FACULTY OF MATHEMATICS

"ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY

PREPRINT SERIES OF "ALEXANDRU MYLLER" MATHEMATICAL SEMINARY

COMPACITATE TARE ŞI ASIMPTOTICĂ MĂRGINIRE ÎN $L^p(0,T;B)$

Liviu C. Florescu

Nr. 01 – 2008

ISSN 1843 – 0473

ALEXANDRU MYLLER

Blvd. Carol I, 11, 700506 – Iaşi, ROMÂNIA
http://www.math.uaic.ro/~sm

Compacitate tare şi asimptotică mărginire în $L^p(0, T; B)$[1]

Liviu C. Florescu*

*Al. I. Cuza" University, Faculty of Mathematics, Blvd. Carol I, 11, 700506 - Iaşi, România,

e-mail: lflo@uaic.ro

Rezumat. Teoremele de compacitate tare în $L^p(0, T; B)$ reprezintă instrumente importante în demonstarea existenţei soluţiilor anumitor probleme de evoluţie.

În cazul în care B este finit dimensional teorema clasică a lui Riesz-Fréchet-Kolmogorov prezintă condiţia de concentraţie tare drept condiţie necesară şi suficientă de compacitate.

Cazul infinit dimensional a fost intens studiat; J. P. Aubin (1963), J. L. Lions (1961, 1969), J. Simon (1987), J. M. Rakotoson şi R. Temam (2001), R. Rossi şi G. Savaré (2002) prezintă condiţii de compacitate tare în $L^p(0, T; B)$.

În general aceste rezultate adaugă la condiţia de concentraţie tare a lui Riesz-Fréchet-Kolmogorov o condiţie de asimptotică mărginire.

Vom prezenta diverse tipuri de asimptotică mărginire şi rezultatele de compacitate aferente.

1 Introducere

Fie $1 \leq p < +\infty$ şi $L^p(0, T; \mathbb{R}^m)$ spaţiul funcţiilor p-integrabile definite pe $(0, T)$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Unul dintre rezultatele celebre de compacitate tare în $L^p(0, T; \mathbb{R}^m)$ este teorema lui Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

1.1 Teoremă (vezi de exemplu Th. IV.26 din [2]).

Fie $1 \leq p < +\infty$ şi $U \subseteq L^p(0, T; \mathbb{R}^m)$ o mulţime mărginită în L^p; U este relativ compactă în topologia tare a lui L^p dacă şi numai dacă verifică

[1] This work has been supported by ANCS and CNCSIS through grants CEx05-D11-23/05.10.2005, 2-CEx06-11-10/25.07.2006, 2-CEx06-11-56/25.07.2006, GR 214/20.09.2006

condiţia de concentraţie tare:

$$(CT) \qquad \lim_{h\downarrow 0} \sup_{u\in U} \int_0^{T-h} \|u(t+h)-u(t)\|^p_{\mathbb{R}^m} dt = 0.$$

Dacă $U \subseteq W^{1,p}(0,T;\mathbb{R}^m)$ atunci mărginirea în L^∞ a mulţimii gradienţilor lui U asigură îndeplinirea condiţiei (CT).

1.2 Corolar. *Fie $U \subseteq W^{1,p}(0,T;\mathbb{R}^m)$ o mulţime mărginită în $W^{1,p}$; dacă $\nabla U = \{\nabla u : u \in U\}$ este mărginită în $L^\infty(0,T;\mathbb{R}^m)$ atunci U este relativ compactă în topologia tare a lui $L^p(0,T;\mathbb{R}^m)$.*

1.3 Observaţie. În cazul în care funcţiile iau valori într-un spaţiu infinit dimensional condiţia (CT) nu mai este suficientă pentru a asigura compacitatea tare. Într-adevăr, fie $C[0,1]$ spaţiul Banach al funcţiilor reale şi continue pe $[0,1]$ înzestrat cu norma convergenţei uniforme $\|\cdot\|$ şi fie, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$; evident $f_n \in C[0,1]$. Definim, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : (0,1) \to C[0,1], u_n(t) = f_n, \forall t \in (0,1)$ şi fie $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Deoarece u_n sînt funcţii constante, $U \subseteq L^\infty(0,1;C[0,1]) \subseteq L^1(0,1;C[0,1])$. Condiţia (CT) este evident verificată însă U nu este relativ compactă în topologia tare a lui $L^1(0,1;C[0,1])$. Aşa cum vom observa mai departe U nu este asimptotic mărginită.

În secţiunea 2 vom scufunda spaţiul funcţiilor măsurabile în spaţiul măsurilor Young. Vom defini mulţimile asimptotic mărginite de măsuri Young şi vom da mai multe caracterizări ale acestei noţiuni. Apoi vom identifica condiţiile în care o submulţime de funcţii măsurabile este asimptotic mărginită.

Secţiunea 3 va pune în evidenţă rolul asimptoticei mărginiri în studiul compacităţii submulţimilor de măsuri Young. Tot aici se va introduce produsul a două măsuri Young şi se va studia comportarea compacităţii vis-a-vis de această operaţie.

Secţiunea 4 începe cu o trecere în revistă a principalelor teoreme de compacitate tare în $L^p(0,T;B)$ unde B este un spaţiu Banach separabil. Se arată că în toate aceste teoreme pe lîngă condiţia (CT) apare, sub una sau alta dintre formele sale echivalente, condiţia de asimptotică mărginire.

Forma generală a unui astfel de rezultat este dată de R. Rossi şi G. Savaré în [9]. Vom prezenta un rezultat de compacitate în măsură care, adăugat la o condiţie de uniformă integrabilitate, va conduce la condiţia de compacitate tare. Interesant este că în caracterizarea compacităţii în măsură intervine, pe lîngă asimptotica mărginire, o condiţie de concentraţie slabă. Astfel, într-un mod schematic:

"Compacitate tare = concentraţie tare + asimptotică mărginire"

"Compacitate în măsură = concentraţie slabă + asimptotică mărginire".

În ambele situaţii asimptotica mărginire este esenţială.

2 Asimptotică mărginire

Fie P un spaţiu polonez (un spaţiu metrizabil şi separabil pentru care există o metrică completă compatibilă) şi fie $\mathcal{B}_P$ borelienele lui P. Notăm cu $\mathcal{A}$ σ-algebra mulţimilor măsurabile Lebesgue şi cu μ măsura Lebesgue pe $(0,T)$.

O măsură Young pe P este o măsură pozitivă $\mathcal{T} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P \to \mathbb{R}_+$ cu proprietatea $\mathcal{T}(A \times P) = \mu(A), \forall A \in \mathcal{A}$.

Datorită unei teoreme de dezintegrare se poate identifica orice măsură Young $\mathcal{T}$ cu o aplicaţie $\tau_{\cdot}$ care, la orice $t \in (0,T)$, asociază o probabilitate τ_t pe P cu condiţia ca aplicaţia $t \mapsto \tau_t(C)$ să fie $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_P)$-măsurabilă, oricare ar fi $C \in \mathcal{B}_P$ ($\mathcal{T} \equiv \tau_{\cdot}$).

Vom nota cu $\mathcal{Y}(0,T;P)$ sau, dacă nu există pericol de confuzie, cu $\mathcal{Y}(P)$ spaţiul măsurilor Young pe P.

Pentru orice integrant mărginit (sau pozitiv) $\Psi : (0,T) \times P \to \mathbb{R}$ şi orice $\mathcal{T} \equiv \tau_{\cdot} \in \mathcal{Y}(P)$ avem:

$$\int_{(0,T)\times P} \Psi(t,x) d\mathcal{T}(t,x) = \int_0^T \left(\int_P \Psi(t,x) d\tau_t(x) \right) dt$$

(vom prescurta $d\mu(t) = dt$).

Vom nota funcţia caracteristică a mulţimii A cu $\mathbb{1}_A$ iar $C_b(P)$ va nota mulţimea funcţiilor reale, continue şi mărginite definite pe P.

Un şir de măsuri Young $(\mathcal{T}^n)_n \subseteq \mathcal{Y}(P)$ este **convergent stabil** la $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(P)$ dacă, oricare ar fi $A \in \mathcal{A}$ şi oricare ar fi $f \in C_b(P)$,

$$\int_{(0,T)\times P} \mathbb{1}_A \cdot f(x) d\mathcal{T}^n(t,x) = \int_A \left(\int_P f(x) d\tau_t^n(x) \right) dt \to$$

$$\to \int_A \left(\int_P f(x) d\tau_t(x) \right) dt = \int_{(0,T)\times P} \mathbb{1}_A \cdot f(x) d\mathcal{T}(t,x).$$

Vom nota această situaţie cu $\mathcal{T}^n \xrightarrow{\mathcal{S}_P} \mathcal{T}$; această convergenţă generează **topologia stabilă** $\mathcal{S}_P$ pe $\mathcal{Y}(P)$.

Să notăm acum cu $\mathcal{M}(P)$ mulţimea funcţiilor $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_P)$–măsurabile $u : (0,T) \to P$. Dacă d este o metrică compatibilă cu topologia lui P atunci aplicaţia $\delta(u,v) = \displaystyle\int_0^T \min\{1, d(u(t), v(t))\}dt$ defineşte o pseudo-metrică pe $\mathcal{M}(P)$, pseudo-metrică care generează topologia convergenţei în măsură:

$$u_n \xrightarrow{\delta} u \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \lim_n \mu(\{t \in (0,T) : d(u_n(t), u(t)) \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Vom mai nota această situaţie cu $u_n \xrightarrow{\mu} u$.

