



FACULTY OF MATHEMATICS
"ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY

**PREPRINT SERIES OF
"ALEXANDRU MYLLER"
MATHEMATICAL SEMINARY**

**REZULTATE DE CONVERGENȚĂ PENTRU SOLUȚIILE
ECUAȚILOR DIFERENȚIALE
DE ORDINUL 1 UTILIZÂND MĂSURI YOUNG**

Liviu C. Florescu

Nr. 04 - 2007

ISSN 1843 - 0473

 **ALEXANDRU MYLLER**

Bld. Carol I, 11, 700506 - Iași, ROMÂNIA
<http://www.math.uaic.ro/~sm>

Rezultate de convergență pentru soluțiile ecuațiilor diferențiale de ordinul 1 utilizând măsuri Young¹

Liviu C. Florescu*

*Al. I. Cuza” University, Faculty of Mathematics, Blvd. Carol I, 11, 700506 - Iași, România,
e-mail: lflo@uaic.ro

1 Introducere

Subiectul tratat în cele ce urmează este inspirat de lucrarea [CRdFS-2005] unde se studiază rezultate de trecere la limită pentru soluțiile unei clase de ecuații diferențiale de ordin doi de tipul

$$(P_n) \quad \begin{cases} u''(t) = f_n(t, u(t), u'(t)), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

În lucrarea citată instrumentele de bază utilizate sînt teorema de compacitate a lui Helly pentru șirul derivatelor de ordin 1 a soluțiilor și teorema de compacitate a lui Prohorov pentru șirul asimptotic mărginit al derivatelor de ordin 2.

Aplicarea acestor rezultate de compacitate a fost posibilă datorită ipotezei că șirul $(f_n(\cdot, 0, 0))_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit în $L_E^1([0, 1])$.

Problema pe care ne-am pus-o a fost dacă rezultatele de trecere la limită rămîn valabile și pentru șiruri nemărginite din $L_E^1([0, 1])$.

Mărginirea unui șir în $L_E^1([0, 1])$ asigură, pe lîngă asimptotica sa mărginire (care permite aplicarea teoremei de compacitate a lui Prohorov) și utilizarea

¹This work has been supported by ANCS and CNCSIS through grants 2-CEx06-11-10/25.07.2006, 2-CEx06-11-56/25.07.2006, CEx05-D11-23/05.10.2005, GR 214/20.09.2006

unor rezultate de compacitate slabă care completează teorema lui Prohorov (lema biting, teorema lui Saadoune-Valadier).

Așa cum am observat însă, aceste rezultate continuă să funcționeze acceptabil și pentru o clasă de șiruri nemărginite în $L^1_E([0, 1])$ - șirurile Jordan asimptotic mărginite.

Definiția acestei clase de șiruri s-a bazat pe nevoia de a îndeplini condițiile teoremei lui Fréchet de compacitate în măsură, teoremă care va înlocui teorema mai restrictivă a lui Helly.

Într-o primă variantă am introdus noțiunea de clasă de funcții Jordan asimptotic mărginită în cazul particular al funcțiilor reale de o variabilă reală în [FGT-2006], unde am prezentat o alternativă la lucrarea [CRdFS-2005] pentru problema particulară

$$(P'_n) \quad \begin{cases} u''(t) = f_n(t), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Rezultatele obținute au fost extinse apoi la cazul general al funcțiilor definite pe un spațiu $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ cu măsură finită luând valori într-un spațiu Banach separabil ([F1-2007]). S-a obținut extensia la cazul general a lemei biting și a teoremei lui Saadoune-Valadier. În cazul particular când Ω este un deschis convex din \mathbb{R}^p s-a obținut un rezultat de compacitate în măsură pentru șiruri din spațiul Sobolev $W_{\mathbb{R}^m}^{1,1}(\Omega)$. Astfel dacă un șir $(u_n) \subseteq W_{\mathbb{R}^m}^{1,1}(\Omega)$ este asimptotic mărginit iar șirul gradientilor (∇u_n) este Jordan asimptotic mărginit atunci (u_n) admite un subșir convergent în măsură. Acest rezultat a intervenit în mod esențial în obținerea unor soluții relaxate pentru problema clasică a calculului variațional în [F2-2007]

În lucrarea de față vom trata cazul nemărginit pentru problema generală (P_n) din [CRdFS-2005].

