

## Produsul vectorial, dublu vectorial și produsul mixt.

### Produsul vectorial a doi vectori liberi.

Fie  $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  o bază ortonormată pozitivă în  $\mathcal{V}_3$  orientat. Pentru doi vectori  $\bar{u} = x^1\bar{i} + x^2\bar{j} + x^3\bar{k}$ ,  $\bar{v} = y^1\bar{i} + y^2\bar{j} + y^3\bar{k}$ , definim produsul lor vectorial ca fiind vectorul

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & x^1 & y^1 \\ \bar{j} & x^2 & y^2 \\ \bar{k} & x^3 & y^3 \end{vmatrix} = (x^2y^3 - x^3y^2)\bar{i} - (x^1y^3 - x^3y^1)\bar{j} + (x^1y^2 - x^2y^1)\bar{k}.$$

### Proprietăți:

V1)  $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$ ,  $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$ ,  $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$ ;

V2) Aplicația  $\times : (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \mapsto \bar{u} \times \bar{v} \in \mathcal{V}_3$  este biliniară și antisimetrică ( $\bar{u} \times \bar{v} = -\bar{v} \times \bar{u}$ );

V3)  $\bar{u} \times \bar{v} = \bar{0}$  dacă și numai dacă vectorii  $\bar{u}$  și  $\bar{v}$  sunt coliniari;

V4)  $\bar{u} \times \bar{v} \perp \bar{u}$ ,  $\bar{u} \times \bar{v} \perp \bar{v}$ ;

V5) Dacă  $\bar{u}$  și  $\bar{v}$  necoliniari atunci  $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v}\}$  este o bază pozitivă.

V6) Dacă  $\bar{u} \neq \bar{0}$  și  $\bar{v} \neq \bar{0}$  atunci  $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin \angle(\bar{u}, \bar{v})$  este aria paralelogramului construit pe cei doi vectori aplicați în același punct.

### Produsul dublu vectorial.

Pentru trei vectori liberi  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ , produsul dublu vectorial  $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$  este dat de:

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \bar{v} - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \bar{w}.$$

Produsul dublu vectorial  $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$  are următoarea exprimare:

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w} = \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle \bar{u} - \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle \bar{v}.$$

### Produsul mixt.

Produsul mixt a trei vectori liberi  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  este numărul real  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ , definit prin

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \langle \bar{u}, \bar{v} \times \bar{w} \rangle.$$

### Proprietăți:

M1) Aplicația  $(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \times \mathcal{V}_3 \rightarrow \mathbb{R}$  este o formă trei-liniară;

M2) Produsul mixt este o aplicație antisimetrică:  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = -(\bar{v}, \bar{u}, \bar{w})$ ,  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = -(\bar{u}, \bar{w}, \bar{v})$ , etc.

M3)  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = 0$  dacă și numai dacă vectorii sunt coplanari.

M4) Dacă  $\bar{u}, \bar{v}$  și  $\bar{w}$  sunt necoplanari atunci  $|(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})|$  este egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori aplicați în același punct;

M5) Dacă  $\bar{u} = x^1\bar{i} + x^2\bar{j} + x^3\bar{k}$ ,  $\bar{v} = y^1\bar{i} + y^2\bar{j} + y^3\bar{k}$  și  $\bar{w} = z^1\bar{i} + z^2\bar{j} + z^3\bar{k}$  atunci

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

### Bază reciprocă.

Fie  $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  o bază oarecare în  $\mathcal{V}_3$ . Baza  $\mathcal{B}^* = \{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \bar{e}_3^*\}$  se numește baza reciprocă bazei  $\mathcal{B}$  dacă  $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j^* \rangle = \delta_{ij}$ . Vectorii bazei reciproce la fel orientate cu baza dată sunt dați de:

$$\bar{e}_1^* = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \bar{e}_2^* = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}, \bar{e}_3^* = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)}.$$

Se observă că o bază este ortonormată dacă și numai dacă coincide cu reciproca sa.

### Probleme:

**P1)** Să se calculeze produsul vectorial  $\bar{u} \times \bar{v}$  pentru următoarele perechi de vectori: i)  $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}$ ,  $\bar{v} = 3\bar{k}$ ; ii)  $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ ,  $\bar{v} = 7\bar{i} + 4\bar{j} + 6\bar{k}$ ; iii)  $\bar{u} = \bar{j} + 2\bar{k}$ ,  $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$ .

