

Metode numerice de integrare a ecuațiilor diferențiale ordinare

O clasă largă de probleme din științele spațiale, mecanică și matematică aplicată conduc la ecuații diferențiale ordinare. De multe ori, pentru a obține informații privind soluțiile ecuațiilor, suntem nevoiți să recurgem la metode numerice de integrare. În funcție de tipul problemelor modelate, precum ecuații diferențiale cu date inițiale, ecuații cu date la frontieră, ecuații diferențiale de ordinul întâi, ecuații diferențiale de ordinul m cu $m > 1$, ecuații diferențiale implicite, se pot introduce diverse metode numerice. În cele ce urmează vom considera o singură ecuație diferențială de ordinul întâi, căreia îi asociem o condiție inițială. Rezultatele sunt valabile pentru o ecuație diferențială de ordinul m , $m > 1$, și sisteme de n ecuații diferențiale de ordinul m , $m > 1$.

Așfel, spre exemplu, dacă problema este modelată printr-o ecuație diferențială de ordinul m de forma

$$x^{(m)}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dots, x^{(m-1)}(t)),$$

atunci introducând funcțiile auxiliare $y_1(t) := x(t)$, $y_2(t) := \dot{x}(t)$, ..., $y_m(t) := x^{(m-1)}(t)$

și vectorii $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_m \\ f(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{pmatrix}$ obținem ecuația

diferențială în formă vectorială

$$\dot{Y} = F(t, Y).$$

Considerăm ecuația diferențială de ordinul întâi

$$\dot{x}(t) = f(t, x),$$

(1)

unde $t \in I \subset \mathbb{R}$ și f este o funcție reală suficient de regulată astfel încât condițiile din teorema de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy

să fie satisfăcute. Acestei ecuații îi adăugăm condiția inițială

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

unde x_0 este o constantă reală dată.

Ne propunem să prezentăm câteva concepte cu privire la metodele cu un singur pas de integrare și respectiv pași multipli. În particular, vom descrie metoda Runge-Kutta (un singur pas) și metoda Adams-Bashforth-Moulton (pași multipli). Aceste metode le vom utiliza în practică.

Metode de integrare cu un singur pas

Cea mai simplă metodă de integrare a ecuației (1) cu condiția inițială (2) este metoda lui Euler care se bazează pe următoarea observație: Întrucât $f(t, x)$ este panta $\dot{x}(t)$ la curba $x = x(t)$, pentru $h \neq 0$ putem face aproximația

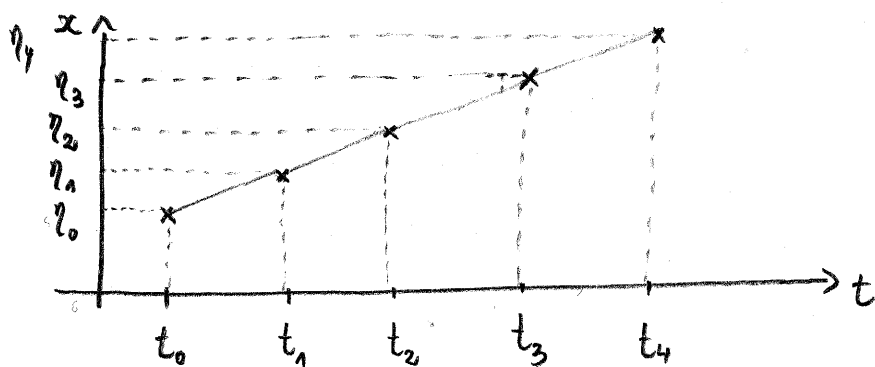
$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} \approx f(t, x(t)),$$

adică valoarea funcției x în $t+h$ o putem aproxima astfel

$$x(t+h) \approx x(t) + h f(t, x(t)). \quad (3)$$

Dat un pas $h \neq 0$ și condiția (2) pentru punctele echidistante $t_i = t_0 + ih$, $i=1, 2, \dots$ obținem prin intermediul relației (3) aproximațiile η_i ale valorilor exacte $x_i = x(t_i)$, $i=1, 2, \dots$, astfel:

$$\eta_0 := x_0; \quad \eta_{i+1} := \eta_i + h f(t_i, \eta_i), \quad t_{i+1} = t_i + h, \quad i=1, 2, \dots \quad (4)$$



Metoda lui Euler este o metodă cu un singur pas. Astfel de metode sunt descrise printr-o funcție $\Phi(t, x; h; f)$ ca în următoarea definiție

Def. 1. Spunem că o metodă de integrare numerică este cu un singur pas dacă aproximațiile η_i , $i=1, 2, \dots$ de valorile exacte $x_i = x(t_i)$, unde $t_i = t_0 + ih$, $i=1, 2, \dots$ și $x(t)$ este soluția problemei Cauchy (1), (2), se obțin astfel

$$\eta_0 := x_0; \quad \eta_{i+1} := \eta_i + h \Phi(t_i, \eta_i; h; f), \quad t_{i+1} = t_i + h, \quad i=1, 2, \dots \quad (5)$$

unde Φ este o funcție dată.

