Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi
Facultatea de Matematică

Examen de licenţă
Sesiunea Iulie, 2018

Algebră. 1. Fie sistemele liniare omogene cu coeficienţi reali

$$(S_1)\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ x_4 = 0, \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

şi $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ mulţimile soluţiilor lor.

a) Arătaţi că U_1 şi U_2 sunt subspaţii liniare în $\mathbb{R}^4$.

b) Calculaţi $dim_{\mathbb{R}}(U_i)$, $i = 1, 2$.

c) Determinaţi toate numerele reale α astfel încât $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$.

2. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(m, n) = 1$ şi funcţia $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $f(x) = (\hat{x}, \bar{x})$, $\forall\, x \in \mathbb{Z}$.

a) Arătaţi că f este un morfism de inele.

b) Determinaţi $Ker(f)$ şi $Im(f)$.

c) Arătaţi că are loc izomorfismul de inele: $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Analiză. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

(a) Să se arate că funcţia f este mărginită şi să i se afle marginile.

(b) Să se cerceteze dacă f are limită în punctul $(0, 0)$.

(c) Să se cerceteze dacă f are derivate parţiale în punctul $(0, 0)$.

(d) Fie şirul $a_n = f(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se studieze convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Geometrie. În raport cu un reper ortonormat în $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu structura afină şi euclidiană canonică, se consideră curba parametrizată $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (3\sin t, 3\cos t, 4t)$, $t \in \mathbb{R}$, punctul $M(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \pi)$, dreapta $\delta : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$, vectorul $\bar{u} = (1, 2, 3)$ şi planul
$\alpha :\ 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 3z + 3\pi = 0$.

a) Scrieţi ecuaţiile imaginii dreptei δ şi ecuaţia imaginii planului α prin translaţia de vector $\bar{u}$.

b) Justificaţi că γ este o curbă parametrizată regulată. Verificaţi că punctul M aparţine imaginii curbei. Calculaţi curbura şi torsiunea curbei γ în punctul M.

c) Scrieţi ecuaţia dreptei a tangentă în punctul M la curbă şi arătaţi că a este inclusă în planul α.

d) Scrieţi ecuaţia planului β normal la curba γ în punctul M şi determinaţi unghiul φ format de β cu α.

e) Demonstraţi că punctele de curba γ în care tangenta la curbă este paralelă cu planul α sunt $\left\{M_k\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, (8k+1)\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Informatică. Spunem că un număr natural cu cifrele nenule este *magic* dacă diferenţa a două dintre cifrele sale este egală cu 8 (de exemplu, numerele 129 sau 9712 sunt *magice*). Spunem că două numere sunt *prietene* dacă sunt *magice* şi au aceeaşi sumă a cifrelor.

Definiţi următoarele funcţii C++ conform cerinţelor precizate şi scrieţi un program pentru testarea lor.

a) `int magic(int nr){...}` returnează 1, dacă numărul `nr` este *magic* şi 0, în caz contrar.

b) `int prietene(int n1, int n2){...}` returnează 1, dacă numerele `n1` şi `n2` sunt *prietene* şi 0, în caz contrar.

c) `int lista_prieteni(int nr, int v[], int w[], int n){...}` caută prietenii numărului `nr` în tabloul `v` de dimensiune `n` şi îi pune în tabloul `w`, ordonaţi crescător. Funcţia va returna numărul de prieteni găsiţi. De exemplu, pentru `nr=991`, `n=8` şi `v[]={234, 9217, 219, 9118, 875, 19, 199, 12916}`, valoarea returnată după apelul funcţiei este 4, iar `w[]={199, 9118, 9217, 12916}`.

d) `int prieten_comun(int nr, int v[], int w[], int n){...}`
returnează cel mai mic prieten al numărului `nr` care se află în tablourile `v` şi `w`, ambele de dimensiune `n`, iar dacă nu există un prieten comun, returnează `-1`. Explicaţi algoritmul folosit pentru această ultimă funcţie.