



FACULTY OF MATHEMATICS  
"ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY

**PREPRINT SERIES OF  
"ALEXANDRU MYLLER"  
MATHEMATICAL SEMINARY**

**PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES  
DANS L'ESPACE DE MESURES DE YOUNG**

**Liviu C. Florescu**

Nr. 01 – 2006

**ISSN 1843 – 0473**

$\int M$  **ALEXANDRU MYLLER**

Blvd. Carol I, 11, 700506 – Iași, ROMÂNIA  
<http://www.math.uaic.ro/~sm>

# Propriétés topologiques dans l'espace de mesures de Young\*

Liviu C. Florescu<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université "Al.I.Cuza", Faculté de Mathématiques, Bd. Carol I, 11, 700506 - Iași, Românie,  
e-mail: lfo@uaic.ro

## 1 Introduction

Le but de ce travail est de donner des nouvelles démonstrations pour quelques résultats topologiques fondamentaux dans la théorie des mesures de Young - des résultats de densité et de compacité.

D' une certaine façon, les mesures de Young généralisent les fonctions mesurables. Même si elles ont été introduites pour obtenir des solutions relaxées pour les problèmes variationnels, les mesures de Young représentent un outil important pour d'autres branches de l' analyse mathématique.

La théorie des mesures de Young est présentée dans le cadre général des espaces de Souslin réguliers ce qui permet d' inclure ici le cas particulier des espaces de Banach séparables muni avec la topologie faible.

L. C. Young ([You]) a construit les mesures dont il s'agit ensuite pour le cas particulier des espaces euclidiens. Le passage vers les espaces métrisables compacts a été fait par J. Warga ([War]) et au localement compacts par H. Berliocchi et J. M. Lasry ([BeL]). Le besoin de trouver des solutions relaxées pour les problèmes de contrôle dans des situations de plus en plus générales a conduit à l'élargissement de la théorie dans le cas des espaces polonais ou sousliniens (à voir les travaux de E.J. Balder - [Ba1], [Ba2], M. Valadier - [Va2], Ch. Castaing, P. Raynaud de Fitte et M. Valadier - [CRV]).

---

\*Ce travail a été soutenu par ANCS et CNCSIS parmi les grants 2-CEX06-11-10/25.07.2006, 2-CEX06-11-56/25.07.2006, CEX05-D11-23/05.10.2005, GR 214/20.09.2006

Dans la section 2 nous présentons la définition des mesures de Young et la topologie stable sur l'espace de mesures de Young.

La section 3 est dédiée aux sous-espaces partout denses dans l'espace de mesures de Young et la dernière section aux théorèmes de compacité.

## 2 Mesures de Young

Nous utiliserons les notations suivantes:

- $\Omega$  est un ensemble quelconque,
- $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre de sous-ensembles de  $\Omega$ ,
- $\mu \in ca^+(\mathcal{A})$  une mesure  $\sigma$ -additive et complète.
- $(S, \tau_S)$  désigne un espace souslinien régulier,
- $\mathcal{B}_S$  sont les boréliens de  $S$ .

Nous rappelons que  $S$  est un espace normal et radonien ( $ca(\mathcal{B}_S) = Rca(\mathcal{B}_S)$ ).

- $\mathcal{P}_S$  est la famille de toutes les probabilités sur  $S$  munie de la topologie étroite,

- $\mathcal{C}$  désigne la tribu borélienne de  $\mathcal{P}_S$ .
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  est la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$  muni de sa topologie usuelle,
- $\mathcal{B}_{[0,1]}$  est la tribu borélienne du sous-espace  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ .

Si  $X$  est un espace topologique quelconque et  $\mathcal{B}_X$  sa tribu borélienne, une application  $f : \Omega \rightarrow X$  est  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_X)$ -mesurable si  $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ , pour tout  $B \in \mathcal{B}_X$ .

- $\mathcal{M}(X)$  désigne l'ensemble de toutes les applications  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_X)$ -mesurables. En particulier, si  $X = \mathbb{R}$ , nous notons  $\mathcal{M}$  pour  $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ .

- Pour tout  $f \in \mathcal{M}(X)$ ,  $\bar{f}$  désigne l'ensemble de toutes les applications de  $\mathcal{M}(X)$   $\mu$ -presque partout ( $\mu$ -p.p.) égales avec  $f$ .

Si  $(X, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach séparable,

- $\mathcal{L}^1(\Omega, \mu, X) = \mathcal{L}^1(\mu, X) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \|f\|_1 = \int_{\Omega} \|f\| d\mu < +\infty\}$  et
- $L^1(\Omega, \mu, X) = L^1(\mu, X) = \{\bar{f} : f \in \mathcal{L}^1(\mu, X)\}$ .

Plus particulièrement,  $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(\mu, \mathbb{R})$  et  $L^1(\mu) = L^1(\mu, \mathbb{R})$ .

Pour les définitions et les propriétés des espaces polonais et sousliniens on peut consulter [Bo1], [Eng] ou bien [Sch].

**2.1 Définitions.** Un **intégrand** sur  $S$  est une application  $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_S)$ -mesurable,  $\Psi : \Omega \times S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

Un intégrand  $\Psi$  est dit  $L^1$ -**borné** s'il existe une application  $\phi \in L^1(\mu)$  telle que  $|\Psi(t, x)| \leq \phi(t)$ , pour tout  $t \in \Omega$  et pour tout  $x \in S$ .

$\Psi$  est dit **s.c.i.** (**s.c.s.**) si, pour tout  $t \in \Omega$ , l'application  $\Psi(t, \cdot)$  est s.c.i. (s.c.s.) sur  $S$ .

L'intégrand  $\Psi$  est un **intégrand de Carathéodory** si, pour tout  $t \in \Omega$ ,  $\Psi(t, \cdot)$  est continue sur  $S$ .

L'ensemble des intégrands de Carathéodory bornés sur  $\Omega \times S$  est noté par  $Cth^b(\Omega \times S)$ .

**2.2 Définition.** Une **mesure de Young** sur  $\Omega \times S$  est une mesure positive  $\mathcal{T} : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_S \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que, pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{T}(A \times S) = \mu(A).$$

D'après un théorème de désintégration (à voir [Va1]), on peut identifier chaque mesure de Young  $\mathcal{T}$  avec sa désintégration  $\tau$  et en raison de cette identification on peut dire qu' *une mesure de Young est une application  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{P}_S$ ,  $(\mathcal{A} - \mathcal{C})$  - mesurable.*

On notera par  $\mathcal{Y}(\Omega \times S)$ ,  $\mathcal{Y}(S)$  ou simplement par  $\mathcal{Y}$  (s' il n' a pas d' ambiguïté sur l' espace  $S$ ) l' espace des mesures de Young sur  $\Omega \times S$ .

### 2.3 Remarques.

(i)  $\mathcal{Y}(S) \subseteq ca^+(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_S)$  et aussi  $\mathcal{Y}(S) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{P}_S)$ .

(ii) Soit  $\mathcal{T}$  une mesure de Young sur  $\Omega \times S$  et  $\tau$  sa désintégration; pour tout intégrand positif  $\Psi$  (ou pour toute  $\Psi \in \mathcal{L}^1(\mathcal{T})$ )

$$\int_{\Omega \times S} \Psi(t, x) d\mathcal{T}(t, x) = \int_{\Omega} \left( \int_S \Psi(t, x) d\tau_t(x) \right) d\mu(t).$$

(iii) Soit  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ ; pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , l' application  $\mathcal{T}(A \times \cdot) : \mathcal{B}_S \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une mesure positive sur  $S$ ; alors  $\mathcal{T}(A \times \cdot) \in Rca^+(\mathcal{B}_S)$ . Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $K \in \mathcal{K}_S$  tel que

$$\mathcal{T}(\Omega \times (S \setminus K)) < \varepsilon.$$

(iv) Une mesure de Young est aussi une famille  $\{\tau_t : t \in \Omega\}$  des probabilités sur  $S$  telle que, pour tout  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_S$ , l' application  $t \mapsto \tau_t(C_t)$  soit mesurable. Ainsi s' expliquent les diverses dénominations, comme *mesures paramétrées*, *probabilités de transition*, sous lesquelles sont, quelquefois notées les mesures de Young .

**2.4 Définition.** Pour toute probabilité  $\nu \in \mathcal{P}_S$ , la mesure produit  $\mathcal{T}^\nu = \mu \otimes \nu$  est une mesure de Young dont la désintégration est l'application constante  $\tau_t^\nu = \nu$ , pour tout  $t \in \Omega$ . On dit que  $\mathcal{T}^\nu$  est la mesure de Young associée à la probabilité  $\nu$ .

