

Fisa de exercitii. Mecanica Hamilton

1. Determinați funcția lui Hamilton în cazul unui oscilator armonic bidimensional. (Un punct material obligat să se miște în planul xoy sub acțiunea forței elastice $\vec{F} = -k\vec{x}$, $k > 0$).
Rezolvare Vectorul de poziție, vectorul vitezei și energia cinetică sunt

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j},$$

$$E = \frac{m}{2} \vec{v}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Forțele generalizate se obțin astfel:

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x} = -k(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{i} = -kx,$$

$$Q_y = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial y} = -k(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot \vec{j} = -ky.$$

Potentialul forțelor (dacă există) are forma $V = V(x, y)$, unde

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Q_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Q_y.$$

Întrucât este satisfăcută condiția de integrabilitate

$$\frac{\partial Q_x}{\partial y} = \frac{\partial Q_y}{\partial x},$$

ecuațiile de mai sus se pot integra, iar V are forma

$$V = \frac{k}{2} (x^2 + y^2).$$

Funcția lui Lagrange $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ este

$$L = E - V = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2} (x^2 + y^2).$$

Impulsurile generalizate se obțin astfel

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},$$

de unde rezultă că funcția lui Hamilton este

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \hat{L} = \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} - \frac{m}{2m^2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2).$$

2. Determinați funcția lui Hamilton pentru pendulul matematic.

$$R: H(\varphi, p) = \frac{p^2}{2mR^2} - Rmg \cos \varphi,$$

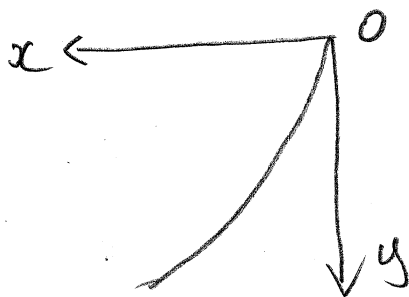
unde m este masa punctului material, R - lungimea pendulului, iar g - accelerația gravitațională.

3. Un punct material greu de masă m se mișcă fără viteză inițială pe cicloida

$$x = a(\theta - \sin \theta),$$

$$y = a(1 - \cos \theta), \quad a > 0,$$

unde axa oy este verticală descendentă. Știind că asupra punctului material acționează doar greutatea, determinați funcția lui Hamilton și ecuațiile canonice. Studiați mișcarea.



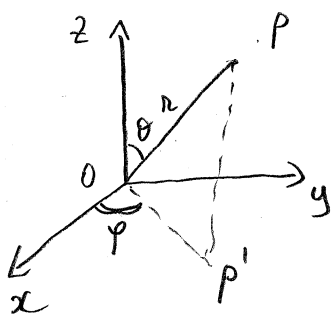
$$R: H(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{4ma^2(1 - \cos \theta)} + mga \cos \theta,$$

unde g este accelerația gravitațională. Pentru studiul mișcării se utilizează integrala primă $H = h$, h - constant.

(2)

4. Determinați funcția lui Hamilton pentru un sistem mecanic format dintr-un singur punct material aflat într-un câmp potențial, folosind coordonate sferice.

Deoarece punctul material se află într-un câmp potențial (sau conservativ) forța dată $\vec{F}$ admite un potențial V , care este presupus a fi cunoscut. Să notăm prin (r, θ, φ) coordonatele sferice ale punctului P , unde r este raza vectorie, θ colatitudinea, iar φ longitudinea.



Vectorul de poziție al punctului P este:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k},$$

unde $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Vectorul viteză are forma:

$$\vec{v} = (\dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \vec{i} + (\dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \vec{j} + (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \vec{k}.$$

Energia cinetică este:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2).$$

Funcția lui Lagrange $L = L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ are forma

$$L = E - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - V(r),$$

de unde deducem impulsurile generalizate

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta.$$

Funcția lui Hamilton $H = H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$ se obține astfel

$$H = p_r \hat{r} + p_\theta \hat{\theta} + p_\varphi \hat{\varphi} - \hat{L} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r).$$

Spațiul fazelor este $[0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^3$.

(3)

5. Un punct material P de masă m este atras de două centre fixe $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, proporțional cu distanța, factorul de proporționalitate fiind mk , $k > 0$. Să se determine:

- i) Energia cinetică și forțele generalizate;
- ii) Potentialele forțelor și funcția lui Lagrange;
- iii) Ecuațiile lui Lagrange;
- iv) Impulsurile generalizate și funcția lui Hamilton;
- v) Ecuațiile canonice
- vi) Arătați că ecuațiile canonice admit integrale primă

$$\Phi = \left(x - \frac{a}{2}\right) p_x - \left(y - \frac{b}{2}\right) p_y,$$

unde (p_x, p_y) sunt impulsurile asociate variabilelor canonice (x, y) .

