

Teoria lui Hamilton-Jacobi

Teorema lui Hamilton-Jacobi poate fi utilizată în aplicații doar dacă integrala completă S a ecuației lui Hamilton-Jacobi este cunoscută. Vom pune în evidență clase de sisteme hamiltoniene pentru care funcția S poate fi determinată. Înainte de aceasta, vom analiza câteva cazuri speciale care implică o reducere a integralei complete la o formă mai simplă.

Cazuri speciale

1. Sisteme autonome

În cazul sistemelor autonome (H -nu depinde explicit de timp) avem integrala primă

$$H(q, p) = h,$$

unde h este o constantă reală. Din ecuația lui Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}) = 0,$$

deducem

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h = 0$$

de unde obținem că S are forma

$$S = -ht + W(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Funcția W satisface următoarea ecuație, numită ecuația redusă a lui Hamilton-Jacobi:

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_n}) = 0.$$

Dacă găsim integrala completă a ecuației reduse a lui Hamilton-Jacobi, adică funcția

$$W = W(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, h)$$

atunci soluția sistemului canonic se determină din sistemul

$$\frac{\partial W}{\partial a_k} = b_k, \quad -h + \frac{\partial W}{\partial h} = b_n, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

(1)

În concluzie, pentru sisteme autonome, integrala completă S are forma (4) unde funcția W satisface identic (în raport cu $q_k, k=1, n-1$, și h) ecuația redusă a lui Hamilton-Jacobi (5).

2. Coordonate ciclice

Să considerăm un sistem hamiltonian neautonom, caracterizat de funcția lui Hamilton $H = H(q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_m)$, unde $m < n$. Apoi, coordonatele $q_\alpha, \alpha = m+1, m+2, \dots, n$ sunt ciclice (sau ignorabile). În acest caz avem integralele prime

$$p_\alpha = b_\alpha, \quad \alpha = m+1, m+2, \dots, n,$$

unde $b_\alpha, \alpha = m+1, m+2, \dots, n$ sunt constante reale. Căutăm integrala completă a ecuației lui Hamilton-Jacobi în forma

$$S = \sum_{\alpha=m+1}^n q_\alpha b_\alpha + S_0(t, q_1, q_2, \dots, q_m) \quad (8)$$

Din relațiile (2) și (9) deducem că S_0 trebuie să satisfacă ecuația

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \dots, q_m, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_m}, b_\alpha\right) = 0, \quad (10)$$

care corespunde unui sistem cu $2m$ ecuații canonice.

3. Hamiltonianul H nu depinde explicit de t și de coordonatele $q_\alpha, \alpha = m+1, m+2, \dots, n$,

$$m < n.$$

În acest caz, căutăm integrala completă a ecuației lui Hamilton-Jacobi

în forma

$$S = -ht + \sum_{\alpha=m+1}^n q_\alpha b_\alpha + W(q_1, q_2, \dots, q_m). \quad (11)$$

Metoda separării variabilelor

Așa cum a fost menționat mai sus, teorema lui Hamilton-Jacobi este eficientă doar în cazul în care putem găsi integrala completă a ecuației lui Hamilton-Jacobi. O metodă de determinare a integralei complete a ecuației lui Hamilton-Jacobi o reprezintă metoda separării variabilelor. În cele

ce urmează vom pune în evidență trei clase de sisteme hamiltoniene autonome pentru care se poate aplica metoda separării variabilelor. Această metodă constă în căutarea funcției W (vezi corul 1 de mai sus) în forma

$$W(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n W_i(q_i), \quad (12)$$

unde funcțiile $W_1, W_2, \dots, W_n$ depind de $q_1, q_2, \dots$ respectiv q_n .

Obs. 1° Nu orice sistem mecanic se poate rezolva prin metoda separării variabilelor. Punem în evidență trei clase de sisteme hamiltoniene care pot fi abordate folosind această metodă.

