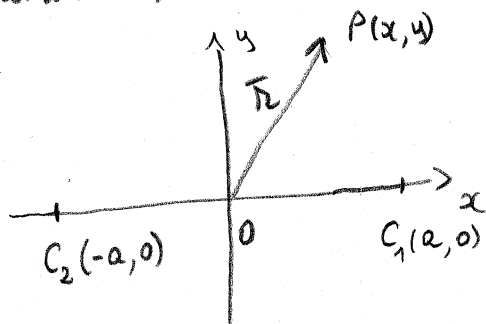


Fisa de exercitii

1. Studiati mișcarea unei planete de masă m în câmpul creat de două centre atractive fixe de mase m_1 și m_2 .

Rezolvare Considerăm un sistem de axe Oxy , cu originea O în mijlocul segmentului format de cele două centre atractive. Notăm prin $2a$ lungimea acestui segment. Utilizând coordonatele carteziene (x, y) ale planetei P , deducem vectorul de poziție, vectorul viteză și energia cinetică



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j},$$

$$E = \frac{m}{2} \vec{v}^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Rezultanta forțelor exercitate de cele două centre atractive este

$$\vec{F} = \vec{F}_{C_1} + \vec{F}_{C_2} = \frac{Gmm_1}{|\vec{r}_{C_1} - \vec{r}|^3} (\vec{r}_{C_1} - \vec{r}) + \frac{Gmm_2}{|\vec{r}_{C_2} - \vec{r}|^3} (\vec{r}_{C_2} - \vec{r}),$$

unde

$$\vec{r}_{C_1} = a\vec{i}, \quad \vec{r}_{C_2} = -a\vec{i}.$$

Forța $\vec{F}$ admite potențialul

$$V = -Gm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right),$$

$$\text{unde } r_1 = |\vec{r}_{C_1} - \vec{r}| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad r_2 = |\vec{r}_{C_2} - \vec{r}| = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Într-adevăr, rezultă că

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Gm \left(\frac{m_1}{r_1^2} \frac{x-a}{r_1} + \frac{m_2}{r_2^2} \frac{x+a}{r_2} \right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Gm \left(\frac{m_1}{r_1^2} \frac{y}{r_1} + \frac{m_2}{r_2^2} \frac{y}{r_2} \right),$$

și astfel

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} = \frac{Gmm_1}{r_1^3} (\vec{r} - \vec{r}_{c1}) + \frac{Gmm_2}{r_2^3} (\vec{r} - \vec{r}_{c2}) = -\vec{F}.$$

Față de sistemul de coordonate cartezian, funcția lui Lagrange este:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = E - V = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + Gm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right).$$

În cele ce urmează vom utiliza un alt set de coordonate generalizate, definite prin

$$q_1 = \frac{1}{2} (r_1 + r_2), \quad q_2 = \frac{1}{2} (r_1 - r_2),$$

numite coordonate eliptice ($q_1 = \text{const}$ reprezintă o familie de elipse, iar $q_2 = \text{const}$ reprezintă o familie de hiperbole). Din definiția distanțelor r_1 și r_2 rezultă

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \geq \sqrt{(x-a)^2} + \sqrt{(x+a)^2} = |x-a| + |x+a| \geq 2a. \\ |r_1 - r_2| &= \left| \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - x^2 - 2ax - a^2 - y^2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \right| = \\ &= \left| \frac{-4ax}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2}} \right| \leq \left| \frac{-4ax}{|x-a| + |x+a|} \right| \leq 2a. \end{aligned}$$

Astfel,

$$a \leq q_1 < \infty, \quad -a \leq q_2 \leq a.$$

Un simplu calcul arată că

$$\begin{aligned} q_1^2 + q_2^2 &= \frac{1}{4} (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2) = \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + x^2 + 2ax + a^2 + y^2) = x^2 + y^2 + a^2, \end{aligned} \quad (*)$$

$$q_1 q_2 = \frac{1}{4} (r_1^2 - r_2^2) = \frac{1}{4} (x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - x^2 - 2ax - a^2 - y^2) = -ax.$$