- vii) Determinați soluția ecuațiilor lui Lagrange. Aplicație numerică: $m = \frac{1}{2}$, $k = 2$, $a = 2$, $b = 4$. La momentul inițial $t_0 = 0$ poziția și viteza punctului P sunt: $\vec{r}(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}(0) = 3\vec{i} + 6\vec{j}$

Rezolvare. i) Punctul P are două grade de libertate deoarece se mișcă liber în planul xOy . Cele două variabile care descriu mișcarea sunt coordonatele carteziene x, y ale punctului P .

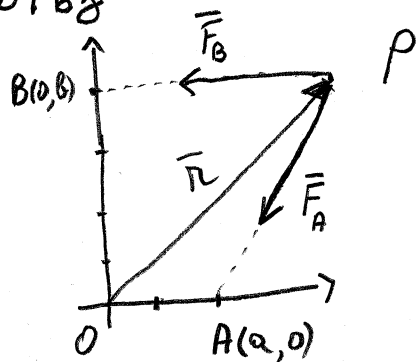
Vectorul de poziție, vectorul viteză și energia cinetică au forma

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j},$$

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Punctul P este atras de două centre fixe, A și B proporțional cu distanța. Notăm prin $\vec{F}_A$ și $\vec{F}_B$ cele două forțe (ca în figură).



Amintim că o forță se modelează matematic printr-un vector legat, adică este caracterizată prin punctul de aplicare, mărime, direcție și sens. Să considerăm, spre exemplu forța $\vec{F}_A$. Aceasta, are ca punct de aplicare punctul P, mărimea (conform ipotezei) egală cu $mk \|\vec{PA}\|$, adică factorul de proporționalitate mk înmulțit cu distanța dintre P și centrul atractiv, direcția este de-a lungul PA, iar sensul este dinspre P spre A (forță de atracție).

Astfel, putem scrie:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= mk \|\vec{PA}\| \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|} = mk \vec{PA} = mk (\vec{PO} + \vec{OA}) = mk (\vec{OA} - \vec{r}) = \\ &= mk [(a-x)\vec{i} - y\vec{j}].\end{aligned}$$

Analog, forța $\vec{F}_B$ are forma:

$$\begin{aligned}\vec{F}_B &= mk \|\vec{PB}\| \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} = mk \vec{PB} = mk (\vec{OB} - \vec{r}) = \\ &= mk [-x\vec{i} + (b-y)\vec{j}].\end{aligned}$$

Rezultanta celor două forțe este

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = mk [(a-2x)\vec{i} + (b-2y)\vec{j}].$$

Forțele generalizate Q_x și Q_y au expresiile:

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{F} \cdot \vec{i} = mk(a-2x),$$

$$Q_y = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{F} \cdot \vec{j} = mk(b-2y).$$

ii) Să arătăm că forțele generalizate Q_x și Q_y admit un potențial, adică $\exists V = V(x, y)$ așa încât

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Q_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Q_y.$$

Sistemul cu derivate parțiale de mai sus are soluții doar dacă este îndeplinită condiția de integrabilitate

$$\frac{\partial Q_x}{\partial y} = \frac{\partial Q_y}{\partial x}.$$

Se verifică prin calcul direct că această condiție este identic satisfăcută. Urmind algoritmul standard de integrare obținem:

$$V = -mk[(ax - x^2) + (by - y^2)].$$

Funcția lui Lagrange L are expresia:

$$L = E - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mk(ax - x^2 + by - y^2).$$

iii) Ecuațiile lui Lagrange sunt următoarele:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

În acest caz, ecuațiile devin

$$\begin{cases} m\ddot{x} - mk(a - 2x) = 0, \\ m\ddot{y} - mk(b - 2y) = 0. \end{cases}$$

iv) Impulsurile generalizate au forma:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},$$

de unde obținem funcția lui Hamilton

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \hat{L} = p_x \frac{p_x}{m} + p_y \frac{p_y}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} \right) - mk(ax - x^2 + by - y^2) =$$

$$= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mk(x^2 - ax + y^2 - by).$$

v) Ecuațiile canonice au forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, & \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{cases}$$

de unde obținem

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{y} = \frac{p_y}{m} \\ \dot{p}_x = mk(a - 2x), & \dot{p}_y = mk(b - 2y) \end{cases}$$

vi) Variabila dinamică $\Phi(x, y, p_x, p_y) = (x - \frac{a}{2})p_y - (y - \frac{b}{2})p_x$ este integrală primă a sistemului canonic dacă și numai dacă poartă numele de Poisson $\{\Phi, H\} = 0$. Să verificăm această condiție:

$$\begin{aligned} \{\Phi, H\} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} = \\ &= p_y \frac{p_x}{m} + (y - \frac{b}{2})mk(2x - a) - p_x \frac{p_y}{m} - (x - \frac{a}{2})mk(2y - b) = 0 \end{aligned}$$

vii) Ecuațiile lui Lagrange devin

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4(x - 1) = 0, \\ \ddot{y} + 4(y - 2) = 0. \end{cases}$$

Condițiile initiale sunt: $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 3$, $\dot{y}(0) = 6$.

Soluția are forma: $x = \frac{3}{2} \sin 2t + 1$, $y = 3 \sin 2t + 2$.