La fonction  $\nu \mapsto \mathcal{T}^\nu$  est une injection de l'espace  $\mathcal{P}_S$  dans  $\mathcal{Y}(S)$ ; ce qui nous permet d'écrire:  $\mathcal{P}_S \subseteq \mathcal{Y}(S)$ .

Plus généralement, si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est une  $\mathcal{A}$ -partition de  $\Omega$  et  $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathcal{P}_S$ , l'application  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{P}_S, \tau_t = \sum_{i=1}^n \nu_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}(t)$  est une mesure de Young.  $\tau$  est la désintégrée de la mesure  $\mathcal{T}$  où  $\mathcal{T}(A \times B) = \sum_{i=1}^n \nu_i(B) \cdot \mu(A \cap A_i)$ , pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et pour tout  $B \in \mathcal{B}_S$ .

On dit dans ce cas que  $\tau$  (ainsi que  $\mathcal{T}$ ), est une **mesure de Young en escalier**. On note  $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$  le sousensemble des mesures de Young en escalier.

Le second cas particulier important de mesures de Young est celui des mesures associées à des applications mesurables de  $\Omega$  dans  $S$ .

Soit  $\mathcal{M}(S)$  l'ensemble de toutes les applications  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_S)$  - mesurables; pour tout  $u \in \mathcal{M}(S)$  soit  $\tau^u : \Omega \rightarrow \mathcal{P}_S, \tau^u(t) \equiv \tau_t^u = \delta_{u(t)}$ , pour tout  $t \in \Omega$  ( $\delta$  est la mesure de Dirac). Pour tout  $B \in \mathcal{B}_S$ , l'application  $g_B^u$  définie de  $\Omega$  dans  $[0, 1]$  par  $g_B^u = \tau^u(B) = \mathbb{1}_{u^{-1}(B)}$  est  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_{[0,1]})$  - mesurable et alors  $\tau^u$  est  $(\mathcal{A} - \mathcal{C})$  - mesurable et par suite est une mesure de Young.

**2.5 Définition.**  $\tau^u$  est dite la mesure de Young associée à l'application mesurable  $u$ .

On dira aussi qu'une mesure de Young  $\tau$  provient d'une application  $s$  s'il existe une application mesurable  $u \in \mathcal{M}(S)$  telle que  $\tau = \tau^u$ .

**2.6 Remarques.** L'application  $u \mapsto \tau^u$  est une injection de l'espace  $\mathcal{M}(S)$  dans  $\mathcal{Y}(S)$  (nous identifions les applications qui coïncident  $\mu$  - presque partout); alors, en identifiant  $u$  avec  $\tau^u$ , nous pouvons considérer que  $\mathcal{M}(S) \subseteq \mathcal{Y}(S)$ .

Soit  $S$  un espace souslinien régulier,  $\mathcal{A}$  une  $\sigma$  - algèbre sur l'ensemble  $\Omega$  et  $\mu \in ca^+(\mathcal{A})$  une mesure complète par rapport à  $\mathcal{A}$ . La famille des applications

$$Cth_0^b(\Omega \times S) = \{\mathbb{1}_A \otimes f : A \in \mathcal{A}, f \in C_b(S)\}$$

est un sous-ensemble de l'ensemble  $Cth^b(\Omega \times S)$  des intégrands de Carathéodory bornés sur  $\Omega \times S$ .

**2.7 Définition.** Soit  $\mathcal{Y}(S)$  l'espace des mesures de Young sur  $\Omega \times S$ ; pour tout  $\Psi = \mathbb{1}_A \otimes f \in Cth_0^b(\Omega \times S)$  soit  $I_\Psi : \mathcal{Y}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I_\Psi(\mathcal{T}) = \int_{\Omega \times S} \Psi(t, x) d\mathcal{T}(t, x) = \int_A \tau_t(f) d\mu(t)$$

où  $\tau_{(\cdot)}$  est la désintégration de  $\mathcal{T}$ .

**La topologie stable** sur  $\mathcal{Y}(S)$  est la topologie projective sur  $\mathcal{Y}(S)$  engendrée par la famille des applications  $\mathcal{F}_S = \{I_\Psi : \Psi \in Cth_0^b(\Omega \times S)\}$ , donc la moins fine des topologies sur  $\mathcal{Y}(S)$  rendant continues les applications de la famille  $\mathcal{F}_S$ ; cette topologie est notée  $\mathfrak{S}(\mathcal{Y}(S))$  ou simplement  $\mathfrak{S}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'espace souslinien  $S$ .

"La suite généralisée  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est  $\mathfrak{S}$ -convergente vers  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ " est notée  $\mathcal{T}^i \xrightarrow{\mathfrak{S}} \mathcal{T}$ .

**2.8 Remarques.** (i)  $\mathcal{T}^i \xrightarrow{\mathfrak{S}} \mathcal{T}$  si et seulement si

$$\mathcal{T}^i(\Psi) \rightarrow \mathcal{T}(\Psi), \text{ pour toute } \Psi \in Cth_0^b(\Omega \times S)$$

soit:

$$\mathcal{T}^i(\mathbb{1}_A \otimes f) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes f), \text{ pour tout } A \in \mathcal{A} \text{ et tout } f \in C_b(S).$$

et, si nous utilisons les désintégrées, pour tout  $f \in C_b(S)$ , la suite généralisée  $(\tau^i(f))_{i \in I} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$  est faiblement convergente vers  $\tau(f) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

(ii) Soit  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  et  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ .

Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $(\mathcal{T}^i(A \times \cdot))_{i \in I} \subseteq Rca^+(\mathcal{B}_S)$  et  $\mathcal{T}(A \times \cdot) \in Rca^+(\mathcal{B}_S)$ . Alors

$$\mathcal{T}^i \xrightarrow{\mathfrak{S}} \mathcal{T} \iff \mathcal{T}^i(A \times \cdot) \xrightarrow{\mathfrak{T}} \mathcal{T}(A \times \cdot), \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}$$

(c' est-à-dire la suite généralisée  $(\mathcal{T}^i(A \times \cdot))_{i \in I}$  est étroitement convergente vers  $\mathcal{T}(A \times \cdot)$ ).

(iii) La topologie stable sur  $\mathcal{Y}(S)$  est notée dans [CRV] par  $\tau_{\mathcal{Y}^1}^W$ .

**2.9 Théorème.** Soit  $S$  un espace souslinien métrisable; pour toute suite généralisée  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  et tout  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$  les deux conditions suivantes sont équivalentes.

- (1)  $\mathcal{T}^i \xrightarrow{\mathfrak{S}} \mathcal{T}$ .
- (2)  $\mathcal{T}^i(\Psi) \rightarrow \mathcal{T}(\Psi)$ , pour toute  $\Psi \in Cth^b(\Omega \times S)$ .

### 3 Résultats de densité

Nous donnons d'abord un lemme que nous utiliserons pour montrer deux résultats de densité sur l'espace  $\mathcal{Y}(S)$ .

**3.1 Lemme.** *Soit  $S$  un espace souslinien régulier; pour tout  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K \in \mathcal{K}_S$  et une mesure  $\mathcal{T}' \in \mathcal{Y}(K)$  tels que, pour tout  $\Psi \in Cth^b(\Omega \times S)$ ,*

$$|\mathcal{T}(\Psi) - \mathcal{T}'(\Psi|_{\Omega \times K})| < \varepsilon \cdot \|\Psi\|_0.$$

**Démonstration.** Selon le (iii) de la remarque 2.3, pour tout  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K \in \mathcal{K}_S$  tel que

$$(1) \quad \mathcal{T}(\Omega \times (S \setminus K)) = \int_{\Omega} \tau_t(S \setminus K) d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit  $A = \{t \in \Omega : \tau_t(K) = 0\}$ ; comme  $K \in \mathcal{B}_S$ , l'application  $t \mapsto \tau_t(K)$  est  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_{[0,1]})$ -mesurable et donc  $A \in \mathcal{A}$ . De plus,

$$(2) \quad \mu(A) \leq \int_A \tau_t(S \setminus K) d\mu(t) + \int_{\Omega \setminus A} \tau_t(S \setminus K) d\mu(t) = \int_{\Omega} \tau_t(S \setminus K) d\mu(t) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit une probabilité fixée  $\nu \in \mathcal{P}_K$ ; alors on peut définir  $\tau' : \Omega \rightarrow \mathcal{P}_K$  par

$$\tau'_t(B) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_t(K)} \cdot \tau_t(B) & , t \in \Omega \setminus A \\ \nu(B) & , t \in A \end{cases}, \text{ pour tout } t \in \Omega \text{ et tout } B \in \mathcal{B}_K.$$