Din relațiile de mai sus, deducem (înmulțim primele rel cu a^2 , o două o ridicăm la pătrat, iar rezultatele le scădem)

$$a^2 q_1^2 + a^2 q_2^2 - q_1^2 q_2^2 = a^2 y^2 + a^4.$$

(2)

Această relație se poate rescrie în forma

$$a^2 y^2 = (q_1^2 - a^2)(a^2 - q_2^2).$$

(xx)

Derivând relația (xx), deducem

$$a^2 y \dot{y} = q_1 \dot{q}_1 (a^2 - q_2^2) - q_2 \dot{q}_2 (q_1^2 - a^2).$$

Împărțind această relație prin $a^2 y^2$, și ținând cont de (xx) rezultă

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{q_1 \dot{q}_1}{q_1^2 - a^2} - \frac{q_2 \dot{q}_2}{a^2 - q_2^2},$$

iar apoi

$$a^2 \dot{y}^2 = (q_1^2 - a^2)(a^2 - q_2^2) \left(\frac{q_1 \dot{q}_1}{q_1^2 - a^2} - \frac{q_2 \dot{q}_2}{a^2 - q_2^2} \right)^2. \quad (***)$$

Dim (x) deducem

$$a^2 \dot{x}^2 = (\dot{q}_1 q_2 + q_1 \dot{q}_2)^2. \quad (****)$$

În sistemul de coordonate q_1 și q_2 , funcția lui Lagrange are forma

$$\begin{aligned} L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) &= \frac{m}{2a^2} (a^2 \dot{x}^2 + a^2 \dot{y}^2) + Gm \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) = \\ &= \frac{m}{2a^2} \left[\dot{q}_2^2 \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1^2 \dot{q}_2^2 + \cancel{2q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2} + \dot{q}_1^2 \dot{q}_2^2 \cdot \frac{a^2 - q_2^2}{q_1^2 - a^2} + \dot{q}_2^2 \dot{q}_2^2 \cdot \frac{q_1^2 - a^2}{a^2 - q_2^2} - \right. \\ &\quad \left. - \cancel{2q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2} \right] + Gm \left(\frac{m_1}{q_1 + q_2} + \frac{m_2}{q_1 - q_2} \right) = \\ &= \frac{m}{2a^2} \left[\frac{\dot{q}_1^2}{q_1^2 - a^2} \left(\cancel{q_1^2 q_2^2} - a^2 q_2^2 + a^2 q_1^2 - \cancel{q_1^2 q_2^2} \right) + \frac{\dot{q}_2^2}{a^2 - q_2^2} \left(a^2 q_1^2 - \cancel{q_1^2 q_2^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cancel{q_1^2 q_2^2} - a^2 q_2^2 \right) \right] + Gm \left(\frac{(m_1 + m_2) q_1 - (m_1 - m_2) q_2}{q_1^2 - q_2^2} \right) = \\ &= \frac{m}{2} (q_1^2 - q_2^2) \left[\frac{\dot{q}_1^2}{q_1^2 - a^2} + \frac{\dot{q}_2^2}{a^2 - q_2^2} \right] - m \frac{k_1 q_1 - k_2 q_2}{q_1^2 - q_2^2} \end{aligned}$$

unde

$$k_1 = G(m_1 + m_2), \quad k_2 = G(m_1 - m_2)$$

Presupunem, pentru a fixa ideile, că $m_1 > m_2$, și deci $k_1 > k_2 > 0$.

