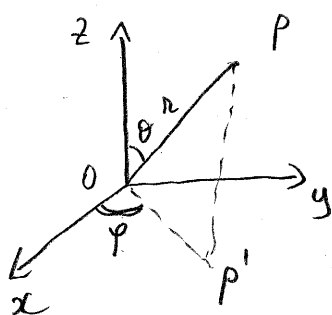


Fisa de exercitii. Mecanica Hamilton

1. Determinați funcția lui Hamilton pentru un sistem mecanic format dintr-un singur punct material aflat într-un câmp potențial, folosind coordonate sferice.

Deoarece punctul material se află într-un câmp potențial (sau conservativ) forța dată $\vec{F}$ admite un potențial V , care este presupus a fi cunoscut. Să notăm prin (r, θ, φ) coordonatele sferice ale punctului P , unde r este mărimea vectorului, θ colatitudinea, iar φ longitudinea.



Vectorul de poziție al punctului P este:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + r \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + r \cos \theta \vec{k},$$

unde $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Vectorul viteză are forma:

$$\vec{v} = (\dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \vec{i} + (\dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \vec{j} + (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \vec{k}.$$

Energia cinetică este:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2).$$

Funcția lui Lagrange $L = L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ are forma

$$L = E - V = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - V(r),$$

de unde deducem impulsurile generalizate

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta.$$

Funcția lui Hamilton $H = H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi)$ se obține astfel

$$H = p_r \hat{r} + p_\theta \hat{\theta} + p_\varphi \hat{\varphi} - \hat{L} = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r).$$

Spațiul fazelor este $[0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}^3$.

(1)

2. Arătați că următoarele transformări sunt canonice:

a) $q_i = \bar{q}_i + a_i$, $p_i = \bar{p}_i + b_i$, a_i, b_i constante, $i = \overline{1, n}$.

b) $q_i = \alpha_i \bar{q}_i$, $p_i = \frac{1}{\alpha_i} \bar{p}_i$, $\alpha_i \neq 0$, α_i constante, $i = \overline{1, n}$.

c) $q_i = \bar{p}_i$, $p_i = -\bar{q}_i$, $i = \overline{1, n}$.

Avem mai multe modalități de a verifica că o anumită transformare de coordonate este canonică. Să utilizăm pentru cazul a) condiția de simplecticitate a matricii Jacobiene. Reamintim faptul că o transformare este canonică dacă și numai dacă

(*)

$$U^T J U = J$$

unde $U = \frac{\partial (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)}$, iar $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

În cazul a) matricea U este

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial \bar{p}_n} \\ \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial q_2}{\partial \bar{p}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_n}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial q_n}{\partial \bar{p}_n} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial \bar{p}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n}{\partial \bar{q}_1} & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{q}_2} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{q}_n} & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{p}_1} & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{p}_2} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial \bar{p}_n} \end{pmatrix} = I_{2n}$$

Așadar condiția de simplecticitate (*) a matricii Jacobiene este satisfăcută și prin urmare transformarea a) este canonică.

Pentru a arăta că transformarea b) este canonică putem proceda în mod similar. Pentru exemplificare, să arătăm că transformarea este canonică folosind paranteza Poisson. Astfel, reamintim că o transformare $q = q(\bar{q}, \bar{p})$, $p = p(\bar{q}, \bar{p})$ este canonică dacă și numai dacă aceasta păstrează parantezele Poisson fundamentale, adică

$$\{q_i, q_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = 0, \quad \{q_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}$$