A. Funcția H are forma

$$H = H(g_1(q_1, p_1), g_2(q_2, p_2), \dots, g_n(q_n, p_n)), \quad (13)$$

unde

$$\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Notând

$$g_i(q_i, p_i) = a_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (15)$$

și rezolvând ecuația (15) în raport cu p_i , adică

$$p_i = f_i(q_i, a_i) \quad (16)$$

atunci funcțiile W_i au forma (vezi relația (7))

$$W_i(q_i) = \int f_i(q_i, a_i) dq_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Așfel, integrala completă are forma

$$S = -ht + \sum_{i=1}^n \int f_i(q_i, a_i) dq_i \quad (18)$$

unde

$$h = H(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (19)$$

Rămâne să arătăm că S satisface condiția $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_j}\right) \neq 0$.

Astfel, în baza relației (17), găsim

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial a_j}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Deoarece funcția f_i nu depinde de a_j pentru $j \neq i$ rezultă că

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_j} = 0, \quad j \neq i, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (21)$$

Să arătăm că $\frac{\partial f_i}{\partial a_i} \neq 0$. Pentru aceasta, observăm că dacă înlocuim p_i din (16) în (15) și derivăm relația obținută $a_i = g_i(q_i, f_i(q_i, a_i))$ atunci putem scrie

$$1 = \frac{da_i}{da_i} = \frac{\partial g_i}{\partial a_i}(q_i, f_i(q_i, a_i)) = \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \frac{\partial f_i}{\partial a_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Întrucât $\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0$, din (22) deducem

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (23)$$

Din (20), (21) și (23) rezultă

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_j} \right) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial a_i} \neq 0. \quad (24)$$

Exemplu: Oscilatorul armonic n dimensional

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2) + \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2), \quad m > 0, k > 0.$$

B. Funcția H are forma

$$H = g_n(q_n, p_n, g_{n-1}(q_{n-1}, p_{n-1}, g_{n-2}(\dots g_2(q_2, p_2, g_1(q_1, p_1)) \dots))) \quad (25)$$

unde

$$\frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

În acest caz notăm

$$\begin{cases} g_1(q_1, p_1) = a_1, \\ g_2(q_2, p_2, a_1) = a_2, \\ \vdots \\ g_{n-1}(q_{n-1}, p_{n-1}, a_{n-2}) = a_{n-1}, \\ g_n(q_n, p_n, a_{n-1}) = a_n = h. \end{cases} \quad (27)$$

Din (26) și (27) deducem

$$\begin{cases} p_1 = f_1(q_1, a_1), \\ p_2 = f_2(q_2, a_2, a_1), \\ \vdots \\ p_n = f_n(q_n, a_n, a_{n-1}). \end{cases} \quad (28)$$

Integrala completă are forma

$$S = -ht + \int_1 f_1(q_1, a_1) dq_1 + \sum_{i=2}^n \int f_i(q_i, a_i, a_{i-1}) dq_i. \quad (29)$$

Se verifică ca mai sus că $\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \right) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial a_i} \neq 0$.

Exemplu: Problema celor două corpuri $H = H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{\mu m}{r}, \quad m > 0, \mu > 0.$$

C. Funcția H are forma

$$H = \frac{f_1(q_1, p_1) + f_2(q_2, p_2) + \dots + f_n(q_n, p_n)}{g_1(q_1, p_1) + g_2(q_2, p_2) + \dots + g_n(q_n, p_n)}. \quad (30)$$

Din relație $H(q, p) = h$, obținem

$$\sum_{i=1}^n [f_i(q_i, p_i) - h g_i(q_i, p_i)] = 0, \quad (31)$$

și considerăm constantele a_i , $i = \overline{1, n}$, astfel încât

$$f_i(q_i, p_i) - h g_i(q_i, p_i) = a_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (32)$$

Evident, din (31) și (32) rezultă

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0. \quad (33)$$

Presupunem că

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} - h \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \neq 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (34)$$

Din (32) și (34) rezultă, în baza teoremei funcțiilor implicite că

$$p_i = F_i(q_i, a_i, h), \quad i = \overline{1, n}. \quad (35)$$

Astfel, integrala completă are forma

$$S = -ht + \sum_{i=1}^n \int F_i(q_i, a_i, h) dq_i$$

Se arată, la fel ca în cazul A, că $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial a_j}\right) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial a_i} \neq 0$.