Vom realiza acum o scufundare a lui $\mathcal{M}(P)$ în $\mathcal{Y}(P)$ astfel: $\forall u \in \mathcal{M}(P), \forall t \in (0,T)$ fie $\delta_{u(t)}$ măsura Dirac cu suportul în $\{u(t)\}$. Aplicaţia $t \mapsto \delta_{u(t)}$ reprezintă dezintegrarea unei măsuri Young elementare $\mathcal{T}^u$.

$$\mathcal{T}^u(A \times B) = \mu(A \cap u^{-1}(B)), \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}_P \text{ sau}$$

$$\int_{(0,T)\times P} \Psi(t,x) d\mathcal{T}^u(t,x) = \int_0^T \Psi(t, u(t))dt, \forall \Psi \text{ integrant mărginit.}$$

Aplicaţia $u \mapsto \mathcal{T}^u$ este o scufundare a lui $\mathcal{M}(P)$ în $\mathcal{Y}(P)$; vom identifica u cu măsura Young elementară asociată $\mathcal{T}^u$ şi atunci

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{S}_P} \mathcal{T} \Leftrightarrow \int_A f(u_n(t))dt \to \int_A \left(\int_P f(x) d\tau_t(x) \right) dt, \forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in C_b(P).$$

În cazul în care $\mathcal{T} = \mathcal{T}^u$ este o măsură Young elementară asociată unei funcţii $u \in \mathcal{M}(P)$ atunci

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{S}_P} u \Leftrightarrow u_n \xrightarrow{\mu} u.$$

Rezultă că urma topologiei stabile $\mathcal{S}_P$ pe $\mathcal{M}(P)$ este topologia convergenţei în măsură.

Mai reţinem că, deoarece măsura Lebesgue pe $(0,T)$ nu are atomi, $\mathcal{M}(P)$ este dens în $\mathcal{Y}(P)$ (vezi teorema 2.2.3 din [3]).

În cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{K}_P$ familia tuturor mulţimilor compacte din P. Reamintim că o aplicaţie $\varphi : P \to [0, +\infty]$ este inf-compactă dacă, $\forall a \in \mathbb{R}_+, \varphi^{-1}([0,a]) \in \mathcal{K}_P$. Fiecare aplicaţie inf-compactă este s.c.i. şi deci boreliană. Un integrant inf-compact este o aplicaţie măsurabilă $\Psi : (0,T) \times$

$P \to \overline{\mathbb{R}}_+$ cu proprietatea că, $\forall t \in (0,T), \Psi(t,\cdot)$ este aplicaţie inf-compactă. Vom nota cu $\mathcal{P}_P$ mulţimea tuturor probabilităţilor pe P. Mulţimea $\mathcal{P}_P$ se poate de asemenea scufunda în $\mathcal{Y}(P)$ prin aplicaţia $p \mapsto \mathcal{T}^p$ definită prin $\mathcal{T}^p = \mu \otimes p$; dezintegrarea lui $\mathcal{T}^p$ este aplicaţia constantă $\tau_t^p = p, \forall t \in (0,T)$. Fie $(p_n)_n \subseteq \mathcal{P}_P \subseteq \mathcal{Y}(P)$;

$$p_n \xrightarrow{\mathcal{S}_P} \mathcal{T} \Leftrightarrow p_n(f) \to \frac{1}{\mu(A)} \int_A \tau_t(f)dt, \forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in C_b(P).$$

Observăm că $p_n \xrightarrow{\mathcal{S}_P} p \Leftrightarrow p_n(f) \to p(f), \forall f \in C_b(P)$; deci urma topologiei stabile $\mathcal{S}_P$ pe $\mathcal{P}_P$ este topologia slabă pe spaţiul probabilităţilor (topologia "narrow"). O mulţime $H \subseteq \mathcal{P}_P$ este asimptotic mărginită ("tight") dacă, $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{K}_P$ a.î. $p(P \setminus K) < \varepsilon, \forall p \in H$.

Sîntem acum pregătiţi să prezentăm următoarea teoremă de caracterizare.

2.1 Teoremă. *Fie P un spaţiu polonez şi fie $\mathcal{Y}(P)$ spaţiul măsurilor Young pe P şi fie $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{Y}(P)$. Condiţiile următoare sînt echivalente:*

(T_1) $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{K}_P$ *a.î.* $\mathcal{T}((0,T) \times (P \setminus K)) < \varepsilon, \forall \mathcal{T} \in \mathcal{U}$.

(T_2) $\exists \varphi : P \to [0,+\infty]$ *inf-compactă a.î.* $\sup_{\tau \in \mathcal{U}} \int_0^T \int_P \varphi(x) d\tau_t(x) dt < +\infty$.

(T_3) $\forall \varepsilon > 0$, *există o mulţime asimptotic mărginită* $H \subseteq \mathcal{P}_P$ *a.î.* $\tau_.^{-1}(\mathcal{P}_P \setminus H) \in \mathcal{A}$ *şi* $\mu(\{t \in (0,T) : \tau_t \in \mathcal{P}_P \setminus H\}) \leq \varepsilon, \forall \tau_. \in \mathcal{U}$.

(T_4) $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P$ *a.î.*, $\forall t \in (0,T)$, $C_t = \{x \in P : (t,x) \in C\} \in \mathcal{K}_P$ *şi* $\sup_{\tau \in \mathcal{U}} \mathcal{T}(((0,T) \times P) \setminus C) < \varepsilon$.

(T_5) *Există un integrant inf-compact* $\Psi : (0,T) \times P \to [0,+\infty]$ *a.î.* $\sup_{\tau \in \mathcal{U}} \mathcal{T}(\Psi) < +\infty$.

(T_6) $\forall \varepsilon > 0$, *există o multifuncţie măsurabilă* $\Gamma : (0,T) \to \mathcal{K}_P$ *a.î.* $\sup_{\tau \in \mathcal{U}} \int_0^T \tau_t(P \setminus \Gamma(t)) dt < \varepsilon$.

Demonstraţie. Condiţia (T_1) exprimă că $\{\frac{1}{T}\mathcal{T}((0,T)\times\cdot) : \mathcal{T} \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{P}_P$ este asimptotic mărginită. Atunci echivalenţa (T_1) $\Longleftrightarrow$ (T_2) revine la o caracterizare cunoscută a mulţimilor asimptotic mărginite în $\mathcal{P}_P$.
(T_2) $\Longrightarrow$ (T_3): Fie $\varphi : P \to [0,+\infty]$ o aplicaţie inf-compactă şi fie $M = \sup_{\tau \in \mathcal{U}} \mathcal{T}(\mathbb{1}_{(0,T)} \otimes \varphi) < +\infty$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, fie $H = \{p \in \mathcal{P}_P : p(\varphi) \leq \frac{M}{\varepsilon}\}$. Atunci H este o submulţime asimptotic mărginită şi slab închisă în $\mathcal{P}_P$. Deci, pentru orice $\tau_. \in \mathcal{U}, \tau_.^{-1}(\mathcal{P}_P \setminus H) \in \mathcal{A}$ şi $\mu(\tau_.^{-1}(\mathcal{P}_P \setminus H)) < \varepsilon$.
(T_3) $\Longrightarrow$ (T_1): Din (T_3), pentru orice $\varepsilon > 0$ există o mulţime asimptotic mărginită $H \subseteq \mathcal{P}_P$ aşa fel încît, pentru orice $\tau_. \in \mathcal{U}, \tau_.^{-1}(\mathcal{P}_P \setminus H) \in \mathcal{A}$ şi

$\mu(\tau_{\cdot}^{-1}(\mathcal{P}_P \setminus H)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Fie $K \in \mathcal{K}_P$ aşa fel încît $p(P \setminus K) < \dfrac{\varepsilon}{2T}$, pentru orice $p \in H$. Atunci, pentru orice $\mathcal{T} \in \mathcal{U}$,

$$\mathcal{T}((0,T) \times (P \setminus K)) = \int_0^T \tau_t(P \setminus K)dt = \int_{\tau_{\cdot}^{-1}(\mathcal{P}_P \setminus H)} \tau_t(P \setminus K)dt +$$

$$+ \int_{\tau_{\cdot}^{-1}(H)} \tau_t(P \setminus K)dt \leq \mu(\tau_{\cdot}^{-1}(\mathcal{P}_P \setminus H)) + \frac{\varepsilon}{2T} \cdot \mu(\tau_{\cdot}^{-1}(H)) < \varepsilon.$$

$(T_1) \Longrightarrow (T_4)$: Pentru orice $\varepsilon > 0$, fie $K \in \mathcal{K}_P$ aşa fel încît $\mathcal{T}((0,T) \times (P \setminus K)) < \varepsilon$, pentru orice $\mathcal{T} \in \mathcal{U}$. Atunci $C = (0,T) \times K$ verifică condiţiile din (T_4).

