

Funcții generatoare de transformări canonice

Demonstrațiile următoarelor două teoreme le vom prezenta după enunțarea și demonstrarea așa numitului principiu a lui Hamilton.

Să considerăm un sistem autonom. Următoarea teoremă furnizează o condiție suficientă de canonicitate.

Teorema 1 (condiție suficientă de canonicitate). Dacă există o funcție $S = S(\bar{q}, \bar{p})$ (sau $S = S(\bar{q}, \bar{p})$) așa încât să fie satisfăcută relația

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + dS, \quad (1)$$

atunci transformarea $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$, $p_i = p_i(\bar{q}, \bar{p})$ este canonică.

Obs. 1° Funcția S se numește funcție generatoare de transformări canonice. În contextul transformărilor canonice libere (definite mai jos), această funcție permite construirea transformărilor canonice.

În cazul sistemelor neautonome, teorema de mai sus se reformulează astfel:

Teorema 2 (condiție suficientă pentru păstrarea formei ecuațiilor canonice). Dacă există o funcție $S = S(t, \bar{q}, \bar{p})$ (sau $S = S(t, \bar{q}, \bar{p})$) și un scalar $\lambda \neq 0$ astfel încât

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i - K dt + dS, \quad (1)'$$

atunci transformarea $q_i = q_i(t, \bar{q}, \bar{p})$, $p_i = p_i(t, \bar{q}, \bar{p})$ păstrează forma ecuațiilor canonice cu funcția lui Hamilton K .

Def. 1. O transformare canonică $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$, $p_i = p_i(\bar{q}, \bar{p})$, $i = \overline{1, n}$ pentru care relațiile $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$, $i = \overline{1, n}$ pot fi inversate local în raport cu $\bar{p}$, adică este satisfăcută relația

$$\det \left(\frac{\partial (q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)} \right) \neq 0, \quad (2)$$

se numește transformare canonică liberă.

Obs. 2° Așa cum rezultă din teorema 1, dacă avem o transformare canonică generată de funcția generatoare S , atunci aceasta din urmă depinde de coordonatele canonice q și p (sau $\bar{q}, \bar{p}$). Dacă în plus transformarea canonică este liberă atunci inversând relațiile $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$, $i = \overline{1, n}$ în raport cu $\bar{p}$, deducem că funcția S poate fi scrisă ca funcție de q și $\bar{q}$, adică $S = S(q, \bar{q})$.

Reciproc, dacă $S = S(q, \bar{q})$ atunci putem determina o transformare canonică liberă ca în teorema.

Teorema 3. Dacă $S = S(z, \bar{z})$ este o funcție de clasă C^2 cu proprietatea

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) \neq 0, \quad (3)$$

atunci transformarea definită de relațiile

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial z_i}(z, \bar{z}), \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial S}{\partial \bar{z}_i}(z, \bar{z}), \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

definieste o transformare canonică liberă.

Dem. Având în vedere relația (3), rezultă pe baza teoremei funcțiilor implicite că ecuațiile $\bar{p}_i = -\frac{\partial S}{\partial \bar{z}_i}(z, \bar{z}), i = \overline{1, n}$ pot fi rezolvate (inversate) local în raport cu variabilele z , adică obținem $z_i = z_i(\bar{z}, \bar{p}), i = \overline{1, n}$. În plus, este satisfăcută

condiția $\det \left(\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)} \right) \neq 0$, deoarece matricea $\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)}$

este inversa matricei $\left(\frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)$. Înlocuind $z_i = z_i(\bar{z}, \bar{p}), i = \overline{1, n}$

în relațiile $p_i = \frac{\partial S}{\partial z_i}(z, \bar{z}), i = \overline{1, n}$, obținem $p_i = p_i(\bar{z}, \bar{p}), i = \overline{1, n}$.

Diferențiind funcția $S = S(z, \bar{z})$, deducem, pe baza relațiilor (4),

$$dS = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = \sum_{i=1}^n p_i dz_i - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{z}_i. \quad (5)$$

Aplicând teorema 1, obținem că transformarea $z_i = z_i(\bar{z}, \bar{p}), p_i = p_i(\bar{z}, \bar{p})$ este transformare canonică liberă.

Obs. 3°. Multimea transformărilor canonice libere poate fi definită în 4 moduri distincte. Atfel, în locul relației (3)

putem avea condițiile $\det \left(\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)} \right) \neq 0, \det \left(\frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)} \right) \neq 0, \det \left(\frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)} \right) \neq 0$.

Funcția S poate fi privită ca funcție de $S(q, \bar{q})$, $S(q, \bar{p})$, $S(p, \bar{q})$, $S(p, \bar{p})$. În mod analog, putem demonstra teorema de mai jos (și încă două teoreme similare).

Teorema 4. Dacă $S = S(q, \bar{p})$ este o funcție de clasă C^2 cu proprietatea

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \bar{p}_j} \right) \neq 0 \quad (6)$$

atunci transformarea definită de relațiile

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

definieste o transformare canonică liberă.

Dem. La fel ca în teorema 3 se arată că în baza condiției (6), relațiile (7) definesc o schimbare de coordonate $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$, $p_i = p_i(\bar{q}, \bar{p})$, $i = \overline{1, n}$ cu proprietatea $\det \left(\frac{\partial(q_1, \dots, q_n)}{\partial(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)} \right) \neq 0$.

