

Principiul lui Hamilton

În cele ce urmează vom analiza un principiu variațional care arată că funcțiile $z_i(t)$, $p_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ sunt soluții ale sistemului canonic dacă și numai dacă acestea formează un punct critic pentru o anumită funcțională. Cu alte cuvinte, a determina soluțiile sistemului canonic este echivalent cu a determina punctele staționare de funcțională. Înainte de a fixa cadrul general și a introduce funcționala numită acțiunea sistemului vom reaminti mai întâi lema fundamentală a calculului variațional.

Lemă 1 Fie $f: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul $[t_1, t_2]$.

(1)

Dacă
$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi(t) dt = 0$$

pentru orice $\varphi \in C_0^\infty([t_1, t_2])$ atunci

(2)

$$f(t) = 0, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Dem. Presupunem prin reducere la absurd că $\exists t_0 \in (t_1, t_2)$ astfel încât $f(t_0) > 0$. Deoarece f este continuă, rezultă că $\exists \varepsilon > 0$ astfel încât $f(t) > 0$, $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Considerăm o funcție $\varphi \in C_0^\infty([t_1, t_2])$ astfel încât $\varphi(t) > 0$, $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ și $\varphi(t) = 0$ în rest. Spre exemplu, putem considera funcția

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\varepsilon^2 - (t-t_0)^2}}, & t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

Èvident, pentru această alegere a funcției φ obținem

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) \varphi(t) dt = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} f(t) \varphi(t) dt > 0$$

ceea ce contrazice ipoteza lemei. Așadar presupunerea este falsă și deci are loc relația (2).

Fie $y = \{y_i = y_i(t)\}$, $i = \overline{1, \ell}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$ un ansamblu de funcții definite pe un interval real.

Notăm prin Y mulțimea tuturor elementelor y . Mulțimea Y poate fi organizată ca un spațiu liniar peste $\mathbb{R}$ în raport cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari definite astfel: Dacă $y = \{y_i(t)\}$, $z = \{z_i(t)\}$, $i = \overline{1, n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci

$$y + z = \{y_i(t) + z_i(t)\}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\alpha z = \{\alpha z_i(t)\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Fie $F\{\cdot\}$ o funcțională definită pe o submulțime $B \subset Y$, adică $F: B \rightarrow \mathbb{R}$. Fie y și $\tilde{y}$ două elemente cu proprietățile

$$y \text{ și } \tilde{y} \in Y, \quad (3)$$

$$y \text{ și } y + \omega \tilde{y} \in B \text{ pentru orice } \omega \in \mathbb{R}.$$

Def 1. Spunem că elementul y este punct staționar pentru funcționala $F\{\cdot\}$ și scriem

$$\delta F\{y\} = 0, \quad (4)$$

dacă

$$\delta_{\tilde{y}} F\{y\} := \left[\frac{d}{d\omega} F\{y + \omega \tilde{y}\} \right]_{\omega=0} = 0 \quad (5)$$

pentru orice $\tilde{y}$ care satisface (3).

Considerăm un sistem hamiltonian neautonom caracterizat de funcția $H = H(t, q, p)$. Presupunem că sistemul are n grade de libertate.

Ecuatiile canonice au forma

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (6)$$

Notăm prin $y = \{q_i(t), p_i(t)\}$, $i = \overline{1, n}$ și prin Y mulțimea elementelor y .

Putem formula următoarea teoremă care poartă numele de principiu lui Hamilton.