Exemplu. O planetă situată în câmpul gravitațional creat de două centre atractive fixe C_1 și C_2 .

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{(q_1^2 - a^2)p_1^2 + (a^2 - q_2^2)p_2^2}{2m(q_1^2 - q_2^2)} - m \frac{k_1 q_1 - k_2 q_2}{q_1^2 - q_2^2},$$

unde $m > 0$, $a > 0$, $k_1 > k_2 > 0$.

Transformări canonice: simpliticitatea matricii Jacobiene,
păstrarea parantezei Poisson

Considerăm un sistem hamiltonian autonom descris de funcția lui Hamilton $H = H(q, p)$, $(q, p) \in \mathbb{T}_{2n}$, $H \in C^\infty(\mathbb{T}_{2n})$.

Considerăm o transformare de coordonate $(q, p) \rightarrow (\bar{q}, \bar{p})$

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(\bar{q}, \bar{p}), \\ p_i &= p_i(\bar{q}, \bar{p}), \quad i = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (1)$$

unde funcțiile q_i, p_i , $i = \overline{1, n}$ sunt de clasă C^2 și

$$\det \left(\frac{\partial(q, p)}{\partial(\bar{q}, \bar{p})} \right) \neq 0. \quad (2)$$

Pe baza teoremei funcțiilor implicite și condiției (2), ecuațiile (1) pot fi rezolvate în raport cu noile coordonate $\bar{q}, \bar{p}$, obținem astfel

$$\begin{aligned} \bar{q}_i &= \bar{q}_i(q, p), \\ \bar{p}_i &= \bar{p}_i(q, p), \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Def. 1. Spunem că transformarea de coordonate (1) păstrează forma canonică a ecuațiilor lui Hamilton, dacă funcției $H(q, p)$ îi putem asocia o funcție $K(\bar{q}, \bar{p})$ așa încât ecuațiile canonice

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

să se transforme în

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial K}{\partial \bar{p}_i}, \quad \dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial K}{\partial \bar{q}_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Def. 2 Spunem că transformarea de coordonate (1) este canonică dacă forma ecuațiilor se păstrează cu noul Hamiltonian $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = H(q(\bar{q}, \bar{p}), p(\bar{q}, \bar{p}))$.

Obs. 1°. Diferența dintre prima și a doua definiție este aceea că în cazul al doilea, noul Hamiltonian se obține direct din primul Hamiltonian prin înlocuirea coordonatelor q, p cu funcțiile $Q(\bar{Q}, \bar{P})$, $P(\bar{Q}, \bar{P})$.

2°. Importanța transformărilor canonice constă în aceea că printr-o alegere judicioasă a lor, putem ajunge de la sisteme canonice complicate la sisteme mult mai simple.

3°. În cazul sistemelor integrabile, dacă găsim transformarea pentru care $\bar{H}$ (sau K) depinde doar de impulsurile generalizate $\bar{P}$ atunci ecuațiile canonice se integrează în mod direct. Astfel, dacă $K = K(\bar{P})$ atunci din ecuațiile canonice

$$\begin{cases} \dot{\bar{Q}}_i = \frac{\partial K}{\partial \bar{P}_i} \\ \dot{\bar{P}}_i = 0 \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

rezultă $\bar{P}_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$ unde b_i sunt constante, $\frac{\partial K}{\partial \bar{P}_i} = \omega_i$, $i = \overline{1, n}$, ω_i - const
și $\bar{Q}_i = \omega_i t + \bar{Q}_i^0$. Altfel spus soluția sistemului este
 $\bar{Q}_i = \omega_i t + \bar{Q}_i^0$, $\bar{P}_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$,
unde $\bar{Q}_i^0$ sunt constante.

Exemple de transformări canonice

1. Translația. Transformarea

$$q_i = \bar{q}_i + a_i, \quad p_i = \bar{p}_i + b_i, \quad a_i, b_i - \text{const}, \quad i = \overline{1, n}$$

este canonică.