L'application  $t \mapsto \tau'_t(B)$  est  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_{[0,1]})$ -mesurable et donc  $\tau'$  est  $(\mathcal{A} - \mathcal{C}_K)$ -mesurable. Alors, elle est la désintégrée d'une mesure  $\mathcal{T}' \in \mathcal{Y}(K)$ . Pour tout intégrand  $\Psi \in Cth^b(\Omega \times S)$ ,  $\Psi' = \Psi|_{\Omega \times K} \in Cth^b(\Omega \times K)$ ; on a alors, d'après (1) et (2),

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(\Psi) - \mathcal{T}'(\Psi')| &\leq \int_{\Omega \setminus A} \left| \int_S \Psi(t, x) d\tau_t(x) - \int_K \Psi(t, x) d\tau'_t(x) \right| d\mu(t) + \\ &+ \int_A \left[ \int_S |\Psi(t, x)| d\tau_t(x) + \int_K |\Psi(t, x)| d\nu(x) \right] d\mu(t) \leq \\ &\leq \int_{\Omega \setminus A} \left| \int_K \Psi(t, x) d\tau_t(x) - \int_K \frac{\Psi(t, x)}{\tau_t(K)} d\tau_t(x) \right| d\mu(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega \setminus A} \left( \int_{S \setminus K} |\Psi(t, x)| d\tau_t(x) \right) d\mu(t) + 2\|\Psi\|_0 \cdot \mu(A) \leq \\
\leq & \int_{\Omega \setminus A} \frac{\tau_t(S \setminus K)}{\tau_t(K)} \left( \int_K |\Psi(t, x)| d\tau_t(x) \right) d\mu(t) + \|\Psi\|_0 \cdot \mathcal{T}(\Omega \times (S \setminus K)) + \\
& + 2\frac{\varepsilon}{4} \cdot \|\Psi\|_0 \leq \|\Psi\|_0 \cdot \int_{\Omega \setminus A} \tau_t(S \setminus K) d\mu(t) + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \|\Psi\|_0 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|\Psi\|_0 < \\
& < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \|\Psi\|_0 + \frac{3\varepsilon}{4} \cdot \|\Psi\|_0 = \varepsilon \cdot \|\Psi\|_0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**3.2 Théorème.** Soit  $S$  un espace souslinien régulier; alors l'espace  $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$  des mesures de Young en escalier est dense dans  $(\mathcal{Y}(S), \mathcal{S})$ .

**Démonstration.** Par définition 2.4,  $\mathcal{T} \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$  si  $\mathcal{T} = \sum_{i=1}^n \nu_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ , où  $\{A_1, \dots, A_n\}$  est une  $\mathcal{A}$ -partition de  $\Omega$  et  $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathcal{P}_S$ .

I- Si  $S$  est métrisable, pour tout  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ , il existe une suite  $(\mathcal{T}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$  telle que  $\tau_t^n \xrightarrow{\mathcal{T}} \tau_t$ , pour tout  $t \in \Omega$ . Alors, pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et  $f \in C_b(S)$ ,

$$\mathcal{T}^n(\mathbb{1}_A \otimes f) = \int_A \tau_t^n(f) d\mu(t) \rightarrow \int_A \tau_t(f) d\mu(t) = \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes f)$$

donc  $\mathcal{T}^n \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$  et  $\mathcal{T} \in \overline{\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)}^{\mathcal{S}}$ .

II- Soit  $S$  un souslinien régulier et  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ ; puisque la topologie stable sur  $\mathcal{Y}(S)$  est engendrée par la famille  $\mathcal{F}_S = \{I_\Psi : \Psi \in Cth_0^b(\Omega \times S)\}$ , pour tout  $\mathcal{S}$ -voisinage  $V$  de  $\mathcal{T}$ , il existe  $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}^*, \Psi_1, \dots, \Psi_n \in Cth_0^b(\Omega \times S)$  tels que

$$U = \bigcap_{i=1}^n I_{\Psi_i}^{-1}([\mathcal{T}(\Psi_i) - \varepsilon, \mathcal{T}(\Psi_i) + \varepsilon]) \subseteq V,$$

où

$$U = \{\sigma \in \mathcal{Y}(S) : |\sigma(\Psi_i) - \mathcal{T}(\Psi_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Soit, pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\Psi_i = \mathbb{1}_{A_i} \otimes f_i$ , où  $A_i \in \mathcal{A}$  et  $f_i \in C_b(S)$  et soit  $M = \max\{\|f_i\|_0 : i = 1, \dots, n\}$ .

D'après le lemme 3.1, il existe un compact  $K \in \mathcal{K}_S$  et une mesure  $\mathcal{T}' \in \mathcal{Y}(K)$  tels que

$$|\mathcal{T}(\Psi) - \mathcal{T}'(\Psi|_{\Omega \times K})| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|\Psi\|_0, \text{ pour tout } \Psi \in Cth^b(\Omega \times S).$$

Pour tout  $i = 1, \dots, n$  soit  $\Psi'_i = \Psi_i \upharpoonright_{\Omega \times K} = \mathbb{1}_{A_i} \otimes f_i \upharpoonright_K \in Cth_0^b(\Omega \times K)$ ; alors  $U' = \{\sigma' \in \mathcal{Y}(K) : |\sigma'(\Psi'_i) - \tau'(\Psi'_i)| < \frac{\varepsilon}{2}, i = 1, \dots, n\}$  est un  $\mathfrak{S}_K$  - voisinage de  $\tau'$  et alors il existe  $\sigma' \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_K) \cap U'$ .

Soit  $\sigma'$ , la désintégrée de  $\sigma'$ ,  $\sigma' = \sum_{j=1}^p \nu'_j \cdot \mathbb{1}_{B_j}$ , où, pour tout  $j = 1, \dots, p$ ,  $\nu'_j \in \mathcal{P}_K$  et  $B_j \in \mathcal{A}$ ; alors, si, pour tout  $j = 1, \dots, p$ ,  $\nu_j : \mathcal{B}_S \rightarrow [0, 1]$  est définie par  $\nu_j(B) = \nu'_j(B \cap K)$ , les  $\nu_j$  sont des probabilités sur  $S$  et donc  $\sigma = \sum_{j=1}^p \nu_j \cdot \mathbb{1}_{B_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$ .

Supposons que  $\sigma$  a pour désintégrée  $\sigma$ . Montrons que  $\sigma \in U$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} |\sigma(\Psi_i) - \tau(\Psi_i)| &\leq |\sigma(\Psi_i) - \sigma'(\Psi'_i)| + |\sigma'(\Psi'_i) - \tau'(\Psi'_i)| + |\tau'(\Psi'_i) - \tau(\Psi_i)| < \\ &< 0 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|f\|_0 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc  $\sigma \in U \subseteq V$ .

Alors, pour tout  $\mathfrak{S}$  - voisinage  $V$  de  $\tau$ ,  $V \cap \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S) \neq \emptyset$ , c'est-à-dire,  $\tau \in \overline{\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)}^{\mathfrak{S}}$  et  $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$  est partout dense dans  $(\mathcal{Y}(S), \mathfrak{S})$ .  $\blacksquare$

**3.3 Théorème.** *Soit  $S$  un espace souslinien régulier; si la mesure  $\mu$  est sans atome, alors  $\mathcal{M}(S)$  est partout dense dans  $(\mathcal{Y}(S), \mathfrak{S})$ .*

#### Démonstration.

I- Considérons d'abord le cas où  $S$  un espace souslinien compact. La topologie stable sur  $\mathcal{Y}(S)$  est engendrée par la famille  $\mathcal{F}_S = \{I_\Psi : \Psi \in Cth_0^b(\Omega \times S)\}$ . Soit  $\tau \in \mathcal{Y}(S)$ ; pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , tout  $f \in C^b(S) = C(S)$  et tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $I(\tau; A, f, \varepsilon) = I_\Psi^{-1}(\]I_\Psi(\tau) - \varepsilon, I_\Psi(\tau) + \varepsilon[)$  où  $\Psi = \mathbb{1}_A \otimes f \in Cth_0^b(\Omega \times S)$ .