**P2)** Se consideră vectorii  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  și  $\bar{c}$  necoliniari doi câte doi. Să se arate că  $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$  dacă și numai dacă  $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}$ . Utilizați aceasta pentru a demonstra teorema sinusurilor într-un triunghi.

**P3)** Să se determine produsul scalar  $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$  știind că  $|\bar{u}| = 8$ ,  $|\bar{v}| = 15$  și  $|\bar{u} \times \bar{v}| = 72$ .

**P4)** Să se afle aria paralelogramului construit pe vectorii  $\bar{a} = \bar{u} + 2\bar{v}$  și  $\bar{b} = 2\bar{u} + \bar{v}$  știind că  $\bar{u}$  și  $\bar{v}$  sunt vectori unitari care formează un unghi de  $\pi/6$ .

**P5)** Se consideră punctele  $A, B, C \in \mathcal{E}_3$  fixe. Să se arate că vectorul  $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{AB}$  nu depinde de alegerea punctului  $M \in \mathcal{E}_3$ . Determinați lungimea acestui vector.

**Soluție.** Pentru un alt punct  $N \in \mathcal{E}_3$  avem  $\overrightarrow{NA} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NB} \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NC} \times \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}) \times \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MB}) \times \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MC}) \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{AB}$ . Deoarece  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \bar{0}$  se obține că  $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NA} \times \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NB} \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{NC} \times \overrightarrow{AB}$  oricare ar fi punctele  $M, N \in \mathcal{V}_3$ . Pentru  $M = A$  se obține că acest vector este  $2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$  și deci norma sa este de patru ori aria triunghiului ABC.

**P6)** Pentru vectorii  $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ ,  $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$  și  $\bar{w} = 5\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$  să se calculeze vectorii  $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$  și  $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$ .

**P7)** Precizați în ce condiții vectorul  $\bar{a} = \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$  este colinar cu vectorul  $\bar{b} = \bar{v} - \bar{w}$ .

**P8)** Să se verifice care dintre tripletele următoare conțin vectori coplanari:

- i)  $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ ,  $\bar{v} = 9\bar{i} - 11\bar{j} + 13\bar{k}$  și  $\bar{w} = 2\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$ ;  
 ii)  $\bar{u} = 8\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ ,  $\bar{v} = 2\bar{j} - \bar{k}$  și  $\bar{w} = 4\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ .

**P9)** Să se exprime produsele mixte  $(\bar{a}, \bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$  și  $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{b} + \bar{c}, \bar{c} + \bar{a})$  în funcție de produsul mixt  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ .

**P10)** Să se arate că  $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  și  $\bar{d} \in \mathcal{V}_3$  are loc egalitățile:

$$\langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{c} \times \bar{d} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle - \langle \bar{a}, \bar{d} \rangle \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle,$$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})\bar{d} - (\bar{b}, \bar{c}, \bar{d})\bar{a} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{d})\bar{c} - (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\bar{d}.$$

**Soluție.** Folosind definiția produsului mixt, antisimetria sa și dublul produs vectorial avem  $\langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{u} \times \bar{v} \rangle = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{u} \times \bar{v}) = (\bar{u} \times \bar{v}, \bar{a}, \bar{b}) = \langle (\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \langle \bar{u}, \bar{a} \rangle \bar{v} - \langle \bar{v}, \bar{a} \rangle \bar{u}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{a} \rangle \langle \bar{v}, \bar{b} \rangle - \langle \bar{v}, \bar{a} \rangle \langle \bar{u}, \bar{b} \rangle$ . Pentru cea de a doua egalitate avem  $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = \langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{d} \rangle \bar{c} - \langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{c} \rangle \bar{d} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{d})\bar{c} - (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\bar{d}$ .