Teorema 1 (Principiul lui Hamilton). Fie $y = \{q_i(t), p_i(t)\} \quad i=\overline{1, n}$ un ansamblu de funcții de clasă $C^1([t_1, t_2])$ care satisfac condițiile

$$q_i(t_1) = q_i^1, \quad q_i(t_2) = q_i^2, \quad i=\overline{1, n} \quad (7)$$

unde q_i^1 și q_i^2 sunt constante reale date. Notăm prin B mulțimea tuturor elementelor y cu proprietățile de mai sus. Fie $J: B \rightarrow \mathbb{R}$ funcționale

$$J\{y\} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt. \quad (8)$$

Atunci

$$\delta J\{y\} = 0 \iff y \text{ este soluție a sistemului canonic (6)}. \quad (9)$$

Dem. Fie $\tilde{y} \in Y$ astfel încât $y + \omega \tilde{y} \in B, \forall \omega \in \mathbb{R}$. Deoarece $y + \omega \tilde{y} \in B$ și $y \in B$, în baza relațiilor (7) rezultă că $\tilde{q}_i, \tilde{p}_i \in C([t_1, t_2])$

și

$$\tilde{q}_i(t_1) = 0, \quad \tilde{q}_i(t_2) = 0, \quad i=\overline{1, n}.$$

Dacă ținem cont de relațiile (10) putem calcula

$$\begin{aligned} \delta_y J\{y\} &= \left[\frac{d}{d\omega} J\{y + \omega \tilde{y}\} \right]_{\omega=0} = \left\{ \frac{d}{d\omega} \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n (p_i + \omega \tilde{p}_i) (\dot{q}_i + \omega \dot{\tilde{q}}_i) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - H(t, q + \omega \tilde{q}, p + \omega \tilde{p}) \right) dt \right\}_{\omega=0} = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\omega} \left[\sum_{i=1}^n (p_i \dot{q}_i + \omega (\tilde{p}_i \dot{q}_i + p_i \dot{\tilde{q}}_i) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \omega^2 \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i) - H(t, q, p) - \sum_{i=1}^n \omega \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}(t, q, p) \tilde{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q, p) \tilde{p}_i \right) + O(\omega^2) \right] dt \right\}_{\omega=0} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^n (\tilde{p}_i \dot{q}_i + p_i \dot{\tilde{q}}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \tilde{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \tilde{p}_i) \right] dt = \\ &= \left[\sum_{i=1}^n p_i \tilde{q}_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \tilde{p}_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tilde{q}_i \right] \right\} dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\left(\dot{z}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \tilde{p}_i + \left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial z_i} \right) \tilde{z}_i \right] \right\} dt. \quad (11)$$

Să demonstrăm suficiența.

⇐ Presupunem că y este soluție a sistemului canonic (6) și să arătăm că $\delta F\{y\} = 0$.

Evident din (6) și (11) rezultă $\delta_{\tilde{y}} F\{y\} = 0$, $\forall \tilde{y}$ care satisface proprietățile (3). În baza definiției 1 rezultă $\delta F\{y\} = 0$.

Să demonstrăm necesitatea.

⇒ Presupunem că $\delta F\{y\} = 0$ și să arătăm că y este soluție a sistemului canonic (6).

Întucui $\delta F\{y\} = 0$ rezultă că $\delta_{\tilde{y}} F\{y\} = 0$ pentru orice $\tilde{y}$ care satisface (3). În particular putem alege $\tilde{y}$ de forma

$$\tilde{y} = \{ \tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2=0, \dots, \tilde{z}_n=0, \tilde{p}_1=0, \tilde{p}_2=0, \dots, \tilde{p}_n=0 \}$$

unde $z_1 \in C^\infty([t_1, t_2])$. Din (11) deducem

$$0 = \delta_{\tilde{y}} F\{y\} = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\dot{p}_1 - \frac{\partial H}{\partial z_1} \right) \tilde{z}_1 dt,$$

(12)

iar în baza lemei 1 obținem că y satisface ecuația

$$\dot{p}_1 = - \frac{\partial H}{\partial z_1}. \quad (13)$$

În mod cu totul analog putem proceda pentru a arăta că y satisface toate celelalte ecuații (6).

Obs 1°. Teorema poartă numele de principiul lui Hamilton deoarece aceasta stabilește echivalența ecuațiilor lui Hamilton cu faptul că F este staționară în punctul y .

