

Sisteme hamiltoniene

Variabile dinamice. Poartara Poisson. Operatorul Lie. Integrale prime

Considerăm un sistem hamiltonian autonom, caracterizat de funcția lui Hamilton $H: \mathbb{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $H = H(q, p)$, unde $\mathbb{F}_{2n}$ reprezintă spațiul fazelor, iar $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ sunt coordonatele canonice. Presupunem că $H \in C^\infty(\mathbb{F}_{2n})$. Ecuațiile canonice au forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Def. 1. O funcție reală definită pe spațiul fazelor $f: \mathbb{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ poartă numele de variabilă dinamică.

Evident funcția lui Hamilton H este variabilă dinamică. Întrucât variabilele canonice evoluează în timp $(q_i(t), p_i(t))$, $t \in [t_0, t_1)$, $i = \overline{1, n}$, rezultă că variabilele dinamice evoluează în timp $(f(t) = f(q(t), p(t)))$.

Def. 2. O variabilă dinamică $\phi: \mathbb{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ neidentică constantă spunem că este integrală primă a sistemului canonic dacă pentru o soluție $(q(t), p(t))$ a sistemului canonic (1) avem

$$\phi(q(t), p(t)) = \text{const.} \quad (2)$$

Obs. 1°. Dacă ϕ este diferențiabilă atunci ϕ este integrală primă a sistemului canonic (1) dacă și numai dacă $\dot{\phi}(q(t), p(t)) = 0$, pentru o soluție $(q(t), p(t))$ a sistemului (1).

Fie f o variabilă dinamică. Dacă f este diferențiabilă atunci în baza ecuațiilor (1) obținem:

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (3)$$

Def 3. Fie f și g două variabile dinamice diferentiale. Poisson a funcțiilor f și g este prin definiție

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (4)$$

Def 4. Fie g o variabilă dinamică diferentiale. Operatorul Lie asociat funcției g este prin definiție

$$L_g = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \quad (5)$$

În baza relațiilor (4) și (5), relația (3) poate fi scrisă în forma

$$\dot{f} = \{f, H\} = L_H f. \quad (6)$$

Obs 2°. O variabilă dinamică diferentiale ϕ este integrală primă a sistemului canonic dacă și numai dacă

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = L_H \phi = 0. \quad (7)$$

3°. Ecuațiile canonice se pot scrie în forma:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

sau echivalent

$$\dot{q}_i = L_H q_i, \quad \dot{p}_i = L_H p_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Într-adevăr, se verifică printr-un simplu calcul că

$$\{q_i, H\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\{p_i, H\} = \sum_{j=1}^n \left(-\frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = -\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Prin calcule simple se poate verifica faptul că parametrii Poisson are următoarele proprietăți. Astfel, fie f, g, h trei variabile dinamice diferentiale, iar α o constantă reală. Atunci au loc relațiile:

(i) liniaritate: $\{f, g+h\} = \{f, g\} + \{f, h\}$, $\{f, \alpha g\} = \alpha \{f, g\}$;

(ii) anticomutativitate: $\{f, g\} = -\{g, f\}$;

(iii) identitatea lui Jacobi: $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$;

(iv) distributivitate față de înmulțire: $\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}$;

(v) regula lui Leibniz de derivare:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial p_i}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial p_i} \right\}, \quad i = \overline{1, n};$$

În termenii operatorii Lie, proprietățile de mai sus se pot scrie în formă:

(i) $L_f(g+h) = L_f g + L_f h$, $L_f(\alpha g) = \alpha L_f g$;

(ii) $L_f g = -L_g f$

(iii) $[L_f, L_g] = L_{\{f, g\}} = L_{L_f g}$,

unde $[]$ este alternatorul a doi operatori diferentiale (dacă U, V sunt operatori diferentiale atunci $[U, V]f = UVf - VUf$ pentru orice variabilă dinamică f);

(iv) $L_f(gh) = g L_f h + h L_f g$;

(v) $\left[\frac{\partial}{\partial q_i}, L_f \right] = L_{\frac{\partial f}{\partial q_i}}$, $\left[\frac{\partial}{\partial p_i}, L_f \right] = L_{\frac{\partial f}{\partial p_i}}$, $i = \overline{1, n}$.

Teorema (Jacobi-Poisson). Dacă ϕ și ψ sunt două integrale prime diferentiale ale sistemului canonic atunci $\{\phi, \psi\}$ este integrală primă a sistemului canonic.

Dem. În baza relației (7), este suficient să arătăm că $\{\{\phi, \psi\}, H\} = 0$,

știind că $\{\phi, H\} = 0$ și $\{\psi, H\} = 0$.

Utilizând identitatea lui Jacobi, putem scrie:

$$\{ \{ \phi, \psi \}, H \} = - \{ H, \{ \phi, \psi \} \} = \{ \psi, \{ H, \phi \} \} + \{ \phi, \{ \psi, H \} \} = 0$$

ceea ce demonstrează teorema.

Obs. 4° Pornind de la două integrale prime f_1, f_2 , în baza teoremei Jacobi-Poisson rezultă că $\{f_1, f_2\}$ este integrală primă. Aceasta înseamnă că putem genera o infinitate de integrale prime de sistemului canonic, însă acestea nu sunt independente. Pentru un sistem general de $2n$ ecuații diferențiale de ordinul întâi putem găsi cel mult $2n-1$ integrale prime. Pentru sistemul canonic sunt necesare n integrale prime (conform teoremei lui Liouville) pentru determinarea soluției.