**P11)** Demonstrați că are loc identitatea lui Jacobi:

$$\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w}) + \bar{v} \times (\bar{w} \times \bar{u}) + \bar{w} \times (\bar{u} \times \bar{v}) = \bar{0}, \forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathcal{V}_3.$$

Dacă  $\bar{u}, \bar{v}$  și  $\bar{w}$  sunt necoplanari identitatea lui Jacobi se poate scrie

$$\bar{u} \times \bar{u}^* + \bar{v} \times \bar{v}^* + \bar{w} \times \bar{w}^* = \bar{0},$$

$\{\bar{u}^*, \bar{v}^*, \bar{w}^*\}$  fiind baza reciprocă bazei  $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ .

**P12)** Se consideră vectorii necoplanari  $\bar{u}, \bar{v}$  și  $\bar{w}$ .

i) Să se arate că are loc egalitatea  $(\bar{u} \times \bar{v}, \bar{v} \times \bar{w}, \bar{w} \times \bar{u}) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})^2$ .

ii) Să se arate că are loc egalitatea

$$\frac{(\bar{u} \times \bar{v}) \times (\bar{v} \times \bar{w})}{(\bar{u} \times \bar{v}, \bar{v} \times \bar{w}, \bar{w} \times \bar{u})} = \frac{\bar{v}}{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})}.$$

iii) Demonstrați că baza  $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$  este reciproca bazei  $\{\bar{u}^*, \bar{v}^*, \bar{w}^*\}$ .

iv) Să se arate că are loc egalitatea  $\langle \bar{u} + \bar{v} + \bar{w}, \bar{u}^* + \bar{v}^* + \bar{w}^* \rangle = 3$ .

v) Să se arate că  $\{\bar{v}^* \times \bar{w}^*, \bar{w}^* \times \bar{u}^*, \bar{u}^* \times \bar{v}^*\}$  este baza reciprocă bazei  $\{\bar{v} \times \bar{w}, \bar{w} \times \bar{u}, \bar{u} \times \bar{v}\}$ .

**P13)** Se consideră o bază  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  și  $\{\bar{a}^*, \bar{b}^*, \bar{c}^*\}$  baza reciprocă.

i) Pentru un vector arbitrar  $\bar{u} \in \mathcal{V}_3$  avem:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \langle \bar{u}, \bar{a} \rangle \bar{a}^* + \langle \bar{u}, \bar{b} \rangle \bar{b}^* + \langle \bar{u}, \bar{c} \rangle \bar{c}^*, \\ \bar{u} &= \langle \bar{u}, \bar{a}^* \rangle \bar{a} + \langle \bar{u}, \bar{b}^* \rangle \bar{b} + \langle \bar{u}, \bar{c}^* \rangle \bar{c}. \end{aligned} \tag{1}$$

ii) Folosiți relațiile (1) pentru a demonstra:

$$\bar{u} \times \bar{v} = \frac{1}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} \begin{vmatrix} \bar{a} & \langle \bar{u}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{v}, \bar{a} \rangle \\ \bar{b} & \langle \bar{u}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{v}, \bar{b} \rangle \\ \bar{c} & \langle \bar{u}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{v}, \bar{c} \rangle \end{vmatrix};$$

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \frac{1}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} \begin{vmatrix} \langle \bar{u}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{v}, \bar{a} \rangle & \langle \bar{w}, \bar{a} \rangle \\ \langle \bar{u}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{v}, \bar{b} \rangle & \langle \bar{w}, \bar{b} \rangle \\ \langle \bar{u}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{v}, \bar{c} \rangle & \langle \bar{w}, \bar{c} \rangle \end{vmatrix}.$$

**P14)**

i) Se consideră punctele necoplanare  $O, A, B$  și  $C$ . Fie  $H$  proiecția punctului  $O$  pe planul  $(ABC)$  iar  $\Omega$  centrul sferei circumscrise tetraedrului  $OABC$ . Să se exprime vectorii  $\overrightarrow{OH}$  și  $\overrightarrow{O\Omega}$  în funcție de vectorii  $\bar{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\bar{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\bar{c} = \overrightarrow{OC}$ .

ii) Fie  $OXYZ$  un triedru și  $A \in (OX)$ ,  $B \in (OY)$ ,  $C \in (OZ)$  variabile astfel încât planul  $(ABC)$  este paralel cu un plan dat. Să se determine locul geometric al centrelor sferelor circumscrise tetraedrului  $OABC$ .

