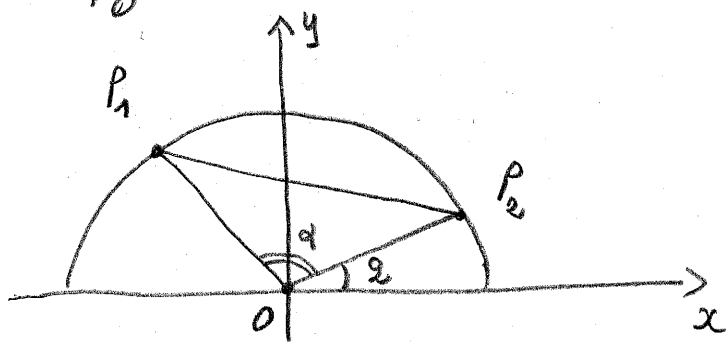


Fișă de exerciții. Statica sistemelor mecanice

1. Două puncte materiale P_1 și P_2 de mase m_1 și m_2 , legate între ele printr-un fir flexibil și inextensibil, fără masă, de lungime $2l$, se află pe un semicerc vertical de rază r , $r > l$, (ca în figură). Studiați echilibrul sistemului.



Sistemul mecanic este supus următoarelor 3 legături:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2,$$

$$x_2^2 + y_2^2 = r^2,$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4l^2,$$

unde (x_1, y_1) și (x_2, y_2) sunt coordonatele carteziene de celor două puncte materiale. Vectorii de poziție au forma

$$\vec{x}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j},$$

$$\vec{x}_2 = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}.$$

Din cele de mai sus, rezultă că sistemul mecanic are un singur grad de libertate (din 4, numărul gradelor de libertate a două puncte libere în plan, scădem numărul total al legăturilor). Putem alege ca parametru pentru descrierea poziției sistemului mecanic unghiul β , format de OP_2 cu axa Ox . În triunghiul OP_1P_2 se cunosc lungimile tuturor laturilor, astfel unghiul α este cunoscut

$$\cos d = \frac{r^2 + r^2 - (2l)^2}{2r^2} = \frac{r^2 - 2l^2}{r^2}$$

Vectorii de poziție $\vec{x}_1$ și $\vec{x}_2$ se pot exprime în funcție de parametrul q în formă

$$\vec{x}_1 = r \cos(q+d) \vec{e} + r \sin(q+d) \vec{j},$$

$$\vec{x}_2 = r \cos q \vec{e} + r \sin q \vec{j}.$$

Deplasările virtuale $\delta \vec{x}_1$ și $\delta \vec{x}_2$ au forma

$$\delta \vec{x}_1 = [-r \sin(q+d) \vec{e} + r \cos(q+d) \vec{j}] \delta q,$$

$$\delta \vec{x}_2 = [-r \sin q \vec{e} + r \cos q \vec{j}] \delta q.$$

Forțele care acționează asupra celor două puncte sunt

$$\vec{F}_1 = m_1 \vec{g} = -m_1 g \vec{j}, \quad \vec{F}_2 = m_2 \vec{g} = -m_2 g \vec{j}.$$

Vom aplica ecuația lui D'Alembert - Lagrange, care în cazul echilibrului are forma

$$\sum_{s=1}^2 \vec{F}_s \cdot \delta \vec{x}_s = 0, \quad \forall \delta \vec{x}_s \text{ compatibile cu legăturile.}$$

Dacă ținăm cont de expresiile forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, precum și de expresiile deplasărilor virtuale $\delta \vec{x}_1$ și $\delta \vec{x}_2$, ecuația lui D'Alembert - Lagrange devine

$$[-m_1 g r \cos(q+d) - m_2 g r \cos q] \delta q = 0, \quad \forall \delta q$$

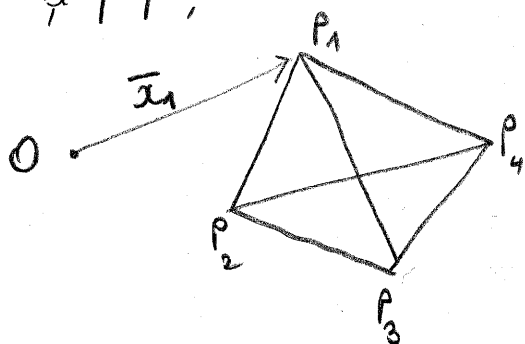
Cum δq este arbitrar, obținem ecuația

$$m_1 (\cos q \cos d - \sin q \sin d) + m_2 \cos q = 0$$

pentru determinarea unghiului q . Prin rezolvarea acestei ecuații deducem

$$\tan q = \frac{m_1 \cos d + m_2}{m_1 \sin d}.$$

2. Se consideră punctele $P_i, i=\overline{1,4}$ supuse condiției ca volumul tetraedrilor construit cu aceste vârfuri este constant. Presupunând că asupra punctelor P_i acționează forțele date $\vec{F}_i, i=\overline{1,4}$, să se arate că sistemul celor 4 puncte este în echilibru dacă și numai dacă forțele date sunt perpendiculare pe fețele opuse ale tetraedrilor și proporționale cu ariile acestora.



