

Mecanica hamiltoniană

Ecuațiile canonice (Hamilton)

Considerăm un sistem natural cu n grade de libertate. Mișcarea este caracterizată prin intermediul funcției lui Lagrange $L = L(t, q, \dot{q})$. Ecuațiile lui Lagrange au forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Aceste ecuații pot fi scrise în forma normală

$$\ddot{q}_i = A_i(t, q, \dot{q}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Ecuațiile lui Lagrange formează un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul al doilea. Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul al doilea se poate reduce la un sistem de ordinul întâi într-o infinitate de moduri.

Hamilton în 1834-1835 a introdus următoarele variabile, notate în continuare prin p_i

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Întrucât funcția lui Lagrange are forma $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \epsilon_i \dot{q}_i + c_0$, unde (a_{ij}) este o matrice pozitiv definită, relațiile (3) devin

$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + \epsilon_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Cum $\det(a_{ij}) \neq 0$, din (4) obținem

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} (p_j - \epsilon_j), \quad i = \overline{1, n} \quad (5)$$

unde (A_{ij}) este inversa matricii (a_{ij}) .

Notăm prin $\mathcal{F}'_{2n}$ spațiul $(q, \dot{q})$ și prin $\mathcal{F}_{2n}$ spațiul (q, p) numit spațiul fazelor (sau spațiul lui Gibbs).

Relațiile (4) și (5) realizează o corespondență biunivocă între spațiile $\mathcal{F}'_{2n}$ și $\mathcal{F}_{2n}$. Coordonatele (q, p) se numesc coordonate canonice. $q_i, i=\overline{1, n}$ sunt coordonatele lui Lagrange (sau coordonatele generalizate), iar $p_i, i=\overline{1, n}$ poartă numele de impulsuri generalizate. Denumirea este justificată dacă avem în vedere următorul exemplu.

□ Exemplu. Determinați impulsurile generalizate asociate coordonatelor carteziene (x, y, z) ale unui punct material p liber în spațiu.

Vectorul de poziție, vectorul vitezei și funcția lui Lagrange au forma

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

$$L = E = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

În virtutea relațiilor (3) impulsurile generalizate, notate prin p_x, p_y, p_z , reprezintă componentele vectorului impuls $\vec{I} = m\vec{v}$,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \quad \square$$

Dacă ținem cont de relațiile (3), ecuațiile lui Lagrange (1) devin

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i=\overline{1, n}. \quad (6)$$

Considerând variația funcției L , din (3) și (6) deducem

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^n (\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n [p_i \delta q_i + \delta(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i \delta p_i]. \end{aligned} \quad (7)$$

Din (7) obținem

$$\delta \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^n (-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i). \quad (8)$$

În spațiul fazelor $\mathcal{F}_{2n}$ definim funcția $H: \mathbb{R} \times \mathcal{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(t, q, p) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \widehat{L}, \quad (9)$$

numită funcția lui Hamilton. Parantezele deasupra funcțiilor $\dot{q}_i$ și $\widehat{L}$ înseamnă că în aceste expresii, $\dot{q}_i$ se înlocuiesc, în baza relației (5), cu $\sum_{j=1}^n A_{ij} (p_j - c_j)$.

utilizând relațiile (8) și (9) găsim

$$\delta H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right) = \sum_{i=1}^n (-\dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i), \quad (10)$$

de unde obținem ecuațiile

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Aceste ecuații diferențiale de ordinul întâi poartă numele de ecuații canonice (sau ecuațiile lui Hamilton).

Funcția lui Hamilton

În baza relațiilor (3) rezultă:

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \widehat{L} = \sum_{i=1}^n \overbrace{\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \dot{q}_i}}^{\dot{p}_i} \dot{q}_i - \widehat{L}. \quad (12)$$

Întrucât funcția lui Lagrange se scrie în forma (a se vedea notițele anterioare):

$$L = L_2 + L_1 + L_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n c_i \dot{q}_i + c_0, \quad (13)$$

relația (12) devine

$$H = 2\widehat{L}_2 + \widehat{L}_1 - \widehat{L} = \widehat{L}_2 - \widehat{L}_0. \quad (14)$$

□ Obs. 1°. Pentru sisteme scleronome, funcția lui Hamilton coincide cu energia mecanică a sistemului. Într-adevăr, în acest caz, sistemul mecanic nu poate avea decât potențial simplu, în consecință

funcția lui Lagrange are forma $L = L_2 + L_0 = E_2 - V$. Astfel, din relație (14) obținem

$$H = E + V. \quad \square$$

(15)

Funcția lui Hamilton (privită ca funcție de p_i) este o sumă de forme, adică

$$H = H_2 + H_1 + H_0,$$

(16)

unde H_2 este o formă de gradul doi, H_1 o formă de gradul 1, iar H_0 o formă de gradul 0.