**Soluție.**

i) Vectorii  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  sunt necoplanari și deci constituie o bază în  $V_3$ , pe care o presupunem orientată pozitiv. Fie  $\bar{a}^*, \bar{b}^*, \bar{c}^*$  baza reciprocă. Relativ la această bază vectorul  $\overrightarrow{OH}$  are următoarea exprimare

$$\overrightarrow{OH} = \langle \overrightarrow{OH}, \bar{a} \rangle \bar{a}^* + \langle \overrightarrow{OH}, \bar{b} \rangle \bar{b}^* + \langle \overrightarrow{OH}, \bar{c} \rangle \bar{c}^*.$$

Deoarece  $\overrightarrow{OH} \perp (ABC)$  și  $H \in (ABC)$  obținem că  $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AH}$ ,  $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{BH}$  și  $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{CH}$ . Prima relație de perpendicularitate implică  $\langle \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{AH} \rangle = 0$ . Folosind faptul că  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \bar{a}$  obținem că

$$\langle \overrightarrow{OH}, \bar{a} \rangle = |\overrightarrow{OH}|^2.$$

Exprimând volumul tetraedrului  $OABC$  în două moduri obținem

$$|\overrightarrow{OH}| \cdot |\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}| = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

În consecință

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \frac{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})^2}{|\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}|^2} (\bar{a}^* + \bar{b}^* + \bar{c}^*) \\ &= \frac{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})}{|\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}|^2} (\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a}). \end{aligned}$$

În mod analog

$$\overrightarrow{O\Omega} = \langle \overrightarrow{O\Omega}, \bar{a} \rangle \bar{a}^* + \langle \overrightarrow{O\Omega}, \bar{b} \rangle \bar{b}^* + \langle \overrightarrow{O\Omega}, \bar{c} \rangle \bar{c}^*.$$

Deoarece  $\Omega$  este egal depărtat de vârfurile tetraedrului  $OABC$  avem că

$$|\overrightarrow{O\Omega}|^2 = |\overrightarrow{A\Omega}|^2 = \langle \overrightarrow{O\Omega} - \bar{a}, \overrightarrow{O\Omega} - \bar{a} \rangle = |\overrightarrow{O\Omega}|^2 - 2 \langle \overrightarrow{O\Omega}, \bar{a} \rangle + |\bar{a}|^2.$$

Din această relație obținem

$$\langle \overrightarrow{O\Omega}, \bar{a} \rangle = \frac{1}{2} |\bar{a}|^2.$$

Vectorul  $\overrightarrow{O\Omega}$  are următoarea exprimare

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O\Omega} &= \frac{1}{2} (|\bar{a}|^2 \bar{a}^* + |\bar{b}|^2 \bar{b}^* + |\bar{c}|^2 \bar{c}^*) \\ &= \frac{1}{2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} (|\bar{a}|^2 \bar{b} \times \bar{c} + |\bar{b}|^2 \bar{c} \times \bar{a} + |\bar{c}|^2 \bar{a} \times \bar{b}).\end{aligned}\quad (2)$$

ii) Fixăm  $A_0 \in (OX)$ ,  $B_0 \in (OY)$  și  $C_0 \in (OZ)$  astfel planul  $(A_0 B_0 C_0)$  este paralel cu planul dat. Pentru orice alte puncte  $A \in (OX)$ ,  $B \in (OY)$  și  $C \in (OZ)$  astfel  $(ABC)$  paralel cu  $(A_0 B_0 C_0)$  rezulta că există  $\lambda > 0$  astfel ca  $\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OA_0}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OB_0}$  și  $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OC_0}$ . Folosind relația (2) pentru  $\overrightarrow{O\Omega}$  și  $\overrightarrow{O\Omega_0}$  obținem că

$$\overrightarrow{O\Omega} = \lambda \overrightarrow{O\Omega_0}, \lambda > 0.$$

Din această relație obținem ca locul geometric este o semidreaptă cu originea în punctul  $O$ .

**P15)** Să se rezolve următoarele ecuații vectoriale:  $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{b}$ ,  $\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{x}) = \bar{b}$  și  $\underbrace{\bar{a} \times (\bar{a} \times (\dots \times (\bar{a} \times \bar{x})))}_{n\text{-ori}} = \bar{b}$  pentru  $\bar{a} \neq \bar{0}$  și  $\bar{a} \perp \bar{b}$ .