2°. Funcționala F se mai numește și acțiunea sistemului pe intervalul $[t_1, t_2]$

3° Dacă ținem cont de faptul că funcția lui Hamilton este definită prin $H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$, unde L este funcția lui Lagrange atunci principiul lui Hamilton poate fi formulat, și astfel:

Fie $y = \{q_i(t)\}$, $i = \overline{1, n}$ un ansamblu de funcții de clasă $C^2([t_1, t_2])$ care satisfac condițiile

$$q_i(t_1) = q_i^1, \quad q_i(t_2) = q_i^2, \quad i = \overline{1, n} \quad (14)$$

Notăm prin B mulțimea elementelor y cu proprietățile de mai sus. Fie $J: B \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$J\{y\} = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt \quad (15)$$

unde L este funcția lui Lagrange. Atunci

$\delta J\{y\} = 0 \iff y$ este soluție a ecuațiilor lui Lagrange.

4° În cazul sistemelor autonome funcționale (8) se înlocuiește

prin

$$J^*\{y\} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) dt \quad (16)$$

aceasta deoarece $H = h(\text{const})$, și $\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} h dt \right) = 0$. Principiul poartă numele de principiul lui Maupertuis.

5° Condițiile suficiente de canonicitate (a se vedea teoremele 1 și 2 din secțiunea Funcții generatoare de transformări canonice) rezultă imediat din principiul lui Hamilton. Să demonstrăm teorema 2, care se enunță astfel:

Teorema 2. Dacă există o funcție $S = S(t, q, p)$ (sau $S = S(t, \bar{q}, \bar{p})$) și un scalar $\lambda \neq 0$ astfel încât

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - H dt \right) = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i - K dt + dS \quad (17)$$

atunci transformarea $q_i = q_i(t, \bar{q}, \bar{p})$, $p_i = p_i(t, \bar{q}, \bar{p})$ $i = \overline{1, n}$ păstrează forma ecuațiilor canonice cu funcția lui Hamilton K .

Dem. Din (17) obținem

$$\delta \left[\lambda \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt \right] = \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - K \right) dt + S \Big|_{t_1}^{t_2} \right]. \quad (18)$$

Deoarece $\{q_i(t), p_i(t)\}$ este soluție a sistemului canonic, conform principiului lui Hamilton rezultă că membrul stâng al relației (18) este nul. Așadar, rezultă că

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - K \right) dt = 0. \quad (19)$$

În baza principiului lui Hamilton rezultă că $\{\bar{q}_i(t), \bar{p}_i(t)\}$ este soluție a sistemului canonic

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial K}{\partial \bar{p}_i}, \quad \dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial K}{\partial \bar{q}_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (20)$$

adică transformarea păstrează forma ecuațiilor canonice.

Similar, pornind de la principalul lui Maupertuis se demonstrează Teorema 1 din secțiunea Funcții generatoare de transformări canonice.

Sisteme integrabile

Înainte de a intra în detalii, ar trebui să clarificăm ce se înțelege prin integrabilitate în cadrul sistemelor Hamiltoniene.

Astfel, în lora teoremei de existență și unicitate a soluției unui sistem de ecuații diferențiale ordinare putem afirma că un sistem Hamiltonian este integrabil dacă sunt îndeplinite câteva condiții minime de regularitate. Această informație este foarte utilă dacă dorim să determinăm orbita corespunzătoare unei condiții inițiale date, spre exemplu prin metode numerice.

Cu toate acestea trebuie să ținăm cont că teoreme în cursă de un caracter local, acestea asigură existența și unicitatea soluției într-un anumit interval de timp, însă nu furnizează informații privind comportarea globală a orbitelor.