Impulsurile generalizate sunt

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m(q_1^2 - q_2^2) \frac{\dot{q}_1}{q_1^2 - q_2^2}, \quad p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m(q_1^2 - q_2^2) \frac{\dot{q}_2}{q_1^2 - q_2^2}.$$

Rezultă că Hamiltonianul este

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L = \frac{1}{2m(q_1^2 - q_2^2)} \left((q_1^2 - q_2^2) p_1^2 + (q_1^2 - q_2^2) p_2^2 \right) + m \frac{k_1 q_1 - k_2 q_2}{q_1^2 - q_2^2}.$$

Căutăm integrala completă a ecuației lui Hamilton-Jacobi în forma

$$S = -ht + W_1(q_1) + W_2(q_2),$$

unde W_1 și W_2 satisfac ecuația

$$\frac{(q_1^2 - q_2^2) \left(\frac{dW_1}{dq_1} \right)^2 + (q_1^2 - q_2^2) \left(\frac{dW_2}{dq_2} \right)^2 + 2m^2 k_1 q_1 - 2m^2 k_2 q_2}{q_1^2 - q_2^2} = 2mh.$$

Separând variabilele, obținem

$$(q_1^2 - q_2^2) \left(\frac{dW_1}{dq_1} \right)^2 + 2m^2 k_1 q_1 - 2mh q_1^2 = - \left(2mh q_2^2 + (q_1^2 - q_2^2) \left(\frac{dW_2}{dq_2} \right)^2 - 2m^2 k_2 q_2 \right) = a_1,$$

unde a_1 - const.

Dim relația de mai sus deducem $\frac{dW_1}{dq_1}$, $\frac{dW_2}{dq_2}$, iar apoi

integrala completă în formă

$$S = -ht + \int \sqrt{\frac{a_1 + 2mhq_1^2 + 2m^2k_1q_1}{q_1^2 - a^2}} dq_1 + \int \sqrt{\frac{a_1 + 2mhq_2^2 - 2m^2k_2q_2}{q_2^2 - a^2}} dq_2.$$

Aplicând teorema lui Hamilton-Jacobi, relațiile

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial S}{\partial h} = b_2,$$

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2},$$

unde b_1 și b_2 sunt constante de integrare

$$\int \frac{dq_1}{\sqrt{q_1^2 - a^2} \sqrt{a_1 + 2mhq_1^2 + 2m^2k_1q_1}} + \int \frac{dq_2}{\sqrt{q_2^2 - a^2} \sqrt{a_1 + 2mhq_2^2 - 2m^2k_2q_2}} = 2b_1,$$

$$-t + \int \frac{mq_1^2 dq_1}{\sqrt{q_1^2 - a^2} \sqrt{a_1 + 2mhq_1^2 + 2m^2k_1q_1}} + \int \frac{mq_2^2 dq_2}{\sqrt{q_2^2 - a^2} \sqrt{a_1 + 2mhq_2^2 - 2m^2k_2q_2}} = b_2,$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{a_1 + 2mhq_1^2 + 2m^2k_1q_1}{q_1^2 - a^2}},$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{a_1 + 2mhq_2^2 - 2m^2k_2q_2}{q_2^2 - a^2}}.$$

Problema se reduce la cuadraturi eliptice.

2. Arătați că următoarele transformări sunt canonice:

a) $q_i = \bar{q}_i + a_i$, $p_i = \bar{p}_i + b_i$, a_i, b_i constante, $i = \overline{1, n}$.

b) $q_i = \alpha_i \bar{q}_i$, $p_i = \frac{1}{\alpha_i} \bar{p}_i$, $\alpha_i \neq 0$, α_i constante, $i = \overline{1, n}$.

c) $q_i = \bar{p}_i$, $p_i = -\bar{q}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Avem mai multe modalități de a verifica că o anumită transformare de coordonate este canonică. Să utilizăm pentru cazul a) condiția de simplecticitate a matricii Jacobiene. Reamintim faptul că o transformare este canonică dacă și numai dacă

(*)

$$U^T J U = J$$

unde $U = \frac{\partial (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)}$, iar $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

În cazul a) matricea U este

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{p}_n} \\ \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{p}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{p}_n} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{p}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{p}_n} \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Asadar condiția de simplecticitate (*) a matricii Jacobiene este satisfăcută și prin urmare transformarea a) este canonică.

