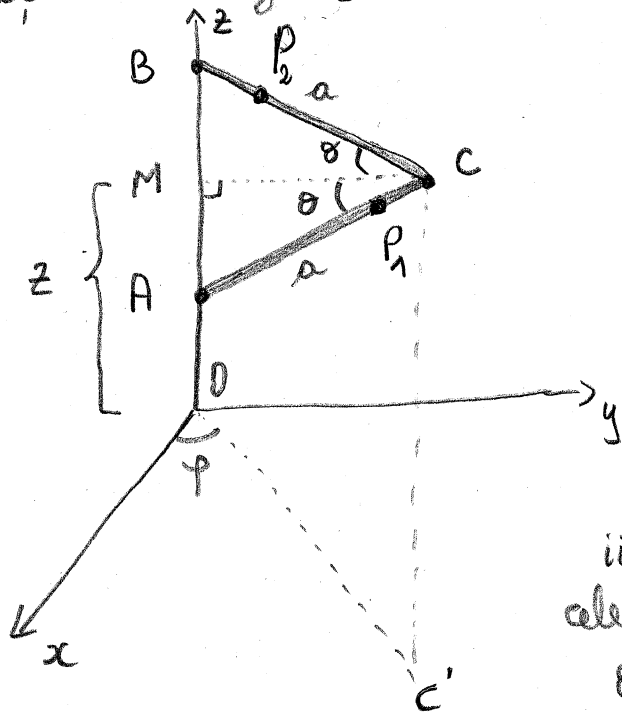


Fisa de exercitii. Ecuațiile lui Lagrange

1. Două bare omogene AC și BC, articulată în punctul C, de lungime a și masă m fiecare, pot aluneca fără frecare cu extremitățile A și B pe axa verticală ascendentă Oz și se pot roti în jurul acestei axe. Să se găsească: a) energia cinetică și forțele generalizate; b) potențialul forțelor; c) funcția lui Lagrange și ecuațiile lui Lagrange; d) impulsurile generalizate; e) funcția lui Hamilton și ecuațiile canonice; f) studii ecuațiile lui Lagrange.



- a) Sistemul mecanic format de cele două bare are trei grade de libertate, și anume
- unghiul φ format de planul ABC cu planul xOz ;
 - cota z a punctului C (sau $z = |OC| = 2|OM|$ unde M este mijlocul segmentului AB);
 - unghiul θ format de una din cele două bare cu planul orizontal $\theta = \angle MCA = \angle BCM$.

Fie P_1 un punct pe bara AC la distanța λ_1 față de A. vectorul de poziție al punctului P este:

$$\vec{r}_1 = \vec{OP}_1 = \vec{OA} + \vec{AP}_1 = (z - a \sin \theta) \vec{k} + \lambda_1 \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}, \quad \lambda_1 \in [0, a].$$

Însă versorul $\frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$ este

$$\frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \cos \theta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) + \sin \theta \vec{k}.$$

Fie P_2 un punct pe baza BC la distanța λ_2 față de B ,

Putem scrie:

$$\vec{x}_2 = \vec{OP}_2 = \vec{OB} + \vec{BP}_2 = (z + a \sin \theta) \vec{k} + \lambda_2 \frac{\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|}, \quad \lambda_2 \in [0, a]$$

unde

$$\frac{\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|} = \cos \theta (\cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}) - \sin \theta \vec{k}.$$

În concluzie, vectorii de poziție ai punctelor P_1 și respectiv P_2 sunt

$$\vec{x}_1 = \lambda_1 [\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j}] + [z + (\lambda_1 - a) \sin \theta] \vec{k}, \quad \lambda_1 \in [0, a].$$

$$\vec{x}_2 = \lambda_2 [\cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j}] + [z + (a - \lambda_2) \sin \theta] \vec{k}, \quad \lambda_2 \in [0, a].$$