Alors la famille des ensembles  $U = \bigcap_{k=1}^p I(\tau; A_k, f_k, \varepsilon)$ , où  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{A_1, \dots, A_p\}$

$\subseteq \mathcal{A}$ ,  $\{f_1, \dots, f_p\} \subseteq C(S)$  et  $\varepsilon > 0$ , est une base de voisinages ouverts pour  $\tau$  dans  $(\mathcal{Y}(S), \mathfrak{S})$ . On peut choisir les ensembles  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , disjoints deux à deux; en effet, on peut toujours trouver les ensembles  $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{A}$  disjoints deux à deux tels que, pour tout  $k = 1, \dots, p$ , il existe  $i_1^k, \dots, i_{r_k}^k \in \{1, \dots, q\}$  avec

$A_k = \bigcup_{j=1}^{r_k} B_{i_j^k}$ . Alors, si on note  $g_l = f_k$  chaque fois que  $B_l \subseteq A_k$ , l'ensemble

$$W = \bigcap_{l=1}^q I(\tau; B_l, g_l, \frac{\varepsilon}{q}) \subseteq \bigcap_{k=1}^p I(\tau; A_k, f_k, \varepsilon) = U.$$

D'après le théorème 3.2,  $\mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$  est partout dense dans  $\mathcal{Y}(S)$ .

Alors il suffit de montrer que, pour tout  $\mathcal{T} \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$  et tout voisinage  $V$  de  $\mathcal{T}$ ,  $V \cap \mathcal{M}(S) \neq \emptyset$ .

Soit donc  $\mathcal{T} = \sum_{j=1}^q \nu_j \cdot \mathbb{1}_{B_j} \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, \mathcal{P}_S)$  où  $\nu_1, \dots, \nu_q \in \mathcal{P}_S$  et  $\{B_1, \dots, B_q\}$  est une  $\mathcal{A}$ -partition de  $\Omega$ . D'après la remarque ci-dessus, pour tout voisinage  $V$  de  $\mathcal{T}$  dans  $(\mathcal{Y}(S), \mathcal{S})$ , il existe  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\{A_1, \dots, A_p\} \subseteq \mathcal{A}$  disjoints deux à deux,  $f_1, \dots, f_p \in C(S)$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$(1) \quad U = \bigcap_{k=1}^p I(\mathcal{T}; A_k, f_k, \varepsilon) \subseteq V.$$

Soit  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\mu(\Omega)} > 0$ ; alors la famille

$$\left\{ D_y = \bigcap_{k=1}^p f_k^{-1} ( ]f_k(y) - \varepsilon_1, f_k(y) + \varepsilon_1[ ) : y \in S \right\}$$

est un recouvrement ouvert de l'espace compact  $S$ .

Soit alors  $\{D_{y_i} : i = 1, \dots, n\}$  un sous-recouvrement fini de  $S$ ; si nous notons avec  $C_i = D_{y_i} \setminus \bigcup_{j < i} D_{y_j}$ , pour tout  $i = 2, \dots, n$  et  $C_1 = D_{y_1}$  alors  $\{C_1, \dots, C_n\}$  est une  $\mathcal{B}_S$ -partition de  $S$

Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , soit  $z_i \in C_i$  un point fixé; alors, pour tout  $z \in C_i$  et tout  $k = 1, \dots, p$ ,

$$(2) \quad |f_k(z) - f_k(z_i)| \leq |f_k(z) - f_k(y_i)| + |f_k(y_i) - f_k(z_i)| < 2\varepsilon_1.$$

Pour tout  $j = 1, \dots, q$ , tout  $i = 1, \dots, n$  et tout  $k = 1, \dots, p$ , soit

$$(3) \quad \alpha_{ij}^k = \nu_j(C_i) \cdot \mu(B_j \cap A_k).$$

Alors, pour tout  $j = 1, \dots, q$  et tout  $k = 1, \dots, p$ ,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij}^k = \left( \sum_{i=1}^n \nu_j(C_i) \right) \cdot \mu(B_j \cap A_k) = \nu_j(S) \cdot \mu(B_j \cap A_k) = \mu(B_j \cap A_k).$$

Comme  $\mu$  n'a pas d'atome, d'après un théorème de Saks (voir [War], Th. I.4.10), pour tout  $j = 1, \dots, q$  et tout  $k = 1, \dots, p$ , il existe une  $\mathcal{A}$ -partition de  $B_j \cap A_k$ ,  $\{B_{ij}^k : i = 1, \dots, n\}$  telle que

$$(4) \quad \mu(B_{ij}^k) = \alpha_{ij}^k, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Alors, pour tout  $k = 1, \dots, p$ ,

$$A_k = \bigcup_{j=1}^q (B_j \cap A_k) = \bigcup_{j=1}^q \bigcup_{i=1}^n B_{ij}^k = \bigcup_{i=1}^n \left( \bigcup_{j=1}^q B_{ij}^k \right).$$

Pour tout  $i = 1, \dots, n$  et tout  $k = 1, \dots, p$ , soit

$$(5) \quad D_i^k = \bigcup_{j=1}^q B_{ij}^k$$

Alors  $\{D_i^k : i = 1, \dots, n\}$  est une  $\mathcal{A}$ -partition de  $A_k$ , pour tout  $k = 1, \dots, p$ . Soit  $u : \Omega \rightarrow S, u = \sum_{i=1}^n z_i \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{l=1}^p D_l^i}$ ;  $u \in \mathcal{M}(S)$  et, pour tout  $k = 1, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{T}(\mathbb{1}_{A_k} \otimes f_k) - \mathcal{T}^u(\mathbb{1}_{A_k} \otimes f_k) \right| = \\ & = \left| \sum_{j=1}^q \mathcal{T}(\mathbb{1}_{A_k \cap B_j} \otimes f_k) - \sum_{i=1}^n \mathcal{T}^u(\mathbb{1}_{D_i^k} \otimes f_k) \right| = \\ & = \left| \sum_{j=1}^q \nu_j(f_k) \cdot \mu(A_k \cap B_j) - \sum_{i=1}^n f_k(z_i) \mu(D_i^k) \right| \stackrel{(5)}{=} \\ & \stackrel{(5)}{=} \left| \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n \nu_j(\mathbb{1}_{C_i} \otimes f_k) \cdot \mu(A_k \cap B_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q f_k(z_i) \mu(B_{ij}^k) \right| \stackrel{(4)}{\leq} \\ & \leq \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n \left| \nu_j(\mathbb{1}_{C_i} \otimes f_k) \cdot \mu(A_k \cap B_j) - f_k(z_i) \alpha_{ij}^k \right| \stackrel{(3)}{=} \\ & \stackrel{(3)}{=} \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n \left| \nu_j(\mathbb{1}_{C_i} \otimes f_k) \cdot \mu(A_k \cap B_j) - f_k(z_i) \cdot \nu_j(C_i) \cdot \mu(A_k \cap B_j) \right| = \\ & = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n \left| \nu_j(\mathbb{1}_{C_i} \otimes (f_k - f_k(z_i))) \right| \cdot \mu(A_k \cap B_j) \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n \int_{C_i} |f_k(z) - f_k(z_i)| d\nu_j(z) \cdot \mu(A_k \cap B_j) \stackrel{(2)}{\leq} \end{aligned}$$

$$\stackrel{(2)}{\leq} 2\varepsilon_1 \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^n \nu_j(C_i) \mu(A_k \cap B_j) = 2\varepsilon_1 \sum_{j=1}^q \mu(A_k \cap B_j) = 2\varepsilon_1 \mu(A_k) \leq \varepsilon.$$

Alors, d'après (1),  $\mathcal{T}^u \in \bigcap_{k=1}^p I(\mathcal{T}; A_k, f_k, \varepsilon) = U \subseteq V$  et  $V \cap \mathcal{M}(S) \neq \emptyset$ .

II- Soit maintenant  $S$  un espace souslinien régulier et soit  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ .

Pour tout  $\mathcal{S}$ -voisinage  $V$  de  $\mathcal{T}$  il existe  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Psi_1, \dots, \Psi_p \in Cth_0^b(\Omega \times S)$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$(6) \quad U = \{\sigma \in \mathcal{Y}(S) : |\sigma(\Psi_k) - \mathcal{T}(\Psi_k)| < \varepsilon, k = 1, \dots, p\} \subseteq V.$$

Soit  $M = \max\{\|\Psi_k\|_0 : k = 1, \dots, p\}$ ; d'après le lemme 3.1, il existe un compact  $K \in \mathcal{K}_S$  et une mesure  $\mathcal{T}' \in \mathcal{Y}(K)$  tels que

$$(7) \quad |\mathcal{T}(\Psi) - \mathcal{T}'(\Psi|_{\Omega \times K})| < \frac{\varepsilon}{2M} \|\Psi\|_0, \text{ pour tout } \Psi \in Cth^b(\Omega \times S).$$

Pour tout  $k = 1, \dots, p$ , si  $\Psi'_k = \Psi_k|_{\Omega \times K}$ ,  $\Psi'_k \in Cth_0^b(\Omega \times K)$ ; en effet, si  $\Psi_k = \mathbb{1}_{A_k} \otimes f_k$ ,  $\Psi'_k = \mathbb{1}_{A_k} \otimes (f_k|_K)$ .