Să verificăm aceste condiții în cazul transformării b). Astfel, putem scrie

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} &= \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_e} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{p}_e} - \frac{\partial q_i}{\partial \bar{p}_e} \frac{\partial q_j}{\partial \bar{q}_e} \right) = \sum_{e=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_e} \alpha_j \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{p}_e} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{p}_e} \alpha_j \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_e} \right) = \sum_{e=1}^n \alpha_i \alpha_j (\delta_{ie} \cdot 0 - 0 \cdot \delta_{je}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} &= \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial \bar{q}_e} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{p}_e} - \frac{\partial q_i}{\partial \bar{p}_e} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{q}_e} \right) = \sum_{e=1}^n \left(\alpha_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_e} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{p}_e} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_i \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{p}_e} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{q}_e} \right) = \sum_{e=1}^n \alpha_i \cdot \frac{1}{\alpha_j} (\delta_{ie} \delta_{je} - 0 \cdot 0) = \\ &= \alpha_i \frac{1}{\alpha_j} \delta_{ij} = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} &= \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial p_i}{\partial \bar{q}_e} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{p}_e} - \frac{\partial p_i}{\partial \bar{p}_e} \frac{\partial p_j}{\partial \bar{q}_e} \right) = \sum_{e=1}^n \left(\frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial \bar{q}_e} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{p}_e} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial \bar{p}_e} \frac{1}{\alpha_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial \bar{q}_e} \right) = \sum_{e=1}^n \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} (0 \delta_{je} - \delta_{ie} 0) = 0. \end{aligned}$$

Condițiile amintite sunt îndeplinite, deci transformarea b) este canonică.

Punctul c): temă

3. Arătați că următoarele transformări sunt canonice

$$a) \quad q_i = \sqrt{2\bar{p}_i} \sin \bar{q}_i, \quad p_i = \sqrt{2\bar{p}_i} \cos \bar{q}_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$$b) \quad q_i = \frac{\bar{q}_i}{\bar{Q}}, \quad p_i = \bar{Q} \bar{p}_i - 2\bar{P} \bar{q}_i, \quad i = \overline{1, n}, \text{ unde}$$

$$\bar{Q} = \sum_{\alpha=1}^n \bar{q}_\alpha \bar{q}_\alpha, \quad \bar{P} = \sum_{\alpha=1}^n \bar{p}_\alpha \bar{q}_\alpha.$$

Pentru a arăta că o transformare este canonică, putem proceda ca în exemplul 2. Altfel, putem verifica fie condiția de simplecticitate a matricii Jacobiene, fie condițiile referitoare la păstrarea parantezelor Poisson fundamentale.

Putem proceda și altfel, și anume să utilizăm teorema 1 enunțată în secțiunea: Funcții generatoare de transformări canonice. Aceasta metodă constă în determinarea unei funcții S (dacă există) astfel încât să fie satisfăcută relația

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + dS.$$

În cazul a) avem:

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{2\bar{p}_i} \cos \bar{q}_i d(\sqrt{2\bar{p}_i} \sin \bar{q}_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{2\bar{p}_i} \cos \bar{q}_i \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\bar{p}_i}} \sin \bar{q}_i d\bar{p}_i + \sqrt{2\bar{p}_i} \cos \bar{q}_i d\bar{q}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\cos \bar{q}_i \sin \bar{q}_i d\bar{p}_i + 2\bar{p}_i \cos^2 \bar{q}_i d\bar{q}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \sin(2\bar{q}_i) d\bar{p}_i + \bar{p}_i (1 + \cos(2\bar{q}_i)) d\bar{q}_i \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \sin(2\bar{q}_i) d\bar{p}_i + \bar{p}_i \cos(2\bar{q}_i) d\bar{q}_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\bar{p}_i}{2} \sin(2\bar{q}_i)\right).$$

Astfel, am determinat funcția $S(\bar{q}, \bar{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{p}_i}{2} \sin(2\bar{q}_i)$
astfel încât

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + dS,$$

deci transformarea a) este canonică.

Punctul b): temă.

