

Sisteme omoneme. Ecuațiile lui Lagrange

Spațiul configurațiilor. Coordonate generalizate

Considerăm un sistem mecanic format din N puncte materiale supus legăturilor integrale:

$$f_j(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N) = 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \quad n_1 < 3N, \quad (1)$$

unde funcțiile f_j sunt suficient de regulate. Presupunem că matricea:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_{n_1})}{\partial(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N)} \quad (2)$$

are rangul n_1 . În baza teoremei funcțiilor implicite n_1 din coordonatele (x_s, y_s, z_s) , $s = \overline{1, N}$ se pot exprima în funcție de celelalte $n = 3N - n_1$ pe care le notăm prin $q_1, q_2, \dots, q_n$. Apoi, putem scrie

$$x_s = x_s(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \quad y_s = y_s(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \quad z_s = z_s(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \quad (3)$$

unde $s = \overline{1, N}$.

Presupunem că funcțiile x_s, y_s, z_s din relațiile (3) sunt de clasă C^2 . Coordonatele $q_1, q_2, \dots, q_n$ se numesc coordonate generalizate sau coordonatele lui Lagrange. Mulțimea valorilor pe care aceste coordonate le pot parcurge formează spațiul configurațiilor sau spațiul lui Lagrange, notat în cele ce urmează prin Λ_n .

□ Exemplu: Determinați un set de coordonate generalizate și spațiul configurațiilor asociat în cazul unui punct material P supus legăturii:

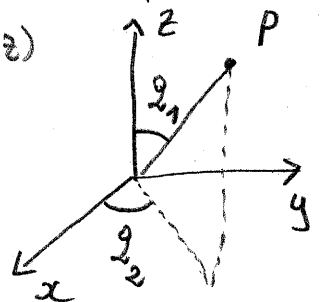
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4t^2.$$

În acest caz putem considera coordonatele sferice q_1, q_2 , unde q_1 este abatutudinea și q_2 longitudinea. Coordonatele carteziene (x, y, z) ale punctului P se obțin din relațiile:

$$x = 2t \sin q_1 \cos q_2, \quad y = 2t \sin q_1 \sin q_2, \quad z = 2t \cos q_1.$$

Spațiul lui Lagrange este $\Lambda_2 = [0^\circ, 180^\circ] \times [0^\circ, 360^\circ)$. □

(1)



□ Obs. 1° Unui punct din Λ_n îi corespunde prin relațiile (3) o poziție a sistemului mecanic în spațiul fizic și reciproc. Relațiile (3) stabilesc o corespondență biunivocă între o submulțime $\Delta \subset \Lambda_n$ și mulțimea pozițiilor posibile ale sistemului mecanic în spațiul fizic. Timpul t are rol de parametru.

2° Pentru $t \in [t_0, t_1)$, succesiunii de poziții în spațiul fizic îi corespunde o succesiune de puncte în spațiul Λ_n . □

O mișcare a sistemului mecanic este descrisă de relațiile

$$q_i = q_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_1). \quad (4)$$

Corespondența descrisă de relațiile (3) poate fi extinsă la toate elementele mișcării. Astfel, unei deplasări posibile $d\bar{x} = \{d\bar{x}_1, d\bar{x}_2, \dots, d\bar{x}_N\}$ în spațiul fizic, unde $d\bar{x}_s = \dot{\bar{x}}_s dt$, $s = \overline{1, N}$, îi corespunde deplasarea $dq = \{dq_1, dq_2, \dots, dq_n\}$ unde $dq_i = \dot{q}_i dt$, în spațiul Λ_n . Legătura dintre cele două deplasări este dată de următoarea relație:

$$d\bar{x}_s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t} dt, \quad (5)$$

de unde obținem

$$\bar{v}_s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial t}. \quad (6)$$

Relația (6) descrie relația dintre viteza posibilă $\bar{v} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_N\}$ a sistemului în spațiul fizic și viteza generalizată $\dot{q} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}$ în spațiul Λ_n .