Obs. 1° În cazul metodei lui Euler $\Phi(t, x; h; f) = f(t, x)$. Funcția Φ nu depinde de pasul h .

Să presupunem că t_0 și x_0 în relația (2) sunt parametrii arbitrar fixați. Dacă $x(t)$ este soluția exactă a problemei Cauchy (1), (2) atunci introducem funcția

$$\Delta(t_0, x_0; h; f) := \begin{cases} \frac{x(t_0+h) - x_0}{h}, & \text{dacă } h \neq 0 \\ f(t_0, x_0), & \text{dacă } h = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Funcția Δ reprezintă cotel diferenței soluției exacte $x(t)$ relativ la pasul h , în timp ce Φ reprezintă cotel diferenței soluției aproximante relativ la pasul h .

Diferența

$$\tau(t_0, x_0; h; f) := \Delta(t_0, x_0; h; f) - \Phi(t_0, x_0; h; f), \quad (7)$$

este o măsură a calității metodei de aproximare. Aceasta constă în numită eroarea de trunchiere locală arată în ce măsură soluția exactă a ecuației diferențiale satisface ecuația metodei numerice cu un singur pas.

Def 2. Spunem că o metodă numerică de integrare cu un singur pas este consistentă dacă

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(t_0, x_0; h; f) = 0, \quad \forall t_0 \in I \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, f \in C^1 \quad (8)$$

Obs. 2° În baza relațiilor (6) și (7) condiția (8) este echivalentă cu

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(t_0, x_0; h; f) = f(t_0, x_0), \quad \forall t_0 \in I \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, f \in C^1 \quad (9)$$

□ Exemplu. Metoda lui Euler, descrisă prin intermediul funcției $\phi(t, x; h; f) := f(t, x)$, este consistentă. Într-adevăr dacă dezvoltăm în serie Taylor soluția $x(t)$ a problemei Cauchy (1), (2), în jurul punctului $t = t_0$, atunci

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + h \dot{x}(t_0) + \frac{h^2}{2} \ddot{x}(t_0) + \dots + \frac{h^p}{p!} x^{(p)}(t_0) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} x^{(p+1)}(t_0 + \theta h), \quad \theta \in (0, 1)$$

În baza relațiilor (1) și (2) putem scrie

$$x(t_0) = x_0;$$

$$\dot{x}(t_0) = f(t_0, x_0),$$

$$\ddot{x}(t_0) = \left[\frac{d}{dt} f(t, x(t)) \right] \Big|_{t=t_0} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) \dot{x}(t) \right] \Big|_{t=t_0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0),$$

etc.

Astfel, din (6) deducem

$$\begin{aligned} \Delta(t_0, x_0; h; f) &= f(t_0, x_0) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0) \right] + \\ &+ \dots + \frac{h^p}{(p+1)!} x^{(p+1)}(t_0 + \theta h). \end{aligned} \quad (*)$$

Întrucât pentru metoda Euler $\phi(t_0, x_0; h, f) = f(t_0, x_0)$, relația de mai sus devine

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t_0, x_0; h; f) &= \Delta(t_0, x_0; h; f) - \phi(t_0, x_0; h; f) = \\ &= \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0) \right] + \dots + \frac{h^p}{(p+1)!} x^{(p+1)}(t_0 + \theta h) = \\ &= O(h^p).\end{aligned}$$

și deci condiția de consistență (8) este satisfăcută. $\square$

Def 3. Spunem că o metodă de integrare este de ordinul p dacă

$$\mathcal{E}(t_0, x_0; h; f) = O(h^p), \quad \forall t_0 \in I \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, f \in C^1. \quad (10)$$

Obs. 3°. Metoda lui Euler este o metodă de ordinul 1.