Fie O originea unui reper fix.
Notăm prin $\vec{x}_i, i=\overline{1,4}$ vectorii de poziție ai punctelor $P_i, i=\overline{1,4}$.

Condiția ca volumul tetraedrilor să

fie constant se exprimă matematic în forma

$$(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_3, \vec{x}_1 - \vec{x}_4) = c, \quad c - \text{constant}$$

adică produsul mixt al vectorilor $\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_1 - \vec{x}_3, \vec{x}_1 - \vec{x}_4$. Dacă remarcăm faptul că vectorii $\vec{x}_1 - \vec{x}_3, \vec{x}_1 - \vec{x}_4$ se pot rescrie în forma

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_3 = (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + (\vec{x}_2 - \vec{x}_3),$$

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_4 = (\vec{x}_1 - \vec{x}_3) + (\vec{x}_3 - \vec{x}_4),$$

atunci, utilizând proprietățile produsului mixt, condiția de mai sus este echivalentă cu

$$(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_2 - \vec{x}_3, \vec{x}_3 - \vec{x}_4) = c. \quad (*)$$

Condiția de echilibru este dată de ecuația lui D'Alembert-Lagrange

$$\sum_{i=1}^4 \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i = 0 \quad (**)$$

unde deplasările virtuale sunt compatibile cu legătura (*), adică $\delta \vec{x}_i, i=\overline{1,4}$ trebuie să satisfacă relația

$$(\delta \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2, \bar{x}_2 - \bar{x}_3, \bar{x}_3 - \bar{x}_4) + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2, \delta \bar{x}_2 - \delta \bar{x}_3, \bar{x}_3 - \bar{x}_4) + \\ + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2, \bar{x}_2 - \bar{x}_3, \delta \bar{x}_3 - \delta \bar{x}_4) = 0.$$

Ținând cont de definiția produsului mixt, putem rescrie relația de mai sus în forma

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \times (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) \delta \bar{x}_1 + [-(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \times (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) + (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) \times (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)] \delta \bar{x}_2 + \\ + [-(\bar{x}_3 - \bar{x}_4) \times (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \times (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)] \delta \bar{x}_3 - (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \times (\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \delta \bar{x}_4 = 0.$$

Mai mult, evoluând parametrii potroate de mai sus, găsim

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \times (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) \delta \bar{x}_1 + (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) \times (\bar{x}_1 - \bar{x}_3) \delta \bar{x}_2 + (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \times (\bar{x}_2 - \bar{x}_4) \delta \bar{x}_3 + \\ + (\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \times (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \delta \bar{x}_4 = 0. \quad (***)$$

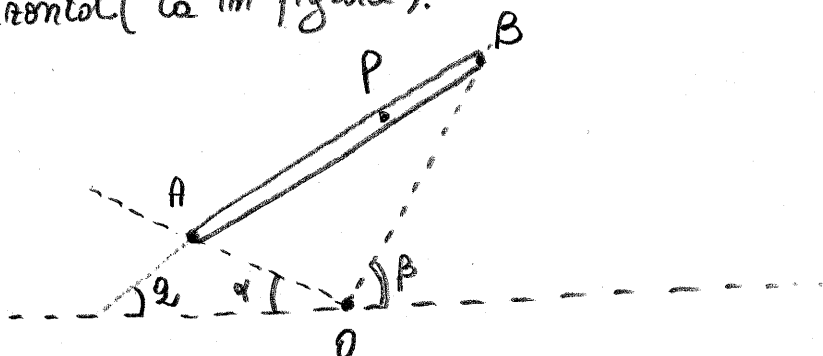
Ținem aplica metoda multiplicatorilor lui Lagrange (vezi notițele de curs; Sisteme neolonomă. Ecuațiile lui Lagrange). Înmultiplăm relația (***) prin λ și sumăm relația obținută cu relația (**). Obținem în final, utilizând argumentele standard ale metodei multiplicatorilor lui Lagrange că forțele au forma

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= -\lambda (\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \times (\bar{x}_3 - \bar{x}_4), \\ \bar{F}_2 &= -\lambda (\bar{x}_3 - \bar{x}_4) \times (\bar{x}_1 - \bar{x}_3), \\ \bar{F}_3 &= -\lambda (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \times (\bar{x}_2 - \bar{x}_4), \\ \bar{F}_4 &= -\lambda (\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \times (\bar{x}_1 - \bar{x}_2). \end{aligned} \quad (****)$$

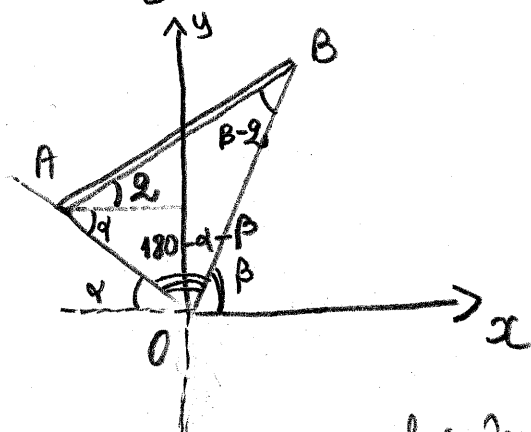
Aceste expresii demonstrează faptul că forțele sunt perpendiculare pe fețele opuse ale tetraedrului și au mărimea proporțională cu orice oarecare.

