generală decît cvasi-convexitatea, noțiune care are însă avantajul de a se exprima într-un limbaj mai apropiat de cel al convexității.

2.13 Definiție. Funcția $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ este ”rank-one” convexă dacă funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f(y + t(a \otimes b))$, este convexă, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall a \in \mathbb{R}^m, \forall b \in \mathbb{R}^n$ unde $a \otimes b$ este matricea de rang unu

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \cdot (b_1 \cdots b_n) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \cdots a_1 b_n \\ \dots \\ a_m b_1 \cdots a_m b_n \end{pmatrix}_{m \times n} = a^T \cdot b.$$

Dacă $f \in C^2(\mathbb{R}^{m \times n})$ atunci f este ”rank-one” convexă dacă și numai dacă, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall a \in \mathbb{R}^m, \forall b \in \mathbb{R}^n$,

$$(a \otimes b)^T \cdot d^2 f(y)(a \otimes b) \geq 0.$$

2.14 Propoziție. Funcția $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ este ”rank-one” convexă dacă și numai dacă, $\forall \lambda \in [0, 1], \forall y, z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ cu $y - z = a \otimes b$,

$$f((1 - \lambda)y + \lambda z) \leq (1 - \lambda)f(y) + \lambda f(z).$$

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că funcția f este "rank-one" convexă și fie $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$ și $y, z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a.î. $y - z = a \otimes b$. Funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f(z + t(a \otimes b)), \forall t \in \mathbb{R}$, este convexă și deci, $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$g((1 - \lambda) \cdot 1 + \lambda \cdot 0) \leq (1 - \lambda) \cdot g(1) + \lambda \cdot g(0)$$

care se rescrie

$$f(z + (1 - \lambda) \cdot (a \otimes b)) \leq (1 - \lambda) \cdot f(z + a \otimes b) + \lambda \cdot f(z)$$

sau

$$f((1 - \lambda)y + \lambda z) \leq (1 - \lambda) \cdot f(y) + \lambda \cdot f(z).$$

Suficiența. $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall a \in \mathbb{R}^m, \forall b \in \mathbb{R}^n$, definim $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $g(t) = f(y + t(a \otimes b)), \forall t \in \mathbb{R}$.

$\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1]$ fie $z = y + t(a \otimes b), w = y + s(a \otimes b)$; atunci $z - w = (t - s) \cdot (a \otimes b) = [(t - s)a] \otimes b$ și deci

$$f((1 - \lambda)z + \lambda w) \leq (1 - \lambda) \cdot f(z) + \lambda \cdot f(w),$$

de unde

$$\begin{aligned} g((1 - \lambda)z + \lambda w) &= f(y + (1 - \lambda)t(a \otimes b) + \lambda s(a \otimes b)) = f((1 - \lambda)z + \lambda w) \leq \\ &\leq (1 - \lambda) \cdot f(y + t(a \otimes b)) + \lambda f(y + s(a \otimes b)) = (1 - \lambda) \cdot g(t) + \lambda \cdot g(s). \end{aligned}$$

Deci funcția g este convexă și deci f este "rank-one" convexă ■

În finalul acestei secțiuni vom analiza relațiile dintre cele trei tipuri de convexitate: convexitatea clasică, cvasi-convexitatea și "rank-one" convexitatea.

2.15 Teoremă. Fie funcția continuă $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$; considerăm aserțiunile:

- (i) f este convexă;
- (ii) f este cvasi-convexă;
- (iii) f este "rank-one" - convexă.

Atunci (i) \implies (ii) \implies (iii).

Dacă $m = 1$ sau $n = 1$ atunci cele trei afirmații sunt echivalente.

Demonstrație. Implicația (i) \implies (ii) a fost demonstrată în propoziția 2.4.

(ii) \implies (iii). Presupunem că f este cvasi-convexă și fie $y, z \in \mathbb{R}^{m \times n}$ cu $y - z = a \otimes b$, unde $a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$. Deoarece $a \otimes b = (\|b\| \cdot a) \otimes \left(\frac{1}{\|b\|} \cdot b\right)$ putem presupune că $\|b\| = 1$.