Alors

$$\begin{aligned} U' &= \bigcap_{k=1}^p I(\mathcal{T}'; A_k, f_k|_K, \varepsilon) = \\ &= \{\sigma' \in \mathcal{Y}(K) : |\sigma'(\Psi'_k) - \mathcal{T}'(\Psi'_k)| < \varepsilon, k = 1, \dots, p\} \end{aligned}$$

est un  $\mathcal{S}_K$ -voisinage de  $\mathcal{T}' \in \mathcal{Y}(K)$ .

D'après la partie I, il existe une application  $u' : \Omega \rightarrow K$ ,  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_K)$ -mesurable telle que  $\mathcal{T}^{u'} \in U'$ , d'où

$$(8) \quad |\mathcal{T}^{u'}(\Psi'_k) - \mathcal{T}'(\Psi'_k)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } k = 1, \dots, p.$$

Alors l'application  $u : \Omega \rightarrow S$ , définie par  $u(t) = u'(t)$ , pour tout  $t \in \Omega$ , est  $(\mathcal{A} - \mathcal{B}_S)$ -mesurable. D'après (7) et (8), pour tout  $k = 1, \dots, p$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}^u(\Psi_k) - \mathcal{T}(\Psi_k)| &= |\mathcal{T}^{u'}(\Psi'_k) - \mathcal{T}(\Psi_k)| \leq \\ &\leq |\mathcal{T}^{u'}(\Psi'_k) - \mathcal{T}'(\Psi'_k)| + |\mathcal{T}'(\Psi'_k) - \mathcal{T}(\Psi_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \|\Psi_k\|_0 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors  $\mathcal{T}^u \in U \subseteq V$  et donc  $V \cap \mathcal{M}(S) \neq \emptyset$ . ■

## 4 Compacité dans l'espace de mesures de Young

Soit  $S$  un espace souslinien régulier et soit  $\mathcal{K}_S$  la famille de tous les ensembles compacts de  $S$ . Rappelons qu'une application  $\varphi : S \rightarrow [0, +\infty]$  est inf-compacte si, pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi^{-1}([0, a]) \in \mathcal{K}_S$ . Chaque application inf-compacte est s.c.i. et, par suite, est une application borélienne.

Un intégrand  $\Psi : \Omega \times S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  est dit **inf-compact** si, pour tout  $t \in \Omega$ ,  $\Psi(t, \cdot)$  est une application inf-compacte. Il est clair que tout intégrand inf-compact est un intégrand s.c.i.

**4.1 Théorème.** *Soit  $S$  un souslinien régulier, soit  $\mathcal{Y}(S)$  l'espace des mesures de Young sur  $\Omega \times S$  et soit  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S)$ ; considérons les conditions suivantes:*

- (T<sub>1</sub>) *pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $K \in \mathcal{K}_S$  tel que  $\mathcal{T}(\Omega \times (S \setminus K)) < \varepsilon$ , pour toute  $\mathcal{T} \in \mathcal{H}$ .*
- (T<sub>2</sub>) *il existe une application  $\varphi : S \rightarrow [0, +\infty]$  inf-compacte telle que  $\sup_{\mathcal{T} \in \mathcal{H}} \mathcal{T}(\mathbb{1}_\Omega \otimes \varphi) < +\infty$ .*
- (T<sub>3</sub>) *pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ensemble tendu  $H \subseteq \mathcal{P}_S$  tel que, pour toute  $\tau \in \mathcal{H}$ ,  $\tau^{-1}(\mathcal{P}_S \setminus H) \in \mathcal{A}$  et  $\mu(\{t \in \Omega : \tau_t \in \mathcal{P}_S \setminus H\}) \leq \varepsilon$ .*
- (T<sub>4</sub>) *pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_S$  tel que, pour tout  $t \in \Omega$ ,  $C_t = \{x \in S : (t, x) \in C\} \in \mathcal{K}_S$  et  $\sup_{\mathcal{T} \in \mathcal{H}} \mathcal{T}((\Omega \times S) \setminus C) < \varepsilon$ .*
- (T<sub>5</sub>) *il existe un intégrand inf-compact  $\Psi : \Omega \times S \rightarrow [0, +\infty]$  tel que  $\sup_{\mathcal{T} \in \mathcal{H}} \mathcal{T}(\Psi) < +\infty$ .*
- (T<sub>6</sub>) *pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une multiapplication mesurable  $\Gamma : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_S$  telle que  $\sup_{\mathcal{T} \in \mathcal{H}} \int_\Omega \tau_t(S \setminus \Gamma(t)) d\mu(t) < \varepsilon$ .*

Alors:

$$\begin{array}{ccc} (T_1) & \iff & (T_2) \iff (T_3) \\ & \downarrow & \\ (T_4) & \iff & (T_5) \iff (T_6) \end{array}$$

**4.2 Définition.** Soit  $S$  un souslinien régulier; un ensemble  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est dit **tendu** si, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un compact  $K \in \mathcal{K}_S$  tel que  $\mathcal{T}(\Omega \times (S \setminus K)) < \varepsilon$ , pour toute  $\mathcal{T} \in \mathcal{H}$ .

Une suite généralisée  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est **tendue** si l'ensemble  $\{\mathcal{T}^i : i \in I\}$  est tendu.

### 4.3 Remarques.

(i) La condition d'être tendu est équivalente aux conditions  $(T_2)$  et  $(T_3)$  du théorème précédent.

(ii) D'après la remarque précédente, pour tout  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ ,  $\{\mathcal{T}\}$  est tendu.

(iii) Dans [CRV] on utilise le terme de "strictement tendu" pour un ensemble qui vérifie l'une des conditions équivalentes  $(T_1)$  à  $(T_3)$  du théorème 4.1 et le terme de "souple tendu" lorsque l'une des conditions équivalentes  $(T_4)$  à  $(T_6)$  est satisfaite.

(iv) La condition  $(T_5)$  du théorème 4.1 apparaît dans [Ba1] et la condition  $(T_6)$  dans [JaM].

(v) Dans le théorème 4.3.14 de [CRV], il est montré que, si  $S$  est un sous-linien régulier et un espace de Prokhorov, alors  $(T_4) \implies (T_1)$  et donc toutes les conditions  $(T_1)$  à  $(T_6)$  sont équivalentes. Ceci s'applique, en particulier, lorsque  $S$  est polonais.

(vi) Soit  $H \subseteq \mathcal{M}(S)$  une famille des applications mesurables et  $\mathcal{H} = \{\mathcal{T}^u : u \in H\} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  (selon la définition 2.5 et la remarque 2.6);  $\mathcal{H}$  est tendu si et seulement si

$$(T) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{K}_S \text{ t.q. } \mu(u^{-1}(S \setminus K)) < \varepsilon, \forall u \in H.$$

Nous dirons dans ce cas que la famille  $H \subseteq \mathcal{M}(S)$  est **tendue**.

Une suite généralisée  $(u^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}(S)$  sera dite **tendue** si le sous-ensemble  $\{u^i : i \in I\}$  de  $\mathcal{M}(S)$  est tendu.

(vii) Dans le cas particulier où  $S = \mathbb{R}^d$ ,  $H$  est tendue si et seulement si

$$(T_e) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists k > 0 \text{ t.q. } \mu(\|u\| \geq k) = \mu(\{t : \|u(t)\| \geq k\}) < \varepsilon, \forall u \in H$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme usuelle sur  $\mathbb{R}^d$ . Dans ce cas, nous avons la propriété suivante:

Tout ensemble borné  $H \subseteq L^1(\mu, \mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  est tendu.

**4.4 Théorème.** *Soit  $S$  un espace sous-linien compact; alors  $(\mathcal{Y}(S), \mathcal{S})$  est un espace compact.*

**Démonstration.** Soit  $C(S) = C_b(S)$  l'espace des applications réelles continues sur  $S$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_0$  de la convergence uniforme; soit  $\mathcal{L}^1(\mu, C(S)) = \{f \in \mathcal{M}(C(S)) : \|f\|_1 = \int_{\Omega} \|f\|_0 d\mu < +\infty\}$ .