4°. Exemplul de mai sus descrie o procedură de obținere a metodelor cu ordin mai mare decât 1. Spre exemplu, dacă funcția ϕ , asociată metodei, are forma

$$\phi(t, x; h; f) = f(t, x) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) f(t, x) \right],$$

atunci, ținând cont de dezvoltarea în serie Taylor de mai sus, deducem o metodă de ordinul 2. Putem obține metode de ordin și mai mare, însă acestea sunt greu de pus în practică datorită faptului că la fiecare pas $(\eta_i, t_i) \rightarrow (\eta_{i+1}, t_{i+1})$ trebuie să evoluăm atât f cât și derivatele parțiale ale lui f .

Metode simple de ordine mari pot fi obținute prin intermediul unei construcții a funcției ϕ de tipul

$$\phi(t, x; h; f) = b_1 f(t, x) + b_2 f(t + c h, x + a h f(t, x)), \quad (11)$$

unde constantele b_1, b_2, c și a sunt alese în așa fel încât dezvoltarea în serie Taylor a erorii de trunchiere $\mathcal{E}$ să fie de ordinul $O(h^p)$ cu p cât mai mare.

Deci dezvoltăm în serie funcția $\phi(t_0, x_0; h, f)$ considerată mai sus în jurul punctului (t_0, x_0) , adică

$$\phi(t_0, x_0; h, f) = (b_1 + b_2) f(t_0, x_0) + h b_2 \left[c \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x_0) + a \frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0) f(t_0, x_0) \right] + O(h^2),$$

atunci comparând cu soluția x (Exemplul anterior), pentru a obține o metodă de ordinul 2 găsim condițiile (ecuațiile algebrice)

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2 c = \frac{1}{2}, \quad b_2 a = \frac{1}{2}.$$

Aceste ecuații au o infinitate de soluții. O soluție este

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad a = 1,$$

obținem metoda lui Heun (1900)

$$\phi(t, x; h, f) = \frac{1}{2} [f(t, x) + f(t+h, x+h f(t, x))]. \quad (12)$$

O altă soluție are forma

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad c = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2},$$

de unde obținem metoda lui Euler modificată

$$\phi(t, x; h, f) = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} f(t, x)\right). \quad (13)$$

Mai general, așa numitele metode Runge-Kutta se obțin prin intermediul următoarei construcții a funcției ϕ

$$\phi(t, x; h, f) = \sum_{i=1}^n b_i k_i \quad (14)$$

unde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, x), \\ k_2 &= f\left(t + c_2 h, x + a_{21} h k_1\right) \end{aligned}$$

(15)

$$k_3 = f(t + c_3 h, x + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)),$$

$$k_s = f(t + c_s h, x + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1})).$$

Metoda este consistentă dacă

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i \quad \text{pentru } i=2, 3, \dots, s. \quad (16)$$

Pentru o metodă Runge-Kutta trebuie specificate numărul de etape s , coeficienții a_{ij} , $1 \leq j < i \leq s$, b_i , $i=1, 2, \dots, s$ și c_i , $i=2, 3, \dots, s$. Aceste date pot fi specificate într-un tabel de tipul

0.					
c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
$\vdots$					
c_s	a_{s1}	a_{s2}	$\dots$	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	$\dots$	b_{s-1}	b_s

Se poate arăta că dacă o metodă Runge-Kutta are ordinul p atunci numărul de etape satisface $s \geq p$ pentru $p < 5$ și $s \geq p+1$ dacă $p \geq 5$.

Exemple de metode Runge-Kutta

i) Metoda Runge-Kutta 4 clasică (ordinul 4)

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\phi = \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(t, x),$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t + h, x + hk_3).$$

ii) O altă metodă în 4 etape (ordinul 4)

0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\phi = \frac{1}{8} (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(t, x),$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{3}, x + \frac{h}{3} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{2h}{3}, x - \frac{h}{3} k_1 + h k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(t + h, x + h k_1 - h k_2 + h k_3\right).$$

iii) Metoda Runge-Kutta-Butcher în 7 etape (ordinul 6)