Ne vom ocupa de cazul ecuației diferențiale de ordin 1, studiul problemei de ordin 2 reducându-se la acesta. În final vom aborda cazul incluziunilor diferențiale, caz în care șirul gradientilor converge la un subgradient al limitei șirului $(f_n)_n$.

Noțiunile și rezultatele referitoare la măsurile Young sînt cele din [CRdFV], [V-1994] sau [FGT].

2 Problema diferențială

Fie $E = \mathbb{R}^p$, $W_E^{1,1}([0, 1]) = \{u \in C_E([0, 1]) : u' \in L_E^1([0, 1])\}$ dotat cu norma $\|u\|_W = \|u\|_0 + \|u'\|_1$, unde

$$\|u\|_0 = \sup_{t \in [0, 1]} \|u(t)\|_E, \quad \|u'\|_1 = \int_0^1 \|u'(t)\|_E dt.$$

Remarcăm că $W_E^{1,1}([0, 1])$ este spațiu Banach față de norma $\|\cdot\|_W$ și că această normă este o normă mai tare decât norma uzuală pe spațiul Sobolev $W_E^{1,1}([0, 1])$.

Fie $f : [0, 1] \times E \rightarrow E$ o funcție cu proprietățile:

- $f_1)$. $f(\cdot, x)$ este măsurabilă Lebesgue, $\forall x \in E$.
- $f_2)$. $f(\cdot, 0) \in L_E^1([0, 1])$.
- $f_3)$. $\exists \beta \in L_+^1([0, 1])$ cu $\|\beta\|_1 < \frac{1}{2}$ a.î., a.p.t. $t \in [0, 1]$,
 $\|f(t, x) - f(t, y)\|_E \leq \beta(t) \cdot \|x - y\|_E, \forall x, y \in E$.

2.1 Teoremă. *În ipotezele $f_1) - f_3)$ de mai sus există și este unică o funcție $u \in W_E^{1,1}([0, 1])$ a.î.*

$$(P) \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & \text{a.p.t. } t \in [0, 1], \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

În plus

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\leq 2 \int_0^1 \|f(t, 0)\|_E dt, \\ \|u'\|_1 &\leq 2 \int_0^1 \|f(t, 0)\|_E dt. \end{aligned}$$

Demonstrație. Din ipotezele $f_1) - f_3)$ de mai sus rezultă că, a.p.t. $t \in [0, 1], \forall x, y \in E$,

$$(*) \quad \|f(t, x)\|_E \leq \beta(t) \cdot \|x\|_E + \|f(t, 0)\|_E,$$

sau, dacă notez cu $c(t) = \max\{\beta(t), \|f(t, 0)\|_E\}, c \in L_+^1([0, 1])$ și

$$\|f(t, x)\|_E \leq c(t)(1 + \|x\|_E), \forall t \in [0, 1], \forall x \in E.$$

Din inegalitatea $(*)$ rezultă că, $\forall u \in C_E([0, 1]), \forall t \in [0, 1]$,

$$\|f(t, u(t))\|_E \leq \beta(t) \cdot \|u(t)\|_E + \|f(t, 0)\|_E \leq c(t)(1 + \|u\|_0),$$

deci $f(\cdot, u(\cdot)) \in L_E^1([0, 1]), \forall u \in C_E([0, 1])$.

Se observă cu ușurință că $(P) \iff (I)$ $u(t) = \int_0^t f(s, u(s)) ds$.

$\forall u \in W_E^{1,1}([0, 1])$ definim $T(u) : [0, 1] \rightarrow E$ prin $T(u)(t) = \int_0^t f(s, u(s)) ds$.
 $T(u)$ este continuă pe $[0, 1]$ și $\|T(u)\|_E \leq \int_0^1 \|f(s, u(s))\|_E ds = \|f(\cdot, u(\cdot))\|_1$.
 În plus $(T(u))' = f(\cdot, u(\cdot)) \in L_E^1([0, 1])$ și

$$\|(T(u))'\|_1 = \int_0^1 \|f(t, u(t))\|_E dt = \|f(\cdot, u(\cdot))\|_1.$$

Deci $T : W_E^{1,1}([0, 1]) \rightarrow W_E^{1,1}([0, 1])$.