Si  $L^1(\mu, C(S)) = \{\bar{f} : f \in \mathcal{L}^1(\mu, C(S))\}$ ,  $L^1(\mu, C(S))$  est un espace de Banach pour lequel nous notons son dual topologique  $[L^1(\mu, C(S))]'$ .

Nous pouvons associer à chaque  $\Psi \in Cth^b(\Omega \times S)$  l'application  $\varphi_\Psi : \Omega \rightarrow C(S)$  définie par  $\varphi_\Psi(t) = \Psi(t, \cdot)$ , pour tout  $t \in \Omega$  et alors  $\varphi_\Psi \in L^1(\mu, C(S))$ . Comme  $\sup_{t \in \Omega} \|\varphi_\Psi(t)\|_0 = \sup_{t \in \Omega} \sup_{x \in S} |\Psi(t, x)| < +\infty$ ,  $\varphi_\Psi$  est bornée. L'application  $\Psi \mapsto \varphi_\Psi$  est une bijection de  $Cth^b(\Omega \times S)$  sur le sous-ensemble  $E$  des applications bornées de  $L^1(\mu, C(S))$ . En effet, pour toute fonction  $f$  bornée de  $L^1(\mu, C(S))$ , l'application  $\Psi : \Omega \times S \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\Psi(t, x) = f(t)(x)$ , est mesurable en  $t$  et continue en  $x$  (car, si, pour tout  $x \in S$ ,  $\phi_x : C(S) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi_x(g) = g(x)$ , pour toute  $g \in C(S)$ ,  $\Psi(\cdot, x) = \phi_x \circ f$  est la composition de la fonction continue  $\phi_x$  avec la fonction mesurable  $f$ ). Alors  $\Psi$  est un intégrand de Carathéodory. De plus, pour tout  $(t, x) \in \Omega \times S$ ,

$$|\Psi(t, x)| \leq \|f(t)\|_0 \leq \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\|_0 < +\infty,$$

d'où  $\Psi \in Cth^b(\Omega \times S)$ . Et il est clair que  $\varphi_\Psi = f$ .

Pour toute  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ , soit  $f_\tau^* : L^1(\mu, C(S)) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_\tau^*(f) = \int_{\Omega} \left( \int_S f(t)(x) d\tau_t(x) \right) d\mu(t), \text{ pour toute } f \in L^1(\mu, C(S)).$$

Nous remarquons que, pour toute  $f \in L^1(\mu, C(S))$ ,

$$\int_{\Omega} \sup_{x \in S} |f(t)(x)| d\mu(t) = \int_{\Omega} \|f(t)\|_0 d\mu(t) < +\infty \text{ et alors}$$

$$|f_\tau^*(f)| \leq \int_{\Omega} \|f(t)\|_0 d\mu(t) = \|f\|_1.$$

Donc l'application  $\mathcal{T} \mapsto f_\tau^*$  est bien définie comme une application de  $\mathcal{Y}(S)$  à valeurs dans  $[L^1(\mu, C(S))]'$ . De plus,  $\|f_\tau^*\| = \sup_{\|f\|_1 \leq 1} |f_\tau^*(f)| \leq 1$ ; c'est-à-dire l'image  $F$  de cette application, soit:

$$F = \{f_\tau^* : \mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)\},$$

est contenue dans la boule unité fermée de  $[L^1(\mu, C(S))]'$ .

Pour toute suite généralisée  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{Y}(S)$ , d'après le théorème 2.9,  $\mathcal{T}^i \xrightarrow{s} \mathcal{T}$  si et seulement si  $\mathcal{T}^i(\Psi) \rightarrow \mathcal{T}(\Psi)$ , pour tout  $\Psi \in Cth^b(\Omega \times S)$  ce qui est équivalent à  $f_{\mathcal{T}^i}^*(\varphi_\Psi) \rightarrow f_{\mathcal{T}}^*(\varphi_\Psi)$  ou à  $f_{\mathcal{T}^i}^*(f) \rightarrow f_{\mathcal{T}}^*(f)$ , pour toute  $f \in E$ .

Comme l'ensemble  $E$  est dense dans  $L^1(\mu, C(S))$ , il résulte que  $\mathcal{T}^i \xrightarrow{s} \mathcal{T}$  si et seulement si  $(f_{\mathcal{T}^i}^*)_{i \in I}$  est faiblement\*-convergente vers  $f_{\mathcal{T}}^*$  dans  $[L^1(\mu, C(S))]'$ .

Alors  $(\mathcal{Y}(S), \mathcal{S})$  est homéomorphe au sous-ensemble  $F$  de la boule unité fermée de  $[L^1(\mu, C(S))]'$  muni de la topologie faible\*. Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que  $F$  est faiblement\*-fermé. Soit alors  $f^*$  un point dans la fermeture faible\* de  $F$ . Il existe une suite généralisée  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  telle que  $(f_{\mathcal{T}^i}^*)_{i \in I}$  est faiblement\*-convergente vers  $f^*$ . Alors, pour toute  $\Psi \in Cth^b(\Omega \times S)$ ,

$$f_{\mathcal{T}^i}^*(\varphi_\Psi) \rightarrow f^*(\varphi_\Psi) \text{ ou } \mathcal{T}^i(\Psi) \rightarrow f^*(\varphi_\Psi).$$

Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , l'application  $\mathcal{T}(A \times \cdot) : C(S) \rightarrow \mathbb{R}$ , définie par:  $\mathcal{T}(A \times f) = \lim_i \mathcal{T}^i(\mathbb{1}_A \otimes f)$  est une forme linéaire et positive, donc une mesure de Radon sur  $S$  (soit  $\mathcal{T}(A \times \cdot) \in Rca^+(\mathcal{B}_S)$ ). De plus  $\mathcal{T}(A \times S) = \lim_i \mathcal{T}^i(A \times S) = \mu(A)$ , pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et alors  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ . Comme, pour tout  $\Psi \in Cth^b(\Omega \times S)$ ,  $\mathcal{T}(\Psi) = \lim_i \mathcal{T}^i(\Psi) = f^*(\varphi_\Psi)$ , il résulte que  $f^* = f_{\mathcal{T}}^* \in F$ . ■

#### 4.5 Théorème (théorème de Prokhorov).

a) Soit  $S$  un souslinien régulier et  $\mathcal{H}$  un sous-ensemble tendu de  $\mathcal{Y}(S)$ ; alors  $\mathcal{H}$  est relativement  $\mathcal{S}$ -compact.

b) Soit  $S$  un souslinien régulier et aussi un espace de Prokhorov; si  $\mathcal{H}$  est un sous-ensemble relativement  $\mathcal{S}$ -compact de  $\mathcal{Y}(S)$ , alors  $\mathcal{H}$  est tendu.

**Démonstration.** a)- Nous rappelons que, d'après le (i) de la remarque 4.3,  $\mathcal{H}$  est tendu si et seulement s'il existe une application  $\varphi : S \rightarrow [0, +\infty]$  inf-compacte telle que  $M = \sup_{\tau \in \mathcal{H}} \mathcal{T}(\mathbb{1}_\Omega \otimes \varphi) < +\infty$ .

(a1) Nous considérons d'abord  $S$  souslinien métrisable; dans ce cas, il peut être plongé dans un compact métrisable  $\bar{S}$ . Du théorème 4.4, il ressort que  $(\mathcal{Y}(\bar{S}), \mathcal{S}_{\bar{S}})$  est un espace compact et alors il est homéomorphe à un sous-espace de  $(\mathcal{Y}(\bar{S}), \mathcal{S}_{\bar{S}})$ .

Pour toute suite généralisée  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S) \subseteq \mathcal{Y}(\bar{S})$ , il existe une sous-suite généralisée  $(\mathcal{T}^{i_j})_{j \in J}$  et une mesure de Young  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\bar{S})$  telle que  $\mathcal{T}^{i_j} \xrightarrow{\mathcal{S}_{\bar{S}}} \mathcal{T}$ .