Într-adevăr, în baza relațiilor (4) și (5), deducem

$$\begin{aligned} H = \widehat{L}_2 - \widehat{L}_0 &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i - \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j \right) \dot{q}_i - \mathcal{L}_0 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (p_i - c_i) \sum_{j=1}^n A_{ij} (p_j - c_j) - \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (p_j - c_j) (p_i - c_i) - \mathcal{L}_0 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} p_j p_i - \sum_{i,j=1}^n A_{ij} p_i c_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} c_i c_j - \mathcal{L}_0 = \end{aligned}$$

(17)

$$= H_2 + H_1 + H_0,$$

unde

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} p_j p_i, \quad H_1 = \sum_{i=1}^n \left(- \sum_{j=1}^n A_{ij} c_j \right) p_i, \quad H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} c_i c_j - \mathcal{L}_0. \quad (18)$$

Exemple.

1. Determinați funcția lui Hamilton în cazul mișcării unui punct material liber situat într-un câmp de forțe conservativ.

Forțe fiind conservativă, există o funcție $V = V(x, y, z)$, unde x, y, z sunt coordonatele carteziene ale punctului, astfel încât

$\vec{F} = -\text{grad } V$. Funcția lui Lagrange L are forma

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z),$$

iar impulsurile generalizate sunt

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Dim relațiile de mai sus, găsim funcția lui Hamilton

$$\begin{aligned} H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \widehat{L} &= \frac{1}{m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V = \\ &= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V. \end{aligned}$$

2. Determinați funcția lui Hamilton în cazul mișcării unui punct material liber situat într-un câmp ce admite potențialul generalizat

$$\Pi = \Pi_x \dot{x} + \Pi_y \dot{y} + \Pi_z \dot{z} + \Pi_0, \quad \text{unde } \Pi_x = \Pi_x(x, y, z), \quad \Pi_y = \Pi_y(x, y, z)$$

$$\Pi_z = \Pi_z(x, y, z), \quad \Pi_0 = \Pi_0(x, y, z) \text{ sunt funcții cunoscute.}$$

Se arată că hamiltonianul este

$$H = \frac{1}{2m} \left[(p_x + \Pi_x)^2 + (p_y + \Pi_y)^2 + (p_z + \Pi_z)^2 \right] + \Pi_0.$$

Sisteme autonome și sisteme neautonome

Def 1. Un sistem hamiltonian se numește autonom dacă funcția lui Hamilton nu depinde explicit de timp, adică H are forma $H = H(q, p)$, $(q, p) \in \mathbb{F}_{2n}$. Dacă funcția lui Hamilton depinde explicit de timp atunci sistemul se numește neautonom.

Considerăm un sistem mecanic neautonom caracterizat de funcția $H : \mathbb{R} \times \mathbb{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ ($H = H(t, q, p)$). Ecuațiile canonice sunt date de relațiile (11).

Vom arăta că orice sistem neautonom se reduce la un sistem autonom, însă într-un spațiu al fazelor extins. Prezentăm în continuare procedura standard de reducere a unui sistem neautonom la un sistem autonom.

Introducem coordonatele conjugate (q_0, p_0) și funcția $\tilde{H}: \mathbb{I}_{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}$,
 $H = H(q_0, q, p_0, p)$, unde $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, definită
 astfel

$$\tilde{H}(q_0, q, p_0, p) = H(q_0, q, p) + p_0. \quad (19)$$

Ecuțiile canonice conservatoare funcției $\tilde{H}$ sunt

$$\dot{q}_0 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_0} = 1, \quad \dot{p}_0 = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_0}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Prima ecuație are soluția $q_0 = t - t_0$, unde t_0 este timpul inițial.
 Pe baza acestei observații, rezultă că ecuațiile (20)₃ și (20)₄ coincid
 cu ecuațiile canonice (11) asociate hamiltonianului H . Să presupunem
 că soluția $(q(t), p(t))$ a sistemului (11) este cunoscută. Înlocuind
 această soluție în cea de-a doua ecuație a sistemului (20), rezultă
 că membrul drept al acestei ecuații devine o funcție cunoscută
 de tip. Soluția $p_0(t)$ a acestei ecuații se obține prin cuadraturi.
 Astfel sistemele de ecuații (11) și (20) sunt echivalente.

Procedura descrisă mai sus ne permite să dezvoltăm teoria sistemelor
 hamiltoniene doar pentru sistemele autonome. Astfel, în cele ce
 urmează, de cele mai multe ori vom considera sisteme autonome.