

## Funcții generatoare de transformări canonice

Admitem fără demonstrație următoarea teoremă care ne furnizează o condiție suficientă de canonicitate.

Teorema 1. Dacă există o funcție  $S = S(q, p)$  (sau  $S = S(\bar{q}, \bar{p})$ ) așa încât să fie satisfăcută relația

$$\sum_{i=1}^n p_i dq_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i + dS, \quad (1)$$

atunci transformarea de coordonate  $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$ ,  $p_i = p_i(\bar{q}, \bar{p})$ ,  $i = \overline{1, n}$  este canonică.

Obs 1°. Funcția  $S$  se numește funcție generatoare de transformări canonice. În contextul transformărilor canonice libere (definite mai jos), această funcție permite construirea transformărilor canonice.

Def. 1 O transformare canonică  $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$ ,  $p_i = p_i(\bar{q}, \bar{p})$ ,  $i = \overline{1, n}$  pentru care relațiile  $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$ ,  $i = \overline{1, n}$  pot fi inversate local în raport cu  $\bar{p}$ , adică este satisfăcută relația

$$\det \left( \frac{\partial (q_1, q_2, \dots, q_n)}{\partial (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)} \right) \neq 0, \quad (2)$$

se numește transformare canonică liberă.

Obs 2°. Așa cum rezultă din teorema 1, dacă avem o transformare canonică generată de funcția generatoare  $S$ , atunci aceasta din urmă depinde de coordonatele canonice  $q$  și  $p$  (sau  $\bar{q}, \bar{p}$ ). Dacă în plus transformarea canonică este liberă atunci inversând relațiile  $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$ ,  $i = \overline{1, n}$  în raport cu  $\bar{p}$ , deducem că  $S$  poate fi scrisă ca o funcție de  $q$  și  $\bar{q}$ , adică  $S = S(q, \bar{q})$ .

Reciproc, dacă  $S = S(q, \bar{q})$  atunci putem determina o transformare canonică liberă ca în teorema.

Teorema 2. Dacă  $S = S(z, \bar{z})$  este o funcție de clasă  $C^2$  cu proprietatea

$$\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right) \neq 0,$$

(3)

atunci transformarea definită de relațiile

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial z_i}(z, \bar{z}), \quad \bar{p}_i = -\frac{\partial S}{\partial \bar{z}_i}(z, \bar{z}), \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

definieste o transformare canonică liberă.

Dem. Având în vedere relația (3), rezultă pe baza teoremei funcțiilor implicite că ecuațiile  $\bar{p}_i = -\frac{\partial S}{\partial \bar{z}_i}(z, \bar{z}), i = \overline{1, n}$  pot fi rezolvate (inversate) local în raport cu variabilele  $z$ , adică obținem  $z_i = z_i(\bar{z}, \bar{p}), i = \overline{1, n}$ . În plus, este satisfăcută

condiția  $\det \left( \frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)} \right) \neq 0$ , deoarece matricea  $\frac{\partial(z_1, z_2, \dots, z_n)}{\partial(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n)}$

este inversa matricei  $\left( \frac{\partial^2 S}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)$ . Înlocuind  $z_i = z_i(\bar{z}, \bar{p}), i = \overline{1, n}$

în relațiile  $p_i = \frac{\partial S}{\partial z_i}(z, \bar{z}), i = \overline{1, n}$ , obținem  $p_i = p_i(\bar{z}, \bar{p}), i = \overline{1, n}$ .

Diferențiind funcția  $S = S(z, \bar{z})$ , deducem, pe baza relațiilor (4),

$$dS = \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial z_i} dz_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial S}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i = \sum_{i=1}^n p_i dz_i - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{z}_i. \quad (5)$$

Aplicând teorema 1, obținem că transformarea  $z_i = z_i(\bar{z}, \bar{p}), p_i = p_i(\bar{z}, \bar{p})$  este transformare canonică liberă.

Obs. 3°. Multimea transformărilor canonice libere poate fi definită în 4 moduri distincte. Astfel, în locul relației (2)

putem avea condițiile  $\det \left( \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)} \right) \neq 0, \det \left( \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)} \right) \neq 0, \det \left( \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)} \right) \neq 0$ .

Funcția  $S$  poate fi privită ca funcție de  $S(q, \bar{q})$ ,  $S(q, \bar{p})$ ,  $S(p, \bar{q})$ ,  $S(p, \bar{p})$ . În mod analog, putem demonstra teorema de mai jos (și încă două teoreme similare).

Teorema 3. Dacă  $S = S(q, \bar{p})$  este o funcție de clasă  $C^2$  cu proprietatea

$$\det \left( \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \bar{p}_j} \right) \neq 0 \quad (6)$$

dunci transformarea definită de relațiile

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \bar{q}_i = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

defineste o transformare canonică liberă.