$(T_4) \Longleftrightarrow (T_6)$: Pentru orice $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P$ avînd secţiunile compacte, $\Gamma : (0,T) \to \mathcal{K}_P$ definită prin $\Gamma(t) = C_t$, pentru orice $t \in (0,T)$, este o multifuncţie măsurabilă ($G_\Gamma = \{(t,x) \in (0,T) \times P : x \in \Gamma(t)\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P$). Reciproc, pentru orice multifuncţie măsurabilă $\Gamma : (0,T) \to \mathcal{K}_P$, dacă $C = G_\Gamma$, $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P$ şi $C_t \in \mathcal{K}_P$, pentru orice $t \in (0,T)$. Echivalenţa lui (T_4) cu (T_6) rezultă observînd că, pentru orice $\mathcal{T} \in \mathcal{U}$,

$$\mathcal{T}(((0,T) \times P) \setminus C) = \int_0^T \tau_t(P \setminus C_t)dt = \int_0^T \tau_t(P \setminus \Gamma(t))dt.$$

$(T_5) \Longrightarrow (T_6)$: Fie $\Psi : (0,T) \times P \to [0, +\infty]$ un integrant inf-compact aşa fel încît $M = \sup_{\tau \in \mathcal{H}} \mathcal{T}(\Psi) < +\infty$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, fie multifuncţia $\Gamma : (0,T) \to \mathcal{K}_P$ definită prin $\Gamma(t) = \left\{ x \in P : \Psi(t,x) \leq \dfrac{M}{\varepsilon} \right\}$, pentru orice $t \in (0,T)$ (deoarece Ψ este inf-compactă, $\Gamma(t) \in \mathcal{K}_P$, pentru orice $t \in (0,T)$). Deoarece Ψ este $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P)$-măsurabilă, graficul lui Γ,
$G_\Gamma = \{(t,x) : x \in \Gamma(t)\} = \left\{ (t,x) : \Psi(t,x) \leq \dfrac{M}{\varepsilon} \right\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P$
şi deci Γ este măsurabilă.
În plus, pentru orice $\mathcal{T} \equiv \tau_{\cdot} \in \mathcal{U}$,

$$\int_0^T \tau_t(P \setminus \Gamma(t))dt = \int_0^T \tau_t \left(\left\{ x \in P : \Psi(t,x) > \frac{M}{\varepsilon} \right\} \right) dt \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot \int_0^T \tau_t(\Psi)dt = \frac{\varepsilon}{M} \cdot \mathcal{T}(\Psi) \leq \varepsilon.$$

$(T_6) \Longrightarrow (T_5)$: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $\Gamma_n : (0,T) \to \mathcal{K}_P$ o multifuncţie măsurabilă aşa fel încît

$$\sup_{\tau \in \mathcal{H}} \int_0^T \tau_t(P \setminus \Gamma_n(t))dt < \frac{1}{3^n}$$

şi fie $\Gamma_0(t) = \emptyset$, pentru orice $t \in (0,T)$. Este evident că se pot alege multifuncţiile măsurabile $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ în aşa fel încît, pentru orice $t \in (0,T)$ şi orice $n \in \mathbb{N}, \Gamma_n(t) \subseteq \Gamma_{n+1}(t)$. Fie atunci $\Psi : (0,T) \times P \to [0,+\infty]$ definită prin

$$\Psi(t,x) = \begin{cases} 2^n, & x \in \Gamma_{n+1}(t) \setminus \Gamma_n(t) \\ +\infty, & x \in P \setminus \cup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(t) \end{cases}, \text{ pentru orice } (t,x) \in (0,T) \times P.$$

Pentru orice $a > 0$,

$$\{(t,x) : \Psi(t,x) < a\} = \bigcup_{2^n < a} \{(t,x) : x \in \Gamma_{n+1}(t) \setminus \Gamma_n(t)\} =$$

$$= \bigcup_{2^n < a} [\{(t,x) : x \in \Gamma_{n+1}(t)\} \setminus \{(t,x) : x \in \Gamma_n(t)\}] \in \mathcal{A}.$$

Deci Ψ este un integrant.
Pentru orice $t \in (0,T)$ şi orice $a \in \mathbb{R}_+, \Psi(t,\cdot)^{-1}([0,a]) = \Gamma_{n+1}(t)$, unde n este partea întreagă a numărului $\dfrac{\ln a}{\ln 2}$. Atunci Γ este un integrant inf-compact.
Fie $\mathcal{T} \in \mathcal{U}$; atunci, $\displaystyle\int_0^T \tau_t \left(\cap_{n=0}^{\infty} (P \setminus \Gamma_n(t)\right) dt = \lim_n \int_0^T \tau_t(P \setminus \Gamma_n(t))dt = 0$ şi deci, aproape pentru orice $t \in (0,T)$, $\tau_t \left(\cap_{n=0}^{\infty} (P \setminus \Gamma_n(t)\right) = 0$.
Atunci, aproape pentru orice $t \in (0,T), \tau_t(\Psi) = \displaystyle\int_{\cap_{n=0}^{\infty}(P\setminus\Gamma_n(t))} \Psi(t,x)d\tau_t(x) +$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma_{n+1}(t)\setminus\Gamma_n(t)} 2^n d\tau_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \tau_t \left(\Gamma_{n+1}(t) \setminus \Gamma_n(t)\right) \text{ et donc}$$

$$\mathcal{T}(\Psi) = \int_0^T \tau_t(\Psi)dt = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \int_0^T \tau_t \left(\Gamma_{n+1}(t) \setminus \Gamma_n(t)\right) dt \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \int_0^T \tau_t(P \setminus \Gamma_n(t))dt < \mu((0,T)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \mu((0,T)) + 2.$$

Implicaţia $(T_5) \Longrightarrow (T_1)$, cu care se încheie demonstraţia echivalenţei tuturor condiţiilor $(T_1) - (T_6)$, este o consecinţă a teoremei de compacitate a lui Prohorov (teorema 3.2). ∎

2.2 Definiţie. O mulţime $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{Y}(P)$ care îndeplineşte una dintre condiţiile echivalente $(T_1) - (T_6)$ din teorema precedentă se numeşte mulţime **asimptotic mărginită** de măsuri Young. Vom spune de asemenea că o mulţime $U \subseteq \mathcal{M}(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$ pentru care mulţimea de măsuri Young elementare $\{\mathcal{T}^u : u \in U\}$ satisface una dintre aceste condiţii este mulţime **asimptotic mărginită** de funcţii.

2.3 Observaţie. Putem să remarcăm imediat din condiţia (T_1) că o mulţime de probabilităţi $H \subseteq \mathcal{P}_P$ este asimptotic mărginită (în sensul definiţiei date înainte de teorema precedentă) dacă şi numai dacă $\{\mathcal{T}^p = \mu \otimes p : p \in H\}$ este o mulţime asimptotic mărginită de măsuri Young. Rezultă că definiţia precedentă prelungeşte noţiunea de asimptotică mărginire de la $\mathcal{P}_P$ la $\mathcal{Y}(P)$.

Condiţiile echivalente din teorema 2.1 pot fi imediat traduse în limbajul mulţimilor de funcţii măsurabile (privite ca submulţimi ale lui $\mathcal{Y}(P)$); deoarece vom face frecvent apel la acestea în secţiunea 4, le vom prezenta în corolarul de mai jos.

2.4 Corolar. *Fie P un spaţiu polonez, fie $\mathcal{M}(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$ mulţimea funcţiilor măsurabile de la $(0,T)$ la P şi fie $U \subseteq \mathcal{M}(P)$. Condiţiile următoare sînt echivalente:*

(T_1) $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{K}_P$ *a.î.* $\sup_{u \in U} \mu(u^{-1}(P \setminus K)) < \varepsilon$.

(T_2) $\exists \varphi : P \to [0, +\infty]$ *inf-compactă a.î.* $\sup_{u \in U} \int_0^T \varphi(u(t))dt < +\infty$.

(T_3) $\forall \varepsilon > 0$, *există o mulţime asimptotic mărginită* $H \subseteq \mathcal{P}_P$ *a.î.* $\sup_{u \in U} \mu(\{t \in (0,T) : \delta_{u(t)} \notin H\}) \leq \varepsilon$.

(T_4) $\forall \varepsilon > 0, \exists C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P$ *a.î.*, $\forall t \in (0,T)$, $C_t = \{x \in P : (t,x) \in C\} \in \mathcal{K}_P$ *şi* $\sup_{u \in U} \mu((0,T) \setminus \bar{u}^{-1}(C)) < \varepsilon$ (*unde* $\bar{u} : (0,T) \to (0,T) \times P, \bar{u}(t) = (t, u(t))$).

(T_5) *Există un integrant inf-compact* $\Psi : (0,T) \times P \to [0, +\infty]$ *a.î.* $\sup_{u \in U} \int_0^T \Psi(t, u(t))dt < +\infty$.

(T_6) $\forall \varepsilon > 0$, *există o multifuncţie măsurabilă* $\Gamma : (0,T) \to \mathcal{K}_P$ *a.î.* $\sup_{u \in U} \mu(\{t \in (0,T) : u(t) \notin \Gamma(t)\}) < \varepsilon$.

Oricare dintre aceste condiţii este echivalentă cu faptul că U este mulţime asimptotic mărginită de funcţii.

2.5 Observaţii. (i) În cazul particular în care $P = \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$ este asimptotic mărginită dacă şi numai dacă verifică condiţia

(T_7) $\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0$ *astfel încît* $\sup_{u \in U} \mu(\{t \in (0,T) : \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m} > k\}) < \varepsilon$.

Această condiţie justifică denumirea de mulţime asimptotic mărginită.

(ii) Oricare ar fi $U \subseteq L^p(0,T;\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m)$, L^p-mărginită, U este asimptotic mărginită.

Dacă locul lui $\mathbb{R}^m$ se consideră un spaţiu Banach infinit dimensional rezultatul nu se mai păstrează. Să considerăm de exemplu mulţimea $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^1(0,1;C[0,1])$ prezentată în observaţia 1.3; U este L^1-mărginită: $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_{L^1} = \int_0^1 \|u_n(t)\|_{C[0,1]}dt = \|f_n\|_{C[0,1]} = 1$.

Dacă am presupune că U este asimptotic mărginită ar exista un compact $K \subseteq C[0,1]$ a.î. $\mu(u_n^{-1}(C[0,1] \setminus K)) < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$; de aici ar rezulta că $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$ ceea ce este imposibil căci această mulţime nu este echicontinuă în punctul 1.