Vectorii viteza au forma

$$\dot{\vec{x}}_1 = \lambda_1 [(-\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi) \vec{i} + (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi) \vec{j}] + [\dot{z} + \dot{\theta} (\lambda_1 - a) \cos \theta] \vec{k}, \quad \lambda_1 \in [0, a]$$

$$\dot{\vec{x}}_2 = \lambda_2 [(-\dot{\theta} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \cos \theta \sin \varphi) \vec{i} + (-\dot{\theta} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \cos \theta \cos \varphi) \vec{j}] + [\dot{z} + \dot{\theta} (a - \lambda_2) \cos \theta] \vec{k}, \quad \lambda_2 \in [0, a].$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_0^a \rho \dot{\vec{x}}_1^2 d\lambda_1 + \frac{1}{2} \int_0^a \rho \dot{\vec{x}}_2^2 d\lambda_2 = \frac{1}{2} \int_0^a \rho \left[\lambda_1^2 (\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \dot{z}^2 + \dot{\theta}^2 (\lambda_1 - a)^2 \cos^2 \theta + 2 \dot{z} \dot{\theta} (\lambda_1 - a) \cos \theta \right] d\lambda_1 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^a \rho \left[\lambda_2^2 (\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + \dot{z}^2 + \dot{\theta}^2 (a - \lambda_2)^2 \cos^2 \theta + 2 \dot{z} \dot{\theta} (a - \lambda_2) \cos \theta \right] d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{2} \rho \left[\frac{a^3}{3} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + a \dot{z}^2 + \frac{a^3}{3} \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - \dot{z} \dot{\theta} a^2 \cos \theta \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho \left[\frac{a^3}{3} (\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + a \dot{z}^2 + \frac{a^3}{3} \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + \dot{z} \dot{\theta} a^2 \cos \theta \right] = \\ &= \rho \left[\frac{a^3}{3} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + a \dot{z}^2 \right]. \end{aligned}$$

(2)

În relația de mai sus s-a utilizat faptul că cele două bare au aceeași masă, același densitate, precum și relațiile

$$\int_0^a (\lambda - a)^2 d\lambda = \frac{a^3}{3}, \quad \int_0^a (\lambda - a) d\lambda = -\frac{a^2}{2}.$$

Dacă ținem cont că masa unei bare este

$$m = \int_0^a \rho d\lambda_1 = \rho a,$$

atunci energia cinetică a sistemului se scrie în forma

$$E = \frac{m a^2}{3} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + m \dot{z}^2.$$

Forțele generalizate se obțin astfel:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= \int_{AC} \rho \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \theta} d\lambda_1 + \int_{BC} \rho \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \theta} d\lambda_2 = \\ &= \int_0^a \rho g(-\bar{k}) \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \theta} d\lambda_1 + \int_0^a \rho g(-\bar{k}) \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \theta} d\lambda_2 = \\ &= -\int_0^a \rho g(\lambda_1 - a) \cos \theta d\lambda_1 + \int_0^a \rho g(\lambda_2 - a) \cos \theta d\lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \int_{AC} \rho \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \varphi} d\lambda_1 + \int_{BC} \rho \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \varphi} d\lambda_2 = \int_0^a \rho g(-\bar{k}) \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \varphi} d\lambda_1 + \\ &+ \int_0^a \rho g(-\bar{k}) \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \varphi} d\lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_z &= \int_{AC} \rho \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial z} d\lambda_1 + \int_{BC} \rho \bar{g} \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial z} d\lambda_2 = \int_0^a \rho g(-\bar{k}) \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial z} d\lambda_1 + \\ &+ \int_0^a \rho g(-\bar{k}) \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial z} d\lambda_2 = -\rho g a - \rho g a = -2\rho g a = -2mg. \end{aligned}$$

b). Să determinăm potențialul forțelor, adică să găsim funcția $V = V(\theta, \varphi, z)$, dacă există, așa încât

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -Q_\theta, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -Q_\varphi, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -Q_z.$$