Dem. La fel ca în teorema 2 se arată că în baza condiției (6), relațiile (7) definesc o schimbare de coordonate  $q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p})$ ,  $p_i = p_i(\bar{q}, \bar{p})$ ,  $i = \overline{1, n}$  cu proprietatea  $\det \left( \frac{\partial(q_1, \dots, q_n)}{\partial(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n)} \right) \neq 0$ .

Relația de mai jos

$$\begin{aligned} dS &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_i} d\bar{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + \bar{q}_i d\bar{p}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n [p_i dq_i + d(\bar{q}_i \bar{p}_i) - \bar{p}_i d\bar{q}_i], \end{aligned}$$

care poate fi rescrisă în forma

$$d \left( S - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \bar{q}_i \right) = \sum_{i=1}^n p_i dq_i - \sum_{i=1}^n \bar{p}_i d\bar{q}_i, \quad (8)$$

și teorema 1 demonstrează faptul că transformarea este canonică și liberă.

Obs 4°. În teorema 2 (sau teorema 3) funcția  $S$  este cunoscută. Prin intermediul acesteia se determină o transformare care păstrează

forma ecuațiilor canonice. Se poate pune problema și invers. Să se găsească funcție  $S$  care conduce la o formă specială (cât mai simplă) a noului hamiltonian  $\bar{H}$ . În particular, dacă noul hamiltonian are forma  $\bar{H} = \bar{H}(\bar{P})$  atunci soluția sistemului canonic se obține foarte ușor (a se vedea notițele precedente). Chiar și în cazul în care dependența hamiltonianului inițial  $H$  de coordonatele generalizate  $q$  este esențială și nu poate fi eliminată prin schimbări de coordonate, în unele cazuri este posibilă determinarea unor transformări canonice care aduc hamiltonianul la o formă mult mai simplă, dinamica inclusă de ecuațiile canonice fiind mult mai ușor de analizat. Un hamiltonian care induce o dinamică se poate fi analizat ușor spunem că este adus la formă normală. Există mai multe metode de a aduce un hamiltonian la formă normală, care nu fac obiectul acestui curs, însă care sunt foarte importante în cadrul teoriei perturbărilor.

Obs 5° O altă metodă importantă care poate fi folosită pentru generarea de transformări canonice se bazează pe seriile Lie. Și această metodă se folosește în teoria perturbărilor.

## Sisteme integrabile

În baza teoremei de existență și unicitate a soluției unui sistem de ecuații diferențiale ordinare, se poate afirma că un sistem general de ecuații (în particular și sistemele canonice) este integrabil dacă sunt îndeplinite câteva condiții minime de regularitate. Această informație este foarte utilă dacă dorim să determinăm orbita corespunzătoare unei condiții inițiale, spre exemplu prin metode numerice. Teorema în cauză are un caracter local, aceasta asigură existența și unicitatea soluției într-un anumit interval de timp, însă nu furnizează informații privind comportarea globală a soluțiilor.

În cadrul sistemelor hamiltoniene condiția integrabilități are o altă semnificație. Interpretarea tradițională implică conceptul de cuadraturi. Aceasta înseamnă că soluția poate fi găsită printr-un număr finit de operații algebrice, care includ inversarea unor funcții și calculul unor integrale ale unor funcții cunoscute. În cadrul sistemelor hamiltoniene, teorema lui Liouville este cel mai important rezultat în această direcție. Vom admite fără demonstrație acest rezultat.

**Def. 1** Un sistem de  $n$  variabile dinamice  $\{\phi_1(q, p), \phi_2(q, p), \dots, \phi_n(q, p)\}$  spunem că formează un sistem involutiv dacă funcțiile sunt independente, adică

$$\text{rang } \frac{\partial(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = n, \quad (1)$$

$\Delta_i$ 

$$\{ \phi_i, \phi_j \} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Obs 1°. Pe baza unor argumente din geometria simplctică se poate arăta că un sistem involutiv conține maxim  $n$  funcții independente, unde  $n$  reprezintă numărul gradelor de libertate.

Exemplu. Să considerăm un punct material sub acțiunea unei forțe elastice  $\vec{F} = -k\vec{r}$ ,  $k > 0$ . (a se vedea notițele anterioare). Funcția lui Hamilton are forma

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2),$$

unde  $m$  este masa punctului material. Fie funcțiile

$$g = y p_z - z p_y, \quad h = z p_x - x p_z, \quad f = x p_y - y p_x.$$

Acste funcții sunt independente, însă nu formează un sistem involutiv deoarece  $\{f, g\} = h$ .

Se poate verifica faptul că  $\{f, f^2 + g^2 + h^2, H\}$  formează un sistem involutiv.

