

Fisa de exercitii. Problema celor doua corpuri

1. Se consideră elipsa

(1)

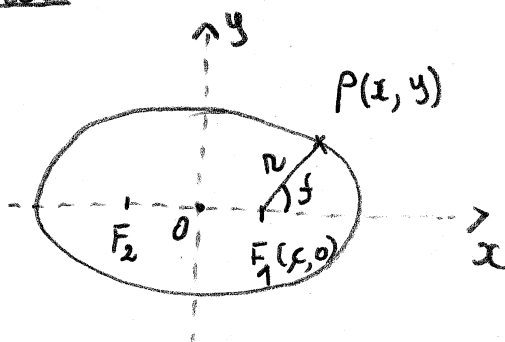
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde a este semiaxa mare, iar b semiaxa mică a elipsei. Fie $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ distanța focală, $e = \frac{c}{a}$ excentricitatea elipsei, $p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2)$ parametrul elipsei și F_1, F_2 focarele elipsei. Dacă P este un punct al elipsei, $r = |\overrightarrow{F_1 P}|$ este raza vectorie, iar φ unghiul dintre raza vectorie și semiaxa mare a elipsei (numit și anomalie adevărată), notăm că ecuația focală a elipsei este

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

(2)

Rezolvare



Dim figura alăturată rezultă că x și y (coordonatele punctului P) se pot scrie în forma

$$\begin{cases} x = c + r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases} \quad (3)$$

Înlocuind (3) în (1) deducem:

$$\frac{(c + r \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2(c^2 + 2rc \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi) + r^2 a^2 \sin^2 \varphi = a^2 b^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2(c^2 - a^2) + 2rc b^2 \cos \varphi + r^2(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) = 0. \quad (*)$$

În relația de mai sus, vom exprima toți termenii în funcție de e și p . Utilizând

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad (4)$$

$$e = \frac{c}{a}, \quad (5)$$

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2). \quad (6)$$

①

deducem mai întoi că

(7)

$$\frac{r}{b^2} = \frac{e}{p},$$

și astfel relația (*) devine

$$-b^4 + 2r e b^2 \cos t + r^2 [(a^2 - c^2) \cos^2 t + a^2 \sin^2 t] = 0 \Leftrightarrow$$

$$-b^4 + 2r e b^2 \cos t + r^2 [a^2 - c^2 \cos^2 t] = 0 \quad | : b^4 \Leftrightarrow$$

$$-1 + 2r \frac{e}{p} \cos t + r^2 \left[\frac{1}{p^2} - \frac{e^2}{p^2} \cos^2 t \right] = 0.$$

Așadar obținem ecuația de gradul doi în r :

$$r^2 \left[\frac{1}{p^2} - \frac{e^2}{p^2} \cos^2 t \right] + 2r \frac{e}{p} \cos t - 1 = 0,$$

care are soluțiile $r_1 = \frac{p}{1 + e \cos t}$ și $r_2 = -\frac{p}{1 - e \cos t}$. Întrucât

$r > 0$ (este o distanță) cea de-a doua soluție nu convine. Așadar, ecuația focală a conicei este dată de relația (2).

2. Se consideră hiperbola

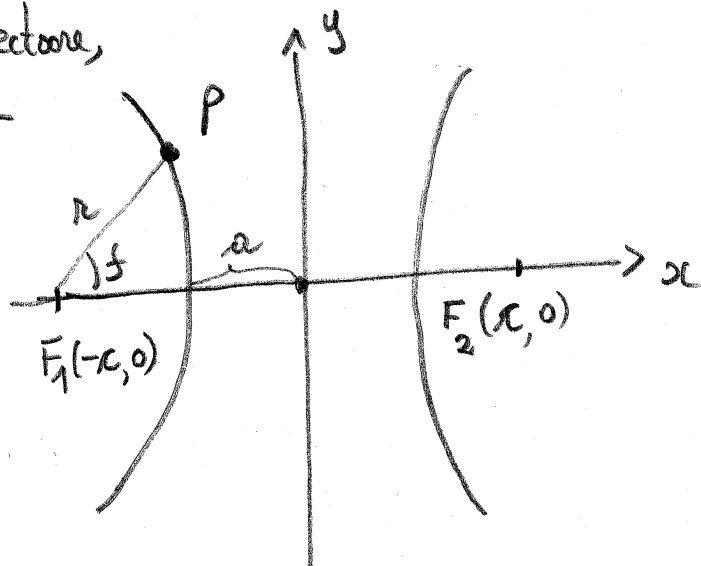
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

unde $a > 0$, $b > 0$. Fie c -distanța focală $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \frac{c}{a}$ excentricitatea, iar $p = \frac{b^2}{a} = a(e^2 - 1)$ parametrul hiperbolei. Fie P un punct

pe hiperbolă, $r = |\overline{F_1 P}|$ raza vectorie,

iar t unghiul adâncă (vezi figura). Arătați că ecuația focală a hiperbolei este

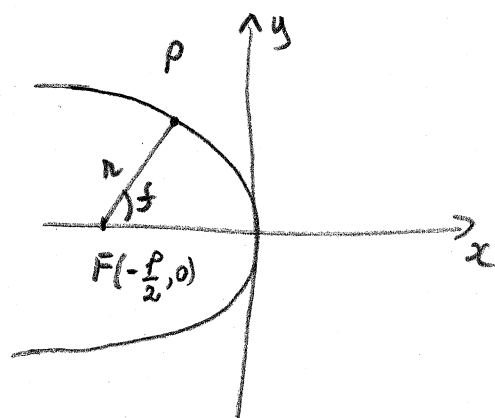
$$r = \frac{p}{1 + e \cos t}$$



3. Se consideră parabola

$$y^2 = -2px, \quad p > 0.$$

Notăm prin $F_1(-\frac{p}{2}, 0)$ focarul parabolei. Fie P un punct pe parabolă, $r = |\overline{F_1P}|$ nota vectorilor, iar φ anomalia advenită (vezi figura). Arătați că ecuația focală a parabolei este