Alegem un sistem ortonormat de n versori $\{p^1, \dots, p^n\}$ cu $p^1 = b$ și fie Q hipercubul sprijinit pe acești versori.

Definim $\varphi : Q \rightarrow \mathbb{R}^m$ prin

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{\langle x, b \rangle} \chi(s) ds \right) \cdot a,$$

unde χ este o funcție periodică de perioadă 1 pe \mathbb{R} care ia valoarea 1 pe $[0, 1/2)$ și -1 pe $[1/2, 1]$.

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{\mathbb{R}^m} &= \frac{1}{2} \cdot \left| \int_0^{\langle x, b \rangle} \chi(s) ds - \int_0^{\langle y, b \rangle} \chi(s) ds \right| \cdot \|a\| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \int_{\langle y, b \rangle}^{\langle x, b \rangle} \chi(s) ds \right| \cdot \|a\| \leq \frac{1}{2} \cdot |\langle x - y, b \rangle| \cdot \|a\| \leq \frac{1}{2} \cdot \|a\| \cdot \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Rezultă că φ este lipschitziană și mărginită pe hipercubul Q ; atunci $\varphi \in W^{1, \infty}(Q, \mathbb{R}^m)$.

Fie $x = \alpha_1 p^1 + \dots + \alpha_n p^n$; $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{\alpha_1} \chi(s) ds \right) \cdot a$. Atunci, dacă $y = (\alpha_1 + 1)p^1 + \alpha_2 p^2 + \dots + \alpha_n p^n$, $\varphi(y) = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_0^{\alpha_1 + 1} \chi(s) ds \right) \cdot a = \varphi(x)$ și deci φ este Q -periodică.

Pe baza teoremei 2.8 și a observației 2.9,

$$f\left(\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot z\right) \leq \int_Q f\left(\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \nabla \varphi(x)\right) dx \text{ iar}$$

$$\nabla \varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot \chi(\langle x, b \rangle) \cdot (a \otimes b).$$

Fie $Q_1 = \{x : 0 < \langle x, b \rangle < \frac{1}{2}\}$ și $Q_2 = \{x : \frac{1}{2} < \langle x, b \rangle < 1\}$; atunci $Q \doteq Q_1 \cup Q_2$ (egalitatea are loc cu excepția unei mulțimi de măsură nulă) și

$$\nabla\varphi|_{Q_1} = \frac{1}{2}(a \otimes b), \nabla\varphi|_{Q_2} = -\frac{1}{2}(a \otimes b).$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot z\right) &\leq \int_{Q_1} f\left(\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot z + \frac{1}{2} \cdot (a \otimes b)\right) dx + \\ &+ \int_{Q_2} f\left(\frac{1}{2} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot z - \frac{1}{2} \cdot (a \otimes b)\right) dx = \frac{1}{2} \cdot f(y) + \frac{1}{2} \cdot f(z). \end{aligned}$$

Deoarece f este continuă rezultă că

$$f((1 - \lambda)y + \lambda z) \leq (1 - \lambda)f(y) + \lambda f(z), \forall \lambda \in [0, 1]$$

și deci f este "rank-one" convexă.

Fie acum $m = 1$; atunci $a \otimes b = (ab_1 \cdots ab_n)_{1 \times n} = a \cdot b$. În acest caz, $\forall y, z \in \mathbb{R}^{1 \times n} = \mathbb{R}^n, y - z \in \mathbb{R}^n$ și este de forma $a \otimes b$ cu $a \in \mathbb{R}$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Conform propoziției 2.14 "rank-one" convexitatea este echivalentă în acest caz cu convexitatea.

În cazul $n = 1, a \otimes b = \begin{pmatrix} a_1 b \\ \vdots \\ a_m b \end{pmatrix}_{m \times 1} = b \cdot a$ și iarăși rezultă că, $\forall y, z \in \mathbb{R}^{m \times 1} = \mathbb{R}^m, y - z = 1 \cdot (y - z) = a \otimes b$. ■

2.16 Observație. În exemplul 2.5 am pus în evidență o funcție cvasi-convexă care nu este convexă. În 1952 Ch. Morrey a lansat conjectura în baza căreia "rank-one" convexitatea nu antrenează cvasi-convexitatea dacă $m, n \geq 2$.

