

Fisa de exercitii. Ecuațiile lui Lagrange

1. Utilizând ecuațiile lui Lagrange, studii mișcarea unui punct material greu de masă m ce se mișcă fără frecare pe un cerc de rază l situat într-un plan vertical, în cazul micilor oscilații.

Considerăm sistemul de axe Oxy astfel încât O coincide cu centrul cercului, axa Ox este verticală descendentă, iar Oy este orizontală.

Vectorul de poziție al punctului P este

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

iar ecuația legăturii este

$$x^2 + y^2 = l^2$$

Notăm prin φ unghiul dintre raza vectorului OP și axa Ox . Vectorul de poziție devine:

$$\vec{r} = l(\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}).$$

Sistemul mecanic are un singur grad de libertate. Vectorul vitezei și energia cinetică sunt

$$\vec{v} = l\dot{\varphi}(-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}),$$

$$E = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m l^2 \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Forța dată este forța de greutate

$$\vec{F} = \vec{G} = m\vec{g} = mg\vec{i}.$$

Forța generalizată este

$$Q = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = mg\vec{i} \cdot (l \sin \varphi \vec{i} + l \cos \varphi \vec{j}) = -mg l \sin \varphi.$$

Determinăm potențialul forței generalizate Q , adică oca funcție $V = V(\varphi)$ cu proprietatea că $\frac{dV}{d\varphi} = -Q$. Astfel, din

$$\frac{dV}{dq} = mgl \sin q,$$

deducem $V = -mgl \cos q.$

Funcția lui Lagrange are forma

$$L(q, \dot{q}) = E - V = \frac{m l^2 \dot{q}^2}{2} + mgl \cos q,$$

În timp ce ecuația lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

devine

$$m l^2 \ddot{q} + mgl \sin q = 0.$$

Dacă introducem notația $\omega^2 = \frac{g}{l}$, ecuația de mai sus se poate rescrie

în forma

$$\ddot{q} + \omega^2 \sin q = 0.$$

În cazul micilor oscilații, vom considera următoarele condiții inițiale

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = 0$$

unde q_0 este un unghi mic ($q_0 \leq 4^\circ$). În această situație,

$q \leq q_0$ în tot timpul mișcării și astfel putem face aproximația $\sin q \simeq q$. Ecuația (pendulul matematic) de mai sus devine

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0,$$

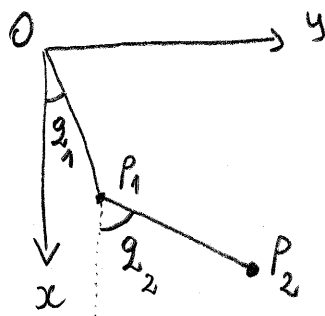
a cărei soluție este

$$q(t) = q_0 \cos \omega t.$$

2. Un pendul matematic P_1 de lungime l și masă m oscilează într-un plan vertical. De masă m este legat un al doilea pendul P_2 de aceeași lungime și aceeași masă m . Determinați ecuațiile lui Lagrange asociate acestui sistem mecanic. (pendulul dublu sau pendulul compus)

(2)

Considerăm sistemul de axe Oxy ca în figura de mai jos.



Vectorii de poziție ai punctelor P_1 și P_2 pot fi exprimați în funcție de unghiurile q_1 și q_2 formate de OP_1 și respectiv P_1P_2 cu axa verticală Ox în forme

$$\vec{x}_1 = \vec{OP}_1 = l(\cos q_1 \vec{e} + \sin q_1 \vec{\delta}),$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_2 = \vec{OP}_2 &= \vec{OP}_1 + \vec{P}_1P_2 = l(\cos q_1 \vec{e} + \sin q_1 \vec{\delta}) + l(\cos q_2 \vec{e} + \sin q_2 \vec{\delta}) = \\ &= l[(\cos q_1 + \cos q_2) \vec{e} + (\sin q_1 + \sin q_2) \vec{\delta}]. \end{aligned}$$

Sistemul mecanic are două grade de libertate. Vectorii viteze sunt

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{x}}_1 = l \dot{q}_1 (-\sin q_1 \vec{e} + \cos q_1 \vec{\delta}),$$

$$\vec{v}_2 = \dot{\vec{x}}_2 = l [-(\dot{q}_1 \sin q_1 + \dot{q}_2 \sin q_2) \vec{e} + (\dot{q}_1 \cos q_1 + \dot{q}_2 \cos q_2) \vec{\delta}],$$

de unde rezultă că energia cinetică are forma

$$E = \frac{m \vec{v}_1^2}{2} + \frac{m \vec{v}_2^2}{2} = \frac{m l^2}{2} [2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1)].$$

Forțele date de acțiunea asupra celor două puncte sunt

$$\vec{F}_1 = m \vec{g} = mg \vec{e}, \quad \vec{F}_2 = m \vec{g} = mg \vec{e}.$$

Astfel, forțele generalizate sunt

$$Q_1 = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial q_1} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial q_1} = mg \vec{e} \cdot (-l \sin q_1 \vec{e} + l \cos q_1 \vec{\delta}) = -2mgl \sin q_1.$$

$$Q_2 = \vec{F}_1 \cdot \frac{\partial \vec{x}_1}{\partial q_2} + \vec{F}_2 \cdot \frac{\partial \vec{x}_2}{\partial q_2} = mg \vec{e} \cdot 0 + mg \vec{e} \cdot (-l \sin q_2 \vec{e} + l \cos q_2 \vec{\delta}) = -mgl \sin q_2.$$

Verificăm dacă forțele generalizate Q_1 și Q_2 sunt conservative, adică $\exists V = V(q_1, q_2)$ astfel încât

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = -Q_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = -Q_2.$$

O astfel de funcție V există, dacă este îndeplinită condiția de integrabilitate

$$\frac{\partial Q_1}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial q_1}.$$

Evident, în cazul acestei probleme condiția de mai sus este satisfăcută.