Teorema lui Liouville Fie  $H = H(q, p)$  un sistem hamiltonian autonom care posedă  $n$  integrale prime  $\{\phi_1(q, p), \phi_2(q, p), \dots, \phi_n(q, p)\}$  ce formează un sistem involutiv. Atunci sistemul cononic este integrabil prin cuadraturi. Mai precis, se poate găsi o funcție generatoare de transformări canonice  $S = S(q, \phi)$

$$S(q, \phi) = \sum_{j=1}^n \int p_j(q, \phi) dq_j, \quad (3)$$

unde funcțiile  $p_j(q, \phi)$ ,  $j = \overline{1, n}$  sunt obținute inversând funcțiile  $\phi_j(q, p)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , ase încât în noile coordonate

canonice  $(q, \phi)$  funcția lui Hamilton depinde doar de impulsurile generalizate  $\phi$ , adică  $\bar{H} = \bar{H}(\phi)$ . Noile coordonate canonice  $(q, \phi)$  sunt legate de vechile coordonate  $(p, q)$  prin intermediul relațiilor

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad q_i = \frac{\partial S}{\partial \phi_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Soluția sistemului canonic în noile variabile are forma

$$\phi_i(t) = \phi_i^0 = \text{const.}, \quad q_i(t) = \beta_i^0 t + q_i^0, \quad i = \overline{1, n} \quad (5)$$

unde  $q_i^0, \phi_i^0$  sunt constante, iar  $\beta_i^0 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi_i}(\phi_i^0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Obs 2°. Teorema lui Liouville furnizează un algoritm explicit de integrare a ecuațiilor canonice. Se porunc următoarele etape

a) Date fiind integralele prime  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ , care formează un sistem involutiv, se construiește prin cuadraturi funcția  $S = S(q, \phi)$  (relație (3));

b) Se determină transformarea canonică  $q_i = q_i(q, \phi)$ ,  $p_i = p_i(q, \phi)$ ,  $i = \overline{1, n}$  utilizând relațiile (4).

c) Se determină noul hamiltonian  $\bar{H} = \bar{H}(\phi)$ .

d) Se determină soluția (5).

e) Se determină soluția  $q_i = q_i(t)$ ,  $p_i = p_i(t)$  utilizând transformarea canonică.

În ultimii ani s-a acordat o atenție sporită descrierii globale a comportării soluției, în particular existenței perioadelor de mișcare sau frecvențelor mișcării. Astfel, unii autori impun condiția ca  $q_1, q_2, \dots, q_n$  să fie unghiuri, sistemul de coordonate  $q_i, p_i$  fiind numit sistem unghiuri-impulsuri. Se pune astfel problema dacă pentru un sistem integrabil în sens Liouville pot fi

introduse variabile de tip unghiuri-actiuni. Răspunsul este furnizat de teorema lui Arnold-Jost, pe care o enunțăm fără demonstrație. În schimb vom detalia modul de construcție a variabilelor unghiuri-actiuni pentru sistemele cu un singur grad de libertate.

Teorema Arnold-Jost. Fie  $H = H(q, p)$ ,  $(q, p) \in \mathbb{T}^{2n}$  un sistem hamiltonian care posedă un sistem involutiv de  $n$  integrale prime  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ , adică sistemul canonic este integrabil în sens Liouville. Fie  $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  o secvență de valori constante astfel încât hipersuprafața definită de ecuațiile

$$\phi_1(q, p) = c_1, \quad \phi_2(q, p) = c_2, \quad \dots, \quad \phi_n(q, p) = c_n$$

admită o componentă  $M_c$  conexă și compactă. Atunci într-o vecinătate  $U$  a mulțimii  $M_c$  există un sistem de coordonate canonice unghiuri-actiuni  $(\varphi, I)$

$$q = q(\varphi, I), \quad p = p(\varphi, I), \quad \varphi \in \mathbb{T}^n, \quad I \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$$

unde  $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$  este torul  $n$ -dimensional, iar  $\mathcal{C}$  este o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$ , astfel încât noul Hamiltonian depinde doar de  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .

Obs 3°. Diferența dintre variabilele canonice  $(q, p)$  care apar în teorema lui Liouville și  $(\varphi, I)$  care sunt introduse în teorema de mai sus este că variabilele  $\varphi_i$ ,  $i = 1, n$  sunt unghiuri. Condiția de compactitate a mulțimii  $M_c$  este esențială; aceasta asigură existența perioadelor de mișcare.