0						
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$-\frac{1}{12}$			
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{18}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{6}{16}$		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{6}{8}$	$\frac{4}{8}$	
1	$\frac{9}{44}$	$-\frac{36}{44}$	$\frac{63}{44}$	$\frac{72}{44}$	$-\frac{64}{44}$	0
	$\frac{11}{120}$	0	$\frac{81}{120}$	$\frac{81}{120}$	$-\frac{32}{120}$	$-\frac{32}{120}$
						$\frac{11}{120}$

$$\phi = \frac{1}{120} (11k_1 + 81k_3 + 81k_4 - 32k_5 - 32k_6 + 11k_7),$$

$$k_1 = f(t, x),$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{h}{3}, x + \frac{h}{3} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{2}{3}, x + \frac{2h}{3} k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t + \frac{h}{3}, x + \frac{h}{12} k_1 + \frac{4h}{12} k_2 - \frac{h}{12} k_3\right),$$

$$k_5 = f\left(t + \frac{h}{2}, x - \frac{h}{16} k_1 + \frac{18h}{16} k_2 -$$

$$-\frac{3h}{16} k_3 - \frac{6h}{16} k_4\right),$$

$$k_6 = f\left(t + \frac{h}{2}, x + \frac{9h}{8} k_2 - \frac{3h}{8} k_3 -$$

$$-\frac{6h}{8} k_4 + \frac{4h}{8} k_5\right),$$

$$k_7 = f\left(t + h, x + \frac{9h}{44} k_1 - \frac{36h}{44} k_2 +$$

$$+ \frac{63h}{44} k_3 + \frac{72h}{44} k_4 - \frac{64h}{44} k_5\right).$$

Vom discuta în cele ce urmează convergența soluției aproximante $\eta(t; h)$ a metodei numerice cu un singur pas (5) atunci când $h \rightarrow 0$. Suntem interesați de comportamentul erorii de trunchiere (sau discretizare) globale definită prin

$$e(t; h) = \eta(t; h) - x(t), \quad (17)$$

unde $x(t)$ este soluția problemei Cauchy (1), (2), pentru t fixat și $h \rightarrow 0$. Întrucât $\eta(t; h)$ (și în consecință $e(t; h)$) este o funcție definită doar în punctele discrete $t_i = t_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots$ atunci când h este fixat, sau dacă t este fixat atunci $\eta(t; h)$ este definită pentru $h \in \left\{ \frac{t-t_0}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$, convergența implică studiul funcției

$$e(t; h_n), \text{ unde } h_n := \frac{t-t_0}{n}, \text{ atunci când } n \rightarrow \infty.$$

Def. 4. Spunem că o metodă cu un singur pas este convergentă dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(t; h_n) = 0 \quad (18)$$

Se poate arăta că metodele de ordinul $p > 0$ au proprietatea

$$e(t; h_n) = O(h_n^p) \quad (19)$$

și în consecință sunt convergente. Mai precis, are loc următorul rezultat pe care îl admitem fără demonstrație:

Teoremă. Fie $x(t)$ soluția problemei Cauchy (1), (2) unde $t_0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dacă funcția ϕ este continuă pe mulțimea

$G = \{(t, x, h) \mid a \leq t \leq b, |x - x(t)| \leq \delta, 0 \leq |h| \leq h_0\}$ pentru δ fixat, $h_0 > 0$, $\delta > 0$ și există constantele pozitive M și N astfel încât

$$|\phi(t, x_1; h; f) - \phi(t, x_2; h; f)| \leq M_f |y_1 - y_2|,$$

pentru orice $(t, x_i, h) \in G$, $i=1, n$ și

$$|\zeta(t, x(t); h, t)| \leq N_f |h|^p, \quad p > 0$$

pentru orice $t \in [a, b]$, $|h| \leq h_0$ atunci există $\bar{h} \in (0, h_0]$, astfel

încât

$$|e(t; h_n)| \leq |h_n|^p N_f \frac{e^{M_f |t-t_0|} - 1}{M_f},$$

pentru orice $t \in [a, b]$ și $h_n = \frac{t-t_0}{n}$, $n=1, 2, \dots$ cu $|h_n| \leq \bar{h}$.

Dacă $\gamma = \infty$ atunci $\bar{h} = h_0$.

Metode de integrare cu mai mulți pași

O metodă cu mai mulți pași (r pași) constă în determinarea valorii aproximante η_{j+r} a soluției în punctul t_{j+r} , adică $x(t_{j+r})$, pentru $r \geq 2$, atunci când se cunosc valorile aproximante $\eta_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_{j+r-1}$ de soluției în punctele $t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+r-1}$ unde $t_k = t_0 + kh$, $k = j, \dots, j+r-1$.

Cu alte cuvinte

$$\eta_j, \eta_{j+1}, \dots, \eta_{j+r-1} \rightarrow \eta_{j+r}, \quad \text{pentru } j=0, 1, 2, \dots, r \geq 2. \quad (20)$$

Pentru a iniția astfel de metode este necesar să determinăm valorile de start $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{r-1}$. Acestea pot fi obținute prin mai multe metode, spre exemplu cu ajutorul unei metode cu un singur pas.