Šverák a demonstrat în 1992 că afirmația lui Morrey este adevărată dacă $m \geq 3$ și $n \geq 2$. Cazul $m = 2, n \geq 2$ rămîne deschis.

3 Inferioară semi-continuitate

Vom începe cu o teoremă de tip Jensen. Pentru noțiunile și rezultatele care se referă la măsurile Young se poate consulta [CRV]. Unele rezultate sunt preluate din monografia în curs de apariție [FG2].

3.1 Teoremă. ([Kal]) *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și mărginită, $1 \leq p < +\infty, (u^j) \subseteq W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m), u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ astfel încît $u^j \xrightarrow{W^{1,p}} u$.*

Atunci există o măsură Young $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}$ astfel încât $\nabla u(t) = \int_{\mathbb{R}^{m \times n}} y d\tau_t(y)$ a.p.t. $t \in \Omega$.

Oricare ar fi un integrant Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1. $|f(t, y)| \leq g(t) \cdot (1 + \|y\|^p)$, a.p.t. $t \in \Omega$, $\forall y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (unde g este o funcție pozitivă măsurabilă pe Ω);

2. $f(t, \cdot)$ este cvasi-convexă a.p.t. $t \in \Omega$,
are loc, a.p.t. $t \in \Omega$,

$$f\left(t, \int_{\mathbb{R}^{m \times n}} y d\tau_t(y)\right) \leq \int_{\mathbb{R}^{m \times n}} f(t, y) d\tau_t(y).$$

Pe baza teoremei precedente se poate demonstra cu ușurință teorema formulată în introducere.

În cele ce urmează ne propunem să lărgim cadrul în care putem obține rezultate de tipul celui din teorema 1.1.

În [F11] am introdus proprietatea unei mulțimi de funcții măsurabile de a fi Jordan asimptotic mărginită.

Un interval n -dimensional $I \subseteq \mathbb{R}^n$ este un produs de intervale închise și mărginite din \mathbb{R} : $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$. O mulțime elementară E este o reuniune finită de intervale n -dimensionale care au în comun doar mulțimi de măsură Lebesgue nulă, deci $E = \cup_{k=1}^p I_k$ și $|I_k \cap I_l| = 0$ pentru orice $k, l \in \{1, \dots, p\}$ cu $k \neq l$.

Vom nota cu \mathcal{E} familia mulțimilor elementare; \mathcal{E} este un inel care generează σ -algebra mulțimilor Borel pe \mathbb{R}^n .

Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime măsurabilă Lebesgue și mărginită, fie \mathcal{A} familia submulțimilor măsurabile Lebesgue ale lui Ω .

3.2 Definiție. O mulțime $H \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ este **Jordan asimptotic mărginită** dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k > 0$ și o subfamilie finită $\mathcal{E}_f \subseteq \mathcal{E}$ cu $|E| < \varepsilon$, pentru orice $E \in \mathcal{E}_f$, așa fel încât, pentru orice $u \in H$, există $E_u \in \mathcal{E}_f$ cu $\{t \in \Omega : \|u(t)\| > k\} \subseteq E_u$.

Un șir $(u_i)_i \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ este **Jordan asimptotic mărginit** dacă mulțimea $H = \{u_i : i \in \mathbb{N}\}$ este Jordan asimptotic mărginită.

Următoarele două rezultate au fost demonstrate în [F11] (propoziția 3.10 și teorema 3.12).

3.3 Propoziție. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită deschisă și convexă și fie $H \subseteq W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ o mulțime asimptotic mărginită (tight).

Dacă, pentru orice $u \in H$, există un gradient ∇u așa fel încât $\nabla H = \{\nabla u : u \in H\} \subseteq L^1(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$ este Jordan asimptotic mărginită, atunci H este de asemenea Jordan asimptotic mărginită.