2. Transformarea

$$q_i = \alpha \bar{q}_i, \quad p_i = \beta \bar{p}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha, \beta - \text{const.}$$

păstrează forma canonică a ecuațiilor dacă $K(\bar{Q}, \bar{P}) = \frac{1}{\alpha \beta} H(q(\bar{Q}, \bar{P}), p(\bar{Q}, \bar{P}))$

3. Schimbarea de coordonate. Transformarea

$$q_i = \bar{p}_i, \quad p_i = -\bar{q}_i, \quad i = \overline{1, n}$$

este canonică.

Notăm prin $J \in M_{2n}(\mathbb{R})$ următoarea matrice pătratică

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Se observă prin calcul direct că

$$J^2 = -I_{2n}, \quad J^{-1} = -J. \quad (6)$$

Def. 3. Spunem că matricea $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ este simplctică dacă

$$A^T J A = J. \quad (7)$$

Dacă în spațiul fazelor, notăm prin $x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ coordonatele canonice și
introducăm notația $\partial_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix}$ atunci ecuațiile canonice (3) pot fi

scrise în forma

$$\dot{x} = J \partial_x H. \quad (8)$$

Transformarea (1) poate fi scrisă în forma

$$x = u(y) \quad (9)$$

unde y reprezintă noile coordonate. Notăm prin u_y matricea Jacobiană a transformării.

Propoziție 1 Transformarea (3) este canonică dacă și numai dacă matricea Jacobiană u_y satisface

$$u_y^T J u_y = J, \quad (10)$$

adică u_y este matrice simplctică.

Dem. Notăm prin $K(y)$ Hamiltonianul exprimat în noile coordonate,

adică

$$K(y) = H \circ u(y). \quad (11)$$

Printr-un calcul direct obținem relația

$$\frac{\partial K}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \Big|_{x=u(y)} \quad (12)$$

care poate fi rescrisă în forma compactă

$$\partial_y K = u_y^T \partial_x H u. \quad (13)$$

Ecuațiile canonice (8) se pot rescrie în forma

$$-J\dot{x} = \partial_x H \quad (14)$$

Ținând cont de faptul că $\dot{x} = u_y \dot{y}$, din (14) deducem

$$-J u_y \dot{y} = \partial_x H u. \quad (15)$$

Din (13) și (15) găsim relația

$$-u_y^T J u_y \dot{y} = \partial_y K, \quad (16)$$

care demonstrează proprietatea enunțată.

Fie $f = f(q, p)$ o variabilă dinamice. Atunci în baza transformării (1) putem scrie $f = f(q(\bar{q}, \bar{p}), p(\bar{q}, \bar{p}))$, adică f devine funcție de variabilele $\bar{q}, \bar{p}$. Pentru două variabile dinamice diferentiale f și g putem calcula paranteza Poisson relativ la coordonatele q, p , și scriem $\{f, g\}_{q,p}$ sau în raport cu coordonatele $\bar{q}, \bar{p}$, și scriem $\{f, g\}_{\bar{q}, \bar{p}}$.

Demonstrăm următorul rezultat:

Lemma 1. Transformarea (1) păstrează paranteza Poisson a oricăror variabile dinamice f și g dacă și numai dacă păstrează parantezele Poisson fundamentale, unde parantezele Poisson fundamentale sunt

$$\{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{q,p} = 0. \quad (17)$$

cu alte cuvinte, lemma afirmă că

$$\{f, g\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{f, g\}_{q, p} \Leftrightarrow \{q_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{q_i, p_j\}_{q, p} = \delta_{ij},$$

$$\{q_i, q_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{q_i, q_j\}_{q, p} = 0,$$

$$\{p_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{p_i, p_j\}_{q, p} = 0, \quad i, j = 1, \bar{n}.$$

Dem. Necesitatea este evidentă.