Un calcul simplu ne conduce la:

$$\|T(u) - T(v)\|_W \leq 2\|\beta\|_1 \cdot \|u - v\|_W, \forall u, v \in W_E^{1,1}([0, 1]),$$

ceea ce arată că T este o contracție. Rezultă din teorema lui Banach că există o funcție unică $u \in W_E^{1,1}([0, 1])$ a.î. $T(u) = u$.

Utilizînd relația (*) de mai sus obținem:

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &= \|T(u)\|_0 \leq \int_0^1 \|f(t, u(t))\|_E dt \leq \int_0^1 \beta(t) \cdot \|u(t)\|_E dt + \\ &+ \int_0^1 \|f(t, 0)\|_E dt \leq \|\beta\|_1 \cdot \|u\|_0 + \int_0^1 \|f(t, 0)\|_E dt < \frac{1}{2}\|u\|_0 + \int_0^1 \|f(t, 0)\|_E dt, \end{aligned}$$

de unde rezultă $\|u\|_0 \leq 2 \int_0^1 \|f(t, 0)\|_E dt$.

Deoarece $\|u'\|_1 = \int_0^1 \|f(t, u(t))\|_E dt$, rezultă la fel ca mai sus $\|u'\|_1 \leq 2 \int_0^1 \|f(t, 0)\|_E dt$. ■

3 Cazul mărginit

3.1 Teoremă. *Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ fie $f_n : [0, 1] \times E \rightarrow E$ funcția care verifică ipotezele:*

- $f_1)$. $f_n(\cdot, x)$ este măsurabilă Lebesgue, $\forall x \in E$.
- $f_2)$. $f_n(\cdot, 0) \in L_E^1([0, 1])$.
- $f_3)$. $\exists \beta_n \in L_+^1([0, 1])$ cu $\|\beta_n\|_1 < \frac{1}{2}$ a.î., a.p.t. $t \in [0, 1]$,
 $\|f_n(t, x) - f_n(t, y)\|_E \leq \beta_n(t) \cdot \|x - y\|_E, \forall x, y \in E$.

Fie $u_n \in W_E^{1,1}([0, 1])$ soluția unică a problemei

$$(P_n) \quad \begin{cases} u'(t) = f_n(t, u(t)), & \text{a.p.t. } t \in [0, 1], \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Dacă șirul $(f_n(\cdot, 0))_n$ este mărginit în $L_E^1([0, 1])$ atunci există un subșir al lui $(u_n)_n$ (notat tot cu $(u_n)_n$), există $u \in BV_E([0, 1])$, există $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}_E([0, 1])$ astfel încât

i). $u_n \xrightarrow{L_E^1} u$ și $u(0) = 0$.

ii). $u'_n \xrightarrow{\mathcal{Y}_E} \mathcal{T}$.

iii). Funcția $v : [0, 1] \rightarrow E$, $v(t) = \text{bar}\tau_t = \int_E x d\tau_t(x)$ este integrabilă.

iv). Dacă în plus șirul $(\langle u_n, u'_n \rangle^-)_{n \in \mathbb{N}}$ este uniform integrabil în $L_{\mathbb{R}}^1([0, 1])$ atunci

$$\int_0^1 \langle u(t), v(t) \rangle dt \leq \liminf_n \int_0^1 \langle u_n(t), u'_n(t) \rangle dt.$$