4. Se consideră oscilatorul n dimensional, a cărui hamiltonian are forma

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \quad \omega_i > 0, i = \overline{1, n}.$$

a) Utilizând transformările canonice de mai jos, determinați soluția sistemului canonic care caracterizează dinamica oscilatorului n dimensional.

$$i) q_i = d_i \bar{q}_i, p_i = \frac{1}{d_i} \bar{p}_i, d_i \neq 0, i = \overline{1, n},$$

$$ii) \bar{q}_i = \sqrt{2I_i} \sin \varphi_i, \bar{p}_i = \sqrt{2I_i} \cos \varphi_i, i = \overline{1, n}.$$

b) Studiați sistemul canonic asociat oscilatorului n dimensional utilizând teorema lui Liouville.

a) Dacă utilizăm transformarea canonică i) atunci hamiltonianul în coordonatele $\bar{q}, \bar{p}$ are forma

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) \equiv H(q(\bar{q}, \bar{p}), p(\bar{q}, \bar{p})) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d_i^2} \bar{p}_i^2 + \omega_i^2 d_i^2 \bar{q}_i^2 \right).$$

Alegem constantele d_i astfel încât coeficienții termenilor $\bar{p}_i^2$ și $\bar{q}_i^2$ să fie egali, adică $\frac{1}{d_i^2} = \omega_i^2 d_i^2$. Astfel, luând

$$d_i = \frac{1}{\sqrt{\omega_i}}, \text{ hamiltonianul de mai sus devine}$$

$$\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (\bar{p}_i^2 + \bar{q}_i^2).$$

În coordonatele (φ, I) , hamiltonianul are forma

$$K(\varphi, I) = \bar{H}(\bar{q}(\varphi, I), \bar{p}(\varphi, I)) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (2I_i \cos^2 \varphi_i + 2I_i \sin^2 \varphi_i) = \sum_{i=1}^n \omega_i I_i.$$

Întrucât hamiltonianul K depinde doar de impulsurile generalizate ecuațiile canonice se integrează simplu. Astfel, avem

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial K}{\partial I_i}, \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial K}{\partial \varphi_i} \quad i = \overline{1, n}$$

care devin

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i, \quad \dot{I}_i = 0.$$

Soluția are forma

$$\varphi_i(t) = \omega_i t + \varphi_i^0, \quad I_i(t) = I_i^0$$

unde φ_i^0 și I_i^0 sunt constante de integrare. Pe baza transformărilor

ii) și i) găsim soluția sistemului canonic inițial

$$q_i = \sqrt{\frac{2I_i^0}{\omega_i}} \sin(\omega_i t + \varphi_i^0), \quad p_i = \sqrt{2\omega_i I_i^0} \cos(\omega_i t + \varphi_i^0), \quad i = \overline{1, n}.$$

b) Pentru a aplica teorema lui Liouville, avem nevoie de n integrale prime care formează un sistem involutiv. Să considerăm variabilele dimorfice

$$\Phi_i = \frac{1}{2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2), \quad i = \overline{1, n}$$

Anotăm că $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n\}$ verifică ipotezele din teorema lui Liouville, adică sunt integrale prime independente cu proprietatea că

$$\{\Phi_i, \Phi_j\} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Verificăm faptul că Φ_i este integrală primă, adică $\{\Phi_i, H\} = 0$.

$$\{\Phi_i, H\} = \sum_{e=1}^n \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial q_e} \frac{\partial H}{\partial p_e} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial p_e} \frac{\partial H}{\partial q_e} \right) = \omega_i^2 q_i p_i - p_i \omega_i^2 q_i = 0.$$

Verificăm faptul că $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ sunt independente, adică

$$\text{rang} \left(\frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)}{\partial(q_1, q_2, \dots, q_n)} \right) = n.$$

Astfel, dacă $p_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$ ($p_i = 0$ este echivalent cu $\dot{q}_i = 0$, adică $q_i = \text{const}$ și deci oscilatorul nu se mișcă de-a lungul direcției q_i)

$$\det \left(\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \right) = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{vmatrix} \neq 0$$

și deci $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ sunt independente.