3 Compacitate în $(\mathcal{Y}(P), \mathcal{S}_P)$

Condiţia de asimptotică mărginire joacă un rol important în caracterizarea mulţimilor compacte din spaţiul $(\mathcal{Y}(P), \mathcal{S}_P)$. Deoarece acest spaţiu este metrizabil, compacitatea mulţimilor este echivalentă cu secvenţiala compacitate a lor. Următorul rezultat este un caz particular al teoremei de compacitate a lui Prohorov; el se poate găsi în monografia lui J. Warga din 1972 (vezi [12]).

3.1 Teoremă. *Dacă P este un spaţiu polonez compact atunci $(\mathcal{Y}(P), \mathcal{S}_P)$ este spaţiu metric compact.*

3.2 Teoremă (teorema lui Prohorov-teorema 4.3.5 din [3]).

Fie P un spaţiu polonez; o mulţime $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{Y}(P)$ este $\mathcal{S}_P$ - secvenţial compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{U}$ este asimptotic mărginită.

3.3 Observaţie. Fie $U \subseteq \mathcal{M}(P) \subseteq \mathcal{Y}(P)$ o mulţime asimptotic mărginită; atunci U este $\mathcal{S}_P$ - relativ compactă. În particular, orice mulţime $U \subseteq L^1(0,T;\mathbb{R}^m)$ L^1 - mărginită este $\mathcal{S}_P$ - relativ compactă deci şi secvenţial compactă. Orice şir $(u_n)_n \subseteq U$ admite astfel un subşir $(u_{k_n})_n$ $\mathcal{S}_P$-convergent la o măsură $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(P)$.

Dacă supp$\mathcal{T}_t$ este format, aproape pentru toţi $t \in (0,T)$, dintr-un punct $\{u(t)\}$ atunci $u \in \mathcal{M}(P), \mathcal{T} = \mathcal{T}^u$ şi $u_{k_n} \xrightarrow{\mu} u$.

Vom introduce acum o operaţie de produs între măsurile Young şi vom studia comportarea proprietăţii de compacitate faţă de această operaţie. Remarcăm că nu este vorba de operaţia de produs fibrat al măsurilor Young introdusă şi studiată în [3] ci de un alt tip de produs introdus de M. Valadier în [11].

Fie P_1 şi P_2 două spaţii poloneze şi fie $\Omega_1 = (0, T_1), \Omega_2 = (0, T_2)$ dotate cu σ - algebrele mulţimilor măsurabile Lebesgue $\mathcal{A}_1$ şi respectiv $\mathcal{A}_2$ şi cu măsurile Lebesgue μ_1, μ_2. Definiţiile pe care le vom da sînt cazuri particulare ale unor situaţii mult mai generale.

Fie $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu = \mu_1 \otimes \mu_2, P = P_1 \times P_2$ şi $\mathcal{B}_P = \mathcal{B}_{P_1} \otimes \mathcal{B}_{P_2}$.

Aplicaţia $\varphi : (\Omega_1 \times P_1) \times (\Omega_2 \times P_2) \to \Omega \times P$ definită prin $\varphi(t_1, x_1, t_2, x_2) = ((t_1, t_2), (x_1, x_2))$ este măsurabilă.

Dacă $\mathcal{T}^1 \in \mathcal{Y}(\Omega_1, P_1)$ şi $\mathcal{T}^2 \in \mathcal{Y}(\Omega_2, P_2)$ atunci definim $\mathcal{T} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P \to \mathbb{R}_+$ prin $\mathcal{T}(E) = (\mathcal{T}^1 \otimes \mathcal{T}^2)(\varphi^{-1}(E))$.

$\mathcal{T}$ este o măsură pe $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_P$ şi, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{T}(A \times P) = (\mathcal{T}^1 \otimes \mathcal{T}^2)(\varphi^{-1}(A \times P))$. Fie $E = \varphi^{-1}(A \times P) = \{(t_1, x_1, t_2, x_2) : (t_1, t_2) \in A\}$; atunci

$$(\mathcal{T}^1 \otimes \mathcal{T}^2)(E) = \int_{\Omega_1 \times P_1} \mathcal{T}^2(E_{(t_1,x_1)}) d\mathcal{T}^1(t_1, x_1).$$

Dar $E_{(t_1,x_1)} = A_{t_1} \times P_2$ de unde $\mathcal{T}^2(E_{(t_1,x_1)}) = \mu_2(A_{t_1})$ deci

$$(\mathcal{T}^1 \otimes \mathcal{T}^2)(E) = \int_{\Omega_1 \times P_1} \mu_2(A_{t_1}) d\mathcal{T}^1(t_1, x_1) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{P_1} \mu_2(A_{t_1}) d\tau^1_{t_1}(x_1) \right) d\mu_1(t_1)$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2(A_{t_1}) d\mu_1(t_1) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \mu(A).$$

Rezultă că $\mathcal{T}$ este o măsură Young pe $P = P_1 \times P_2$.

Vom nota această măsură $\mathcal{T} = \mathcal{T}^1 \dot{\otimes} \mathcal{T}^2$ şi o vom numi **măsura produs** a măsurilor $\mathcal{T}^1$ şi $\mathcal{T}^2$ pe spaţiul P.

Fie $E = A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}_P$; atunci, $\forall (t_1, x_1), \big(\varphi^{-1}(E)\big)_{(t_1,x_1)} = A_{t_1} \times B_{x_1}$ şi, aplicînd teorema lui Fubini obţinem:

$$(\mathcal{T}^1 \dot{\otimes} \mathcal{T}^2)(E) = (\mathcal{T}^1 \otimes \mathcal{T}^2)(\varphi^{-1}(E)) = \int_{\Omega_1 \times P_1} \mathcal{T}^2 \left((\varphi^{-1}(E))_{(t_1,x_1)} \right) d\mathcal{T}^1(t_1, x_1) =$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{P_2} \mathcal{T}^2(A_{t_1} \times B_{x_1}) d\tau^1_{t_1}(x_1) \right) d\mu_1(t_1) =$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{P_1} \left(\int_{A_{t_1}} \tau^2_{t_2}(B_{x_1}) d\mu_2(t_2) \right) d\tau^1_{t_1}(x_1) \right] d\mu_1(t_1) =$$

$$= \int_{\Omega_1}\int_{A_{t_1}} \underbrace{\left(\int_{P_1} \tau^2_{t_2}(B_{x_1})d\tau^1_{t_1}(x_1)\right)}_{(\tau^1_{t_1}\otimes\tau^2_{t_2})(B)} d\mu_2(t_2)d\mu_1(t_1) =$$

$$= \int_{\Omega_1}\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_{t_1}}(t_2)\cdot(\tau^1_{t_1}\otimes\tau^2_{t_2})(B)d\mu_2(t_2)d\mu_1(t_1) = \int_A (\tau^1_{t_1}\otimes\tau^2_{t_2})(B)d\mu(t).$$

Pe de altă parte, $\mathcal{T}(E) = \int_A \tau_t(B)d\mu(t)$, de unde $\tau_t = \tau^1_{t_1}\otimes\tau^2_{t_2}$, aproape pentru toţi $t\in\Omega$.

3.4 Teoremă.

(i) Dacă $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{Y}(\Omega_1,P_1)$ şi $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{Y}(\Omega_2,P_2)$ sînt asimptotic mărginite atunci

$$\mathcal{U}_1\otimes\mathcal{U}_2 = \{\mathcal{T}^1\dot\otimes\mathcal{T}^2 : \mathcal{T}^1\in\mathcal{U}_1, \mathcal{T}^2\in\mathcal{U}_2\}$$

este asimptotic mărginită.

(ii)Fie $(\mathcal{T}^{1,n})_n \subseteq \mathcal{Y}(\Omega_1,P_1), \mathcal{T}^1 \in \mathcal{Y}(\Omega_1,P_1), (\mathcal{T}^{2,n})_n \subseteq \mathcal{Y}(\Omega_2,P_2), \mathcal{T}^2 \in \mathcal{Y}(\Omega_2,P_2)$ aşa fel încît $\mathcal{T}^{1,n} \xrightarrow{\mathcal{S}_{P_1}} \mathcal{T}^1$ şi $\mathcal{T}^{2,n} \xrightarrow{\mathcal{S}_{P_2}} \mathcal{T}^2$; atunci

$$\mathcal{T}^{1,n}\dot\otimes\mathcal{T}^{2,n} \xrightarrow{\mathcal{S}_P} \mathcal{T}^1\dot\otimes\mathcal{T}^2.$$

Demonstraţie. (i) $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ fiind asimptotic mărginite, pentru orice $\varepsilon>0, \exists K_1\in\mathcal{K}_{P_1}, \exists K_2\in\mathcal{K}_{P_2}$ aşa fel încît $\mathcal{T}^1(\Omega_1\times(P_1\setminus K_1)) < \varepsilon_1, \forall\mathcal{T}^1\in\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{T}^2(\Omega_2\times(P_2\setminus K_2)) < \varepsilon_2, \forall\mathcal{T}^2\in\mathcal{U}_2$, unde am notat $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2T_2}$ şi $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2T_1}$. Atunci $K = K_1\times K_2 \in\mathcal{K}_P$; $\forall\mathcal{T} = \mathcal{T}^1\dot\otimes\mathcal{T}^2\in\mathcal{U}_1\otimes\mathcal{U}_2$ avem:

$$\mathcal{T}(\Omega\times(P\setminus K)) = (\mathcal{T}^1\dot\otimes\mathcal{T}^2)(\varphi^{-1}(\Omega\times(P\setminus K)) =$$

$$= (\mathcal{T}^1\dot\otimes\mathcal{T}^2)(\varphi^{-1}(\Omega\times[(P_1\setminus K_1)\times K_2\cup P_1\times(P_2\setminus K_2)])) =$$

$$= (\mathcal{T}^1\dot\otimes\mathcal{T}^2)(\varphi^{-1}(\Omega\times(P_1\setminus K_1)\times K_2)\cup\varphi^{-1}(\Omega\times(P_1\times(P_2\setminus K_2)))) =$$

$$= (\mathcal{T}^1\dot\otimes\mathcal{T}^2)(\Omega_1\times(P_1\setminus K_1)\times\Omega_2\times K_2) + (\mathcal{T}^1\dot\otimes\mathcal{T}^2)(\Omega_1\times P_1\times\Omega_2\times(P_2\setminus K_2)) =$$

$$= \mathcal{T}^1(\Omega_1\times(P_1\setminus K_1))\cdot\mathcal{T}^2(\Omega_2\times K_2) + \mathcal{T}^1(\Omega_1\times P_1)\cdot\mathcal{T}^2(\Omega_2\times(P_2\setminus K_2)) <$$

$$< \varepsilon_1\cdot T_2 + T_1\cdot\varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Rezultă că $\mathcal{U}_1\otimes\mathcal{U}_2$ este asimptotic mărginită.