Fără a intra în detalii prezentăm formulele generale pentru metodele Adams-Bashforth și respectiv Adams-Moulton.

Pentru metodele Adams-Bashforth cu $q+1$ pași

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h [a_0 f_p + a_1 f_{p-1} + a_2 f_{p-2} \dots + a_q f_{p-q}], \quad (21)$$

unde $a_0, a_1, \dots, a_q$ sunt constante, iar

$$f_i := f(t_i, \eta_i), \quad t_i = t_0 + i h, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (22)$$

Metodele Adams-Bashforth sunt metode explicite.

Pentru metodele Adams-Moulton cu q pași

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h [b_0 f_{p+1} + b_1 f_p + \dots + b_q f_{p+1-q}], \quad (23)$$

unde $b_0, b_1, \dots, b_q$ sunt constante.

Metodele Adams-Moulton sunt metode implicite; η_{p+1} apare atât explicit în membrul stâng al relației (23) cât și în membrul drept în $f_{p+1} = f(t_{p+1}, \eta_{p+1})$. Ecuația (23) este neliniară. În practică se utilizează următoarea metodă iterativă pentru determinarea valorii aproximante η_{p+1}

$$\eta_{p+1}^{(i+1)} = \eta_p + h [b_0 f(t_{p+1}, \eta_{p+1}^{(i)}) + b_1 f_p + \dots + b_q f_{p+1-q}], \quad (24)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$. Se poate arăta că pentru h suficient de mic ecuația (24) are un punct fix, adică (24) are soluție.

Pentru $t_p, \eta_p, \eta_{p-1}, \dots, \eta_{p+1-q}$ o valoare inițială potrivită $\eta_{p+1}^{(0)}$ pentru ecuația (24) se poate obține utilizând metoda Adams-Bashforth. Din acest motiv, cele două metode se utilizează în tandem. Astfel metoda Adams-Bashforth

furnizoră $\eta_{p+1}^{(0)}$, iar metoda Adams-Moulton corectă această valoare determinând $\eta_{p+1}^{(i+1)}$ după un număr suficient de iterații, astfel încât $|\eta_{p+1}^{(i+1)} - \eta_p^{(i)}| < \varepsilon$, ε suficient de mic.

Exemple de metode Adams-Bashforth-Moulton

1.) Adams-Bashforth 3 pași și Adams-Moulton 2 pași

Adams-Bashforth (3 pași)

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h[a_0 f_p + a_1 f_{p-1} + a_2 f_{p-2}]$$

$$a_0 = \frac{23}{12}, \quad a_1 = -\frac{16}{12}, \quad a_2 = \frac{5}{12}.$$

Adams-Moulton (2 pași)

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h[b_0 f_{p+1} + b_1 f_p + b_2 f_{p-1}]$$

$$b_0 = \frac{5}{12}, \quad b_1 = \frac{8}{12}, \quad b_2 = -\frac{1}{12}.$$

2.) Adams-Bashforth 9 pași și Adams-Moulton 8 pași

Adams-Bashforth (9 pași)

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h[a_0 f_p + a_1 f_{p-1} + \dots + a_8 f_{p-8}],$$

$$a_0 = \frac{14097247}{d}, \quad a_1 = \frac{-43125206}{d}, \quad a_2 = \frac{95476786}{d}, \quad a_3 = \frac{-139855262}{d},$$

$$a_4 = \frac{137968480}{d}, \quad a_5 = \frac{-91172642}{d}, \quad a_6 = \frac{38833486}{d}, \quad a_7 = \frac{-9664106}{d}$$

$$a_8 = \frac{1070017}{d}, \quad d = 3628800.$$

Adams-Moulton (8 pași)

$$\eta_{p+1} = \eta_p + h[b_0 f_{p+1} + b_1 f_p + \dots + b_8 f_{p-7}],$$

$$b_0 = \frac{1070017}{d}, b_1 = \frac{4467094}{d}, b_2 = \frac{-4604594}{d}, b_3 = \frac{5595358}{d}$$

$$b_4 = \frac{-5033120}{d}, b_5 = \frac{3146338}{d}, b_6 = \frac{-1291214}{d}, b_7 = \frac{312874}{d}$$

$$b_8 = \frac{-33953}{d}, d = 3628800.$$