În cadrul sistemelor Hamiltoniene căutăm integrabilitate sau o altă semnificație. Interpretarea tradițională implică conceptul de integrabilitate prin cuadraturi. Aceasta înseamnă că o soluție poate fi găsită printr-un număr finit de operații algebrice, care includ inversarea unor funcții și calculul unor integrale ale unor funcții cunoscute. În cadrul sistemelor Hamiltoniene, teorema lui Liouville este cel mai important rezultat în această direcție. Teorema lui Liouville afirmă că dacă sistemul Hamiltonian are suficiente integrale prime atunci există o transformare canonică în așa fel încât în noile coordonate funcția lui Hamilton să depindă doar de impulsurile generalizate, adică $H = H(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Evident, în acest caz, sistemul canonic este automat integrabil:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \Rightarrow p_i = \text{constant} \Rightarrow \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \text{const} \Rightarrow q_i = \text{const} \cdot t + \text{const}$$

Dacă pentru un sistem Hamiltonian are loc teorema lui Liouville atunci spunem că sistemul este integrabil în sens Liouville.

În ultimii ani s-a acordat o atenție sporită descrierii globale a comportării soluției, în particular existenței perioadelor de mișcare sau frecvențelor mișcării.

Astfel, unii autori impun condiția ca $q_1, q_2, \dots, q_n$ să fie unghiuri, sistemul de coordonate q_i, p_i fiind numit sistem unghiuri-actiuni. Se pune astfel problema dacă pentru un sistem integrabil în sens Liouville pot fi introduse variabile de tip unghiuri-actiuni. Răspunsul este furnizat de teorema lui Arnold-Jost.

Ținem să amintim încă câteva rezultate importante: teorema lui Liouville și teorema lui Arnold-Jost.

Sisteme involutive

Def. 1. Un sistem de n variabile dinamice $\{\phi_1(q, p), \phi_2(q, p), \dots, \phi_n(q, p)\}$ spunem că formează un sistem involutiv dacă funcțiile sunt independente, adică

$$\text{rang} \left(\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(q_1, q_n, p_1, p_n)} \right) = n$$

$$\{ \phi_i, \phi_j \} = 0, \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Lema 1. Un sistem involutiv conține maxim n funcții independente, unde n este numărul gradelor de libertate.

Dem. Facem mai întâi observația că paranteze Poisson dintre ϕ_1 și ϕ_2 se poate scrie în forma:

$$\{ \phi_1, \phi_2 \} = [\partial_x \phi_1, \partial_x \phi_2]$$

unde $[,]$ este produsul simplctic în $\mathbb{R}^{2n}$ ($[x, y] = \langle x, Jy \rangle$).

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \{ \phi_1, \phi_2 \} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial q_i} \frac{\partial \phi_2}{\partial p_i} - \frac{\partial \phi_1}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_2}{\partial q_i} \right) = \left\langle \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial q_i}, \frac{\partial \phi_1}{\partial p_i} \right), \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial q_i}, -\frac{\partial \phi_2}{\partial p_i} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, J \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right\rangle = [\partial_x \phi_1, \partial_x \phi_2] \end{aligned}$$

Pentru fiecare $x \in \mathbb{R}^n$ fixat putem considera gradientii $\partial_x \phi_1, \dots, \partial_x \phi_n$ și subspațiul $W = \text{span}(\partial_x \phi_1, \dots, \partial_x \phi_n) \subset \mathbb{R}^{2n}$. Subspațiul W este isotrop, adică $W \subset W^\perp$.

Într-adevăr, dacă $w \in W$ atunci $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}, i=1, \dots, n$ a. t. $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i \partial_x \phi_i$.

Fie $u \in W$ atunci $u = \sum_{i=1}^n \beta_i \partial_x \phi_i$ și rezultă că

$$[w, u] = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j [\partial_x \phi_i, \partial_x \phi_j] = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \{ \phi_i, \phi_j \} = 0.$$

Așadar $w \in W^\perp$ și deci $W \subset W^\perp$. Cum dimensiunea unui subspațiu isotrop nu poate depăși n , rezultă $n \leq n$.