Soit l'application  $\Phi : \bar{S} \rightarrow [0, +\infty]$ ,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in S, \\ +\infty & \text{si } x \in \bar{S} \setminus S. \end{cases}$$

Alors, pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Phi^{-1}([0, a]) = \varphi^{-1}([0, a]) \in \mathcal{K}_S \subseteq \mathcal{K}_{\bar{S}}$ , donc  $\Phi$  est une application inf-compacte sur  $\bar{S}$  et alors s.c.i. et bornée inférieurement.

$$\mathcal{T}(\mathbb{1}_\Omega \otimes \phi) \leq \liminf_j \mathcal{T}^{i_j}(\mathbb{1}_\Omega \otimes \Phi) = \liminf_{j \in J} \mathcal{T}^{i_j}(\mathbb{1}_\Omega \otimes \varphi) \leq M$$

ou

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left( \int_{\bar{S}} \Phi(x) d\tau_t(x) \right) d\mu(t) &= \int_\Omega \left( \int_S \varphi(x) d\tau_t(x) \right) d\mu(t) + \\ &+ \int_\Omega \left( \int_{\bar{S} \setminus S} (+\infty) d\tau_t(x) \right) d\mu(t) \leq M < +\infty. \end{aligned}$$

D'où l'on peut voir que, pour presque tout  $t \in \Omega$ ,  $\tau_t(\bar{S} \setminus S) = 0$  et donc  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ . Alors  $\mathcal{T}^{i_j} \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ ; donc  $\mathcal{H}$  est relativement  $\mathcal{S}$ -compact.

(a2) Soit maintenant  $(S, \sigma)$  un souslinien régulier quelconque et  $\mathcal{H}$  un sous-ensemble  $\sigma$ -tendu de  $\mathcal{Y}(S)$  (c'est-à-dire tendu par rapport aux compacts de  $(S, \sigma)$ ). Il existe une distance  $d$  sur  $S$  telle que la topologie engendrée,  $\sigma_d$ , est moins fine que  $\sigma$ , est de type dénombrable et  $\mathcal{B}_S(\sigma_d) = \mathcal{B}_S(\sigma)$ . Soit  $\mathcal{S}_d$  la topologie stable sur  $\mathcal{Y}(S)$  par rapport à  $(S, \sigma_d)$ . Alors  $(S, \sigma_d)$  est un souslinien métrisable et, comme  $\mathcal{K}_{(S, \sigma)} \subseteq \mathcal{K}_{(S, \sigma_d)}$ ,  $\mathcal{H}$  est aussi  $\sigma_d$ -tendu. D'après (a1),  $\mathcal{H}$  est  $\mathcal{S}_d$ -relativement compact.

Une suite généralisée  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est  $\mathcal{S}_d$ -convergente vers  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$  si et seulement si, pour tout  $A \in \mathcal{A}$  et tout  $f \in C_b(S, \sigma_d)$ ,  $\mathcal{T}^i(\mathbb{1}_A \otimes f) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes f)$ . Comme  $C_b(S, \sigma_d) \subseteq C_b(S, \sigma)$  on peut remarquer que  $\mathcal{S}_d \subseteq \mathcal{S}$ .

Comme  $\mathcal{H}$  est  $\sigma$ -tendu, il existe une application  $\varphi : (S, \sigma) \rightarrow [0, +\infty]$   $\sigma$ -inf-compacte telle que  $M = \sup_{\mathcal{T} \in \mathcal{H}} \mathcal{T}(\mathbb{1}_\Omega \otimes \varphi) < +\infty$ .

Soit  $(\mathcal{T}^i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{H}$  une suite généralisée; comme  $\mathcal{H}$  est relativement  $\mathcal{S}_d$ -compact il existe une sous-suite généralisée  $(\mathcal{T}^{i_j})_{j \in J}$  et une mesure de Young  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$  telle que  $\mathcal{T}^{i_j} \xrightarrow{\mathcal{S}_d} \mathcal{T}$ .

Montrons que  $\mathcal{T}^{i_j} \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ .

Soit  $A \in \mathcal{A}$  et  $f : (S, \sigma) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une application  $\sigma$ -s.c.i.; pour tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $\varphi_\varepsilon = f + \varepsilon \cdot \varphi : (S, \sigma) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ . Alors  $\varphi_\varepsilon$  est  $\sigma$ -inf-compacte; en effet, pour tout  $a \in \mathbb{R}_+$ ,  $\varphi_\varepsilon^{-1}([0, a]) = \{x \in S : f(x) + \varepsilon \cdot \varphi(x) \leq a\} \subseteq \{x \in S : \varphi(x) \leq \frac{a}{\varepsilon}\} = \varphi^{-1}([0, \frac{a}{\varepsilon}])$ . Comme  $\varphi_\varepsilon$  est  $\sigma$ -s.c.i.,  $\varphi_\varepsilon^{-1}([0, a])$  est un  $\sigma$ -fermé contenu dans le  $\sigma$ -compact  $\varphi^{-1}([0, \frac{a}{\varepsilon}])$ . Alors  $\varphi_\varepsilon^{-1}([0, a]) \in \mathcal{K}_{(S, \sigma)} \subseteq \mathcal{K}_{(S, \sigma_d)}$  d'où  $\varphi_\varepsilon^{-1}([0, a])$  est fermé dans  $(S, \sigma_d)$  et alors  $\varphi_\varepsilon$  est une application  $\tau_d$ -s.c.i. et inférieurement bornée. Donc

$$\mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes \varphi_\varepsilon) \leq \liminf_j \mathcal{T}^{i_j}(\mathbb{1}_A \otimes \varphi_\varepsilon)$$

et alors

$$\begin{aligned} \liminf_j \mathcal{T}^{i_j}(\mathbb{1}_A \otimes f) + \varepsilon \cdot M &\geq \liminf_j \mathcal{T}^{i_j}(\mathbb{1}_A \otimes \varphi_\varepsilon) \geq \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes \varphi_\varepsilon) \geq \\ &\geq \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes f) \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

et alors, pour toute application positive et  $\sigma$ -s.c.i.,

$$\liminf_j \mathcal{T}^{i_j}(\mathbb{1}_A \otimes f) \geq \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes f).$$

Il est clair que l'inégalité est valable aussi pour toute application bornée inférieurement et  $\sigma$ -s.c.i. et alors  $\mathcal{T}^{i_j} \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ .

b)- Soit  $S$  un souslinien régulier qui est aussi un espace de Prokhorov (c'est à dire tout ensemble relativement étroitement-compact de  $Rca^+(\mathcal{B}_S)$  est tendu). Or, l'application  $\Phi$  de  $\mathcal{Y}(S)$  dans  $Rca^+(\mathcal{B}_S)$  définie par  $\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\Omega \times \cdot)$ , pour toute  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ , est  $(\mathcal{S} - \mathcal{T}_S)$ -continue (où  $\mathcal{T}_s$  désigne la topologie étroite sur  $Rca^+(\mathcal{B}_S)$ ). Donc, si  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est relativement  $\mathcal{S}$ -compact,  $\Phi(\mathcal{H})$  est relativement  $\mathcal{T}_S$ -compact dans  $Rca^+(\mathcal{B}_S)$  et alors  $\Phi(\mathcal{H})$  est tendu. Donc, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $K \in \mathcal{K}_S$  tel que, pour tout  $\mathcal{T} \in \mathcal{H}$ ,  $\Phi(\mathcal{T})(S \setminus K) = \mathcal{T}(\Omega \times (S \setminus K)) < \varepsilon$ . ■

**4.6 Remarques.** (i) Comme cas particulier du résultat précédent, nous avons:

*Si  $S$  est un espace polonais, alors  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est relativement  $\mathcal{S}$ -compact si et seulement si  $\mathcal{H}$  est tendu.*

(ii) Le fait que tout ensemble uniformément intégrable de  $L^1(\mu)$  est relativement faiblement compact dans  $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$  (le théorème de Dunford-Pettis) est maintenant une conséquence du théorème de Prokhorov. En effet si  $H$  est un sous-ensemble uniformément intégrable de  $L^1(\mu)$  alors  $H$  est borné et, d'après 4.3,  $H$  est tendu. Le théorème de Prokhorov (4.5) nous assure que  $H$  est relativement  $\mathcal{S}$ -compact. Alors toute suite généralisée  $(u^i)_{i \in I} \subseteq H$  admet une sous-suite généralisée  $(u^{i_j})_{j \in J} - \mathcal{S}$ -convergente vers une mesure de Young  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ . Comme  $(u^{i_j})_{j \in J}$  est uniformément intégrable et  $\mathcal{T}^{i_j} \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ , alors  $(u^{i_j})_{j \in J}$  est faiblement convergente vers  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  où  $u(t) = \int_{\mathbb{R}} x d\tau_t(x)$ , pour tout  $t \in \Omega$  (cf.[Va2]); donc  $H$  est relativement faiblement compact dans  $(L^1(\mu), \|\cdot\|_1)$ .

Nous donnons deux résultats sur la compacité séquentielle sur  $(\mathcal{Y}(S), \mathcal{S})$ .