Pentru a demonstra suficiența, trebuie să arătăm că
 $\{f, g\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{f, g\}_{q, p}$. Pe baza definiției parantezei Poisson,

putem scrie

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\bar{q}, \bar{p}} &= \sum_{i,j,k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{q}_i} \frac{\partial g}{\partial \bar{p}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{p}_i} \frac{\partial g}{\partial \bar{q}_j} \right) = \sum_{i,j,k=1}^n \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_i} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{q}_i} \right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \bar{p}_i} + \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \bar{p}_i} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{p}_i} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{p}_i} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_i} + \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \bar{q}_i} \right) \right] = \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial q_k} \{q_j, q_k\}_{\bar{q}, \bar{p}} + \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_k} \{q_j, p_k\}_{\bar{q}, \bar{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_k} \{p_j, q_k\}_{\bar{q}, \bar{p}} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial p_k} \{p_j, p_k\}_{\bar{q}, \bar{p}} \right] = \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_k} \delta_{jk} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_k} \delta_{jk} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) = \\ &= \{f, g\}_{q, p}. \end{aligned}$$

Propoziția 2. Transformarea de coordonate (1) este canonică dacă și numai dacă aceasta păstrează paranteza Poisson a oricăror două variabile dinamice.

Dem Să demonstrăm mai întâi suficiența.

" $\Leftarrow$ " Presupunem că se păstrează paranteza Poisson a oricărei două variabile dinamice. Să arătăm că transformarea este canonică.

Pentru a arăta acest rezultat, reamintim mai întâi că ecuațiile canonice într-un anumit sistem de coordonate, să zicem (q, p) , se scriu (cu ajutorul parantezei Poisson) în formă

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}_{q,p}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{q,p}. \quad (18)$$

Mai mult, dacă t este o variabilă dinamică și sunt satisfăcute ecuațiile (18) atunci

$$\dot{t} = \{t, H\}_{q,p}. \quad (19)$$

Să aplicăm formula (19) în cazul în care $t = \bar{q}_i(q, p)$ și respectiv $t = \bar{p}_i(q, p)$, $i = \overline{1, n}$. Obținem astfel

$$\dot{\bar{q}}_i = \{\bar{q}_i, H\}_{q,p}, \quad \dot{\bar{p}}_i = \{\bar{p}_i, H\}_{q,p}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Ținând cont de ipoteză, putem scrie

$$\{\bar{q}_i, H\}_{q,p} = \{\bar{q}_i, H\}_{\bar{q}, \bar{p}}, \quad \{\bar{p}_i, H\}_{q,p} = \{\bar{p}_i, H\}_{\bar{q}, \bar{p}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (21)$$

Din (20) și (21) deducem

$$\dot{\bar{q}}_i = \{\bar{q}_i, H\}_{\bar{q}, \bar{p}}, \quad \dot{\bar{p}}_i = \{\bar{p}_i, H\}_{\bar{q}, \bar{p}}, \quad i = \overline{1, n} \quad (22)$$

ceea ce demonstrează că sunt satisfăcute ecuațiile canonice în sistemul de ecuații $(\bar{q}, \bar{p})$, și deci transformarea este canonică.

Să demonstrăm necesitatea

" $\Rightarrow$ " Presupunem că transformarea este canonică. În baza lemei de mai sus este suficient să demonstrăm că sunt păstrate parantezele Poisson fundamentale, adică

$$\{q_i, q_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (23)$$

Întrucât sunt satisfăcute atât ecuațiile canonice (18) cât și ecuațiile canonice (22), pentru o variabilă dinamică diferentiabilă f putem scrie

$$\dot{f} = \{f, H\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \{f, H\}_{\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}} \quad (24)$$

Dacă în relația de mai sus considerăm $f = q_i$, $H = q_j$, atunci obținem

$$\{q_i, q_j\}_{\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{p}}} = \{q_i, q_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (25)$$

Analog, considerând $f = q_i$, $H = p_j$ și respectiv $f = p_i$, $H = p_j$ obținem relațiile (23) și necesitatea este demonstrată.

Abș⁴ Propozițiile 1 și 2 reprezintă instrumente utile pentru a verifica dacă o transformare de coordonate dată este canonică sau nu. Așadar, transformarea de coordonate este cunoscută apriori. Există metode care generează transformări canonice prin construcție. Două dintre aceste metode se bazează pe utilizarea așa numitelor funcții generatoare de transformări canonice, și respectiv pe folosirea proprietăților operatorului Lie.