Pentru a arăta că transformarea B) este canonică putem proceda în mod similar. Pentru exemplificare, să arătăm că transformarea este canonică folosind paranteza Poisson. Astfel, reamintim că o transformare $q = q(\bar{q}, \bar{p})$, $p = p(\bar{q}, \bar{p})$ este canonică dacă și numai dacă aceasta păstrează parantezele Poisson fundamentale, adică

$$\{q_i, q_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}$$

Să verificăm aceste condiții în cazul transformării B). Astfel, putem scrie

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} &= \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_\ell} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{p}_\ell} - \frac{\partial q_i}{\partial \bar{p}_\ell} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_\ell} \alpha_j \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{p}_\ell} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{p}_\ell} \alpha_j \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^n \alpha_i \alpha_j (\delta_{i\ell} \cdot 0 - 0 \cdot \delta_{j\ell}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} &= \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_\ell} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{p}_\ell} - \frac{\partial q_i}{\partial \bar{p}_\ell} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{q}_\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_\ell} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{p}_\ell} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{p}_\ell} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{q}_\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^n \alpha_i \cdot \frac{1}{\alpha_j} (\delta_{i\ell} \delta_{j\ell} - 0 \cdot 0) = \\ &= \alpha_i \frac{1}{\alpha_j} \delta_{ij} = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} &= \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial \bar{q}_\ell} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{p}_\ell} - \frac{\partial p_i}{\partial \bar{p}_\ell} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{q}_\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial \bar{q}_\ell} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{p}_\ell} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial \bar{p}_\ell} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{q}_\ell} \right) = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} (0 \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell} 0) = 0. \end{aligned}$$

Condițiile amintite sunt îndeplinite, deci transformarea B) este canonică.

Punctul c): termă

3. Arătați că următoarele transformări sunt canonice

$$a) \quad q_i = \sqrt{2\bar{p}_i} \sin \bar{q}_i, \quad p_i = \sqrt{2\bar{p}_i} \cos \bar{q}_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$$b) \quad q_i = \frac{\bar{q}_i}{\bar{Q}}, \quad p_i = \bar{Q} \bar{p}_i - 2\bar{P} \bar{q}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{unde}$$

$$\bar{Q} = \sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_\alpha \bar{q}_\alpha, \quad \bar{P} = \sum_{\alpha=1}^n \bar{p}_\alpha \bar{q}_\alpha.$$

Pentru a arăta că o transformare este canonică, putem proceda ca în exemplul 2. Astfel, putem verifica fie condiția de simplecticitate a matricii Jacobiene, fie condițiile referitoare la păstrarea parantezelor Poisson fundamentale.

Putem proceda și altfel, și anume să utilizăm teorema 1 enunțată în secțiunea: Funcții generatoare de transformări canonice. Această metodă constă în determinarea unei funcții S (dacă există) astfel încât să fie satisfăcută relația

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + dS.$$

În cazul a) avem:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{2\bar{p}_i} \cos \bar{q}_i d(\sqrt{2\bar{p}_i} \sin \bar{q}_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{2\bar{p}_i} \cos \bar{q}_i \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\bar{p}_i}} \sin \bar{q}_i d\bar{p}_i + \sqrt{2\bar{p}_i} \cos \bar{q}_i d\bar{q}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\cos \bar{q}_i \sin \bar{q}_i d\bar{p}_i + 2\bar{p}_i \cos^2 \bar{q}_i d\bar{q}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \sin(2\bar{q}_i) d\bar{p}_i + \bar{p}_i (1 + \cos(2\bar{q}_i)) d\bar{q}_i \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \sin(2\bar{q}_i) d\bar{p}_i + \bar{p}_i \cos(2\bar{q}_i) d\bar{q}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{p}_i}{2} \sin(2\bar{q}_i)\right).$$

Astfel, am determinat funcția $S(\bar{q}, \bar{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{p}_i}{2} \sin(2\bar{q}_i)$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + dS,$$

deci transformarea a) este canonică.

Punctul b): temă.

