

Fisa de exercitii. Teoria lui Hamilton-Jacobi

1. Se consideră un sistem hamiltonian autonom caracterizat de funcția lui Hamilton $H: \mathcal{F}_4 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_4 = \mathbb{R}_4$,

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2),$$

unde m și k sunt constante pozitive. Să se determine:

a) integrale complete a ecuației lui Hamilton-Jacobi;

b) determinati soluția sistemului canonic în cazul $m=1$, $k=1$

$$q_1(0)=1, \quad q_2(0)=3, \quad p_1(0)=1, \quad p_2(0)=1$$

Rezolvare. a) Utilizând metoda separării variabilelor, căutăm integrale complete a ecuației lui Hamilton-Jacobi în forma

$$S = -ht + W_1(q_1) + W_2(q_2),$$

unde W_1 și W_2 satisfac ecuația redusă a lui Hamilton-Jacobi

$$H\left(q_1, q_2, \frac{dW_1}{dq_1}, \frac{dW_2}{dq_2}\right) = h, \quad h - \text{constant.}$$

care în acest caz devine

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{dW_1}{dq_1} \right)^2 + \left(\frac{dW_2}{dq_2} \right)^2 \right] + \frac{k}{2} (q_1^2 + q_2^2) = h.$$

Separând variabilele, relația de mai sus poate fi rescrisă astfel

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dW_1}{dq_1} \right)^2 + \frac{k}{2} q_1^2 = h - \frac{1}{2m} \left(\frac{dW_2}{dq_2} \right)^2 - \frac{k}{2} q_2^2 = a_1$$

unde a_1 - constant. Obținem astfel ecuațiile

$$\frac{dW_1}{dq_1} = \sqrt{2ma_1 - mkq_1^2}, \quad \frac{dW_2}{dq_2} = \sqrt{2m(h-a_1) - mkq_2^2}$$

pentru determinarea funcțiilor W_1 și W_2 . Prin integrarea acestor ecuații obținem integrala completă a ecuației lui Hamilton-Jacobi

$$S = -ht + \int \sqrt{2ma_1 - mkq_1^2} dq_1 + \int \sqrt{2m(h-a_1) - mkq_2^2} dq_2.$$

Aplicând teorema lui Hamilton-Jacobi, rezultă că soluția ecuațiilor canonice se obține rezolvând sistemul algebric

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial S}{\partial h} = b_2, \quad \frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2,$$

Acest sistem devine, în cazul nostru,

$$\int \frac{m}{\sqrt{2ma_1 - mkq_1^2}} dq_1 - \int \frac{m}{\sqrt{2m(h-a_1) - mkq_2^2}} dq_2 = b_1,$$

$$-t + \int \frac{m}{\sqrt{2m(h-a_1) - mkq_2^2}} dq_2 = b_2,$$

$$\sqrt{2ma_1 - mkq_1^2} = p_1,$$

$$\sqrt{2m(h-a_1) - mkq_2^2} = p_2,$$

unde b_1 și b_2 sunt constante.

c) Utilizând condițiile inițiale $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 3$, $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 1$ și datele numerice $m=1$, $k=1$, să determinăm funcțiile $q_1(t)$, $q_2(t)$, $p_1(t)$ și $p_2(t)$.

Să notăm prin I_1 și I_2 următoarele integrale

$$I_1 = \int \frac{1}{\sqrt{2a_1 - q_1^2}} dq_1, \quad I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{(h-a_1) - q_2^2}} dq_2.$$

Atunci sistemul de mai sus, devine

$$I_1 - I_2 = b_1, \quad -t + I_2 = b_2, \quad \sqrt{2a_1 - q_1^2} = p_1, \quad \sqrt{2(h-a_1) - q_2^2} = p_2.$$

Cum

$$I_1 = \arcsin \frac{q_1}{\sqrt{2a_1}} + C_1, \quad I_2 = \arcsin \frac{q_2}{\sqrt{2(h-a_1)}} + C_2,$$

unde C_1 și C_2 sunt constante, pe care le putem considera nule, rezultă că sistemul canonic are soluția generală

$$q_1 = \sqrt{2a_1} \sin(t + b_1 + b_2), \quad q_2 = \sqrt{2(h-a_1)} \sin(t + b_2),$$

$$p_1 = \sqrt{2a_1 - q_1^2}, \quad p_2 = \sqrt{2(h-a_1) - q_2^2}.$$

În baza condițiilor inițiale, din ultimele două ecuații deducem

$$a_1 = 1, \quad h = 6,$$

iar din primele două găsim

$$\sin(b_1 + b_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin b_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Pentru a determina $\cos(b_1 + b_2)$ și $\cos b_2$ și implicit b_1 și b_2 , vom utiliza ecuațiile canonice