Demonstrație. Presupunem că există $M > 0$ a.î. $\int_0^1 \|f_n(t, 0)\|_E dt \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și fie $\Delta = \{t_0, \dots, t_q\}$ o divizare a intervalului $[0, 1]$; atunci, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} V_{\Delta}(u_n) &= \sum_{k=0}^{q-1} \|u_n(t_{k+1} - u_n(t_k))\|_E = \sum_0^{q-1} \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f_n(s, u_n(s)) ds \right\|_E \leq \\ &\leq \sum_0^{q-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|f_n(s, u_n(s))\|_E ds \leq \int_0^1 \beta_n(t) \cdot \|u_n(t)\|_E dt + \int_0^1 \|f_n(t, 0)\|_E dt \leq \\ &\leq \|u_n\|_0 \cdot \|\beta_n\|_1 + \int_0^1 \|f_n(t, 0)\|_E dt \leq 2 \int_0^1 \|f_n(t, 0)\|_E dt \leq 2M. \end{aligned}$$

Rezultă că șirul $(u_n)_n$ are variație egal mărginită și cum $\|u_n\|_0 \leq 2M$, rezultă, conform teoremei lui Helly, că $(u_n)_n$ are un subșir, notat tot cu $(u_n)_n$, convergent punctual la o funcție cu variație mărginită $u \in BV_E([0, 1])$. În plus $u(0) = 0$.

Datorită teoremei convergenței mărginite a lui Lebesgue, $u_n \xrightarrow{L_E^1} u$.

Deoarece $\|u'_n\|_1 \leq 2M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u'_n)_n$ este asimptotic mărginit ($\forall \varepsilon > 0$, $\exists k > 0$ a.î. $\mu(\{t \in [0, 1] : \|u'_n(t)\|_E \geq k\}) < \varepsilon$).

Putem atunci apela la teorema lui Prohorov; deci există o măsură Young $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}_E([0, 1])$ și un subșir al lui $(u'_n)_n$ (notat tot cu $(u'_n)_n$) a.î.

$u'_n \xrightarrow{\mathcal{Y}_E} \mathcal{T}$ (aceasta înseamnă că, $\forall f \in C^b(E), \forall A \subseteq [0, 1]$ măsurabilă Lebesgue, $\int_A f(u'_n(t))dt \rightarrow \int_A \int_E f(x)d\tau_t(x)$).

Punctele iii) și iv) sînt consecințe ale punctelor i) și ii) și a lemei produsului fibrat (vezi [CRdF-2004]). ■

4 Mulțimi Jordan asimptotic mărginite

4.1 Definiție. O mulțime $H \subseteq \mathcal{M}_E([0, 1])$ este **Jordan asimptotic mărginită** dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k > 0$ și o subfamilie finită \mathcal{I} de sub-intervale ale lui $[0, 1]$ a.î., $\forall f \in H$, există o subfamilie $\mathcal{I}_f \subseteq \mathcal{I}$ cu

$$\mu\left(\bigcup \mathcal{I}_f\right) < \varepsilon \text{ și } (\|f\| \geq k) \subseteq \bigcup \mathcal{I}_f$$

($\bigcup \mathcal{I}_f$ este reuniunea intervalelor familiei \mathcal{I}_f).

Un șir $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}_E([0, 1])$ este **Jordan asimptotic mărginit** dacă mulțimea $H = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ este Jordan asimptotic mărginită.

O justificare a denumirii de mai sus este oferită de următoarea caracterizare (vezi Teorema 3.4 din [F1-2007]). Oricare ar fi $H \subseteq \mathcal{M}_E([0, 1])$ fie

$$A_H(\infty) = \left\{ t \in \bar{\Omega} : \limsup_{s \rightarrow t} \sup_{u \in H} \|u(s)\| = +\infty \right\}.$$

O mulțime $H \subseteq \mathcal{M}_E([0, 1])$ este Jordan asimptotic mărginită dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o acoperire finită a lui H , $\{H_1, \dots, H_p\}$, a.î., $\forall i = 1, \dots, p$,

$$\mu_J^*(A_{H_i}(\infty)) < \varepsilon.$$

În cele ce urmează prezentăm versiunile lemei biting și a teoremei Saadoune-Valadier pentru cazul șirurilor nemărginite în L^1 .