O astfel de funcție V există dacă sunt îndeplinite condițiile de integrabilitate

$$\frac{\partial Q_0}{\partial \varphi} = \frac{\partial Q_1}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial Q_0}{\partial z} = \frac{\partial Q_2}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial z} = \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi}.$$

Se verifică că aceste condiții sunt satisfăcute, iar funcția V are forma

$$V = 2mgz.$$

c) Funcția lui Lagrange are forma

$$L = E - V = \frac{ma^2}{3} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta) + m\dot{z}^2 - 2mgz,$$

iar ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$

sunt

$$\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{z} + g = 0.$$

d) Impulsurile generalizate se obțin astfel

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{2ma^2}{3} \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2ma^2}{3} \dot{\varphi} \cos^2 \theta, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 2m\dot{z}.$$

e) Funcția lui Hamilton este

$$H(\theta, \varphi, z, p_\theta, p_\varphi, p_z) = p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - \hat{L} = \frac{3}{2ma^2} p_\theta^2 + \frac{3}{2ma^2 \cos^2 \theta} p_\varphi^2 + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{ma^2}{3} \left[\frac{3}{4m^2 a^6} p_\theta^2 + \frac{3}{4m^2 a^3} \frac{p_\varphi^2}{\cos^2 \theta} \right] - m \frac{p_z^2}{4m^2} + 2mgz =$$

$$= \frac{3}{4ma^3} p_\theta^2 + \frac{3}{4ma^2 \cos^2 \theta} p_\varphi^2 + \frac{1}{4m} p_z^2 + 2mgz,$$

iar ecuațiile canonice

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z},$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z},$$

(4)

se scriu în forma

$$\dot{\theta} = \frac{3}{2ma^3} p_{\theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{3}{2ma^2 \cos^3 \theta} p_{\varphi}, \quad \dot{z} = \frac{1}{2m} p_z,$$

$$\dot{p}_{\theta} = -\frac{3 \sin \theta}{2ma^2 \cos^3 \theta} p_{\varphi}^2, \quad \dot{p}_{\varphi} = 0, \quad \dot{p}_z = -2mg.$$

f) Ecuațiilor lui Lagrange

$$\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta = 0, \quad \ddot{\varphi} = 0, \quad \ddot{z} + g = 0$$

la care condițiile inițiale

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0, \quad z(0) = z_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0.$$

Ecuațiile $\ddot{\varphi} = 0$ și $\ddot{z} + g = 0$ au soluțiile

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \quad z(t) = -\frac{g}{2} t^2 + \dot{z}_0 t + z_0.$$

Pentru prima ecuație distingem cazurile i) $\dot{\varphi}_0 = 0$ și ii) $\dot{\varphi}_0 \neq 0$.

Dacă $\dot{\varphi}_0 = 0$ atunci $\dot{\varphi} = 0 \quad \forall t$ și astfel prima ecuație devine

$$\ddot{\theta} = 0.$$

Soluția acestei ecuații este

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0.$$

Dacă $\dot{\varphi}_0 \neq 0$ atunci prima ecuație devine

$$\ddot{\theta} + \dot{\varphi}_0^2 \cos \theta \sin \theta = 0.$$

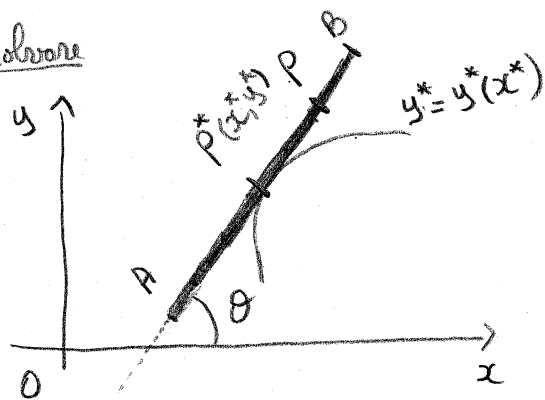
Introducând notațiile $\omega^2 = \dot{\varphi}_0^2$, $q = 2\theta$, ecuația de mai sus poate fi scrisă astfel

$$\ddot{q} + \omega^2 \sin q = 0.$$

Obținem ecuația pendulului matematic, a cărei soluție este cunoscută.