**4.7 Théorème.** *Soit  $S$  un souslinien régulier. Si  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est un ensemble tendu, alors il est séquentiellement  $\mathcal{S}$ -compact.*

**Démonstration.** 1) Nous supposons d'abord que  $S$  est un souslinien métrisable.  $Rac^+(\mathcal{B}_S)$  et  $\mathcal{P}_S$  sont métrisables et de type dénombrable. La tribu borélienne  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{P}_S$  est donc dénombrablement engendrée.

Soit  $(\mathcal{T}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures de Young de  $\mathcal{H}$ ; pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau^n$  est donc une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{A})$  à valeurs dans  $(\mathcal{P}_S, \mathcal{C})$ . La plus petite  $\sigma$ -algèbre,  $\mathcal{A}_0$ , sur  $\Omega$  pour laquelle toutes les applications  $\tau^n$  sont mesurables est alors dénombrablement engendrée; il est évident que  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ . Soit  $\mu_0$  la restriction de  $\mu$  sur  $\mathcal{A}_0$  et soit  $\mathcal{Y}_0(S)$  l'espace de mesures de Young sur  $(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ , donc l'espace de toutes les applications  $\tau : \Omega \rightarrow \mathcal{P}_S$ ,  $(\mathcal{A}_0 - \mathcal{C})$ -mesurables ou bien des mesures  $\mathcal{T} : \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_S \rightarrow \mathbb{R}_+$  pour lesquelles  $\mathcal{T}(A \times S) = \mu_0(A)$ , pour tout  $A \in \mathcal{A}_0$ . On peut remarquer que  $\mu_0$  n'est pas, en général, une mesure complète sur  $\mathcal{A}_0$ .

Soit  $\mathcal{S}_0$  la topologie stable sur  $\mathcal{Y}_0(S)$ ;  $\mathcal{Y}_0(S) \subseteq \mathcal{Y}(S)$  et  $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}|_{\mathcal{Y}_0(S)}$ .

Soit  $\Phi : \mathcal{Y}(S) \rightarrow \mathcal{Y}_0(S)$  l'application qui, à chaque  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ , associe la restriction  $\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}|_{\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{B}_S}$ ; alors  $\Phi$  est une surjection  $(\mathcal{S} - \mathcal{S}_0)$ -continue. Comme  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est tendu, d'après le théorème 4.5, il est relativement  $\mathcal{S}$ -compact et alors  $\Phi(\mathcal{H})$  est relativement  $\mathcal{S}_0$ -compact. Mais  $(\mathcal{Y}_0(S), \mathcal{S}_0)$  est un espace métrisable, donc  $\Phi(\mathcal{H})$  est séquentiellement compact.

Soit alors  $(\mathcal{T}^{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  une sous-suite de  $(\mathcal{T}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et soit  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}_0(S) \subseteq \mathcal{Y}(S)$  telle que  $\Phi(\mathcal{T}^{k_n}) \xrightarrow{\mathcal{S}_0} \mathcal{T}$ . Montrons que  $\mathcal{T}^{k_n} \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{T}$ .

Soit  $A \in \mathcal{A}$  et soit  $f \in C_b(S)$ ; l'application  $\nu : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $\nu(B) = \mu(A \cap B)$ , pour tout  $B \in \mathcal{A}_0$ , est une mesure sigma-additive et finie absolument continue par rapport à  $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . D'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe une fonction  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}_0, \mu_0)$  telle que  $\nu(B) = \mu(A \cap B) = \int_B g(t) d\mu_0(t)$ , pour tout  $B \in \mathcal{A}_0$ ; en particulier,  $\mu(A) = \int_\Omega g(t) d\mu_0(t)$ . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{k_n}(\mathbb{1}_A \otimes f) &= \int_\Omega \mathbb{1}_A(t) \cdot \tau_t^{k_n}(f) d\mu(t) = \int_\Omega g(t) \cdot \Phi(\tau^{k_n})_t(f) d\mu_0(t) \rightarrow \\ &\rightarrow \int_\Omega g(t) \cdot \tau_t(f) d\mu_0(t) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(t) \cdot \tau_t(f) d\mu(t) = \mathcal{T}(\mathbb{1}_A \otimes f). \end{aligned}$$

2) Supposons maintenant que  $(S, \sigma)$  est un souslinien régulier. Soit  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  un ensemble  $\sigma$ -tendu. Nous pouvons considérer une distance  $d$  sur  $S$  telle que la topologie engendrée,  $\sigma_d$ , est de type dénombrable et moins fine que  $\sigma$ ;

et que  $\mathcal{B}_S(\sigma_d) = \mathcal{B}_S(\sigma)$ . Alors  $(S, \sigma_d)$  est un souslinien métrisable et, comme nous avons montré dans la démonstration du théorème 4.5, la topologie stable  $\mathcal{S}_d$  sur  $\mathcal{Y}(S, \sigma_d)$  est moins fine que la topologie stable  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{Y}(S, \sigma)$ .

L'adhérence  $\overline{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H}$  dans l'espace  $(\mathcal{Y}(S), \mathcal{S})$  est  $\mathcal{S}$ -compacte et alors  $\mathcal{S} \upharpoonright_{\overline{\mathcal{H}}} = \mathcal{S}_d \upharpoonright_{\overline{\mathcal{H}}}$ . Mais, d'après la première partie de la démonstration,  $\mathcal{H}$  est séquentiellement  $\mathcal{S}_d$ -compact et alors il est séquentiellement  $\mathcal{S}$ -compact. ■

La proposition suivante donne une réciproque de cette propriété.

**4.8 Proposition.** *Soit  $S$  un espace polonais. Si  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Y}(S)$  est un ensemble séquentiellement  $\mathcal{S}$ -compact, alors il est tendu.*

**Démonstration.** L'application  $\Phi : \mathcal{Y}(S) \rightarrow Rca^+(\mathcal{B}_S)$  définie pour tout  $\mathcal{T} \in \mathcal{Y}(S)$ , par  $\Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\Omega \times \cdot)$ , est  $(\mathcal{S} - \mathcal{T}_S)$ -continue. Alors  $\Phi(\mathcal{H})$  est séquentiellement  $\mathcal{T}_S$ -compact dans  $Rca^+(\mathcal{B}_S)$ . Comme  $(Rca^+(\mathcal{B}_S), \mathcal{T}_S)$  est métrisable,  $\Phi(\mathcal{H})$  est relativement compact et alors  $\Phi(\mathcal{H})$  est tendu, d'où  $\mathcal{H}$  est tendu. ■

## Bibliographie

- [Ba1] Balder, E.J. – *A general approach to lower semicontinuity and lower closure in optimal control theory*, SIAM J. Control Optim., 22 (1984), 570–598.
- [Ba2] Balder, E.J. – *Lectures on Young measure theory and its applications in economics*, Proceedings Grado School on Measure Theory and Real Analysis, Rendiconti dell'Istituto di Matematico dell'Università di Trieste, 31 Suppl. 1 (2000), 1–69.
- [BeL] Berliocchi, H. and Lasry, J.M. – *Intégrales normales et mesures paramétrées en calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France 101 (1973), 129–184.
- [Bo1] Bourbaki, N. – *Topologie générale, Chap. 9: Utilisation des nombres réels en topologie générale*, Hermann, Paris, 1958.
- [Bo2] Bourbaki, N. – *Intégration, Livre VI*, Hermann, Paris, 1969.

- [CRV] Castaing, Ch., Raynaud de Fitte, P. and Valadier, M. – *Young measures on topological spaces. With applications in control theory and probability theory*, Kluwer Academic Publ. Dordrecht.Boston.London, 2004.
- [Eng] Engelking, R. – *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.
- [FIG] Florescu, L.C. et Godet-Thobie, C. – *Quelques propriétés des mesures de Young*, An. Ştiinţ. Univ. Al.I.Cuza Iaşi Mat.(N.S.), t. XLVI, f.2 (2000), 393–412.
- [JaM] Jacod, J., Mémin, J. – *Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité*, Séminaire de Probabilités, XV (J. Azéma and M. Yor, eds.) Lecture Notes in Math. 986, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 529–546.
- [Sch] Schwartz, L. – *Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures*, Oxford University Press, 1973.
- [Va1] Valadier, M. – *Désintégration d' une mesure sur un produit*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 276 (1973), 33–35.
- [Va2] Valadier, M. – *A course on Young measures*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, XXVI (1994), Supplemento, 349–394.
- [War] Warga, J. – *Optimal control of differential and functional equations*, Academic Press, New York. London, 1972.
- [You] Young, L.C. – *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Saunders, Philadelphia. London. Toronto, 1969.