Exemple

1. Fie $\mathcal{J}, \mathcal{K}$ o partiție a mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ ($\mathcal{J} \cup \mathcal{K} = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathcal{J} \cap \mathcal{K} = \emptyset$).
Atunci funcțiile $\{ \phi_j = q_j \}_{j \in \mathcal{J}} \cup \{ \phi_k = p_k \}_{k \in \mathcal{K}}$ formează un sistem involutiv.

2. Să considerăm spațiul fazelor $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ și să notăm prin x, y, z, p_x, p_y, p_z coordonatele și impulsurile generalizate. Fie

$$M_x = y p_z - z p_y, \quad M_y = z p_x - x p_z, \quad M_z = x p_y - y p_x$$

componentele momentului cinetic. Se poate verifica faptul că funcțiile M_x, M_y, M_z sunt independente, însă nu sunt în involuție.

Dacă V este potențialul forțelor, fie funcție

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r)$$

unde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. De asemenea, fie funcție

$$\Pi^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2$$

Se poate verifica faptul că M_z, Π^2, E formează un sistem involutiv.

Exemplul poate fi reformulat folosind coordonatele sfere. Spațiul fazelor este $(0, \infty) \times (0, \pi) \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3$ cu coordonatele sfere $r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi$. Funcțiile

$$J = p_\varphi, \quad \Pi^2 = p_r^2 + \frac{J^2}{\sin^2 \theta}, \quad E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(r)$$

formează un sistem involutiv

$$E = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] + V$$

3. Să considerăm ecuatorul n -dimensional descris de funcția lui Hamilton

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (x_i^2 + y_i^2)$$

Funcțiile

$$\phi_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2}, \quad \phi_2 = \frac{x_2^2 + y_2^2}{2}, \quad \dots \quad \phi_n = \frac{x_n^2 + y_n^2}{2}$$

formează un sistem involutiv.

Teorema lui Liouville

Propoziție. Fie $\{\phi_1(q, p), \phi_2(q, p), \dots, \phi_n(q, p)\}$ un sistem involutiv

Atunci există o transformare canonică

$$q = q(\alpha, \phi) \quad p = p(\alpha, \phi)$$

unde noile impulsuri sunt chiar $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$. Considerând ipoteza nerestrictivă:

$$(*) \quad \det \left(\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)}{\partial(p_1, p_2, \dots, p_n)} \right) \neq 0$$

funcția generatoare de transformări canonice poate fi construită prin cuadraturi, adică

$$S(q, \phi) = \int \sum_{j=1}^n p_j(q, \phi) dq_j$$

unde funcțiile $p_j(q, \phi)$, $j = \overline{1, n}$ sunt obținute inversând funcțiile $\phi_j(q, p)$, $j = \overline{1, n}$.

Dem. Având în vedere condiția

$$\text{rang} \left(\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(q_1, q_n, p_1, p_n)} \right) = n$$

ipoteza (*) nu este restrictivă deoarece primim o transformare canonică de tipul $Q_i = \bar{P}_i$, $P_i = -\bar{Q}_i$; $Q_i = \bar{Q}_i$, $P_i = \bar{P}_i$, $i = \overline{2, n}$, putem schimba întodeuna o coordonată canonică, să zicem q_1 , cu impulsul corespunzător p_1 și reciproc.

În baza condiției (*) putem inverse funcțiile $\phi_1, \dots, \phi_n$ în raport cu $p_1, \dots, p_n$.

