

Sisteme neclonome. Ecuațiile lui Lagrange

Vom stabili în cele ce urmează ecuațiile lui Lagrange pentru sisteme neclonome. Considerăm un sistem mecanic format din N puncte materiale supus următoarelor legături geometrice și cinematice:

$$f_j(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad (1)$$

$$\sum_{\Delta=1}^N \bar{A}_{k\Delta} \cdot \dot{\bar{x}}_{\Delta} + A_{k0} = 0, \quad k = \overline{1, n_2}, \quad n_1 + n_2 < 3N. \quad (2)$$

Presupunem că legăturile (1) și (2) sunt independente, adică rangul matricii coeficienților vitezelor care apar în relațiile (2), și relațiile

$$\sum_{\Delta=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \bar{x}_{\Delta}} \cdot \dot{\bar{x}}_{\Delta} + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = \overline{1, n_1} \quad (3)$$

este $n_1 + n_2$.

Deoarece matricea $\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_{n_1})}{\partial (x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)}$ are rangul n_1 , putem introduce coordonatele $q_1, q_2, \dots, q_n$ unde $n = 3N - n_1$ astfel încât (vezi discuția de la sisteme clonome):

$$\bar{x}_{\Delta} = \bar{x}_{\Delta}(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \quad \Delta = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Din relațiile (2) și (4) deducem:

$$\sum_{\Delta=1}^N \bar{A}_{k\Delta} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial t} \right) + A_{k0} = 0, \quad k = \overline{1, n_2}. \quad (5)$$

Dacă introducem notațiile

$$a_{ki} = \sum_{\Delta=1}^N \bar{A}_{k\Delta} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial q_i}, \quad a_{k0} = \sum_{\Delta=1}^N \bar{A}_{k\Delta} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial t} + A_{k0}, \quad \begin{matrix} i = \overline{1, n} \\ k = \overline{1, n_2} \end{matrix} \quad (6)$$

atunci relațiile (5) se pot rescrie în forma

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \dot{q}_i + a_{k0} = 0, \quad k = \overline{1, n_2}. \quad (7)$$

Precedând la fel ca în cazul sistemelor omonome, din ecuația lui D'Alembert - Lagrange se obține:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Înăa, spre deosebire de cazul sistemelor omonome, pentru sisteme neomonome deplasările virtuale δq_i nu sunt arbitrare. Pe baza relațiilor (7), rezultă că deplasările virtuale satisfac condițiile

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \delta q_i = 0, \quad k = \overline{1, n_2}. \quad (9)$$

Pentru a deduce ecuațiile lui Lagrange în cazul sistemelor neomonome aplicăm metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Astfel din (8) și (9), deducem

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} - Q_i - \sum_{k=1}^{n_2} a_{ki} \lambda_k \right] \delta q_i = 0, \quad (10)$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_2}$ sunt multiplicatorii lui Lagrange. Sistemul de ecuații (9) este un sistem liniar având n necunoscute ($\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$) și n_2 ecuații. Rangul matricii (a_{ki}) este n_2 deoarece legăturile cinematice (2) sunt independente. În acest sistem, putem alege n_2 necunoscute principale, fie acestea $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{n_2}$, restul de $n - n_2$, adică $\delta q_{n_2+1}, \delta q_{n_2+2}, \dots, \delta q_n$, sunt necunoscute secundare (arbitrare).

Alegând în relația (10) multiplicatorii λ_k în așa fel încât coeficienții necunoscutelor principale $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_{n_2}$ să fie nuli, adică

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} - Q_i - \sum_{k=1}^{n_2} a_{ki} \lambda_k = 0, \quad i = \overline{1, n_2}, \quad (11)$$

obținem relația

$$\sum_{i=n_2+1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} - Q_i - \sum_{k=1}^{n_2} a_{ki} \lambda_k \right] \delta q_i = 0, \quad (12)$$

(2)

în care apar doar deplasările virtuale arbitrare $\delta q_{n_2+1}, \delta q_{n_2+2}, \dots, \delta q_n$.
 Cum aceste deplasări sunt arbitrare, din (12) obținem

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} - Q_i - \sum_{k=1}^{n_2} a_{ki} \lambda_k = 0, \quad i = n_2+1, n_2+2, \dots, n. \quad (13)$$

Așadar, relațiile (11) și (13) pot fi rescrise în forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{n_2} a_{ki} \lambda_k, \quad i = \overline{1, n} \quad (14)$$

și reprezintă ecuațiile lui Lagrange pentru sisteme neolonomice.

Studiul mișcării unui sistem neolonom se bazează pe ecuațiile (7) și (14), care reprezintă un sistem de $n+n_2$ ecuații cu $n+n_2$ necunoscute $(q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_2})$. Acestor ecuații le

adăugăm condiții inițiale de tipul

$$q_i(0) = q_i^0, \quad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

unde $q_i^0, \dot{q}_i^0, i = \overline{1, n}$ sunt constante prescrise.