4.2 Teoremă. (Theorem 2.10 din [F1-2007]) *Pentru orice șir Jordan asimptotic mărginit $(f_n) \subseteq L^1_E([0, 1])$, se poate găsi un subșir, notat tot cu $(f_n)_n$, un șir descrescător de mulțimi măsurabile $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ cu $\mu(\bigcap_{p=0}^{\infty} B_p) = 0$ și o funcție măsurabilă f a.î., $\forall p \in \mathbb{N}$,*

- 1). $f \in L^1_E([0, 1] \setminus B_p)$.

- 2). $f_n \xrightarrow{w}_{[0,1] \setminus B_p} f$.

4.3 Teoremă. (Theorem 2.11 din [F1-2007]) *Pentru orice șir Jordan asimptotic mărginit $(f_n) \subseteq L_E^1([0, 1])$ se poate găsi un subșir, notat tot cu (f_n) , și o măsură Young $\tau \in \mathcal{Y}_E([0, 1])$ a.î.:*

- (1) $f_n \xrightarrow{\mathcal{J}} \tau$;
- (2) τ_t are un baricentru $f(t)$, a.p.t. $t \in [0, 1]$,
 $f(t) = \text{bar}(\tau_t) = \int_E x d\tau_t(x)$;
- (3) $f_n \xrightarrow{w^2} f$.

Aceste rezultate au netezit calea obținerii unui rezultat de compacitate în măsură.

4.4 Teoremă. (Theorem 3.12 din [FGT-2006], [F1-2007])
Fie $F \subseteq W_E^{1,1}([0, 1])$ o mulțime asimptotic mărginită a.î. $F' = \{f' : f \in F\}$ este Jordan asimptotic mărginită; atunci F este relativ compactă în topologia convergenței în măsură.

5 Cazul Jordan asimptotic mărginit

5.1 Teoremă. *Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, fie $f_n : [0, 1] \times E \rightarrow E$ o funcție care verifică ipotezele $f_1) - f_3)$ ale teoremei 3.1 și fie $(u_n)_n \subseteq W_E^{1,1}([0, 1])$ șirul format cu soluțiile problemei (P_n) .*

Presupunem că $(u_n)_n$ este asimptotic mărginit și că există un șir Jordan asimptotic mărginit $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{M}_+([0, 1])$ a.î.

$$\|f_n(t, x)\|_E \leq \varphi_n(t), \text{ a.p.t. } t \in [0, 1], \forall x \in E.$$

Atunci există un subșir al șirului (u_n) , notat tot cu (u_n) , există $u \in \mathcal{M}_E([0, 1])$, $\exists \mathcal{T} \in \mathcal{Y}_E([0, 1])$ a.î.

- i). $u_n \xrightarrow{\mu} u$,
- ii). $u'_n \xrightarrow{\mathcal{Y}_E} \mathcal{T}$,
- iii). *Funcția $t \mapsto \text{bar}\tau_t$ este măsurabilă.*
- iv). *Dacă $(\langle u_n, u'_n \rangle^-)_n$ este uniform integrabil în $L_{\mathbb{R}}^1([0, 1])$ atunci $\int_0^1 \langle u(t), \text{bar}\tau_t \rangle dt \leq \liminf_n \int_0^1 \langle u_n(t), u'_n(t) \rangle dt$.*
- v). *Dacă șirul $(u_n)_n$ este mărginit în $L_E^1([0, 1])$ atunci $u \in L_E^1([0, 1])$ și $\|u_n - u\|_1 \rightarrow \eta(u_n) = \lim_k \sup_n \int_{(\|u_n\|_E \geq k)} \|u_n(t)\|_E dt$.*
- vi). *Dacă $(u_n)_n$ este uniform integrabil atunci $u_n \xrightarrow{L_E^1} u$.*

Demonstrație. Oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ și oricare ar fi $t \in [0, 1]$, $\|f_n(t, u_n(t))\|_E \leq \varphi_n(t)$. Rezultă că șirul $(u_n')_n$ este Jordan asimptotic mărginit. Deoarece $(u_n)_n$ este asimptotic mărginit se poate aplica teorema 4.4; deci $(u_n)_n$ admite un subșir convergent în măsură la o funcție $u \in \mathcal{M}_E([0, 1])$.