4. Se consideră oscilatorul n dimensional, a cărui hamiltonian are forma

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \quad \omega_i > 0, i = \overline{1, n}.$$

a) Utilizând transformările canonice de mai jos, determinați soluția sistemului canonic care caracterizează dinamica oscilatorului n dimensional.

$$i) q_i = \alpha_i \bar{q}_i, p_i = \frac{1}{\alpha_i} \bar{p}_i, \alpha_i \neq 0, i = \overline{1, n},$$

$$ii) \bar{q}_i = \sqrt{2I_i} \sin \varphi_i, \bar{p}_i = \sqrt{2I_i} \cos \varphi_i, i = \overline{1, n}.$$

b) Studiați sistemul canonic asociat oscilatorului n dimensional utilizând teorema lui Liouville.

a) Dacă utilizăm transformarea canonică i) atunci hamiltonianul în coordonatele $\bar{q}, \bar{p}$ are forma

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) \equiv H(q(\bar{q}, \bar{p}), p(\bar{q}, \bar{p})) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_i^2} \bar{p}_i^2 + \omega_i^2 \alpha_i^2 \bar{q}_i^2 \right).$$

Alegem constantele α_i astfel încât coeficienții termenilor $\bar{p}_i^2$ și $\bar{q}_i^2$ să fie egali, adică $\frac{1}{\alpha_i^2} = \omega_i^2 \alpha_i^2$. Astfel, luând

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}, \text{ hamiltonianul de mai sus devine}$$

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (\bar{p}_i^2 + \bar{q}_i^2).$$

În coordonatele (φ, I) , hamiltonianul are forma

$$K(\varphi, I) = \bar{H}(\bar{q}(\varphi, I), \bar{p}(\varphi, I)) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (2I_i \cos^2 \varphi_i + 2I_i \sin^2 \varphi_i) = \sum_{i=1}^n \omega_i I_i.$$

Întrucât hamiltonianul K depinde doar de impulsurile generalizate ecuațiile canonice se integrează simplu. Astfel, avem

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial K}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial K}{\partial \varphi_i} \quad i = \overline{1, n}$$

care devin

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i, \quad \dot{I}_i = 0.$$

Soluția are forma

$$\varphi_i(t) = \omega_i t + \varphi_i^0, \quad I_i(t) = I_i^0$$

unde φ_i^0 și I_i^0 sunt constante de integrare. Pe baza transformărilor ii) și i) găsim soluția sistemului canonic inițial

$$q_i = \sqrt{\frac{2I_i^0}{\omega_i}} \sin(\omega_i t + \varphi_i^0), \quad p_i = \sqrt{2\omega_i I_i^0} \cos(\omega_i t + \varphi_i^0), \quad i = \overline{1, n}.$$

b) Pentru a aplica teorema lui Liouville, avem nevoie de n integrale prime care formează un sistem involutiv. Să considerăm variabilele dimomice

$$\Phi_i = \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \quad i = \overline{1, n}$$

Anotăm că $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ verifică ipotezele din teorema lui Liouville, adică sunt integrale prime independente cu proprietatea că

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Verificăm faptul că Φ_i este integrala primă, adică $\{\Phi_i, H\} = 0$.

$$\{\Phi_i, H\} = \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_e} \frac{\partial H}{\partial p_e} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_e} \frac{\partial H}{\partial q_e} \right) = \omega_i^2 q_i p_i - p_i \omega_i^2 q_i = 0.$$

Verificăm faptul că $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ sunt independente, adică

$$\text{rang} \left(\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)}{\partial(q_1, q_2, \dots, p_1, p_n)} \right) = n.$$

Astfel, dacă $p_i \neq 0, i = \overline{1, n}$ ($p_i = 0$ este echivalent cu $\dot{q}_i = 0$, adică $q_i = \text{const}$ și deci oscilatorul nu se mișcă de-a lungul direcției q_i)

$$\det \left(\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right) = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{vmatrix} \neq 0$$

și deci $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ sunt independente.