(ii) Să presupunem că $(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})_n$ nu este $\mathcal{S}_P$ - convergent la $\mathcal{T}^1\dot{\otimes}\mathcal{T}^2$; fie atunci $\varepsilon_0 > 0, A_0 \in \mathcal{A}, f_0 \in C_b(P)$ şi fie un subşir al lui $(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})_n$ (notat tot $(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})_n$) aşa fel încît

$$\left|(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})(\mathbb{1}_{A_0}\otimes f_0) - (\mathcal{T}^1\dot{\otimes}\mathcal{T}^2)(\mathbb{1}_{A_0}\otimes f_0)\right| \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $(\mathcal{T}^{1,n})_n$ şi $(\mathcal{T}^{2,n})_n$ sînt stabil convergente ele sînt stabil relativ compacte şi atunci teorema lui Prohorov (teorema 3.2) ne asigură că ele sînt asimptotic mărginite. Punctul (i) ne asigură că $\{\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n} : n \in \mathbb{N}\}$ este asimptotic mărginită şi atunci, utilizînd din nou teorema lui Prohorov, şirul $(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})_n$ are un subşir (notat tot $(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})_n$) convergent la o măsură Young $\sigma \in \mathcal{Y}(\Omega, P)$. Atunci acest subşir verifică următoarele două condiţii:

$$\left|(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})(\mathbb{1}_{A_0}\otimes f_0) - (\mathcal{T}^1\dot{\otimes}\mathcal{T}^2)(\mathbb{1}_{A_0}\otimes f_0)\right| \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

$$\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n} \xrightarrow{\mathcal{S}_P} \sigma. \tag{2}$$

Oricare ar fi $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, f_1 \in C_b(P_1), f_2 \in C_b(P_2), A = A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$ şi $f = f_1 \otimes f_2 \in C_b(P)$; din (2) rezultă că

$$(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})(\mathbb{1}_A\otimes f) \to \sigma(\mathbb{1}_A\otimes f).$$

Dar

$$(\mathcal{T}^{1,n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{2,n})(\mathbb{1}_A\otimes f) = (\mathcal{T}^{1,n}\otimes\mathcal{T}^{2,n})\left((\mathbb{1}_A\otimes f)\circ\varphi\right) =$$
$$= (\mathcal{T}^{1,n}\otimes\mathcal{T}^{2,n})(\mathbb{1}_{A_1}\otimes f_1, \mathbb{1}_{A_2}\otimes f_2) = \mathcal{T}^{1,n}(\mathbb{1}_{A_1}\otimes f_1)\cdot\mathcal{T}^{2,n}(\mathbb{1}_{A_2}\otimes f_2) \to$$
$$\to \mathcal{T}^1(\mathbb{1}_{A_1}\otimes f_1)\cdot\mathcal{T}^2(\mathbb{1}_{A_2}\otimes f_2).$$

Rezultă că

$$\sigma(\mathbb{1}_A\otimes f) = \mathcal{T}^1(\mathbb{1}_{A_1}\otimes f_1)\cdot\mathcal{T}^2(\mathbb{1}_{A_2}\otimes f_2) = (\mathcal{T}^1\dot{\otimes}\mathcal{T}^2)(\mathbb{1}_A\otimes f).$$

Mulţimile de forma $A_1 \times A_2$ formează un semi-inel şi, dacă două măsuri coincid pe un semi-inel, coincid pe σ-inelul generat. Deci

$$\sigma(\mathbb{1}_A\otimes f) = (\mathcal{T}^1\dot{\otimes}\mathcal{T}^2)(\mathbb{1}_A\otimes f), \forall A \in \mathcal{A}, \forall f = f_1\otimes f_2 \in C_b(P)$$

Fie acum $\bar{P}_1$ şi $\bar{P}_2$ două spaţii poloneze compacte în care P_1 şi P_2 se scufundă dens.

$\forall f \in C_b(P)$ fie $(f_n)_n$ şirul transformatelor Yosida ale lui f:
$f_n(x) = \inf\{f(y) + n \cdot d(x,y) : y \in P\}, \forall n \in \mathbb{N}$, unde d este o metrică compatibilă pe P.

Atunci, f_n este funcţie Lipschitz, $\forall n \in \mathbb{N}$, şi $f_n \uparrow f$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu $\bar{f}_n$ prelungirea Lipschitz a funcţiei f_n la spaţiul $\bar{P} = \bar{P}_1 \times \bar{P}_2$.

O consecinţă a teoremei Stone-Weierstrass ne asigură că mulţimea $\{\sum_{i=1}^n f_1^i \cdot f_2^i : n \in \mathbb{N}, f_1^i \in C(\bar{P}_1), f_2^i \in C(\bar{P}_2), \forall i = 1, ..., n\}$ este densă în $C(\bar{P})$. Atunci, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists k_n \in \mathbb{N}, \exists f_1^1, ..., f_1^{k_n} \in C(\bar{P}_1), \exists f_2^1, ..., f_2^{k_n} \in C(\bar{P}_2)$ a.î.

$$\sup_{x=(x_1,x_2)\in\bar{P}} |\bar{f}_n(x) - \sum_{i=1}^{k_n} f_1^i(x_1) \cdot f_2^i(x_2)| < \varepsilon.$$

Rezultă imediat de aici că

$$\sigma(\mathbb{1}_A \otimes f_n) = (\mathcal{T}^2 \dot{\otimes} \mathcal{T}^2)(\mathbb{1}_A \otimes f_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

şi, deoarece $f_n \uparrow f$, teorema convergenţei monotone ne asigură că

$$\sigma(\mathbb{1}_A \otimes f) = (\mathcal{T}^1 \dot{\otimes} \mathcal{T}^2)(\mathbb{1}_A \otimes f), \forall A \in \mathcal{A}, \forall f \in C_b(P).$$

Din ultima relaţie rezultă că $\mathcal{T}^1 \dot{\otimes} \mathcal{T}^2 = \sigma$ ceea ce face ca relaţiile (1) şi (2) să fie contradictorii.

■

4 Rezultate de compacitate tare în $L^p(0,T;B)$

În această secţiune vom reaminti trei rezultate de compacitate tare în spaţiul $L^p(0,T;B)$, unde B este un spaţiu Banach separabil. Vom arăta că în esenţă aceste teoreme adaugă condiţiei de concentraţie tare o condiţie de asimptotică mărginire.

Vom demonstra că asimptotica mărginire plus o condiţie de concentraţie slabă caracterizează compacitatea în măsură. Pe baza acestui rezultat vom prezenta teorema lui Rossi-Savaré.

Fie deci B un spaţiu Banach separabil, $1 \leq p < +\infty$ şi fie $L^p(0,T;B)$ spaţiul funcţiilor cu valori în B p-integrabile Bochner.

4.1 Definiţie. O mulţime $U \subseteq L^p(0,T;B)$ satisface condiţia de **concentraţie tare**, sau condiţia (CT) dacă verifică relaţia:

$$(CT) \qquad \lim_{h\downarrow 0} \sup_{u\in U} \int_0^{T-h} \|u(t+h) - u(t)\|_B^p dt = 0.$$

4.2 Definiţie. O mulţime $U \subseteq L^p(0,T;B)$ se numeşte p-**uniform integrabilă** dacă verifică una dintre următoarele două condiţii echivalente:

$$\lim_{a\to+\infty} \sup_{u\in U} \int_{(\|u\|_B \geq a)} \|u\|_B^p dt = 0. \tag{1}$$

$$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{u\in U} \int_A \|u\|_B^p dt = 0. \tag{2}$$

4.3 Observaţii. (i) Dacă $U \subseteq L^p(0,T;B)$ este p-uniform integrabilă atunci U este L^p-mărginită. Într-adevăr, din condiţia de p-uniformă integrabilitate rezultă că există $a > 0$ a.î., $\forall u \in U, \int_{(\|u\|_B \geq a)} \|u\|_B^p dt < 1$; atunci $\sup_{u\in U} \|u\|_{L^p} < (1 + a^p \cdot T)^{\frac{1}{p}}$.

(ii) Dacă $1 \leq p < q < +\infty$ şi U este mărginită în $L^q(0,T;B) \subseteq L^p(0,T;B)$ atunci U este p-uniform integrabilă. Într-adevăr, dacă $\sup_{u\in U} \|u\|_{L^q} \leq M$ atunci, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\sup_{u\in U} \int_A \|u\|_B^p dt \leq (\mu(A))^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_A \|u\|_B^q dt\right)^{\frac{p}{q}} \leq (\mu(A))^{\frac{q-p}{q}} \cdot M^p.$$

Condiţia (2) din definiţia 4.2 ne arată că U este p-uniform integrabilă.