Teorema lui Prohorov aplicată lui $(u_n')_n$ furnizează o măsură Young $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}_E([0, 1])$ a.î. $u_n' \xrightarrow{\mathcal{Y}_E} \mathcal{T}$.

Fie $(\tau_t)_{t \in [0, 1]}$ dezintegrarea măsurii \mathcal{T} ; a.p.t. $t \in [0, 1]$, τ_t are un baricentru $v(t) = \text{bar}\tau_t$ și funcția v este măsurabilă. În plus $u_n' \xrightarrow{w^2} v$.

Să presupunem acum că $(\langle u_n, u_n' \rangle^-)_n$ este uniform integrabil; punctele i) și ii) ne permit să utilizăm lema produsului fibrat (vezi [CRdF-2004]). Rezultă atunci că

$$\langle u_n, u_n' \rangle \xrightarrow{\mathcal{Y}_{E \times E}} \delta_{u(\cdot)} \otimes \tau.$$

Deoarece aplicația $\Psi : [0, 1] \times E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $\Psi(t, x, y) = \langle x, y \rangle$, este un integrant Carathéodory pentru care șirul $(\Psi(\cdot, u_n(\cdot), u_n'(\cdot))^-)_n$ este uniform integrabil, rezultă că

$$\int_0^1 \langle u(t), v(t) \rangle dt = \int_0^1 \int_E \langle u(t), y \rangle d\tau_t(y) dt \leq \liminf_n \int_0^1 \langle u_n(t), u_n'(t) \rangle dt$$

și astfel am demonstrat punctul iv) al teoremei.

v). Dacă $(u_n)_n$ este mărginit în $L_E^1([0, 1])$ din teorema 6.1.11 din [SV-1995] rezultă că $u \in L_E^1([0, 1])$ și că $\|u_n - u\|_1 \rightarrow \eta(u_n)$. Dacă, mai mult, $(u_n)_n$ este uniform integrabil în $L_E^1([0, 1])$ atunci $\eta(u_n) = 0$ și deci $u_n \xrightarrow{L_E^1} u$. ■

5.2 Observație. Dacă $(\langle u_n, u_n' \rangle)_n$ este uniform integrabil în $L_{\mathbb{R}}^1([0, 1])$ atunci inegalitatea de la punctul iv) se transformă în egalitate. Mai mult, putem demonstra că, $\forall t \in [0, 1]$, $\int_0^t \langle u(s), \text{bar}\tau_t \rangle ds = \lim_n \int_0^t \langle u_n(s), u_n'(s) \rangle ds$.

Să remarcăm că, $\forall t \in [0, 1]$,

$$\int_0^t \langle u_n(s), u_n'(s) \rangle ds = \frac{1}{2} \cdot \|u_n(t)\|_E^2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \|u(t)\|_E^2$$

și deci $\frac{1}{2} \cdot \|u(t)\|_E^2 = \int_0^t \langle u(s), \text{bar}\tau_s \rangle ds$.

În ipoteza că u este derivabilă rezultă că

$u'(t) = \text{bar}\tau_t, \forall t \in [0, 1]$. În cazul incluziunilor diferențiale putem renunța la această ipoteză.

6 Incluziuni diferențiale

Fie $f : [0, 1] \times E \rightarrow \mathbb{R}$ un integrant mărginit semi-continuu inferior și convex și fie $f^* : [0, 1] \times E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f^*(t, y) = \sup_x [\langle x, y \rangle - f(t, x)]$, conjugata Fenchel a lui f ; f^* este de asemenea un integrant inferior semicontinuu, convex și mărginit inferior.

Inegalitatea Young-Fenchel ne spune că, a.p.t. $t \in [0, 1]$,

$$u'(t) \in \partial f(t, u(t)) \iff f(t, u(t)) + f^*(t, u'(t)) \leq \langle u(t), u'(t) \rangle$$

și aceasta este echivalent cu

$$\int_0^1 f(t, u(t)) dt + \int_0^1 f^*(t, u'(t)) dt \leq \int_0^1 \langle u(t), u'(t) \rangle dt.$$

6.1 Teoremă. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ un șir de integranți Crathéodory mărginiți și convexi și $(\beta_n)_n \subseteq L_+^1([0, 1])$ un șir mărginit a.î.