Relația de mai jos

$$\begin{aligned} dS &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i} d\bar{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + \bar{q}_i d\bar{p}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n [p_i dq_i + d(\bar{q}_i p_i) - \bar{p}_i d\bar{q}_i], \end{aligned}$$

care poate fi rescrisă în forma

$$d \left(S - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \bar{q}_i \right) = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i, \quad (8)$$

și teorema 1 demonstrează faptul că transformarea este canonică și liberă.

Obs 4°. În teorema 3 (sau teorema 4) funcția S este cunoscută. Prin intermediul acesteia se determină o transformare care păstrează

forma ecuațiilor canonice. Se poate pune problema și în alți termeni. Să se găsească funcție S care conduce la o formă specială (cât mai simplă) a noului hamiltonian $\bar{H}$. În particular, dacă noul hamiltonian are forma $\bar{H} = \bar{H}(\bar{P})$ atunci soluția sistemului canonic se obține foarte ușor (a se vedea notițele următoare). Chiar și în cazul în care dependența hamiltonianului inițial H de coordonatele generalizate q este esențială și nu poate fi eliminată prin schimbări de coordonate, în unele cazuri este posibilă determinarea unor transformări canonice care aduc hamiltonianul la o formă mult mai simplă, dinamică inclusă de ecuațiile canonice fiind mult mai ușor de analizat. Un hamiltonian care induce o dinamică se poate fi analizat ușor spunem că este adus la forma normală. Există mai multe metode de a aduce un hamiltonian la forma normală, care nu fac obiectul acestui curs, însă care sunt foarte importante în cadrul teoriei perturbărilor.

Obs 5° O altă metodă importantă care poate fi folosită pentru generarea de transformări canonice se bazează pe seriile Lie. Și această metodă se folosește în teoria perturbărilor.

În cazul sistemelor hamiltoniene neautonome putem face o analiză celei de mai sus. Astfel, introducăm definiție

Def 2. O schimbare de coordonate $q_i = q_i(t, \bar{q}, \bar{p})$, $p_i = p_i(t, \bar{q}, \bar{p})$, $i=1, n$ pentru care relațiile $q_i = q_i(t, \bar{q}, \bar{p})$, $i=1, n$ pot fi inversate în raport cu $\bar{P}$, adică este satisfăcută relația

$$\det \left(\frac{\partial (q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)} \right) \neq 0$$

se numește transformare liberă.

Teorema 5 Fie $S = S(t, q, \bar{q})$ o funcție de clasă C^2 care satisface condiția

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial \bar{q}} \right) \neq 0 \quad (10)$$

din care transformarea de coordonate definită de relațiile

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial S}{\partial \bar{q}_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (11)$$

defineste o transformare liberă care păstrează forma ecuațiilor canonice cu funcția K definită prin

$$K(t, \bar{q}, \bar{p}) = H(t, q(t, \bar{q}, \bar{p}), p(t, \bar{q}, \bar{p})) + \frac{\partial S}{\partial t}(t, q(t, \bar{q}, \bar{p}), \bar{q}). \quad (12)$$

Dem. La fel ca în demonstrația teoremei (3), din relație (10) și al doilea set de ecuații (11) obținem

$$q_i = q_i(t, \bar{q}, \bar{p}), \quad i = \overline{1, n} \quad (13)$$

$$\text{și} \quad \det \left(\frac{\partial(q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)} \right) \neq 0. \quad (14)$$

Înlocuind q_i din (13) în primul set de relații (11) deducem

$$p_i = p_i(t, \bar{q}, \bar{p}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Diferențîind funcția $S = S(t, q, \bar{q})$, deducem, pe baza relațiilor (11), (12)

$$dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{q}_i} d\bar{q}_i \right) = (K - H) dt + \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i \quad (16)$$

În baza teoremei 2 și definiției 2 rezultă că transformarea definită de relațiile (13), (15) este o transformare liberă care păstrează forma ecuațiilor canonice.

Obs. 6° La fel ca în cazul sistemelor autonome, mulțimea transformărilor libere poate fi definită în 4 moduri distincte.

7° În teorema de mai sus, funcția generatoare S este presupusă a fi cunoscută. Prin intermediul acesteia se determină o transformare care păstrează forma ecuațiilor canonice. Avînd în vedere că

scopul principal al teoriei transformărilor canonice este acela de a determina o schimbare de coordonate, care păstrează forma ecuațiilor canonice, încât în noul sistem de coordonate dinamice să fie ușor de analizat, putem rezolva următoarea problemă. Să găsim o funcție S care conducă la o formă cât mai simplă a funcției lui Hamilton K . Spre exemplu, să determinăm funcția S care dă $K=0$. Evident, în acest caz ecuațiile canonice

$$\dot{\bar{q}}_i = 0, \quad \dot{\bar{p}}_i = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (17)$$

au soluția $\bar{q}_i = a_i, \quad \bar{p}_i = -b_i, \quad i = \overline{1, n}$, a_i, b_i constante. Deci problema revine la a determina funcția de clasă C^2

$$S = S(t, q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n) \quad (18)$$

cu proprietatea (10), care se poate rescrie în forma;

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} \right) \neq 0 \quad (19)$$

și care satisface în mod identic ecuația (12), care pe baza relațiilor (11) se poate rescrie astfel

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}\right) = 0. \quad (20)$$

Dim (18), (19), (20) rezultă că găsirea transformării care dă $K=0$ este echivalentă cu determinarea integralei complete a ecuației lui Hamilton-Jacobi.

Mai mult, relațiile (11), care în acest caz se pot rescrie în forma

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad b_i = -\frac{\partial S}{\partial a_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (21)$$

reprezintă ecuațiile din teorema lui Hamilton-Jacobi.