**Soluție.** Deoarece  $\bar{a} \perp \bar{b}$  se obține că  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}\}$  sunt ortogonali doi câte doi și deci constituie o bază în  $\mathcal{V}_3$ . Dacă  $\bar{x} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{a} \times \bar{b}$  este soluție a ecuației  $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{b}$  atunci  $\bar{b} = \bar{a} \times \bar{x} = \bar{a} \times (\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} + \gamma \bar{a} \times \bar{b}) = \beta \bar{a} \times \bar{b} - \gamma |\bar{a}|^2 \bar{b}$ . Se obține că  $\beta = 0$  și  $-\gamma |\bar{a}|^2 = 1$ . În consecință, soluția ecuației  $\bar{a} \times \bar{x} = \bar{b}$  este  $\bar{x} = \alpha \bar{a} - \frac{1}{|\bar{a}|^2} \bar{a} \times \bar{b}$ .

Conform celor prezentate mai sus rezolvând ecuația  $\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{x}) = \bar{b}$  pentru  $\bar{a} \times \bar{x}$  se obține  $\bar{a} \times \bar{x} = \alpha \bar{a} - \frac{1}{|\bar{a}|^2} \bar{a} \times \bar{b}$ . Deoarece  $\bar{a} \times \bar{x} \perp \bar{a}$  se obține  $\alpha = 0$ . În consecință ecuațiile  $\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{x}) = \bar{b}$  și  $\bar{a} \times \bar{x} = -\frac{1}{|\bar{a}|^2} \bar{a} \times \bar{b}$  sunt echivalente. Soluția celei de a doua ecuație este

$$\bar{x} = \alpha \bar{a} - \frac{1}{|\bar{a}|^2} \left[ \bar{a} \times \left( -\frac{1}{|\bar{a}|^2} (\bar{a} \times \bar{b}) \right) \right] = \alpha \bar{a} - \frac{1}{|\bar{a}|^2} \bar{a}.$$

Pentru ultima ecuație se procedează prin inducție, discutându-se cazurile  $n$  par și  $n$  impar.

**P16)** Să se rezolve sistemul de ecuații vectoriale:  $\begin{cases} \bar{a} \times \bar{x} = \bar{b} \\ \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle = m, \end{cases}$

pentru  $\bar{a} \neq \bar{0}$  și  $\bar{a} \perp \bar{b}$ .

**P17)** Dacă vectorii  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  și  $\bar{c}$  sunt necoplanari atunci sistemul de ecuații  $\begin{cases} \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle = m, \\ \langle \bar{b}, \bar{x} \rangle = n, \\ \langle \bar{c}, \bar{x} \rangle = p \end{cases}$  admite soluție unică.

**Indicație.** Fie  $\{\bar{a}^*, \bar{b}^*, \bar{c}^*\}$  baza reciprocă bazei  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ . Se caută soluția sistemului dat sub forma (1).

**P18)** Să se determine condițiile necesare și suficiente pentru ca sistemul de ecuații vectoriale  $\begin{cases} \bar{a} \times \bar{x} + \bar{b} \times \bar{y} = \bar{c} \\ \bar{b} \times \bar{x} - \bar{a} \times \bar{y} = \bar{d} \end{cases}$ , cu  $|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 \neq 0$  să fie compatibil. În caz de compatibilitate să se scrie soluția generală.

**Soluție.** Înmulțind scalar prima ecuație cu  $\bar{a}$  și a doua cu  $\bar{b}$  se obține  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{y}) = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle$  și  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{y}) = \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle$ . O primă condiție necesară pentru compatibilitatea sistemului dat este  $\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle$ . Asemănă tor dacă înmulțim scalar prima ecuație cu  $\bar{b}$  și a doua cu  $\bar{a}$  se obține  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}) = -\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$  și  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}) = \langle \bar{a}, \bar{d} \rangle$  ceea ce implică  $\langle \bar{a}, \bar{d} \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$ . În continuare vom arăta că cele două condiții  $\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{b}, \bar{d} \rangle$  și  $\langle \bar{a}, \bar{d} \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$  sunt și suficiente pentru compatibilitatea sistemului dat.