Afel găsim $p_j = p_j(q, \phi)$, $j = \overline{1, n}$. Să considerăm forme diferențiale

$$\sum_{j=1}^n p_j(q, \phi) dq_j.$$

Vom arăta că aceasta este exactă, adică există o funcție S a. i.

$$dS = \sum_{j=1}^n p_j dq_j.$$

Pentru aceasta, vom folosi identitatea

$$\phi_j = \phi_j(q, p(q, \phi))$$

Avem

$$d\phi_j = \sum_k \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} dp_k \right) = \sum_k \left[\frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \left(\sum_e \frac{\partial p_k}{\partial q_e} dq_e + \frac{\partial p_k}{\partial \phi_e} d\phi_e \right) \right]$$

$$= \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k,e} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_e} dq_e + \sum_{k,e} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \phi_e} d\phi_e$$

de unde obținem

$$\sum_e \frac{\partial \phi_j}{\partial p_e} \frac{\partial p_e}{\partial q_k} = - \frac{\partial \phi_j}{\partial q_k}$$

$$\sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \phi_e} = \delta_{je}$$

Vom înlocui prima din cele două identități în relația $\{\phi_j, \phi_m\} = 0$.

$$\{\phi_j, \phi_m\} = \sum_{e=0}^n \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial q_e} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_e} - \frac{\partial \phi_j}{\partial p_e} \frac{\partial \phi_m}{\partial q_e} \right) =$$

$$= - \sum_{k,e=0}^n \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial p_e} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_e} - \frac{\partial \phi_j}{\partial p_e} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_e} \right) =$$

$$= - \sum_e \frac{\partial \phi_m}{\partial p_e} \sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_e} - \frac{\partial p_e}{\partial q_k} \right)$$

Cum $\det \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial p_k} \right) \neq 0$ atunci $\{\phi_j, \phi_m\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial p_k}{\partial q_e} = \frac{\partial p_e}{\partial q_k}$

De unde rezultă că $\sum_k p_k dq_k$ este o formă diferențială exactă. Astfel transformarea generată de funcția S și definită prin intermediul relațiilor

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad q = \frac{\partial S}{\partial \phi}$$

este canonică.

Teorema lui Liouville Fie $H = H(q, p)$ un sistem Hamiltonian autonom care posedă n integrale prime $\{\phi_1(q, p), \phi_2(q, p), \dots, \phi_n(q, p)\}$ ce formează un sistem involutiv. Atunci sistemul canonic este integrabil prin cuadraturi. Mai precis, se poate găsi o funcție generatoare $S = S(q, \phi)$ de transformări canonice $q = q(q, \phi)$, $p = p(q, \phi)$ aze încât funcția lui Hamilton în noul sistem să depindă doar de impulsurile generalizate ϕ , adică $H = H(\phi)$. Soluția are forme

$$\phi_i(t) = \phi_i^0 = \text{const}, \quad q_i(t) = q_i^0 + t \beta_i^0, \quad \alpha_i^0, \beta_i^0 \text{ const.}$$

Dem. Pe baza propoziției de mai sus, putem construi funcția $S = S(q, \phi)$, $S = \int \sum_i p_i(q, \phi) dq_i$ care generează o transformare canonică definită implicit de relațiile

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad q_i = \frac{\partial S}{\partial \phi_i}.$$

Deoarece ϕ_i sunt integrale prime și în același timp impulsuri generalizate în noul sistem, putem scrie:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = 0 \\ \dot{\phi}_i = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} \end{cases}$$

de unde rezultă că funcția lui Hamilton în noul sistem nu depinde de coordonatele q_i , adică $H = H(\phi)$. Altfel, din ecuațiile canonice găsim:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i = 0 \\ \dot{\alpha}_i = \frac{\partial H}{\partial \phi_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_i(t) = \phi_i^0 = \text{const} \\ \alpha_i(t) = \alpha_i^0 + t \frac{\partial H}{\partial \phi_i}(\phi_1^0, \dots, \phi_n^0) \end{cases}$$

Observații. Teorema lui Liouville furnizează un algoritm explicit de integrare a ecuațiilor canonice. Astfel, se porunc următoarele etape:

a) Se verifică condiția:

$$\det \left(\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right) \neq 0$$

se eventual se pot schimba prin transformări canonice perechi de coordonate generalizate pentru ca relația de mai sus să fie verificată.