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}$$

care în acest caz devin

$$\dot{q}_1 = p_1, \quad \dot{q}_2 = p_2.$$

Pe baza acestor relații, a condițiilor inițiale și soluției generale, deducem

$$\cos(b_1 + b_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos b_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Dacă scriem

$$q_1 = \sqrt{2} [\sin t \cos(b_1 + b_2) + \cos t \sin(b_1 + b_2)],$$

$$q_2 = \sqrt{10} [\sin t \cos b_2 + \cos t \sin b_2],$$

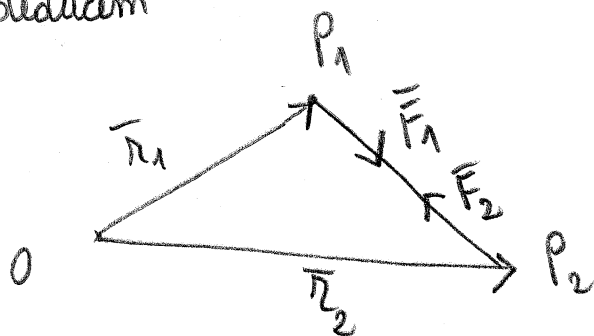
și utilizăm valorile numerice obținute mai sus, deducem

$$q_1(t) = \sin t + \cos t, \quad q_2(t) = \sin t + 3 \cos t,$$

$$p_1(t) = \cos t - \sin t, \quad p_2(t) = \cos t - 3 \sin t.$$

2. Determinați funcția lui Hamilton pentru problema celor două corpuri.

Rezolvare Considerăm două corpuri P_1 și P_2 , de mase m_1 și respectiv m_2 , care se deplasă conform legii atracției universale. Fie O originea unui reper inertial. Vom nota prin $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ vectorii de poziție a celor două puncte, iar prin $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ forțele care acționează asupra punctelor P_1 și respectiv P_2 . Aplicând principiul lui Newton deducem



$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1,$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2.$$

Dacă introducem notația

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad r = |\vec{r}|$$

și aplicăm principiul acțiunii și reacțiunii, forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ se scriu astfel

$$\vec{F}_1 = \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{P}_1 \vec{P}_2}{|\vec{P}_1 \vec{P}_2|} = \frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -\frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Ecuatiile lui Newton devin

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Împărțind prima ecuație prin m_1 , iar a doua prin m_2 , și scăzând relațiile obținute, deducem

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{0}$$

unde $\mu = G(m_1 + m_2)$. Fie m un număr real pozitiv. Înmulțind ecuația de mai sus prin m , deducem

$$m \ddot{\vec{r}} = - \frac{m\mu}{r^3} \vec{r},$$

care formulă reprezintă ecuația lui Newton ce descrie mișcarea unui punct material de masă m și având vectorul de poziție $\vec{r}$, asupra căruia acționează forța $\vec{F} = - \frac{m\mu}{r^3} \vec{r}$. Utilizând un sistem de coordonate cartezian, vectorul $\vec{r}$ îl putem scrie în formă $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, unde (x, y, z) sunt coordonatele punctului în acest sistem. Folosind aceste coordonate, se poate arăta că $\vec{F}$ este o forță conservativă, adică $\vec{F} = -\nabla V = V(x, y, z)$ astfel încât

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = -\vec{F}, \quad (*)$$

unde $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$. Într-adevăr, dacă V are forma

$$V = - \frac{\mu m}{r},$$

atunci relația (*) este satisfăcută. Pentru a verifica această afirmație remarcăm că

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (r^{-1}) = -r^{-2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}.$$

Astfel, putem scrie

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\mu m}{r} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\mu m}{r} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\mu m}{r} \right) \vec{k} = \frac{\mu m}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\mu m}{r^3} \vec{r} = -\vec{F}.$$

Remarcăm că V depinde de x, y, z , prin intermediul marelui vector $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, adică $V = V(r)$.

Dacă utilizăm un sistem de coordonate sferice (r, θ, φ) (a se vedea Fișele de exerciții anterioare), atunci energia cinetică este

$$E(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta).$$

Introducând funcția lui Lagrange $L = E - V$, deducem impulsurile generalizate

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = m r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta,$$

și hamiltonianul

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\mu m}{r}.$$

3. Studiați problema celor două corpuri utilizând metoda lui Hamilton-Jacobi.

Rezolvare. Hamiltonianul sistemului are forma

$$H(r, \varphi, \theta, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] - \frac{\mu m}{r},$$

unde $\mu > 0$, $m > 0$ sunt constante. Dacă notăm

$$p_\varphi = a_1, \quad p_\theta^2 + \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta} = a_2, \quad \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{a_2}{r^2} \right) - \frac{\mu m}{r} = h,$$

deducem

$$p_\varphi = a_1, \quad p_\theta = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta}}, \quad p_r = \sqrt{2m \left(h + \frac{\mu m}{r} \right) - \frac{a_2}{r^2}}. \quad (*)$$

Astfel, integrala completă a ecuației lui Hamilton-Jacobi este

$$S = -ht + a_1 \varphi + \int \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \int \sqrt{2m \left(h + \frac{\mu m}{r} \right) - \frac{a_2}{r^2}} dr.$$

Aplicând teorema lui Hamilton-Jacobi obținem că relațiile

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = b_2, \quad \frac{\partial S}{\partial h} = b_3,$$

și

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = p_\varphi, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = p_\theta, \quad \frac{\partial S}{\partial r} = p_r$$

derivăm

$$\varphi - a_1 \int \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta}}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta = b_1$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{\sin^2 \theta}}} d\theta - \int \frac{1}{2\sqrt{2m \left(h + \frac{\mu m}{r} \right) - \frac{a_2}{r^2}}} \cdot \frac{1}{r^2} dr = b_2$$

(**)

$$-t + \int \frac{m}{\sqrt{2m \left(h + \frac{\mu m}{r} \right) - \frac{a_2}{r^2}}} dr = b_3,$$

(6)

și respectiv relațiile (*).