$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}.$$

4. Arătați că ecuația lui Kepler

$$u - e \sin u = M,$$

unde $e \in [0, 1)$ are soluție unică pentru orice $M \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x - e \sin x.$$

Se observă că:

$$f'(x) = 1 - e \cos x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ crescătoare,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

f - continuă

$\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ - bijectivă $\Rightarrow \forall M \in \mathbb{R}, (\exists!) u_0 \in \mathbb{R} \text{ a.ș. } f(u_0) = M.$

5. Arătați că soluția ecuației lui Kepler

$$u - e \sin u = M,$$

unde $e \in [0, 1)$ se poate determina prin metoda aproximațiilor succesive.

(3)

Rezolvare. Considerăm șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construit astfel:

$$u_0 = M, u_1 = M + e \sin u_0, u_2 = M + e \sin u_1, \dots, u_n = M + e \sin u_{n-1}, \dots$$

Să arătăm că acest șir este convergent. Pentru aceasta considerăm seria numerică

$$\sum_{i=1}^{\infty} (u_i - u_{i-1}). \quad (*)$$

Șirul sumelor parțiale asociat seriei de mai sus este

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0.$$

Așadar, din relație de mai sus rezultă că seria (*) este convergentă dacă și numai dacă șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent. Să arătăm că seria (*) este absolut convergentă, adică seria cu termeni pozitivi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i - u_{i-1}|, \quad (**)$$

este convergentă. Să considerăm raportul

$$\frac{|u_{n+1} - u_n|}{|u_n - u_{n-1}|} = \frac{|M + e \sin u_n - M - e \sin u_{n-1}|}{|u_n - u_{n-1}|} = e \frac{|\sin u_n - \sin u_{n-1}|}{|u_n - u_{n-1}|},$$

Aplicând teorema lui Lagrange pentru funcția $f(x) = \sin x$ pe intervalul $[u_n, u_{n-1}]$ (sau $[u_{n-1}, u_n]$ dacă $u_{n-1} < u_n$), deducem că $\exists \xi_n \in (u_n, u_{n-1})$ (sau (u_{n-1}, u_n)) astfel încât

$$\frac{|u_{n+1} - u_n|}{|u_n - u_{n-1}|} = e |\cos \xi_n| < e.$$

Întrucât șirul $\left| \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} \right|$ este mărginit, există următoarea limită

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}} \right| \leq e < 1.$$

În baza criteriului raportului rezultă că seria (**) este convergentă. Așadar, seria (*) este absolut convergentă și în consecință șirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent. Limita șirului $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este soluția ecuației lui Kepler. În practică, determinăm o soluție aproximativă u_n odată ce este satisfăcută condiția $|u_n - u_{n-1}| \leq \varepsilon$, ε suficient de mic.

6. Se consideră punctele materiale P_1 și P_2 de mase m_1 și respectiv m_2 care se atrag proporțional cu distanța dintre ele. Anotând că mișcarea punctelor P_1 și P_2 față de centrul de masă este descrisă de ecuațiile

$$\ddot{\vec{r}}_1 + \frac{G m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} = \vec{0}, \quad \ddot{\vec{r}}_2 + \frac{G m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} = \vec{0},$$

unde G este constanta atracției universale, $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ sunt vectorii de poziție ai celor două puncte față de centrul de masă, iar $r_1 = |\vec{r}_1|$, $r_2 = |\vec{r}_2|$.

Indicație. Se utilizează ecuația mișcării relative $\ddot{\vec{r}} + G(m_1 + m_2) \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}$ și integralele primă a centrului de masă, care în acest caz (originea O a reperului este centrul de masă) devine $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0}$.

7. Pornind de la integralele primă ale energiei și ariei:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{j}^2 = \frac{2\mu}{r} + C, \quad r^2 \dot{j} = h,$$

studiați mișcarea hiperbolică a punctului P_2 față de P_1 .
(a se vedea notele de curs).

Indicație. Constantele C și h se scriu cu ajutorul elementelor orbitale (elementelor hiperbolice) în forma:

$$h^2 = \mu p = \mu a(e^2 - 1),$$

$$C = (e^2 - 1) \frac{\mu^2}{h^2} = \frac{\mu^2(e^2 - 1)}{\mu a(e^2 - 1)} = \frac{\mu}{a}.$$

Se înlocuiește $\dot{j}$ din integrala primă a ariei în integrala energiei, se obține o ecuație cu variabile separabile pe care o integram făcând schimbarea de variabilă

$$r = a(e \cosh u - 1).$$

Rezultatul final este ecuația lui Kepler $e \sinh u - u = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} (t - t_0)$ pentru mișcarea hiperbolică.