Să verificăm faptul că $\{\phi_i, \phi_j\} = 0$:

$$\begin{aligned} \{\phi_i, \phi_j\} &= \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_\ell} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_\ell} - \frac{\partial \phi_i}{\partial p_\ell} \frac{\partial \phi_j}{\partial q_\ell} \right) = \omega_i^2 q_i \delta_{ij} p_j - \\ &\quad - p_i \omega_j^2 q_j \delta_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Construim funcția generatoare de transformări canonice

$$S(q, \phi) = \sum_{i=1}^n \int p_i dq_i, \text{ unde } p_i = \sqrt{2\phi_i - \omega_i^2 q_i^2}$$

și transformarea canonică definită implicit prin

$$q_i = \frac{\partial S}{\partial \phi_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Apădăm avem

$$\begin{aligned} q_i = \frac{\partial S}{\partial \phi_i} &= \int \frac{dq_i}{\sqrt{2\phi_i - \omega_i^2 q_i^2}} = \frac{1}{\omega_i} \int \frac{dq_i}{\sqrt{\frac{2\phi_i}{\omega_i^2} - q_i^2}} = \\ &= \frac{1}{\omega_i} \arcsin \frac{q_i \omega_i}{\sqrt{2\phi_i}}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

de unde deducem că transformarea canonică este descrisă de

$$q_i = \frac{\sqrt{2\phi_i}}{\omega_i} \sin(\omega_i q_i), \quad p_i = \sqrt{2\phi_i - \omega_i^2 q_i^2}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (*)$$

Hamiltonianul în noul sistem de coordonate (q, ϕ) este

$$H(q, \phi) = \sum_{i=1}^n \phi_i,$$

Ecuațiile canonice asociate sunt

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \phi_i}, \quad \dot{\phi}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

adică

$$\dot{q}_i = 1, \quad \dot{\phi}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

de unde deducem soluția generală $q_i(t) = t + q_i^0$, $\phi_i(t) = \phi_i^0$ unde $q_i^0, \phi_i^0, i = \overline{1, n}$ sunt constante. În baza transformării canonice (*) deducem soluția

$$q_i = \frac{\sqrt{2\phi_i^0}}{\omega_i} \sin(\omega_i t + \omega_i q_i^0), \quad p_i = \sqrt{2\phi_i^0} \cos(\omega_i t + \omega_i q_i^0).$$

Deci remarcăm ϕ_i^0 și q_i^0 astfel: $\phi_i^0 = \omega_i I_i^0$ și respectiv $q_i^0 = \frac{\varphi_i^0}{\omega_i}$ obținem oarecari soluție ca la punctul precedent.

5. Determinați variabilele unghi-actiune pentru oscilatorul armonnic unidimensional

$$H(q, p) = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2), \quad \omega > 0.$$

Se observă că punctul $(\tilde{q}, \tilde{p}) = (0, 0)$ este punct de minim pentru hamiltonianul H . Pentru $E > 0$, curba închisă $\gamma_E = \{(q, p) / H(q, p) = E\}$ reprezintă o elipsă de ecuație

$$p^2 + \omega^2 q^2 = 2E$$

Evident semiaxele elipsei sînt $\sqrt{2E}$ și $\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. Astfel, acțiunea sistemului este

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \sqrt{2E - \omega^2 q^2} dq = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2E} \frac{\sqrt{2E}}{\omega} = \frac{E}{\omega}.$$

În relația de mai sus s-a utilizat faptul că oria elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este egală cu πab .

Funcția generatoare de transformări canonice este

$$S(q, I) = \int \sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2} \, dq,$$

de unde deducem că unghiul φ asociat acțiunii I este dat de relația

$$\varphi = \frac{\partial S}{\partial I} = \int \frac{\omega \, dq}{\sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2}} \, dq = \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2I}{\omega}}}.$$

Așadar, avem

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \varphi, \quad p = \sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2}.$$

Evident hamiltonianul în sistemul de coordonate unghi-acțiune are forma $H(\varphi, I) = \omega I$.

6. (Tema). Utilizând transformările canonice de la problema 2, punctul a) și de la problema 4 punctul a) determinați soluția sistemului canonic asociat hamiltonianului

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x^2 + p_y^2 + x^2 - 2x + y^2 - 4y,$$

(se vede problema 1 din fișa de exerciții anterioară).