

Fisă de exerciții

1. Se consideră un punct material de masă $m = \frac{1}{2}$, obligat să se miște în plan pe dreapta $x+y=1$, sub acțiunea forței $\vec{F} = x\vec{i} + 2(1-y)\vec{j}$. Dacă la momentul inițial punctul material ocupă poziția $M(2, -1)$ și are viteza $\vec{v}(0) = \vec{i} - \vec{j}$, studiați mișcarea:

- utilizând principiile lui Newton;
- utilizând principiul lui D'Alembert;
- ecuațiile lui Lagrange.

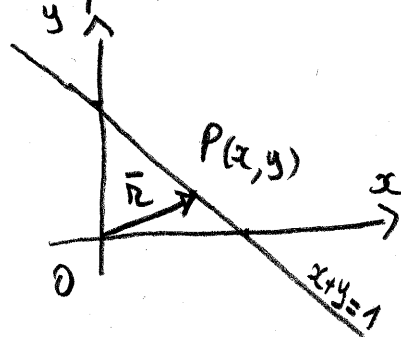
Rezolvare a) Punctul material are vectorul de poziție:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + (1-x)\vec{j}$$

Viteza și accelerația au forma:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \dot{x}\vec{i} - \dot{x}\vec{j},$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} - \ddot{x}\vec{j}.$$



Forța dată se poate rescrie în forma:

$$\vec{F} = x\vec{i} + 2x\vec{j}.$$

Forța de legătură este normală la dreapta $x+y=1$. Un vector normal la dreapta $x+y=1$ este $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Astfel, forța de legătură se poate scrie în forma

$$\vec{L} = \vec{N} = N \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}, \text{ unde } N \text{ este mărimea normală.}$$

Aplicând principiul lui Newton

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{L},$$

deducem, ținând cont de relațiile de mai sus că:

$$m(\ddot{x}\vec{i} - \ddot{x}\vec{j}) = x\vec{i} + 2x\vec{j} + \frac{N}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{N}{\sqrt{2}}\vec{j},$$

adică

$$\begin{cases} m\ddot{x} = x + \frac{N}{\sqrt{2}}, \\ -m\ddot{x} = 2x + \frac{N}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Acum ecuații, cu necunoscutele $x=x(t)$ și N , la care am condițiile inițiale

$$x(0)=2, \quad \dot{x}(0)=1.$$

Din ecuațiile de mai sus deducem

$$2m\ddot{x} + x = 0.$$

Dacă timem că $m = \frac{1}{2}$, rezolvând problema Cauchy obținută găsim soluția

$$x(t) = 2\cos t + \sin t.$$

Mărimea forței normale este:

$$N = m\ddot{x} - x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(2\cos t + \sin t).$$

b) Aplicăm principial lui D'Alembert

$(\vec{F} - m\vec{a}) \cdot \delta\vec{x} = 0, \quad \forall \delta\vec{x}$ care satisface ecuațiile legăturilor. În cazul nostru:

$$\delta\vec{x} = \delta x \vec{e}_1 + \delta y \vec{e}_2,$$

înșă utilizând ecuația legăturii

$$x+y=1$$

avem că

$$\delta x + \delta y = 0.$$

Atunci

$$\delta\vec{x} = \delta x \vec{e}_1 - \delta x \vec{e}_2.$$

Încercăm expresia forței $\vec{F}$ și accelerația în ecuația lui D'Alembert și Lagrange, deducem:

$$(\bar{x} + 2x\bar{y} - m\ddot{x}\bar{t} + m\ddot{x}\bar{y}) \cdot (\delta x\bar{t} - \delta x\bar{y}) = 0, \quad \forall \delta x$$

adică

$$(x - 2x - m\ddot{x} - m\ddot{x})\delta x = 0, \quad \forall \delta x.$$

Cum δx este o cantitate arbitrară, din relația de mai sus deducem ecuația

$$2m\ddot{x} + x = 0,$$

care coincide cu ecuația obținută la punctul a).

c) Pentru a aplica ecuațiile lui Lagrange, vom calcula mai întâi energia cinetică și forțele (în cazul nostru doar una) generalizate. Astfel, energia cinetică este:

$$E = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + (-\dot{x})^2) = m\dot{x}^2.$$