b) Se construiește (prin cuadratură) funcția

$$S(q, \phi) = \int \sum_i p_i(q, \phi) dq_i$$

și transformarea canonică, definită implicit prin:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \phi_i}, \quad i=1, n;$$

c) Se determină noul Hamiltonian (funcția lui Hamilton în sistemul α_i, ϕ_i);

d) Se găsește soluția $\phi_i(t) = \phi_i^0$, $\alpha_i(t) = \alpha_i^0 + t \beta_i^0$;

e) Se inversează relațiile $\alpha_i = \frac{\partial S}{\partial \phi_i}$ și se determină $p_i = p_i(q_j, \phi_j)$, $q_i = q_i(q_j, \phi_j)$;

f) Soluția $p_i = p_i(t)$, $q_i = q_i(t)$ se obține înlocuind $\phi_i(t)$, $\alpha_i(t)$ în relațiile de la punctul e).

În ultimii ani s-a acordat o deosebită atenție sperită descrierii globale a comportării soluției, în particular existenței perioadelor de mișcare sau frecvențelor mișcării. Astfel unii autori impun condiția ca, pentru sisteme multiple periodice, $q_1, q_2, \dots, q_n$ să fie unghiuri, sistemul de coordonate canonice (q, p) fiind unghiuri-ocliari. Se pune astfel problema dacă pentru un sistem integrabil în sens Liouville pot fi

introduse variabile de tip unghiuri-acțiuni. Răspunsul este furnizat de teorema lui Arnold-Jost, pe care o enunțăm fără demonstrație. În schimb vom detalia modul de construcție a variabilelor unghiuri-acțiuni pentru sistemele cu un singur grad de libertate.

Teorema Arnold-Jost. Fie $H = H(q, p)$, $(q, p) \in \mathbb{T}^n$ un sistem hamiltonian care posedă un sistem involutiv de n integrale prime $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, adică sistemul canonic este integrabil în sens Liouville. Fie $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ o, și încât hipersuprafața definită de ecuațiile

$$\phi_1(q, p) = c_1, \quad \phi_2(q, p) = c_2, \quad \dots, \quad \phi_n(q, p) = c_n$$

admită o componentă M_c conexă și compactă. Atunci într-o vecinătate U a mulțimii M_c există un sistem de coordonate canonice unghiuri-acțiuni (φ, I)

$$q = q(\varphi, I), \quad p = p(\varphi, I), \quad \varphi \in \mathbb{T}^n, \quad I \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$$

unde $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$ este torul n dimensional, iar $\mathcal{C}$ este o mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$, astfel încât noul Hamiltonian depinde doar de $I_1, I_2, \dots, I_n$.

Obs 3°. Diferența dintre variabilele canonice (q, p) care apar în teorema lui Liouville și (φ, I) care sunt introduse în teorema de mai sus este că variabilele φ_i , $i = \overline{1, n}$ sunt unghiuri. Condiția de compactitate a mulțimii M_c este esențială; aceasta asigură existența perioadelor de mișcare.

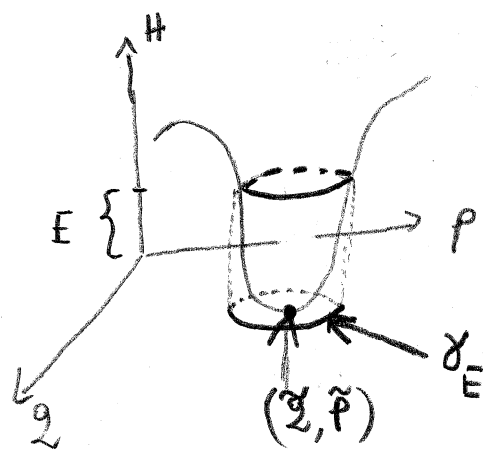
Sisteme hamiltoniene cu un singur grad de libertate