$$1). |f_n(t, x) - f_n(t, y)| \leq \beta_n(t) \cdot \|x - y\|_E,$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \forall x, y \in E$.

$$2). \begin{cases} \liminf_n f_n(s_n, x_n) \geq f_\infty(s, x), \forall (s_n, x_n) \rightarrow (s, x) \\ \liminf_n f_n^*(t_n, y_n) \geq f_\infty^*(t, y), \forall (t_n, y_n) \rightarrow (t, y) \end{cases}.$$

Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}$ fie $u_n \in W_E^{1,1}([0, 1])$ soluția incluziunii diferențiale

$$(ID) \quad \begin{cases} u_n'(t) \in \partial f_n(t, u_n(t)), \\ u_n(0) = 0. \end{cases}$$

Presupunem că

$$3). ((u_n, u_n'))_{n \in \mathbb{N}} \text{ este un șir uniform integrabil din } L_{\mathbb{R}}^1([0, 1]).$$

Atunci există un subșir al șirului $(u_n)_n$, notat tot cu $(u_n)_n$, există o funcție $u \in BV_E([0, 1])$ și $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}_E([0, 1])$ astfel încât:

$$i). u_n \xrightarrow{L_E^1} u \text{ și } u(0) = 0.$$

$$ii). u_n' \xrightarrow{\mathcal{Y}_E} \mathcal{T}.$$

iii). Funcția $t \mapsto v(t) = \text{bar} \tau_t$ este integrabilă și

$$iv). \int_0^1 f_\infty(t, u(t)) dt + \int_0^1 f_\infty^*(t, v(t)) dt \leq \int_0^1 \langle u(t), v(t) \rangle dt.$$

6.2 Observație. Demonstrația teoremei precedente se bazează pe teorema de existență a soluției incluziunii diferențiale (vezi teorema 2.2 din [ACT-2002]) și pe demonstrația teoremei 3.1 prezentată în secțiunea 3.

Remarcăm că iv) ne asigură că

$$(ID) \quad \begin{cases} v(t) = \text{bar}\tau_t \in \partial f_\infty(t, u(t)), \\ u(0) = 0 \end{cases},$$

deci că baricentrul lui τ_t este subgradient pentru f_∞ în $u(t)$, a.p.t. $t \in [0, 1]$.

Bibliografie

- [ACT-2002] Azzam, D. L., Castaing, Ch., Thibault, L. - *Three boundary value problems for second order differential inclusions in Banach spaces*, Control Cybernet. 31 (2002), 659–693.
- [CRdF-2004] Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. - *On the fiber product of Young measures with application to a control problem with measures*, Adv. Math. Econ. 6 (2004), 1–38.
- [CRdFV] Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. and Valadier, M. - *Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory*, Kluwer Academic Publ. Dordrecht.Boston.London, 2004.
- [CRdFS-2005] Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. and Salvadori, A. - *Some variational convergence results for a class of evolution inclusions of second order using Young measures*, Adv. Math. Econ. 7 (2005), 1–32.
- [FGT-2006] Florescu, L.C., Godet-Thobie, C. - *A version of biting lemma for unbounded sequences in L^1 with applicationfss*, Mathematical Analysis and Applications, AIP Conference Proceedings, New York, 835 (2006), 58-73.
- [FGT] Florescu, L.C., Godet-Thobie, C. - *Compacité dans \mathbb{E} space de mesures et mesures de Young* (în curs de apariție).
- [F1-2007] Florescu, L.C. - *Finite-tight sets*, Central European Journal of Mathematics 5(2007), 619-638.
- [F2-2007] Florescu, L.C. - *Existence results in relaxed variational calculus*, Analele Universității de Vest, Timișoara, Seria Matematică-Informatică, XLV, 1 (2007), 231-244.

- [SV-1995] Saadoune, M. and Valadier, M. - *Extraction of a "good" subsequence from a bounded sequence of integrable functions*, J. Convex Anal. 2 (1995), 345–357.
- [V-1994] Valadier, M. - *A course on Young measures*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, XXVI (1994), Supplemento, 349–394.