Funcția V , determinată urmând un procedeu standard, are forma

$$V = -2mgl \cos q_1 - mgl \cos q_2.$$

Astfel, deducem funcția lui Lagrange

$$\begin{aligned} L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) &= E - V = \\ &= \frac{m\ell^2}{2} [2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1)] + mgl(2\cos q_1 + \cos q_2). \end{aligned}$$

Ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, 2}$$

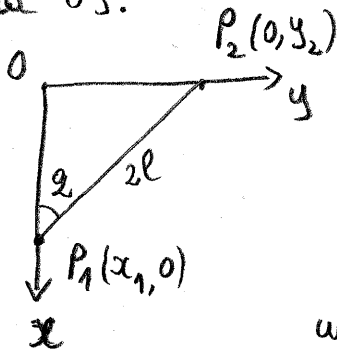
se scriu în forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m\ell^2}{2} [4\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1)] + 2mgl \sin q_1 \right\} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left\{ \frac{m\ell^2}{2} [2\dot{q}_2 + 2\dot{q}_1 \cos(q_2 - q_1)] + mgl \sin q_2 \right\} = 0 \end{cases}$$

Dacă introducem notație $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$, obținem

$$\begin{cases} 2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) - \dot{q}_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \sin(q_2 - q_1) + 2\omega^2 \sin q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \cos(q_2 - q_1) - \dot{q}_1(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \sin(q_2 - q_1) + \omega^2 \sin q_2 = 0. \end{cases}$$

3. Studiați mișcarea a două puncte materiale grele de aceeași masă, legate între ele printr-o bară fără masă de lungime $2l$, și obligate să se miște fără frecare unul pe axa verticală descendentă Ox și unul pe axa orizontală Oy .



Vectorii de poziție ai celor două puncte sunt

$$\bar{x}_1 = x_1 \bar{e}_1,$$

$$\bar{x}_2 = y_2 \bar{e}_2,$$

unde x_1 și y_2 satisfac legătura (distanța

$$|\bar{P}_1 \bar{P}_2| = 2l):$$

$$x_1^2 + y_2^2 = 4l^2.$$

Introducem parametrul q (vezi figura) așa încât

$$x_1 = 2l \cos q, \quad y_2 = 2l \sin q.$$

Sistemul are un singur grad de libertate. Pozițiile punctelor din sistem se descriu astfel

$$\bar{x}_1 = 2l \cos q \bar{e}_1, \quad \bar{x}_2 = 2l \sin q \bar{e}_2.$$

Vitezele și energia cinetică au forma

$$\bar{v}_1 = -2l \dot{q} \sin q \bar{e}_1, \quad \bar{v}_2 = 2l \dot{q} \cos q \bar{e}_2,$$

$$E = \frac{m \bar{v}_1^2}{2} + \frac{m \bar{v}_2^2}{2} = 2ml^2 \dot{q}^2.$$

Întrucât forțele date sunt

$$\bar{F}_1 = m\bar{g} = mg \bar{e}_1, \quad \bar{F}_2 = m\bar{g} = mg \bar{e}_2$$

rezultă că forța generalizată este

$$Q = \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q} + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q} = (mg \bar{e}_1) \cdot (-2l \sin q \bar{e}_1) + (mg \bar{e}_2) \cdot (2l \cos q \bar{e}_2) = -2mgl \sin q.$$

Potențialul $V = V(q)$, determinat integrând ecuația

$$\frac{dV}{dq} = 2mgl \sin q$$

este

$$V = -2mgl \cos \varphi,$$

de unde deducem funcția lui Lagrange

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = E - V = 2m l^2 \dot{\varphi}^2 + 2mgl \cos \varphi.$$

Ecuația lui Lagrange este

$$2l^2 \ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Dacă introducem notația $\omega^2 = \frac{g}{2l^2}$ atunci obținem ecuația unui pendul matematic

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

În consecință, sunt posibile două tipuri de mișcări; în funcție de energia sistemului:

a) mișcări oscilatorii: φ variază între $[-\varphi_0, \varphi_0]$, $\varphi_0 < 180^\circ$.

În acest caz, P_1 este tot timpul pe semiaxa pozitivă Ox și P_2 oscilează în jurul originii.

b) mișcări circulatorii: φ variază între $[0, 360^\circ)$. Punctele P_1 și P_2 se pot afla atât pe semiaxele pozitive cât și pe semiaxele negative ale axelor x și respectiv y. Dacă $\dot{\varphi} > 0$ atunci bara se rotește în sens retrograd, iar dacă $\dot{\varphi} < 0$ atunci bara se rotește în sens direct.

4. Să se deducă ecuațiile (ecuația) lui Lagrange pentru un pendul matematic a cărui lungime l crește conform legii $l = l_0(1 + kt)$, unde $l_0 > 0$, $k > 0$ sunt constante.

5. Determinați ecuațiile lui Lagrange în cazul mișcării unei particule de masă m sub acțiunea gravitației pe paraboloidul de rotație $x^2 + y^2 = az$, $a > 0$, unde axa Oz este verticală ascendentă.