Ecuațiile lui Lagrange cu multiplicatori

Orice legătură geometrică poate fi transformată într-o legătură cinematică. Ținând cont de această afirmație, vom stabili un set de ecuații, numite ecuațiile lui Lagrange cu multiplicatori în care o parte din ecuațiile geometrice sunt transformate în legături diferentiale.

Considerăm, la fel ca în secțiunea precedentă, un sistem mecanic neolonom format din N puncte materiale supus legăturilor (1) și (2). Presupunem că legăturile sunt independente.

Dim cele n_1 legături geometrice, păstrăm n_3 , unde $n_3 < n_1$, iar celelalte $n_1 - n_3$ le transformăm în legături cinematice. În acest caz, vom avea coordonatele generalizate $q_1, q_2, \dots, q_n$, unde $n = 3N - n_3$.

Legăturile $f_j(t, \bar{x}_1(t, q_1, q_n), \dots, \bar{x}_N(t, q_1, q_n)) = 0$, cu $j = n_3 + 1, n_3 + 2, \dots, n_1$, le transformăm în legături cinematice:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0, \quad j = n_3 + 1, n_3 + 2, \dots, n_1. \quad (16)$$

Procedând la fel ca în secțiunea precedentă obținem ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{n_2} a_{ki} \lambda_k + \sum_{j=n_3+1}^{n_1} \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \beta_j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Studiul mișcării se bazează pe ecuațiile (7), (16) și (17), care reprezintă un sistem de $n + n_2 + (n_1 - n_3)$ ecuații cu

neînscrisele $\underbrace{q_1, q_2, \dots, q_n}_n, \underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_2}}_{n_2}, \underbrace{\beta_{n_3+1}, \beta_{n_3+2}, \dots, \beta_{n_1}}_{n_1 - n_3}.$

Sisteme naturale

Considerăm un sistem mecanic omonom având n grade de libertate.

Ecuațiile lui Lagrange sunt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i,$$

$$i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

unde E este energia cinetică, iar $Q_i, i = \overline{1, n}$, sunt forțele generalizate.

[i] Să presupunem că există o funcție $V = V(t, \mathbf{q})$ astfel încât

$$Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Funcția V , cu oarecâte proprietăți, se numește potențial simplu.

Dacă introducem funcția $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$L = E - V,$$

numită funcția lui Lagrange (sau potențialul cinetic al mișcării), atunci ecuațiile (1) pot fi rescrise în formă

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

$$i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

□ Exemplu: Un sistem mecanic format din N puncte materiale asupra căruia acționează forțele $\vec{F}_s, s = \overline{1, N}$, unde $\vec{F}_s$ sunt forțe potențiale, adică $\exists V = V(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$ astfel încât

$$\vec{F}_s = - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_s}, \quad (\text{sau echivalent } F_{sx} = - \frac{\partial V}{\partial x_s}, F_{sy} = - \frac{\partial V}{\partial y_s}, F_{sz} = - \frac{\partial V}{\partial z_s}).$$

Forțele generalizate Q_i sunt de asemenea potențiale (sau conservative).

Potențialul este același, însă este exprimat în coordonatele generalizate $q_1, q_2, \dots, q_n$, adică $V = V(\vec{x}_s(q), \vec{x}_2(q), \dots, \vec{x}_N(q))$.

$$Q_i = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s \cdot \frac{\partial \vec{x}_s}{\partial q_i} = - \sum_{s=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_s} \cdot \frac{\partial \vec{x}_s}{\partial q_i} = - \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad \square$$

(ii) Să presupunem că există o funcție $\Pi = \Pi(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ astfel încât

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Atunci introducând funcția $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

$$L = E - \Pi, \quad (6)$$

numită ca și mai sus funcția lui Lagrange, ecuațiile (1) pot fi rescrise în forma (4). Funcția Π poartă numele de potențial generalizat

Întrucât forțele active $\bar{F}_i$ nu depind de accelerații, rezultă că Π nu poate depinde decât liniar de $\dot{q}_i$. (Dacă nu ar fi așa, atunci $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}$ ar depinde de $\dot{q}$, iar $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} \right)$ ar depinde de $\ddot{q}$ și astfel forțele ar depinde de accelerații.) Atunci, potențialul generalizat are forma

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \dot{q}_i + \Pi_0, \quad (7)$$

unde Π_i și Π_0 , $i = \overline{1, n}$ nu depind de $\dot{q}$, adică

$$\Pi_i = \Pi_i(t, \mathbf{q}), \quad \Pi_0 = \Pi_0(t, \mathbf{q}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