2. O potimă omogenă de lungime $2a$ și masă m alunecă fără frecare pe un plan orizontal. Studiați mișcarea potimei.

Rezolvare



Notăm prin $P^*(x^*, y^*)$ centrul de masă al potimei, iar prin θ unghiul format de potimă cu axa Ox . Fie $y^* = y^*(x^*)$ curba descrisă de centrul de masă P^* față de sistemul de axe Oxy din

planul orizontal. Evident, panta tangentei la curba $y^* = y^*(x^*)$ este pe de o parte $\frac{dy^*}{dx^*}$, iar pe de altă parte $\tan \theta$. Astfel, din relația

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \tan \theta$$

obținem legătura cinematică (a se vedea unul din cursurile anterioare)

$$\tan \theta \dot{x}^* - \dot{y}^* = 0.$$

Acest sistem mecanic este un sistem neolonom, scleronom. Pentru studiul mișcării vom apela la ecuațiile lui Lagrange pentru sisteme neolomome, care au forma generală

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^{n_2} a_{ki} \lambda_k, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Ecuațiile legăturilor au forma generală

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} \dot{q}_i + a_{k0} = 0, \quad k = \overline{1, n_2}, \quad n_2 < n. \quad (2)$$

În cazul problemei de față, $n=3$, $n_2=1$. Dacă introducem notațiile $q_1 = x^*$, $q_2 = y^*$, $q_3 = \theta$, atunci ecuația legăturii se rescrie astfel

$$\operatorname{tg} q_3 \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = 0. \quad (*)$$

Cu date cunoscute $a_{11} = \operatorname{tg} q_3$, $a_{12} = -1$, $a_{13} = 0$, $a_{10} = 0$.

Să determinăm energie cinetică E a potinei și forțele generalizate Q_1, Q_2, Q_3 . În acest scop, să considerăm un punct P (generic) al potinei. Vectorul de poziție al punctului P este

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OP^*} + \overrightarrow{P^*P} = x^* \vec{e}_1 + y^* \vec{e}_2 + \lambda (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) = \\ &= (q_1 + \lambda \cos q_3) \vec{e}_1 + (q_2 + \lambda \sin q_3) \vec{e}_2, \quad \lambda \in [-a, a], \end{aligned}$$

viteza acestuia este

$$\dot{\vec{x}} = (\dot{q}_1 - \lambda \dot{q}_3 \sin q_3) \vec{e}_1 + (\dot{q}_2 + \lambda \dot{q}_3 \cos q_3) \vec{e}_2, \quad \lambda \in [-a, a],$$

iar energia cinetică a barei se obține astfel

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{AB} g \dot{\vec{x}}^2 d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-a}^a g [\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \lambda^2 \dot{q}_3^2 - 2\lambda \dot{q}_1 \dot{q}_3 \sin q_3 + \\ &+ 2\lambda \dot{q}_2 \dot{q}_3 \cos q_3] d\lambda = \frac{g}{2} \left[2a \dot{q}_1^2 + 2a \dot{q}_2^2 + \frac{2a^3}{3} \dot{q}_3^2 \right]. \end{aligned}$$

Ținând cont că masa barei este

$$m = \int_{AB} g d\lambda = g \int_{-a}^a d\lambda = 2a g,$$

energia cinetică se descrie în forma

$$E = \frac{m}{2} \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \frac{a^2}{3} \dot{q}_3^2 \right).$$

Întorcând asupra potinei nu acționăm nicio forță în planul Oxy , rezultă că

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0.$$

Ecuațiile lui Lagrange (1) au forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_1} = a_{11} \lambda_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_2} = a_{12} \lambda_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_3} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_3} = a_{13} \lambda_3.$$

În ecuațiile de mai sus s-a ținut cont de faptul că $Q_i = 0$, $i = \overline{1,3}$.