Soluția ecuației  $\langle \bar{a} \times \bar{b}, \bar{x} \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$  este

$$\bar{x} = \frac{-\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \bar{a} \times \bar{b} + (\bar{a} \times \bar{b})^\perp.$$

Cum  $(\bar{a} \times \bar{b})^\perp = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}$  obținem

$$\bar{x} = \frac{-\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \bar{a} \times \bar{b} + \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}. \quad (3)$$

În mod asemănător se obține

$$\bar{y} = \frac{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \bar{a} \times \bar{b} + \gamma \bar{a} + \delta \bar{b}. \quad (4)$$

Înmulțind la stânga vectorul  $\bar{x}$  cu  $\bar{a}$  se obține

$$\bar{a} \times \bar{x} = \frac{-\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b}) + \beta \bar{a} \times \bar{b} = \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \bar{b}^* + \beta |\bar{a} \times \bar{b}|^2 (\bar{a} \times \bar{b})^*.$$

Asemănător

$$\bar{b} \times \bar{y} = \frac{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \bar{b} \times (\bar{a} \times \bar{b}) - \gamma \bar{a} \times \bar{b} = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \bar{a}^* - \gamma |\bar{a} \times \bar{b}|^2 (\bar{a} \times \bar{b})^*.$$

Scăzând cei doi vectori obținem

$$\bar{a} \times \bar{x} - \bar{b} \times \bar{y} = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle \bar{a}^* + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle \bar{b}^* + (\beta - \gamma) |\bar{a} \times \bar{b}|^2 (\bar{a} \times \bar{b})^*.$$

Deci  $\bar{x}, \bar{y}$  satisfac prima ecuație a sistemului dat dacă și numai dacă  $\langle \bar{c}, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = |\bar{a} \times \bar{b}|^2 (\beta - \gamma)$ . În mod asemănător se obține că vectorii  $\bar{x}, \bar{y}$  satisfac a doua ecuație a sistemului dat dacă și numai dacă  $\langle$

$\bar{c}, \bar{a} \times \bar{b} \rangle = |\bar{a} \times \bar{b}|^2(\alpha + \delta)$ . În consecință soluția sistemului dat este

$$\bar{x} = \frac{-\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \bar{a} \times \bar{b} + \alpha \bar{a} + \beta \bar{b},$$

$$\bar{y} = \frac{\langle \bar{a}, \bar{c} \rangle}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \bar{a} \times \bar{b} + \left( \beta - \frac{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \right) \bar{a} + \left( \alpha + \frac{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})}{|\bar{a} \times \bar{b}|^2} \right) \bar{b}.$$

**P19)** Vectorii liberi  $\bar{a}$  și  $\bar{b}$  fiind necoliniari, să se rezolve ecuația:

$$\frac{|\bar{a}|^2 + x \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{|\bar{a}| |\bar{a} + x\bar{b}|} = \frac{|\bar{b}|^2 + \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{|\bar{b}| |\bar{a} + \bar{b}|}.$$

**P20)** Se consideră vectorii liberi  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  și  $\vec{OC}$  ortogonali doi câte doi. Notăm  $|\vec{OA}| = a$ ,  $|\vec{OB}| = b$  și  $|\vec{OC}| = c$ . Să se arate că:

$$\vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA} = abc \left( \frac{1}{a^2} \vec{OA} + \frac{1}{b^2} \vec{OB} + \frac{1}{c^2} \vec{OC} \right).$$

**P21)** Fie OABC un tetraedru regulat. Dacă notăm  $\vec{OA} = \bar{a}$ ,  $\vec{OB} = \bar{b}$ ,  $\vec{OC} = \bar{c}$  să se arate că vectorii  $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ ,  $\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a})$  și  $\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})$  sunt coliniari cu  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CA}$  și respectiv  $\vec{AB}$ .

**P22)** Se consideră triunghiul ABC în care  $AA_1$  este înălțime și  $BC = a$ . Să se arate că

$$\vec{AA_1} = \frac{1}{a^2} \vec{BC} \times (\vec{AB} \times \vec{AC}).$$