Forța generalizată are expresia

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial x} = (\bar{x} + 2x\bar{y}) \cdot (\bar{t} - \bar{y}) = x - 2x = -x.$$

Ecuația lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E}{\partial x} = Q_x,$$

devine

$$\frac{d}{dt}(2m\dot{x}) = -x.$$

Obținem, astfel aceeași ecuație ca în cazurile a) sau b)

2. Un punct material P_1 se mișcă fără frecare pe axa x , iar un al doilea punct P_2 , de aceeași masă m , este liber în spațiu. Știind că punctele se trag proporțional cu distanța dintre ele, studiați mișcarea: a) utilizând principiul lui D'Alembert; b) utilizând ecuațiile lui Lagrange.

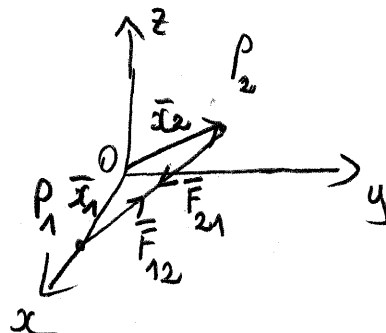
Rezolvare a) Sistemul mecanic are 4 grade de libertate, și așadar coordonatele carteziene $(x_1, 0, 0)$ și (x_2, y_2, z_2) ale celor două puncte materiale. Dacă introducem notățile:

$q_1 = x_1, q_2 = x_2, q_3 = y_2, q_4 = z_2$, atunci, vectorii de poziție, vectorii viteze și vectorii accelerație au forma

$$\vec{x}_1 = q_1 \vec{e}_1, \quad \vec{x}_2 = q_2 \vec{e}_1 + q_3 \vec{e}_2 + q_4 \vec{e}_3,$$

$$\vec{v}_1 = \dot{q}_1 \vec{e}_1, \quad \vec{v}_2 = \dot{q}_2 \vec{e}_1 + \dot{q}_3 \vec{e}_2 + \dot{q}_4 \vec{e}_3,$$

$$\vec{a}_1 = \ddot{q}_1 \vec{e}_1, \quad \vec{a}_2 = \ddot{q}_2 \vec{e}_1 + \ddot{q}_3 \vec{e}_2 + \ddot{q}_4 \vec{e}_3.$$



Notăm prin $\vec{F}_{12}$ forța cu care P_1 este atras de P_2 , iar prin $\vec{F}_{21}$ forța cu care P_2 este atras de P_1 . Utilizând principiul acțiunii și reacțiunii și ipotezele problemei, rezultă:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{\|\vec{P}_1 P_2\|}{\|\vec{P}_1 P_2\|^3} \vec{P}_1 P_2 = k \frac{\vec{P}_1 P_2}{\|\vec{P}_1 P_2\|^2} = k (\vec{P}_1 O + O P_2) =$$

$$= k (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = k [(q_2 - q_1) \vec{e}_1 + q_3 \vec{e}_2 + q_4 \vec{e}_3],$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = -k [(q_2 - q_1) \vec{e}_1 + q_3 \vec{e}_2 + q_4 \vec{e}_3]$$

unde scalarul $k > 0$ este cunoscut (reprezintă factorul de proporționalitate).

Astfel, forța dată core acționază asupra punctului P_s , $s=1,2$ este $\bar{F}_1 = \bar{F}_{12}$, $\bar{F}_2 = \bar{F}_{21}$.

Ecuația lui D'Alembert și Lagrange

$$\sum_{s=1}^2 (\bar{F}_s - m \bar{a}_s) \cdot \delta \bar{x}_s = 0, \quad \forall \delta \bar{x}_1, \delta \bar{x}_2$$

derivate, dacă ținem cont de expresiile forțelor și accelerațiilor:

$$\begin{aligned} & [k(q_2 - q_1)\bar{t} + kq_3\bar{j} + kq_4\bar{k} - m\ddot{q}_1\bar{t}] \cdot (\delta q_1\bar{t}) + \\ & [-k(q_2 - q_1)\bar{t} - kq_3\bar{j} - kq_4\bar{k} - m\ddot{q}_2\bar{t} - m\ddot{q}_3\bar{j} - m\ddot{q}_4\bar{k}] \cdot (\delta q_2\bar{t} + \\ & + \delta q_3\bar{j} + \delta q_4\bar{k}) = 0, \quad \forall \delta q_1, \delta q_2, \delta q_3. \end{aligned}$$