Ținând cont de forma energiei cinetice E , și de ecuația legăturii, ecuațiile de mai sus devin

$$m\ddot{q}_1 = \lambda_1 \operatorname{tg} q_3, \quad m\ddot{q}_2 = -\lambda_1, \quad \frac{m a^2}{3} \ddot{q}_3 = 0.$$

Ultima ecuație o putem integra, obținem

$$q_3(t) = \omega t + C_1$$

unde ω, C_1 - const. Dacă alegem orientarea sistemului de axe $Ox y$ așa încât la momentul inițial potina să fie paralelă cu axa ox , rezultă că

$$C_1 = 0 \quad \text{și}$$

$$q_3(t) = \omega t.$$

Eliminând λ_1 din primele două ecuații ale lui Lagrange, obținem (**)

$$\ddot{q}_1 = -\ddot{q}_2 \operatorname{tg} q_3.$$

Pe de altă parte, dacă derivăm în raport cu timpul ecuația legăturii (*), iar relația obținută o înmulțim prin $\operatorname{tg} q_3$, deducem

$$\operatorname{tg} q_3 \left(\operatorname{tg} q_3 \ddot{q}_1 + \frac{\dot{q}_1 \dot{q}_3}{\cos^2 q_3} - \ddot{q}_2 \right) = 0, \quad \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{tg}^2 q_3 \ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 \operatorname{tg} q_3 + \frac{\dot{q}_1 \dot{q}_3}{\cos^2 q_3} \operatorname{tg} q_3 = 0.$$

Dacă ținem cont că $-\ddot{q}_2 \operatorname{tg} q_3 = \ddot{q}_1$, relația de mai sus devine

$$\ddot{q}_1 (1 + \operatorname{tg}^2 q_3) + \frac{\dot{q}_1 \dot{q}_3}{\cos^2 q_3} \operatorname{tg} q_3 = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\ddot{q}_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 \operatorname{tg} q_3 = 0.$$

Având în vedere că $q_3 = \omega t$, relația de mai sus devine

$$\ddot{q}_1 + \omega \dot{q}_1 \operatorname{tg} \omega t = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$q_1(t) = C_2 \sin \omega t + C_3.$$

Dacă alegem originea O în așa fel încât la momentul inițial O să coincidă cu P^* , atunci $C_3 = 0$ și

$$q_1(t) = C_2 \sin \omega t.$$

Din ecuația legăturii (*) deducem

$$\dot{q}_2 = \omega \tan \omega t \cos \omega t \quad C_2 = \omega C_2 \sin \omega t,$$

adică

$$q_2(t) = -C_2 \cos \omega t + C_3, \quad C_3 - \text{constant}$$

Întrucât P^* coincide cu O la momentul $t=0$, rezultă că $C_3 = C_2$. Multipliatorul λ este

$$\lambda_1 = -m \omega^2 C_2 \cos \omega t.$$

În concluzie, soluția sistemului de ecuații de lui Lagrange este

$$\begin{cases} q_1(t) = C_2 \sin \omega t, \\ q_2(t) = -C_2 \cos \omega t + C_2, \\ q_3(t) = \omega t, \\ \lambda_1 = -m \omega^2 C_2 \cos \omega t, \end{cases}$$

unde ω, C_2, C_3 sunt constante. Dacă eliminăm parametrul t din primele două relații deducem că traiectoria punctului P^* este un cerc.

3. În interiorul unui cerc de rază R poate aluneca în plan vertical o bară AB de lungime R , și masă neglijabilă, având în mijloc o bilă P de masă m . Dacă reținem în A și B este foră P are, studiți mișcarea utilizând ecuațiile lui Lagrange.