Reamintim un rezultat de compacitate clasic datorat lui Vitali.

4.4 Teoremă. *Mulţimea $U \subseteq L^p(0,T;B)$ este tare relativ compactă dacă şi numai dacă U este relativ compactă în măsură şi p-uniform integrabilă.*

4.5 Propoziţie. *Fie $U \subseteq L^p(0,T;B)$ o mulţime L^p-mărginită. Dacă U verifică condiţia de concentraţie tare* (CT) *atunci U este p-uniform integrabilă.*

Demonstraţie. Deoarece $|\|u(t+h)\|_B - \|u(t)\|_B| \leq \|u(t+h) - u(t)\|_B$ rezultă din condiţia (CT):

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{u\in U} \int_0^{T-h} |\|u(t+h)\|_B - \|u(t)\|_B|^p dt = 0.$$

Deoarece U este mărginită în L^p, forma scalară a teoremei lui Riesz-Fréchet-Kolmogorov (teorema 1.1) ne spune că mulţimea $\{\|u\|_B : u \in U\}$ este relativ compactă în topologia tare a spaţiului $L^p(0,T;\mathbb{R})$. Teorema precedentă ne asigură că U este p-uniform integrabilă. $\blacksquare$

4.6 Teoremă (teorema Lions-Aubin - vezi [4] pentru spaţii Hilbert şi [1]). *Fie* $U \subseteq L^p(0,T;B)$ *o mulţime care verifică condiţia* (CT). *Presupunem că există un spaţiu Banach* $B_0 \Subset B$ *(*B_0 *este scufundat compact în* B*) aşa fel încît* U *este* L^p*-mărginită în* $L^p(0,T;B_0)$*; atunci* U *este relativ compactă în topologia tare a spaţiului* $L^p(0,T;B)$*.*

4.7 Teoremă (teorema lui Gutman - vezi [7]).

Fie $U \subseteq L^p(0,T;B)$ *o mulţime* L^p*-mărginită care verifică condiţia* (CT) *şi în plus condiţia:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{K}_B \text{ astfel încît } \sup_{u \in U} \mu(u^{-1}(B \setminus K)) < \varepsilon.$$

Atunci U *este relativ compactă în topologia tare a spaţiului* $L^p(0,T;B)$*.*

4.8 Teoremă. *Fie* $B_0 \Subset B$ *un spaţiu Banach scufundat compact în* B *şi fie* $U \subseteq L^p(0,T;B_0) \subseteq L^p(0,T;B)$ *o mulţime mărginită în* $L^p(0,T;B)$ *care verifică condiţia* (CT) *şi în plus:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0 \text{ a.î. } \sup_{u \in U} \mu\left(\{t \in (0,T) : \|u(t)\|_{B_0} > k\}\right) < \varepsilon.$$

Atunci U *este tare relativ compactă în* $L^p(0,T;B)$*.*

4.9 Observaţie. În ultimele trei teoreme apare condiţia (CT) plus o condiţie de asimptotică mărginire. Într-adevăr, în teorema 4.6 se poate defini aplicaţia $\varphi : B \to [0,+\infty]$ prin $\varphi(x) = \begin{cases} \|x\|_{B_0}^p & , x \in B_0, \\ +\infty & , x \in B \setminus B_0. \end{cases}$ Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}_+, \varphi^{-1}([0,a]) = \{x \in B_0 : \|x\|_{B_0} \leq a^{\frac{1}{p}}\}$ este mărginită în B_0 deci relativ compactă şi închisă în B deci compactă; astfel φ este aplicaţie inf-compactă. În plus, deoarece, $\forall u \in U, u((0,T)) \subseteq B_0$,

$$\sup_{u \in U} \int_0^T \varphi(u(t))dt = \sup_{u \in U} \int_0^T \|u(t)\|_{B_0}^p dt < +\infty.$$

Aceasta este chiar condiţia (T_2) din corolarul 2.4

În teorema 4.7 condiţia care apare este condiţia (T_1) din corolarul 2.4. Condiţia care apare în teorema 4.8 spune că $\forall \varepsilon > 0, \exists K = \{x \in B_0 : \|x\|_{B_0} \leq k\} \in \mathcal{K}_B$ aşa fel încît

$$\sup_{u \in U} \mu(u^{-1}(B \setminus K)) = \sup_{u \in U} \mu(\{t \in (0,T) : \|u(t)\|_{B_0} > k\}) < \varepsilon.$$

Rezultatul următor caracterizează compacitatea tare ca fiind asimptotică mărginire plus o condiţie de concentraţie slabă.

4.10 Teoremă. *I. Fie P un spaţiu polonez şi fie $U \subseteq \mathcal{M}(P)$ o mulţime asimptotic mărginită. Presupunem că există o aplicaţie inferior semi-continuă $e : P \times P \to [0, +\infty]$, cu proprietatea că $e(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, aşa fel încît*

$$(CS) \qquad \lim_{h \downarrow 0} \sup_{u \in U} \int_0^{T-h} e(u(t+h), u(t)) dt = 0.$$

Atunci U este relativ compactă în măsură.

II. Reciproc, dacă $U \subseteq \mathcal{M}(P)$ este relativ compactă în măsură atunci U este asimptotic mărginită şi verifică condiţia de concentraţie slabă (CS) pentru orice metrică continuă şi mărginită, $e : P \times P \to \mathbb{R}_+$.

Demonstraţie. I. Presupunem că $U \subseteq \mathcal{M}(P)$ este asimptotic mărginită şi verifică condiţia (CS) cu aplicaţia inferior semi-continuă $e : P \times P \to [0, +\infty]$ care se anulează numai pe diagonala $\triangle_P$ a lui P.

Aşa cum am observat topologia convergenţei în măsură pe $\mathcal{M}(P)$ este metrizabilă; astfel U este relativ compactă în măsură dacă şi numai dacă este secvenţial compactă. Fie deci $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}(P)$. Deoarece U este asimptotic mărginită, teorema lui Prohorov (teorema 3.2) ne asigură că există un subşir al lui $(u_n)_n$ (pe care îl vom nota tot $(u_n)_n$) convergent stabil la o măsură Young: $u_n \xrightarrow{\mathcal{S}_P} \mathcal{T} \in \mathcal{Y}(P)$. Pentru a arăta că $(u_n)_n$ este convergent în măsură este suficient să demonstrăm că $\mathcal{T}$ este o masură Young elementară asociată unei funcţii măsurabile $u \in \mathcal{M}(P)$ căci, în acest caz, $u_n \xrightarrow{\mu} u$.

Vom arăta că, a.p.t. $t \in (0, T)$, $\mathrm{supp}(\tau_t)$ este format dintr-un singur punct $\{u(t)\}$. Vom parcurge pentru aceasta trei etape:

$$(1) \qquad \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^{T-s} \left[\iint_{P \times P} e(u, v) d(\tau_{t+s} \otimes \tau_t)(u, v) \right] dt ds = 0.$$

$$(2) \qquad \int_0^T \left[\iint_{P \times P} e(u, v) d\tau_t(u) d\tau_t(v) \right] dt = 0.$$

(3) $\mathrm{supp}(\tau_t)$ este format dintr-un singur punct, a.p.t. $t \in (0, T)$.

(1) Fie $r(h) = \sup_{s\in(0,h]} \sup_n \int_0^{T-s} e(u_n(t+s), u_n(t))dt$. Din condiţia (CS), $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ a.î. $\forall h \in (0,\delta), \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{T-h} e(u_n(t+h), u_n(t))dt < \varepsilon$.

$\forall h \in (0,\delta)$; $\forall s \in (0,h], 0 < s < \delta$ şi deci

$$\sup_n \int_0^{T-s} e(u_n(t+s), u_n(t))dt \le \varepsilon \text{ de unde}$$

$$\sup_{s\in(0,h]} \sup_n \int_0^{T-s} e(u_n(t+s), u_n(t))dt \le \varepsilon$$

şi deci $\boxed{\lim_{h\downarrow 0} r(h) = 0}$

$\forall h > 0, \forall s \in (0,h], \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{T-s} e(u_n(t+s), u_n(t))dt \le r(h)$. Integrăm ultima relaţie după $s \in (0,h]$ şi obţinem:

$$\int_0^h \left[\int_0^{T-s} e(u_n(t+s), u_n(t))dt\right] ds \le h \cdot r(h), \text{ sau}$$

$$(*) \qquad \iint_{A(h)} e(u_n(t+s), u_n(t))dtds \le h \cdot r(h), \forall h > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

unde am notat $A(h) = \{(s,t) \in (0,T) \times (0,T) : s \in (0,h], 0 < t \le T - s\}$. Vom face schimbarea de variabilă $s \mapsto s - t, t \mapsto t$ în baza căreia $(*)$ devine

$$(**) \qquad \iint_{B(h)} e(u_n(s), u_n(t))dsdt \le h \cdot r(h), \forall h > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

unde $B(h) = \{(s,t) \in (0,T) \times (0,T) : 0 < t < T, t < s \le t + h\}$.