În expresia de mai sus s-a folosit faptul că

$$\delta \bar{x}_1 = \delta q_1 \bar{t}, \quad \delta \bar{x}_2 = \delta q_2 \bar{t} + \delta q_3 \bar{j} + \delta q_4 \bar{k}.$$

Ecuația lui D'Alembert și Lagrange derivate

$$\begin{aligned} & [k(q_2 - q_1) - m\ddot{q}_1] \delta q_1 + [-k(q_2 - q_1) - m\ddot{q}_2] \delta q_2 + \\ & + [-kq_3 - m\ddot{q}_3] \delta q_3 + [-kq_4 - m\ddot{q}_4] \delta q_4 = 0, \quad \forall \delta q_i, i=1,4. \end{aligned}$$

Cum $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta q_4$ pot fi aleși arbitrar, obținem ecuațiile:

$$\ddot{q}_1 - \omega^2(q_2 - q_1) = 0,$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2(q_2 - q_1) = 0,$$

$$\ddot{q}_3 + \omega^2 q_3 = 0,$$

$$\ddot{q}_4 + \omega^2 q_4 = 0,$$

unde am introdus notația $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

Aceste ecuații, la stăruim condiții inițiale de tipul

$$q_i(0) = q_i^0, \quad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_i^0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Adunând primele două ecuații obținem

$$\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0,$$

care prin integrare conduce la

$$q_1 + q_2 = C_1 t + C_2,$$

unde C_1 și C_2 se deduc din condițiile inițiale. Scărând primele două relații deducem ecuația

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0,$$

unde $z = q_2 - q_1$. Soluția acestei ecuații are forma

$$z = C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t,$$

unde C_3 și C_4 sunt constante. Ținând cont de relațiile de mai sus, obținem următoarea soluție generală a sistemului

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} [C_1 t + C_2 - C_3 \cos \omega t - C_4 \sin \omega t], \\ q_2 = \frac{1}{2} [C_1 t + C_2 + C_3 \cos \omega t + C_4 \sin \omega t], \\ q_3 = C_5 \cos \omega t + C_6 \sin \omega t, \\ q_4 = C_7 \cos \omega t + C_8 \sin \omega t, \end{cases}$$

unde $C_i, i = \overline{1,8}$ se determină din condițiile inițiale.

b) Calculăm energia cinetică și forțele generalizate. Astfel, energia cinetică are expresia

$$E = \frac{m \dot{v}_1^2}{2} + \frac{m \dot{v}_2^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2).$$

Forțele generalizate sunt

$$Q_1 = \sum_{\alpha=1}^2 \bar{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_1} = \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_1} + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_1} = k(q_2 - q_1),$$

$$Q_2 = \sum_{\alpha=1}^2 \bar{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_2} = \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_2} + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_2} = -k(q_2 - q_1),$$

$$Q_3 = \sum_{\alpha=1}^2 \bar{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_3} = \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_3} + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_3} = -k q_3,$$

$$Q_4 = \sum_{\alpha=1}^2 \bar{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_4} = \bar{F}_1 \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial q_4} + \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial q_4} = -k q_4.$$

Ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \quad i=1,4$$

derivăm

$$m \ddot{q}_1 - k(q_2 - q_1) = 0,$$

$$m \ddot{q}_2 + k(q_2 - q_1) = 0$$

$$m \ddot{q}_3 + k q_3 = 0,$$

$$m \ddot{q}_4 + k q_4 = 0.$$

Ținând cont de notația $\omega^2 = \frac{k}{m}$, deducem oalegri
ecuații ca în cazul a).

3. Un punct material de masă $m=1$ se mișcă pe dreapta variabilă $x+y=t+1$, sub acțiunea forței $\vec{F} = 2(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$. Utilizând principiul lui D'Alembert studiați mișcarea știind că la momentul inițial $t=0$, punctul ocupă poziția $A(1,0)$ și are viteza $\vec{v}(0) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

4. Studiați mișcarea a două puncte P_1, P_2 care se trag cu forțe mutuale de căror mărimi sunt proporționale cu masele punctelor și cu distanța dintre ele.