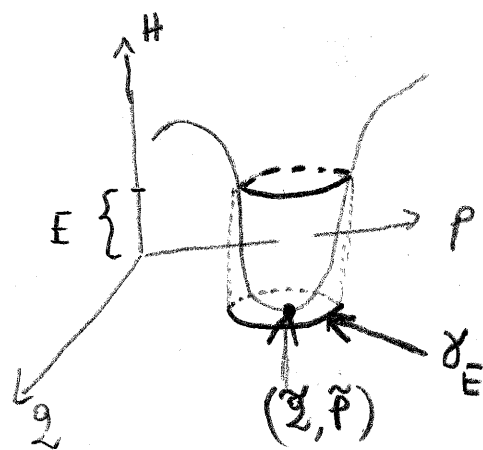
## Sisteme hamiltoniene cu un singur grad de libertate

Construcția variabilelor unghi-impuls în cazul sistemelor cu un grad de libertate este simplă, însă instructivă. Evident sistemul este integrabil întrucât funcția  $H$  este integrală primă. Fie  $(\tilde{q}, \tilde{p})$  un punct de minim pentru funcția  $H$ . Evident, întrucât  $(\tilde{q}, \tilde{p})$  este punct de extrem pentru  $H$ , atunci  $\frac{\partial H}{\partial q}(\tilde{q}, \tilde{p}) = 0$ ,  $\frac{\partial H}{\partial p}(\tilde{q}, \tilde{p}) = 0$  și deci  $q(t) = \tilde{q}$ ,  $p(t) = \tilde{p}$  este soluție a sistemului canonice (punct de echilibru).

Atunci există un interval deschis  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}$  astfel încât pentru  $E \in \mathcal{E}$  mulțimea punctelor  $(q, p)$  care satisfac ecuația  $H(q, p) = E$  să continue o curbă închisă, fie aceasta notată prin  $\gamma_E$ .

Evident, variind  $E$  în  $\mathcal{E}$  obținem o familie de curbe închise care conțin în interior punctul  $(\tilde{q}, \tilde{p})$ . (vezi figura). Curbă  $\gamma_E$  poate fi descrisă printr-o variabilă  $\varphi \in \mathbb{T}$ , unde  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  este torul unidimensional. Periodicitatea mișcării poate fi descrisă simplu astfel: la fiecare incrementare a variabilei  $\varphi$  prin  $2\pi$  se încheie o rotație.

Se pune problema dacă putem asocia variabilei  $\varphi$  o variabilă  $I$ , care să parametrizeze familia de curbe  $\gamma_E$  și  $(\varphi, I)$  să reprezinte un sistem de coordonate canonice.



Evident, fixând o curbă  $\gamma_E$  din familia de curbe  $\{\gamma_E / E \in \mathcal{E}\}$ , variabile  $I$  trebuie să fie constantă. Aceasta implică faptul că  $I$  este o integrală primă.

Așadar, căutăm o funcție  $I(q, p)$  care este în involuție cu  $H$  (integrală primă) și care depinde în mod esențial de  $p$ , adică  $\frac{\partial I}{\partial p} \neq 0$ . Dacă o astfel de funcție există atunci, în baza teoremei lui Liouville, putem construi funcția  $S(q, I)$ ,  $S = \int p(q, I) dq$ , unde funcția  $p(q, I)$  se obține inversând funcția  $I(q, p)$ . Funcția  $S$  este generatoarea transformării canonice  $q = q(\varphi, I)$ ,  $p = p(\varphi, I)$ . Evident  $\varphi$  este periodică prin construcție (reprezintă parametrul unei curbe închise). În plus, putem face în așa fel încât  $\varphi$  să fie periodică cu perioadă  $2\pi$ . Deoarece  $(\varphi, I)$  sunt variabile canonice, iar  $\gamma_E$  este o curbă închisă, din relația (1) (sau teorema 1) secțiunea Funcției generatoare de transformări canonice obținem

$$\int_{\gamma_E} p dq = \int_{\gamma_E} I d\varphi \quad (6)$$

Cum  $I$  este constantă pe  $\gamma_E$  și  $\int_{\gamma_E} d\varphi = 2\pi$ , deducem că

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_E} p dq. \quad (7)$$

Obs. 4°. Această cantitate se numește acțiunea sistemului.

În aplicații practice, integrala se calculează după ce  $p$  se exprimă în funcție de  $E$  și  $q$  prin rezolvarea ecuației

$$H(q, p) = E$$

5°. Acțiunea  $I$  reprezintă aria mărginită de curba  $\gamma_E$ , împărțită  
prin  $2\pi$



$$A_{\gamma_E} = \int_{\gamma_E} p dz$$

6°. Ecuațiile canonice în noul sistem derivăm  
 $\dot{I} = 0, \dot{\varphi} = \omega(I),$  unde  $\omega(I) = \frac{dH}{dI},$   
 iar soluția are forma  $I(t) = I_0, \varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$  unde  $\omega_0 = \omega(I_0),$   
 $I_0, \varphi_0$  - constante. Perioada mișcării pe torul  $I_0$  este

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{dI}{dE}, \quad (8)$$

deoarece

$$1 = \frac{dH}{dE} = \frac{dH}{dI} \frac{dI}{dE} = \omega_0 \frac{dI}{dE}. \quad (9)$$