Reciproc, dacă forțele sunt date de relațiile (****) atunci acestea satisfac ecuația lui D'Alembert-Lagrange (**), orănd sistemul este în echilibru.

3. Să se determine pozițiile de echilibru ale unei bare grele și omogene ale cărei extremități A și B se sprijină fără frecare pe două plane care formează unghiurile α și respectiv β cu un plan orizontal (ca în figură).



Pentru a determina poziția barei AB este suficient să cunoaștem unghiul format de bara AB cu planul orizontal. Notăm acest unghi prin φ (vezi figură). Alegem un sistem de axe Oxy , unde Ox este orizontală, iar Oy este verticală. Notăm prin l lungimea barei, iar prin m masa acesteia.



Evident, unghiurile triunghiului AOB au mărimile

$$\angle AOB = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

$$\angle BAO = \varphi + \alpha,$$

$$\angle ABO = \beta - \varphi.$$

Aplicând teorema sinusului în acest triunghi, determinăm lungimea laturii OA

$$\frac{OA}{\sin(\beta - \varphi)} = \frac{l}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow OA = \frac{l \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Fie P un punct generic al barei AB. Vectorul de poziție al punctului P este

$$\vec{r} = \vec{OA} + \vec{AP} = OA(-\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) + \lambda(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}),$$

unde $\lambda \in [0, \ell]$. Imbecuind OA în relație de mai sus, găsim

$$\bar{x} = \left(-\frac{\ell \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \cos \alpha + \lambda \cos \alpha \right) \bar{i} + \left(\frac{\ell \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \alpha + \lambda \sin \alpha \right) \bar{j}, \quad \lambda \in [0, \ell].$$

Deplasarea virtuală $\delta \bar{x}$ se exprimă în forma

$$\delta \bar{x} = \left[\left(\frac{\ell \cos(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \cos \alpha - \lambda \sin \alpha \right) \bar{i} + \left(-\frac{\ell \cos(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \alpha + \lambda \cos \alpha \right) \bar{j} \right] \delta \alpha,$$

unde $\lambda \in [0, \ell]$.

Condiția de echilibru este dată de ecuația lui D'Alembert-Lagrange, care pentru un rigid are forma generală

$$\int_D \rho \bar{f} \cdot \delta \bar{x} \, dV = 0, \quad \forall \delta \bar{x}$$

unde $\bar{f}$ este forța masică, iar D este domeniul ocupat de rigid în spațiul euclidian tridimensional. dV este elementul de volum (dacă rigidul ocupă un domeniu tridimensional) elementul de arie (dacă D este o suprafață), sau de lungime (dacă D este o curbă).
Constanta ρ reprezintă densitatea rigidului.

În cazul nostru, forța masică este accelerația gravitațională, adică $\bar{f} = \bar{g} = -g \bar{j}$, g este constantă (fora este omogenă), astfel ecuația de mai sus se rescrie în forma

$$\int_{AB} \rho \bar{g} \cdot \delta \bar{x} \, d\lambda = 0, \quad \forall \delta \bar{x}$$

Imbecuind $\delta \bar{x}$ și $\bar{g}$ în această relație, obținem

$$\int_0^\ell \rho g \left[-\frac{\ell \cos(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \alpha + \lambda \cos \alpha \right] \delta \alpha \, d\lambda = 0, \quad \forall \delta \alpha.$$

Cum $\delta \alpha$ este o deplasare virtuală arbitrară, calculând integrale deducem ecuația de mai jos pentru determinarea parametrului α

(6)

$$\frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = 0.$$

Rezolvând această ecuație, obținem soluția

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} (\cot \alpha - \cot \beta).$$

4. Studiați echilibrul unui punct material obligat să rămână pe cerc vertical. (Forța dată este forța de greutate).

5. Se consideră parabola $x^2 = 2y$. Să se studieze echilibrul fără frecare a unui punct material P situat pe parabolă în cazul în care asupra lui P acționează forța $\vec{F} = -\vec{i} + x\vec{j}$.

6. Să se afle pozițiile de echilibru ale unui sistem format din două puncte materiale grele, de aceeași masă, care alunecă fără frecare pe o parabolă, a cărei axă este verticală. Punctele se resping cu o forță invers proporțională cu distanța dintre ele.