Teorema 3.4 ne asigură că $\mathcal{T}^{u_n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{u_n} \xrightarrow{\mathcal{S}_{(0,T)\times(0,T)}} \mathcal{T}\dot{\otimes}\mathcal{T}$ şi, deoarece $\Lambda(s,t,x,y) = \mathbb{1}_{B(h)}(s,t) \cdot e(x,y)$ defineşte un integrant i.s.c. şi pozitiv, din propoziţia 2.1.12 din [3],

$$(\mathcal{T}\dot{\otimes}\mathcal{T})(\Lambda) \le \liminf_n (\mathcal{T}^{u_n}\dot{\otimes}\mathcal{T}^{u_n})(\Lambda),$$

sau, utilizînd şi $(**)$,

$$(***) \qquad \iint_{B(h)} \left[\iint_{P\times P} e(x,y)d(\tau_t \otimes \tau_s)(x,y)\right] dtds \le$$

$$\leq \liminf_n \iint_{B(h)} e(u_n(t), u_n(s))dtds \leq h \cdot r(h).$$

Aplicînd schimbarea de variabilă inversă $s \mapsto t+s, t \mapsto t$ obţinem

$$\iint_{B(h)} \left[\iint_{P\times P} e(x,y)d(\tau_t \otimes \tau_s)(x,y)\right] dtds =$$

$$= \iint_{A(h)} \left[\iint_{P\times P} e(x,y)d(\tau_{t+s} \otimes \tau_t)(x,y)\right] dtds$$

şi, utilizînd $(***)$,

$$\int_0^h \int_0^{T-s} \left[\iint_{P\times P} e(x,y)d(\tau_{t+s} \otimes \tau_t)(x,y)\right] dtds \leq h \cdot r(h)$$

care, ţinînd cont de relaţia încadrată, ne conduce la (1).

Pentru a demonstra (2) avem nevoie de două leme:

4.11 Lemă. *Fie $\mathcal{T} = (\tau_t)_{t\in(0,T)} \in \mathcal{Y}((0,T)P)$; pentru orice $S < T$ vom nota tot cu $\mathcal{T}$ restricţia la $(0,S)$.*

Oricare ar fi $h \in (0, T-S)$ definim $\tau^h : (0,S) \to \mathcal{P}(P)$ prin $\tau_t^h = \tau_{t+h}$.

Atunci $(\mathcal{T}^h)_{h\in(0,T-S)} \subseteq \mathcal{Y}((0,S),P)$ şi $\mathcal{T}^h \xrightarrow[h\to 0]{\mathcal{S}_{(0,S)}} \mathcal{T}$.

Demonstraţie. Întîi observăm că, $\forall C \in \mathcal{B}_P$, aplicaţia $t \mapsto \tau_t^h(C)$ este $(\mathcal{A}|_S - \mathcal{B}_P)$-măsurabilă. Într-adevăr, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, (\tau_{\cdot+h}(C))^{-1}(B) = -h + (\tau_{\cdot}(C))^{-1}(B) \in \mathcal{A}|_S$. Deci $(\mathcal{T}^h)_{h\in(0,T-S)} \subseteq \mathcal{Y}((0,S),P)$.

Reuniunile finite şi disjuncte de intervale formează o algebră ce generează σ-algebra $\mathcal{A}|_S$ pe $(0,S)$ şi atunci

$$\mathcal{T}^h \xrightarrow[h\to 0]{\mathcal{S}_{(0,S)}} \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{T}^h(\mathbb{1}_A \otimes f) \xrightarrow[h\to 0]{} \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes f), \forall A = (a,b) \subseteq (0,S), \forall f \in C_b(P).$$

Fie deci $A = (a,b) \subseteq (0,S)$ şi $f \in C_b(P)$. Funcţia definită prin $\varphi(t) = \int_P f(x)d\tau_t(x)$ este din $L^1(0,T)$ şi atunci, folosind proprietatea de invarianţă la translaţii a măsurii Lebesgue,

$$\mathcal{T}^h(\mathbb{1}_A \otimes f) = \int_0^S \mathbb{1}_A(t) \cdot \varphi(t+h)dt = \int_h^{S+h} \mathbb{1}_{h+A}(t) \cdot \varphi(t)dt =$$

$$= \int_h^{S+h} \mathbb{1}_{(a+h,b+h)}(t) \cdot \varphi(t)dt = \int_{a+h}^{b+h} \varphi(t)dt =$$

$$= \int_a^b \varphi(t)dt + \int_b^{b+h} \varphi(t)dt - \int_a^{a+h} \varphi(t)dt.$$

Dar

$$\left| \int_b^{b+h} \varphi(t)dt \right| \le \|f\|_\infty \cdot h \text{ şi } \left| \int_a^{a+h} \varphi(t)dt \right| \le \|f\|_\infty \cdot h$$

şi deci $\mathcal{T}^h(\mathbb{1}_A \otimes f) \to \int_a^b \varphi(t)dt = \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes f)$ ■

4.12 Lemă. *Fie $e : P \times P \to [0, +\infty]$ o aplicaţie i.s.c. care se anulează numai pe diagonala lui P, $\triangle_P$; aplicaţia $\Psi : (0,T) \times P \to [0, +\infty]$ definită prin $\Psi(t,x) = \int_P e(x,y)d\tau_t(y), \forall (t,x) \in (0,T) \times P$, este un integrant i.s.c. şi pozitiv.*

Demonstraţie. Presupunem întîi că funcţia e este continuă şi mărginită pe $P \times P$; atunci Ψ este măsurabilă în raport cu t ($\tau.$ este măsură Young) şi continuă în raport cu x: $x_n \to x \Rightarrow e(x_n, y) \to e(x,y)$ şi deci $\int_P e(x_n,y)d\tau_t(y) \to \int_P e(x,y)d\tau_t(y)$. Rezultă atunci că Ψ este un integrant Carathéodory.

În cazul general, deoarece $P \times P$ este metrizabil, orice funcţie i.s.c. şi mărginită inferior pe $P \times P$ este limita unui şir crescător de funcţii continue şi mărginite (şirul transformatelor Yosida). Deci există $e_n : P \times P \to [0, +\infty)$ continue şi mărginite a.î. $e_n \uparrow e$. Aplicînd teorema convergenţei monotone obţinem:

$$\Psi_n(t,x) = \iint_{P \times P} e_n(x,y)d\tau_t(y) \uparrow \Psi(t,x).$$

Dar $(\Psi_n)_n$ este un şir de integranţi Carathéodory şi deci $\Psi = \sup_n \Psi_n$ este măsurabilă şi i.s.c. ■

(2) Revenim la demonstraţia lui (2). Cu notaţiile din lema 4.12 condiţia demonstrată la punctul (1) se rescrie:

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_0^h \int_0^{T-s} \int_P \Psi(t,x)d\tau_{t+s}(x)dtds = 0$$

de unde, facînd schimbarea de variabilă $s \mapsto hs, t \mapsto t$, fixînd un $\varepsilon > 0$ şi aplicînd lema lui Fatou, obţinem:

$$(!) \qquad 0 = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_0^h \int_0^{T-s} \int_P \Psi(t,x)d\tau_{t+s}(x)dtds =$$

$$= \liminf_{h \downarrow 0} \int_0^1 \int_0^{T-hs} \int_P \Psi(t,x)d\tau_{t+hs}(x)dtds \ge$$

$$\geq \liminf_{h\downarrow 0} \int_0^1 \int_0^{T-\varepsilon} \int_P \Psi(t,x) d\tau_{t+hs}(x) dt ds = \liminf_{h\downarrow 0} \int_0^1 \mathcal{T}^{hs}(\mathbb{1}_{(0,\,T\,-\,\varepsilon)} \cdot \Psi) ds$$

$$\geq \int_0^1 \liminf_{h\downarrow 0} \mathcal{T}^{hs}(\mathbb{1}_{(0,\,T\,-\,\varepsilon)} \cdot \Psi) ds.$$

Lema 4.11 ne asigură că $\mathcal{T}^{hs} \xrightarrow[h\to 0]{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ şi cum Ψ este i.s.c. şi pozitiv, aplicînd din nou propoziţia 2.1.12 din [3], obţinem:

$$\liminf_{h\downarrow 0} \mathcal{T}^{hs}(\mathbb{1}_{(0,\,T\,-\,\varepsilon)} \cdot \Psi) \geq \mathcal{T}(\mathbb{1}_{(0,\,T\,-\,\varepsilon)} \cdot \Psi).$$

Revenind la relaţia (!):

$$0 \geq \int_0^1 \mathcal{T}(\mathbb{1}_{(0,\,T\,-\,\varepsilon)} \cdot \Psi) ds = \mathcal{T}(\mathbb{1}_{(0,\,T\,-\,\varepsilon)} \cdot \Psi) = \int_0^{T-\varepsilon} \int_P \Psi(t,x) \tau_t(x) dt =$$

$$= \int_0^{T-\varepsilon} \int_P \int_P e(x,y) d\tau_t(x) d\tau_t(y) dt.$$

Deoarece $e \geq 0$ şi $\varepsilon > 0$ este arbitrar,

$$\int_0^T \left[\iint_{P\times P} e(x,y) d\tau_t(x) d\tau_t(y) \right] dt = 0$$

care este condiţia (2).

(3) Condiţia (2) ne conduce în mod evident la

$$\iint_{P\times P} e(x,y) d(\tau_t \otimes \tau_t)(x,y) = 0, \text{ a.p.t. } t \in (0,T)$$

sau

$$(\tau_t \otimes \tau_t)\left(\{(x,y) \in P \times P : e(x,y) > 0\}\right) = 0, \text{ a.p.t. } t \in (0,T)$$

ceea ce, ţinînd cont de proprietăţile funcţiei e, revine la

$$\operatorname{supp}(\tau_t \otimes \tau_t) \subseteq \triangle_P, \text{ a.p.t. } t \in (0,T).$$

Să presupunem că $\operatorname{supp}(\tau_t)$ ar conţine două puncte distincte $x, y \in P$; fie atunci U, V două mulţimi deschise în P a.î. $x \in U, y \in V$ şi $U \cap V = \emptyset$. Atunci $\tau_t(U) > 0$ şi $\tau_t(V) > 0$ de unde $(\tau_t \otimes \tau_t)(U \times V) = \tau_t(U) \cdot \tau_t(V) > 0$.