Să verificăm faptul că $\{\phi_i, \phi_j\} = 0$:

$$\begin{aligned} \{\phi_i, \phi_j\} &= \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial q_\ell} \frac{\partial \phi_j}{\partial p_\ell} - \frac{\partial \phi_i}{\partial p_\ell} \frac{\partial \phi_j}{\partial q_\ell} \right) = \omega_i^2 q_i \delta_{ij} p_j - \\ &\quad - p_i \omega_j^2 q_j \delta_{ij} = 0. \end{aligned}$$

Construim funcția generatoare de transformări canonice

$$S(q, \phi) = \sum_{i=1}^n \int p_i dq_i, \text{ unde } p_i = \sqrt{2\phi_i - \omega_i^2 q_i^2}$$

și transformarea canonică definită implicit prin

$$q_i = \frac{\partial S}{\partial \phi_i}, \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Apădăm avem

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{\partial S}{\partial \phi_i} = \int \frac{dq_i}{\sqrt{2\phi_i - \omega_i^2 q_i^2}} = \frac{1}{\omega_i} \int \frac{dq_i}{\sqrt{\frac{2\phi_i}{\omega_i^2} - q_i^2}} = \\ &= \frac{1}{\omega_i} \arcsin \frac{q_i \omega_i}{\sqrt{2\phi_i}}, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

de unde deducem că transformarea canonică este descrisă de

$$q_i = \frac{\sqrt{2\phi_i}}{\omega_i} \sin(\omega_i q_i), \quad p_i = \sqrt{2\phi_i - \omega_i^2 q_i^2}, \quad i = \overline{1, n}. (*)$$

Hamiltonianul în noul sistem de coordonate (q, p) este

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \phi_i,$$

Ecuațiile canonice asociate sunt

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

adică

$$\dot{q}_i = 1, \quad \dot{p}_i = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

de unde deducem soluția generală $q_i(t) = t + q_i^0$, $p_i(t) = p_i^0$ unde q_i^0 , p_i^0 , $i = \overline{1, n}$ sunt constante. În baza transformării canonice (*) deducem soluția

$$q_i = \frac{\sqrt{2\phi_i^0}}{\omega_i} \sin(\omega_i t + \omega_i q_i^0), \quad p_i = \sqrt{2\phi_i^0} \cos(\omega_i t + \omega_i q_i^0).$$

Deci renotăm ϕ_i^0 și q_i^0 astfel: $\phi_i^0 = \omega_i I_i^0$ și respectiv $q_i^0 = \frac{\varphi_i^0}{\omega_i}$ obținem ocazi soluție ca la punctul precedent.

5. Determinați variabilele unghi-impuls pentru oscilatorul armonic unidimensional

$$H(q, p) = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2), \quad \omega > 0.$$

Se observă că punctul $(\tilde{q}, \tilde{p}) = (0, 0)$ este punct de minim pentru Hamiltonianul H . Pentru $E > 0$, curba închisă $\gamma_E = \{(q, p) / H(q, p) = E\}$ reprezintă o elipsă de ecuație

$$p^2 + \omega^2 q^2 = 2E$$

Evident semiaxele elipsei sînt $\sqrt{2E}$ și $\frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. Astfel, acțiunea sistemului este

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} \sqrt{2E - \omega^2 q^2} dq = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2E} \frac{\sqrt{2E}}{\omega} = \frac{E}{\omega}.$$

(8)

În relația de mai sus s-a utilizat faptul că aria elipsei de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este egală cu πab .

Funcția generatoare de transformări canonice este

$$S(q, I) = \int \sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2} \, dq,$$

de unde deducem că unghiul φ asociat acțiunii I este dat de relația

$$\varphi = \frac{\partial S}{\partial I} = \int \frac{\omega \, dq}{\sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2}} \, dq = \arcsin \frac{q}{\sqrt{\frac{2I}{\omega}}}.$$

Așadar, avem

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}} \sin \varphi, \quad p = \sqrt{2\omega I - \omega^2 q^2}.$$

Evident hamiltonianul în sistemul de coordonate unghi-acțiune are forma $H(\varphi, I) = \omega I$.

6. (Tema). Utilizând transformările canonice de la problema 2, punctul a) și de la problema 4 punctul a) determinați soluția sistemului canonic asociat hamiltonianului

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x^2 + p_y^2 + x^2 - 2x + y^2 - 4y,$$

(se vede problema 1 din fișa de exerciții anterioară).