3.4 Teoremă. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită deschisă și convexă și fie $H \subseteq W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ o mulțime asimptotic mărginită astfel încât să existe ∇H - Jordan asimptotic mărginită; atunci H este relativ compactă în topologia convergenței în măsură pe $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Pe baza rezultatelor anterioare putem formula teorema următoare care este o replică a teoremei 1.1 formulate în introducere.

3.5 Teoremă. Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă mărginită și convexă, $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \cap C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ un șir asimptotic mărginit (tight) pentru care șirul gradientilor $(\nabla u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ este Jordan asimptotic mărginit; atunci există o funcție măsurabilă $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ și o măsură Young $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$ astfel încât (u_i) admite un subșir convergent în măsură și w^2 la u , a.p.t. $t \in \Omega$, τ_t admite un baricentru $\text{bar}\tau_t = \int_{\mathbb{R}^{m \times n}} y d\tau_t(y)$ iar funcția $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ definită prin $v(t) = \text{bar}\tau_t$ este măsurabilă.

Fie acum $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ un integrant Carathéodory mărginit inferior; atunci

$$\int_{\Omega \times \mathbb{R}^{m \times n}} f(t, u(t), y) d\mathcal{T}(t, y) \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(t, u_i(t), \nabla u_i(t)) dt.$$

Dacă f este în plus și cvasi-convexă în raport cu variabila gradient atunci

$$\int_{\Omega} f(t, u(t), v(t)) dt \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(t, u_i(t), \nabla u_i(t)) dt.$$

În cazul particular în care $(\nabla u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ este un șir uniform integrabil în $L^1(\Omega, \mathbb{R}^{m \times n})$ atunci, a.p.t. $t \in \Omega$, $v(t) = \nabla u(t)$ și deci

$$\int_{\Omega} f(t, u(t), \nabla u(t)) dt \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(t, u_i(t), \nabla u_i(t)) dt.$$

Bibliografie

- [AcF] Acerbi, E., Fusco, N. – *Semicontinuity problems in the calculus of variations*, Arch. Rational Mech. Anal. 86 (1984), 125–145.
- [Bia] Bianconi, B. – *A new proof of semicontinuity by Young measures and an approximation theorem in Orlicz-Sobolev spaces*, Abstract and Applied Analysis 15 (2003), 881–898.
- [CRV] Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. and Valadier, M. – *Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory*, Kluwer Academic Publ. Dordrecht.Boston.London, 2004.
- [Eva] Evans, L.C. – *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, A.M.S., Providence, Rhode Island, CBMS 74 (1990).
- [FG1] Florescu, L.C., Godet-Thobie, C. – *A version of biting lemma for unbounded sequences in L^1 with applications*, Mathematical Analysis and Applications, AIP Conference Proceedings, New York, 835 (2006), 58–73.
- [FG2] Florescu, L.C., Godet-Thobie, C. – *Compacité dans l'espace de mesures et mesures de Young* (în curs de apariție).
- [Fl1] Florescu, L.C. – *Finite-tight sets*, CEJM 5(2007), 619–638.
- [Fl2] Florescu, L.C. – *Existence results in relaxed variational calculus*, Analele Universității de Vest, Timișoara, Seria Matematică-Informatică, XLV, 1 (2007), 231–244.
- [Kal] Kałmajska, A. – *On lower semicontinuity of multiple integrals*, Colloquium Mathematicum, 74 (1997), 71–78.
- [Mar] Marcellini, P. – *Approximation of quasiconvex functions and lower semicontinuity of multiple integrals*, Manuscripta Math. 51 (1985), 1–28.
- [Mo1] Morrey, Ch. B., Jr. – *Quasi-convexity and lower semicontinuity of multiple integrals* Pacific J. Math. 2 (1952), 25–53.
- [Mo2] Morrey, Ch. B., Jr. – *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer, Berlin, 1966.

- [Ped] Pedregal, P. – *Optimization, relaxation and Young measures*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 36 (1999), 27–58.
- [Sv1] Šverák, V. – *Rank-one convexity does not imply quasiconvexity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 120 (1992), 185–189.
- [Sv2] Šverák, V. – *New examples of quasiconvex functions*, Arch. Rational Mech. Anal. 119 (1992), 293–300.