□ Exemplu: Forța Lorentz admite potențial generalizat. Forța Lorentz care acționează asupra unei particule încărcate electric are forma

$$\bar{F} = q (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}), \quad (*)$$

unde q este sarcina electrică a particulei, $\bar{v}$ viteza acesteia, iar $(\bar{E}, \bar{B})$ este câmpul electromagnetic în care se află particula. Câmpul electric și câmpul magnetic sunt descrise de

$$\bar{E} = -\mu_0 \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \text{grad} \varphi \right), \quad \bar{B} = \mu_0 \text{rot} \bar{A}, \quad (**)$$

unde μ_0 este permeabilitatea magnetică, iar $\varphi = \varphi(t, \vec{x})$, $\vec{A} = \vec{A}(t, \vec{x})$ sunt câmpuri cunoscute. În cele ce urmează, vom raporta câmpurile vectoriale față de un reper $R = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ unde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ formează o bază ortonormată, orientată drept. De asemenea, vom utiliza convenția de sumare a lui Einstein, în care indicii repetati denotă însumare. Amintim următoarele formule de calcul. Astfel, dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt doi vectori, produsul vectorial poate fi scris în forma:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = b_i \vec{e}_i, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i,$$

unde ϵ_{ijk} este simbolul de permutare:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (i, j, k) \text{ formează permutare pară,} \\ -1, & \text{dacă } (i, j, k) \text{ formează permutare impară,} \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

În calcule vom folosi următoarele identități

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl},$$

unde δ_{ij} este simbolul lui Kronecker.

Dacă $\vec{a}$ este un câmp vectorial, atunci

$$\text{rot } \vec{a} = \epsilon_{ijk} a_{k,j} \vec{e}_i,$$

unde $a_{k,j} = \frac{\partial a_k}{\partial x_j}$.

Să determinăm forța Lorentz, ținând cont de expresiile câmpurilor electrice și magnetice. Din relațiile (*) și (**) obținem

$$\vec{F} = -q\mu_0 \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \text{grad } \varphi - \vec{v} \times \text{rot } \vec{A} \right).$$

Componentele forței $\vec{F}$ au forma:

$$\begin{aligned}
F_i &= -2\mu_0 \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \varphi_{,i} - \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j \varepsilon_{kem} A_{m,e} \right) = \\
&= -2\mu_0 \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \varphi_{,i} - \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kem} \dot{x}_j A_{m,e} \right) = \\
&= -2\mu_0 \left[\frac{\partial A_i}{\partial t} + \varphi_{,i} - (\delta_{ie} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{je}) \dot{x}_j A_{m,e} \right] = \\
&= -2\mu_0 \left[\frac{\partial A_i}{\partial t} + \varphi_{,i} - \dot{x}_j A_{j,i} + \dot{x}_j A_{i,j} \right] = \\
&= -2\mu_0 \left[\frac{\partial A_i}{\partial t} + A_{i,j} \dot{x}_j + (\varphi - A_j \dot{x}_j)_{,i} + A_j \dot{x}_{j,i} \right] = \\
&= -2\mu_0 \left[\frac{dA_i}{dt} + (\varphi - A_j \dot{x}_j)_{,i} + A_j \frac{d}{dt} (\delta_{ji}) \right] = \\
&= -2\mu_0 \left[\frac{dA_i}{dt} + (\varphi - A_j \dot{x}_j)_{,i} \right]
\end{aligned}$$

Azobor, forta Lorentz are forma

$$\bar{F} = -2\mu_0 \left[\frac{d\bar{A}}{dt} + \text{grad}(\varphi - \bar{A} \cdot \bar{v}) \right].$$

Să notăm că funcția $\pi = \pi(t, \bar{x})$,

$$\pi = -2\mu_0 (\bar{A} \cdot \bar{v} - \varphi),$$

reprezintă potențialul generalizat al forței Lorentz $\bar{F}$. Astfel, putem scrie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \pi}{\partial \dot{\bar{x}}} \right) - \frac{\partial \pi}{\partial \bar{x}} = \frac{d}{dt} (-2\mu_0 \bar{A}) + 2\mu_0 \text{grad}(\bar{A} \cdot \bar{v} - \varphi) =$$

$$= -2\mu_0 \frac{d\bar{A}}{dt} - 2\mu_0 \text{grad}(\varphi - \bar{A} \cdot \bar{v}) = \bar{F}. \quad \square$$

Def 1. Un sistem mecanic care admite potențial simplu sau generalizat se numește sistem natural.

Pentru sistemele naturale funcția lui Lagrange

$L = L(t, q, \dot{q})$ are forma

$$L = L_2 + L_1 + L_0,$$

(9)

unde

$$L_2 = E_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$L_1 = \sum_{i=1}^n c_i \dot{q}_i, \text{ unde } c_i = \begin{cases} a_i, & \text{dacă sistemul admite potențial simplu,} \\ a_i - \pi_i, & \text{dacă sistemul admite potențial generalizat} \end{cases}$$

$$L_0 = c_0, \text{ unde } c_0 = \begin{cases} a_0 - V, & \text{dacă sistemul admite potențial simplu} \\ a_0 - \pi_0, & \text{dacă sistemul admite potențial generalizat.} \end{cases}$$

(10)