Analog, putem spune că unei deplasări virtuale $\delta\bar{x} = \{\delta\bar{x}_1, \delta\bar{x}_2, \dots, \delta\bar{x}_N\}$ îi corespunde deplasarea virtuală $\delta q = \{\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n\}$. Are loc relația:

$$\delta\bar{x}_s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial q_i} \delta q_i, \quad s = \overline{1, N}. \quad (7)$$

Energia cinetică și lucrul mecanic în spațiul configurațiilor

Amintim că energia cinetică a sistemului mecanic considerat este

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{v}_{\alpha}^2. \quad (8)$$

Ținând cont de relația (6) rezultă

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t} \right) \dot{q}_i + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9)$$

Dacă introducem notațiile:

$$a_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_j}, \quad a_i = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t}, \quad a_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad E_1 = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i, \quad E_0 = a_0, \quad (11)$$

atunci energia cinetică în spațiul Λ_n poate fi scrisă în formă

$$E = E_2 + E_1 + E_0. \quad (12)$$

□ Obs. 1°. Funcțiile a_{ij} , a_i , a_0 depind de $t, q_1, q_2, \dots, q_n$, adică

$$a_{ij} = a_{ij}(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \quad a_i = a_i(t, q_1, q_2, \dots, q_n), \quad a_0 = a_0(t, q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Energia cinetică depinde de $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, adică

$$E = E(t, q, \dot{q}), \quad \text{unde } q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}, \quad \dot{q} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n\}.$$

Mai mult, din relația (12) rezultă că, în raport cu vitezele generalizate, energia cinetică este o sumă de forme, de gradul 2 E_2 , de gradul 1 E_1 și de gradul 0 E_0 .

(3)

2°. În cazul unui sistem mecanic scleronom energia cinetică se reduce la:

$$E = E_2. \quad (13)$$

3°. În raport cu vitezele generalizate $\dot{q} = \{ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n \}$, E_2 este o formă pătratică pozitiv definită, adică $E_2 \geq 0 \forall \dot{q}$ și $E_2 = 0 \Leftrightarrow \dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_n = 0$. Într-adevăr, din (10) și (11) deducem

$$E_2 = \frac{1}{2} \sum_{\Delta=1}^N m_{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial q_i} \dot{q}_i \right)^2 \geq 0. \quad (14)$$

Pe de altă parte, condiția $E_2 = 0$ este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0, \quad \Delta = \overline{1, N} \quad (15)$$

Sistemul de mai sus este un sistem liniar omogen cu $3N$ ecuații și n necunoscute ($\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$). Deoarece rangul matricii coeficienților este n (dacă nu ar fi așa, relațiile (3) nu ar mai redăta o corespondență biunivocă), rezultă că $\dot{q}_i = 0, i = \overline{1, n}$.

4°. Condiția de pozitivă definire a formei pătratice E_2 asigură faptul că:

$$\det(a_{ij}) \neq 0. \quad \square$$

Amintim că lucrul mecanic al forțelor active pentru orice deplasare virtuală este:

$$\delta L = \sum_{\Delta=1}^N \bar{F}_{\Delta} \cdot \delta \bar{x}_{\Delta}. \quad (17)$$

În baza relației (7), putem scrie:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\Delta=1}^N \bar{F}_{\Delta} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (18)$$

unde

$$Q_i = \sum_{\Delta=1}^N \bar{F}_{\Delta} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

reprezintă coordonatele forței generalizate.

Ecuațiile lui Lagrange

În cele ce urmează vom deduce ecuațiile de mișcare ale sistemului în spațiul configurațiilor. Vom utiliza principiul lui D'Alembert:

$$\sum_{\alpha=1}^N (\bar{F}_{\alpha} - m_{\alpha} \bar{a}_{\alpha}) \cdot \delta \bar{x}_{\alpha} = 0, \quad \forall \delta \bar{x}_{\alpha} \quad (19)$$

unde $\delta \bar{x}_{\alpha}$ satisface (7).

Utilizând relația (7), putem scrie

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{a}_{\alpha} \cdot \delta \bar{x}_{\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{a}_{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{a}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(m_{\alpha} \bar{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) - m_{\alpha} \bar{v}_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i. \end{aligned} \quad (20)$$

Dim relația (6), deducem

$$\frac{\partial \bar{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i}, \quad \alpha = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, n} \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \bar{x}_{\alpha}}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial \bar{v}_{\alpha}}{\partial q_i}, \quad \alpha = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (22)$$

Apoi, din (8), (20), (21) și (22) rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{a}_{\alpha} \cdot \delta \bar{x}_{\alpha} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \bar{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \bar{v}_{\alpha}}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} \right] \delta q_i. \end{aligned} \quad (23)$$

Dim (17), (18), (19) și (23) obținem

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} - Q_i \right] \delta q_i = 0, \quad \forall \delta q_i. \quad (24)$$

Cum δq_i sunt cantități arbitrare, din (24) deducem ecuațiile

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (25)$$

numite ecuațiile lui Lagrange. Aceste ecuații formează un sistem de ecuații diferențiale de ordinul al doilea în necunoscutele $q_i(t)$.