Exemplu: Mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe elastice $\vec{F} = -k\vec{r}$, unde $k > 0$.

În coordonate carteziene, vectorul de poziție și vectorul viteză au forma:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

de unde rezultă că energia cinetică este

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Forța elastică este conservativă, adică există $V = V(x, y, z)$ astfel încât

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}. \text{ Potențialul forței elastice are forma:}$$

$$V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Funcția lui Lagrange este

$$L = E - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

de unde obținem impulsurile generalizate:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Funcția lui Hamilton are forma

$$H = p_x \hat{x} + p_y \hat{y} + p_z \hat{z} - L = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Se poate verifica ușor că variabilele dinamice $f = x p_y - y p_x$, $g = y p_z - z p_y$, $h = z p_x - x p_z$ sunt integrale prime. Acestea nu sunt independente deoarece $\{f, g\} = h$.

Un sistem autonom admite cel puțin o integrală primă, și anume hamiltonianul H , care reprezintă chiar energia mecanică a sistemului. Într-odivă, pe baza proprietății de anticomutativitate a parantezei Poisson rezultă

$$\{H, H\} = 0,$$

(10)

ceea ce demonstrează că H este integrală primă.

Def. 3. O coordonată canonică q_k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se numește cică (sau ignobilă) dacă hamiltonianul H nu depinde explicit de q_k , adică

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Teoremă. Dacă q_α , $\alpha = m+1, m+2, \dots, n$, sunt coordonate ciclice atunci variabilele canonice $p_\alpha = p_\alpha$, $\alpha = m+1, m+2, \dots, n$, sunt integrale prime ale sistemului canonic.

Dem. Demonstrația teoremei rezultă din relație:

$$\{p_\alpha, H\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = - \sum_{i=1}^n \delta_{\alpha i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (11)$$

Teorema de mai sus arată că dacă H nu depinde explicit de coordonatele q_α , $\alpha = m+1, m+2, \dots, n$, atunci

$$p_\alpha = b_\alpha, \quad \alpha = m+1, m+2, \dots, n$$

(12)

unde b_α sunt constante. Astfel, funcția lui Hamilton devine:

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n).$$

(13)

Deci sistemul canonic se reduce la $2m$ ecuații cu $2m$ necunoscute $(q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_m)$. După rezolvarea acestui sistem, în care că acest fapt este posibil, obținem soluția

$$q_j = q_j(t, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n), \quad p_j = p_j(t, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n), \quad j = \overline{1, m}. \quad (14)$$

Coordonatele rămase $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$ se determină prin simple cuadraturi, deoarece H devine funcție de $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$.

Obs 5° Dacă toate coordonatele q_i sunt ciclice atunci toate impulsurile generalizate p_i vor fi constante. Această observație se poate folosi pentru a căuta o transformare $(q, p) \rightarrow (\bar{q}, \bar{p})$ care inversează sistemul canonic așa încât $\bar{q}_i$ să fie toate coordonate ciclice.

Teoria lui Hamilton-Jacobi

Teorema lui Hamilton-Jacobi

Considerăm un sistem hamiltonian neautonom caracterizat de funcția $H: \mathbb{R} \times \mathbb{T}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $H = H(t, q, p)$, unde $H \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{T}_{2n})$. Ecuațiile canonice sunt

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

Fie $S = S(t, q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n)$ o funcție de clasă C^2 care depinde de n constante reale nedeterminate pentru care

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \right) \neq 0 \quad (2)$$

și care satisface în mod identic (în raport cu a_i) ecuația

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n} \right) = 0. \quad (3)$$

Obs. 1° Ecuația (3) se numește ecuația lui Hamilton-Jacobi.

2° Funcția S poartă numele de integrală completă a ecuației lui Hamilton-Jacobi.

Teorema (Hamilton-Jacobi). Dacă S este integrală completă a ecuației lui Hamilton-Jacobi (3) atunci funcțiile $q_i(t), p_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ determinate de sistemul algebric

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = b_i, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

unde b_i , $i = \overline{1, n}$ sunt constante reale, sunt soluții de sistemului canonic (1).

Dem. Să arătăm mai întâi că din sistemul (4) determinăm funcțiile $q_i(t), p_i(t), i = \overline{1, n}$. Utilizând teorema funcțiilor implicite și proprietatea (2) a funcției S , putem rezolva primul set de ecuații (4) și găsim

$$q_i = q_i(t, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Funcțiile $p_i, i = \overline{1, n}$ se determină din al doilea set de ecuații (4) și relațiile (5):

$$p_i = p_i(t, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Pentru a demonstra teorema trebuie să arătăm că funcțiile date de relațiile (5) și (6) satisfac sistemul canonic (1).

Astfel, din primul set de ecuații (4), prin derivare în raport cu timpul t obținem:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial a_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i} \dot{q}_j = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

Pe de altă parte, întrucât S este o funcție cunoscută, o putem înlocui în (3) și prin derivarea relației obținute în raport cu a_i deducem

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial a_i \partial q_j} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (8)$$

Din (7) și (8) obținem

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial a_i} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (9)$$

Evident, în baza relației (2), din (9) obținem

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Din al doilea set de ecuații (4), prin derivare în raport cu t găsim

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j = \dot{p}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (11)$$

Dim (3), prin derivare în raport cu q_i obținem:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial q_j} \delta_{ji} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \right] = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (12)$$

Relatiile (11) și (12) conduc la

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial q_i} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta_{ji} \right] = \dot{p}_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (13)$$

care, în baza relației (10) se reduce la

$$\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (14)$$

și astfel teorema este demonstrată.