Dacă alegem reperul în așa fel încât viteza inițială să fie în planul meridian $\varphi = \varphi_0$, atunci la momentul inițial $\frac{d\varphi}{d\theta} = 0$. Din prima ecuație din (**) rezultă că $a_1 = 0$, și $\varphi(t) = \varphi_0$. Mișcarea este plană.

Cu notația $\frac{1}{r} = Y$, cea de-a doua ecuație (**) devine

$$\frac{1}{2\sqrt{a_2}} \theta + \int \frac{dY}{2\sqrt{2m(h + \mu m Y) - a_2 Y^2}} = b_2,$$

sau echivalent

$$\int \frac{dY}{\sqrt{\alpha + 2\beta Y - Y^2}} = \theta_1 - \theta$$

unde

$$\theta_1 = 2\sqrt{a_2} b_2, \quad \alpha = \frac{2mh}{a_2}, \quad \beta = \frac{m^2 \mu}{a_2}.$$

Scrimd

$$\frac{dY}{\sqrt{\alpha + 2\beta Y - Y^2}} = \frac{d(Y - \beta)}{\sqrt{\alpha + \beta^2 - (Y - \beta)^2}},$$

integrând de mai sus o putem calcula, obținem astfel

$$\arccos \frac{Y - \beta}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} = \theta - \theta_1$$

și apoi

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_1)}$$

unde

$$p = \frac{1}{\beta} = \frac{a_2}{m^2 \mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{2h a_2}{m^3 \mu}}.$$

Ecuația timpului se deduce din ultima relație din (**). Dacă $h < 0$, adică $e < 1$ (mişcare eliptică) atunci această ecuație se poate pune sub formă

$$\frac{m}{\sqrt{2m(-h)}} \int_{r_1}^r \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 - \frac{2\beta}{\alpha} r + \frac{1}{\alpha}}} = t - t_0$$

unde $t_0 = -b_3$, iar apoi sub formă

$$\sqrt{\frac{m}{-2h}} \int_{r_1}^r \frac{r dr}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} = t - t_0,$$

unde

$$r_1 + r_2 = -\frac{2\beta}{\alpha}, \quad r_1 r_2 = -\frac{1}{\alpha}.$$

Valoările r_1 și r_2 reprezintă distanțele pericentruului și respectiv apocentruului față de focar. Într-adevăr, ținând cont că $p = \frac{1}{\beta}$ și $e = \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\beta^2}}$ se verifică faptul că dacă $r_1 = \frac{p}{1+e}$ și $r_2 = \frac{p}{1-e}$ atunci

$$r_1 + r_2 = \frac{2p}{1-e^2} = -\frac{2\beta}{\alpha}, \quad r_1 r_2 = \frac{p^2}{1-e^2} = -\frac{1}{\alpha}.$$

Introducând anormolia excentrică u , definită prin

$$r = a(1 - e \cos u)$$

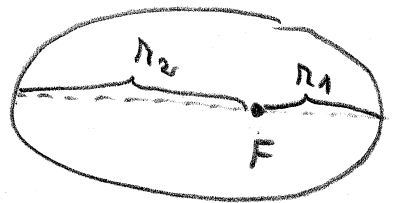
unde a este semiaxa mare a elipsei, integrale de mai sus devine

$$\sqrt{\frac{m}{-2h}} \int_0^u a(1 - e \cos x) dx = t - t_0.$$

Prin integrare, deducem ecuația lui Kepler

$$u - e \sin u = n(t - t_0), \quad n = \sqrt{-\frac{2h}{m}},$$

unde n este viteza unghiulară medie. Cu aceasta, problema celor două corpuri este rezolvată.



$$r_1 = a(1-e) = \frac{p}{1+e}$$

$$r_2 = a(1+e) = \frac{p}{1-e}$$

$$p = a(1-e^2)$$

4. Se consideră funcția lui Hamilton

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mk(x^2 - ax + y^2 - by),$$

$a > 0, b > 0, m > 0, k > 0$ (a se vede problema 5, fișa de exerciții anterioară).

Determinați soluția sistemului canonic utilizând metoda lui Hamilton-Jacobi.

Aplicație numerică: $m = \frac{1}{2}, k = 2, a = 2, b = 4$, și

condițiile inițiale $x(0) = 1, y(0) = 2, p_x(0) = \frac{3}{2}, p_y(0) = 3$.