Într-adevăr, deoarece $E = E_2 + E_1 + E_0$, deducem:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j + a_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (26)$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_i} = A_i(t, q, \dot{q}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (27)$$

unde A_i sunt funcții care depind de t, q și $\dot{q}$. Din (25), (26) și (27)

obținem

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j = B_i(t, q, \dot{q}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (28)$$

unde B_i sunt funcții care depind de t, q și $\dot{q}$. Sistemul (28) reprezintă un sistem de tip Gromer în necunoscutele $\ddot{q}_j$. Pe baza relației (16), ecuațiile (28) pot fi scrise în formă normală

$$\ddot{q}_i = C_i(t, q, \dot{q}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (29)$$

unde C_i sunt funcții de t, q și $\dot{q}$. Acestor ecuații le asociem condițiile inițiale de forma:

$$q_i(t_0) = q_i^0, \quad \dot{q}_i(t_0) = \dot{q}_i^0, \quad i = \overline{1, n} \quad (30)$$

unde q_i^0 și $\dot{q}_i^0$ sunt constante date.

Invarianța ecuațiilor lui Lagrange

Ecuațiile lui Lagrange (24) au fost deduse relativ la coordonatele generalizate q , introduse prin aplicarea teoremei funcțiilor implicite ecuațiilor (1). Coordonatele generalizate q pot fi alese într-o înfățișare de moduri. Se pune problema dacă forma ecuațiilor lui Lagrange rămâne aceeași prin degerarea unor altele coordonate generalizate. Vom arăta că ecuațiile lui Lagrange nu depind de degerarea coordonatelor generalizate.

Presupunem că există o corespondență biunivocă între coordonatele q și $\tilde{q}$, adică

$$q_i = q_i(t, \tilde{q}), \quad i = \overline{1, n} \quad (31)$$

unde funcțiile q_i sunt de clasă C_2 care satisfac condiția

$$\det \left(\frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_j} \right) \neq 0. \quad (32)$$

Presupunem că în sistemul de coordonate q au loc ecuațiile lui Lagrange (25).

În sistemul de coordonate $\tilde{q}$ energia cinetică are forma

$$\tilde{E} = E(t, q(t, \tilde{q}), \dot{q}(t, \tilde{q}, \dot{\tilde{q}})) \quad (33)$$

Se pune problema dacă

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{q}_i} = \tilde{Q}_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (34)$$

unde

$$\tilde{Q}_i = \sum_{\alpha=1}^N \bar{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \bar{x}_\alpha}{\partial \tilde{q}_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (35)$$

Din relația (31) rezultă

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_j} \dot{\tilde{q}}_j, \quad i = \overline{1, n}, \quad (36)$$

de unde obținem

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\tilde{q}}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_j}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \tilde{q}_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \tilde{q}_j} \right), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (38)$$

Utilizând relațiile (31), (33), (35), (37) și (38) avem

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial E}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) \right], \quad (39)$$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}, \quad (40)$$

$$\tilde{Q}_i = \sum_{\Delta=1}^N \bar{F}_{\Delta} \cdot \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \sum_{\Delta=1}^N \bar{F}_{\Delta} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{x}_{\Delta}}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) = \sum_{j=1}^n Q_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}. \quad (41)$$

Dim (39), (40) și (41) obținem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) - \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{q}_i} - \tilde{Q}_i &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial E}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} - \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right) - Q_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} - Q_j \right] \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}. \end{aligned} \quad (42)$$

Condiția (32) și relația (42) demonstrează faptul că dacă sunt satisfăcute ecuațiile lui Lagrange în unul din sistemele de coordonate generalizate atunci sunt satisfăcute și în celălalt sistem de coordonate.

Etapile de rezolvare ale unei probleme utilizând ecuațiile lui Lagrange sunt următoarele:

- 1) Se stabilește numărul gradelor de libertate și coordonatele lui Lagrange;
- 2) Se determină legătura dintre coordonatele carteziene și coordonatele generalizate
 $\bar{x}_{\Delta} = \bar{x}_{\Delta}(t, \tilde{q}), \quad \Delta = \overline{1, N}.$
- 3) Se calculează energia cinetică și forțele generalizate.
- 4) Se aplică ecuațiile lui Lagrange.