Construcția variabilelor unghi-actiune în cazul sistemelor cu un grad de libertate este simplă, însă instructivă. Evident sistemul este integrabil întrucât funcția H este integrală primă. Fie $(\tilde{q}, \tilde{p})$ un punct de minim pentru funcția H . Evident, întrucât $(\tilde{q}, \tilde{p})$ este punct de extrem pentru H , atunci $\frac{\partial H}{\partial q}(\tilde{q}, \tilde{p}) = 0$, $\frac{\partial H}{\partial p}(\tilde{q}, \tilde{p}) = 0$ și deci $q(t) = \tilde{q}$, $p(t) = \tilde{p}$ este soluție a sistemului canonice (punct de echilibru).

Atunci există un interval deschis $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$ astfel încât pentru $E \in \mathcal{E}$, mulțimea punctelor (q, p) care satisfac ecuația $H(q, p) = E$ să continue o curbă închisă, fie aceasta notată prin γ_E .

Evident, variind E în $\mathcal{E}$ obținem o familie de curbe închise care conțin în interior punctul $(\tilde{q}, \tilde{p})$. (vezi figura). Curbă γ_E poate fi descrisă printr-o variabilă $\varphi \in \mathbb{T}$, unde $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ este torul unidimensional. Periodicitatea mișcării poate fi descrisă simplu astfel: la fiecare incrementare a variabilei φ prin 2π se încheie o rotație.

Se pune problema dacă putem asocia variabilei φ o variabilă I , care să parametrizeze familia de curbe γ_E și (φ, I) să reprezinte un sistem de coordonate canonice.



Evident, fixând o curbă γ_E din familia de curbe $\{\gamma_E / E \in \mathcal{E}\}$, variabila I trebuie să fie constantă. Aceasta implică faptul că I este o integrală primă.

Așadar, căutăm o funcție $I(q, p)$ care este în involuție cu H (integrală primă) și care depinde în mod esențial de p , adică $\frac{\partial I}{\partial p} \neq 0$. Dacă o astfel de funcție există atunci, în baza teoremei lui Liouville, putem construi funcția $S(q, I)$, $S = \int p(q, I) dq$, unde funcția $p(q, I)$ se obține inversând funcția $I(q, p)$. Funcția S este generatoarea transformării canonice $q = q(\varphi, I)$, $p = p(\varphi, I)$. Evident φ este periodică prin construcție (reprezintă parametrul unei curbe închise). În plus, putem face în așa fel încât φ să fie periodică cu perioadă 2π . Deoarece (φ, I) sunt variabile canonice, iar γ_E este o curbă închisă, din relația (1) (sau teorema 1) reținem

$$\int_{\gamma_E} p dq = \int_{\gamma_E} I d\varphi \quad (6)$$

Cum I este constantă pe γ_E și $\int_{\gamma_E} d\varphi = 2\pi$, deducem că

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} p dq. \quad (7)$$

Obs. 4°. Această cantitate se numește acțiunea sistemului.

În aplicații practice, integrala se calculează după ce p se exprimă în funcție de E și q prin rezolvarea ecuației

$$H(q, p) = E$$

5°. Acțiunea I reprezintă aria mărginită de curba γ_E , împărțită
 prin 2π



$$h_{\gamma_E} = \int_{\gamma_E} p dz$$

6°. Ecuațiile canonice în noul sistem derivăm

$\dot{I} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega(I)$, unde $\omega(I) = \frac{dH}{dI}$,
 iar soluția are forma $I(t) = I_0$, $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ unde $\omega_0 = \omega(I_0)$,
 I_0, φ_0 - constante. Perioada mișcării pe torul I_0 este

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{dI}{dE}, \quad (8)$$

deoarece

$$1 = \frac{dH}{dE} = \frac{dH}{dI} \frac{dI}{dE} = \omega_0 \frac{dI}{dE}. \quad (9)$$