Pe de altă parte $(\tau_t \otimes \tau_t)(U \times V) = (\tau_t \otimes \tau_t)((U \times V) \cap \triangle_P) = (\tau_t \otimes \tau_t)(\emptyset) = 0$ ceea ce este absurd.

Rezultă că. a.p.t. $t \in (0,T)$, supp$\tau_t = \{u(t)\}$. Aplicaţia $u : (0,T) \to P$ este bine definită. Oricare ar fi $A \in \mathcal{B}_P$, $g_A : (0,T) \to \mathbb{R}$, definită prin $g_A(t) = \tau_t(A)$, este măsurabilă, de unde $u^{-1}(A) = \{t \in (0,T) : u(t) \in A\} = \{t \in (0,T) : g_A(t) = 1\} = g_A^{-1}(1) \in \mathcal{A}$. Rezultă că $u \in \mathcal{M}(P)$ şi că $\mathcal{T} = \mathcal{T}^u$.

II. Fie acum $U \subseteq \mathcal{M}(P)$ o mulţime relativ compactă în măsură; atunci aderanţa în măsură a sa, $\bar{U}$, este o mulţime compactă în spaţiul pseudometrizabil $\mathcal{M}(P)$ şi deci este compactă în spaţiul $(\mathcal{Y}(P), \mathcal{S})$; conform teoremei 3.2, $\bar{U}$ este asimptotic mărginită.

Fie acum $e : P \times P \to \mathbb{R}_+$ o metrică mărginită de $M > 0$ şi continuă faţă de topologia lui P; să arătăm că U verifică condiţia (CS) în raport cu e.

Definim,$\forall u, v \in \mathcal{M}(P)$, $\delta_e(u,v) = \int_0^T e((u(t), v(t))dt$.

δ_e este o pseudo-metrică pe $\mathcal{M}(P)$; să arătăm că δ_e este continuă în raport cu topologia convergenţei în măsură.

Dacă presupunem că există un şir $(u_n)_n \subseteq \mathcal{M}(P)$ convergent în măsură la $u \in \mathcal{M}(P)$ pentru care $\delta_e(u_n, u) \nrightarrow 0$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ şi există un subşir (notat tot $(u_n)_n$) a.î. $\delta_e(u_n, u) \geq \varepsilon_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Deoarece $u_n \xrightarrow{\mu} u$ putem presupune că $(u_n(t))_n$ este convergent în P la $u(t)$ a.p.t. $t \in (0,T)$ şi deci $e(u_n(t), u(t)) \to 0$ a.p.t. $t \in (0,T)$. Deoarece e este mărginită, rezultă din teorema lui Lebesgue că $\delta(u_n, u) = \int_0^T e(u_n(t), u(t))dt \to 0$ ceea ce contrazice $\delta_e(u_n, u) \geq \varepsilon_0$.

Deci $u_n \xrightarrow{\mu} u \Rightarrow \delta_e(u_n, u) \to 0$. Dacă şi $v_n \xrightarrow{\mu} v$ atunci

$$|\delta_e(u_n, v_n) - \delta_e(u,v)| \leq \delta_e(u_n, u) + \delta_e(v_n, v) \to 0.$$

Deci δ_e este continuă în raport cu topologia convergenţei în măsură şi astfel $(\bar{U}, \delta_e)$ este un spaţiu pseudometric compact.

Vom defini, $\forall h \in (0,T)$, $f_h : \bar{U} \to \mathbb{R}$ prin $f_h(u) = \int_0^{T-h} e(u(t+h), u(t))dt$. Oricare ar fi $u, v \in \bar{U}, \forall h \in (0,T)$,

$$|f_h(u) - f_h(v)| \leq \int_0^{T-h} |e(u(t+h), u(t)) - e(v(t+h), v(t))|dt \leq$$

$$\leq \int_0^{T-h} [e(u(t+h), v(t+h)) + e(u(t), v(t))]\, dt \leq 2\delta_e(u,v).$$

Rezultă că f_h sînt uniform Lipschitz pe $\bar{U}$ şi deci $A = \{f_h : h \in (0,T)\} \subseteq C(\bar{U}, \mathbb{R})$ este uniform echicontinuă. În plus, $\forall h \in (0,T)$,

$$|f_h(u)| \leq M(T-h) \leq M \cdot T, \forall u \in \bar{U}.$$

Deci mulţimea A este uniform mărginită. Teorema lui Arzelà-Ascoli ne asigură că A este relativ compactă în topologia convergenţei uniforme pe $C(\bar{U}, \mathbb{R})$.

Vom arăta acum că, $\forall u \in \bar{U}$, $\lim_{h\to 0} f_h(u) = 0$.

a). Dacă $u \in C(0,T;P)$ atunci $\lim_{h\to 0} u(t+h) = u(t), \forall t \in (0, T-h)$ şi cum e este mărginită,

$$f_h(u) = \int_0^{T-h} e(u(t+h), u(t))dt \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

b). $\forall u \in \mathcal{M}(P), \exists (u_p)_p \subseteq C((0,T;P)$ a.î. $u_p \to u$, a.p.t. şi deci $\delta_e(u_p, u) \to 0$. Rezultă că $\forall \varepsilon > 0, \exists p_0$ a.î. $\delta_e(u_{p_0}, u) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Din a), $f_h(u_{p_0}) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ şi deci $\exists \delta > 0$ a.î. $f_h(u_{p_0}) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall h < \delta$.

Atunci, $\forall h$ cu $0 < h < \delta$,

$$f_h(u) = f_h(u) - f_h(u_{p_0}) + f_h(u_{p_0}) \leq$$

$$\leq \int_0^{T-h} |e(u(t+h), u(t)) - e(u_{p_0}(t+h), u_{p_0}(t))|dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \int_0^{T-h} e(u(t+h), u_{p_0}(t+h))dt + \int_0^{T-h} e(u(t), u_{p_0}(t))dt + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= \int_h^{T} e(u(t), u_{p_0}(t))dt + \int_0^{T-h} e(u(t), u_{p_0}(t))dt + \frac{\varepsilon}{2} < 2\delta_e(u_{p_0}, u) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Deoarece $\lim_{h\to 0} f_h(u) = 0$ punctual şi $\{f_h : h \in (0,T)\}$ este compactă în topologia convergenţei uniforme rezultă că $\lim_{h\to 0} f_h(u) = 0$ uniform după $u \in U$ şi deci

$$\lim_{h\to 0} \sup_{u\in U} \int_0^{T-h} e(u(t+h), u(t))dt = 0$$

care este exact condiţia de concentraţie slabă (CS). ∎

Pe baza teoremei precedente putem demonstra cu uşurinţă teorema lui Rossi-Savaré şi, aşa cum am remarcat în observaţia 4.9, şi teoremele 4.6 (teorema Lions-Aubin), 4.7 (teorema lui Gutman) şi 4.8.

4.13 Teoremă (teorema Rossi-Savaré - vezi [9]).
Fie B un spaţiu Banach separabil, $1 \leq p < +\infty$ *şi* $U \subseteq L^p(0,T;B)$ *o mulţime* L^p*-mărginită.*

Dacă U verifică condiţia de concentraţie tare (CT) *şi este asimptotic mărginită atunci U este tare relativ compactă în* $L^p(0,T;B)$.

Demonstraţie. Fie aplicaţia $e : B \times B \to \mathbb{R}_+$ definită prin $e(x,y) = \|x-y\|_B^p, \forall x,y \in B$. Evident e este i.s.c. pe $B \times B$ şi $e(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. Condiţia (CT) este exact condiţia de concentraţie slabă în raport cu e din teorema 4.10. Deoarece U este asimptotic mărginită, conform punctului I al acestei teoreme, U este relativ compactă în măsură.

Propoziţia 4.5 ne spune că U este p-uniform integrabilă şi atunci teorema 4.4 ne asigură că U este tare relativ compactă. ∎

Bibliografie

[1] Aubin, J. P. – *Un théorème de compacité*, C. R. Acad. Sci. Paris, 256 (1963), 5042–5044.

[2] Brézis, H. – *Analyse fonctionnelle - Théorie et applications*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[3] Castaing, C., Raynaud de Fitte, P., Valadier, M. – *Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory*, Mathematics and its Applications, 571, Kluwer Academic Publ. Dordrecht, 2004.

[4] Lions, J. L. – *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 111, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1961.

[5] Florescu, L.C. and Godet–Thobie, C. – *A version of biting lemma for unbounded sequences in* L^1_E *with applications*, Mathematical analysis and applications, 58–73, AIP Conf. Proc. 835, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2006.

[6] Florescu, L.C. – *Finite tight sets*, Cent. Eur. J. Math. 5 (2007), no. 4, 619–638.

[7] Gutman, S. – *Compact perturbations of m–accretive operators in general Banach spaces*, SIAM J. Math. Anal. 13 (1982), 789–800.

[8] Rakotoson, J. M., Temam, R.– *An optimal compactness theorem and application to elliptic-parabolic systems*, Applied Mathematics Letters 14 (2001), 303–306.

[9] Rossi, R., Savaré, G. – *Tightness, integral equicontinuity and compactness for evolution problems in Banach spaces*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5) 2 (2003), no. 2, 395–431.

[10] Simon, J. – *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 146 (1987), 65–96.

[11] Valadier, M. – *Young measures*, Methods of nonconvex analysis (Varenna, 1989), 152–188, Lecture Notes in Math., 1446, Springer, Berlin, 1990.

[12] Warga, J. – *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, New York. London, 1972.