

Problema celor două corpuri

Această problemă poate fi formulată astfel: cunoscând la un anumit moment pozițiile și vitezele a două puncte materiale masive care se mișcă sub acțiunea forței de atracție universale, să se determine pozițiile și vitezele punctelor la orice moment.

Importanța problemei celor două corpuri rezultă din următoarele considerații: În primul rând, această problemă este singura problemă gravitațională a dinamicii pentru care există o soluție analitică generală și completă (soluția se determină prin cuadraturi, a se vedea teorema lui Liouville), cu excepția unor cazuri speciale ale problemei celor trei corpuri. În al doilea rând, soluția problemei celor două corpuri se folosește ca punct de plecare în teoria perturbațiilor. Spre exemplu, în primă aproximatie mișcarea unei planete în jurul Soarelui este o problemă a două corpuri Soare-Planetă. Dacă însă se consideră efectele incluse de celelalte planete intrăm în domeniul teoriei perturbațiilor a cărui scop este de a studia cum se modifică orbita planetei față de orbita eliptică obținută ca soluție a problemei celor două corpuri Soare-Planetă.

Din punct de vedere istoric, primele contribuții importante în studiul mișcărilor planetare au fost aduse de Kepler (1571-1630). Utilizând materialul observational referitor la planeta Marte, acesta a formulat trei legi empirice de mișcare a planetelor, primele două în 1609, iar cea de-a treia în 1613:

- i) Planetele se mișcă în jurul Soarelui pe elipse, Soarele aflându-se în unul din focare;
- ii) Raza vectorie Soare-Planetă descrie arii egale în intervale de timp egale;
- iii) Pătratele perioadelor de revoluție (siderale) ale planetelor sunt proporționale cu cuburile semiaxelor mari ale orbitelor.

Pentru a explica mișcarea planetelor Newton (1687) a formulat legile care îi poartă numele și a descoperit legea atracției universale, care poate fi enunțată astfel:

Oricare două corpuri se atrag cu o forță direct proporțională cu produsul maselor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre acestea:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}, \quad (1)$$

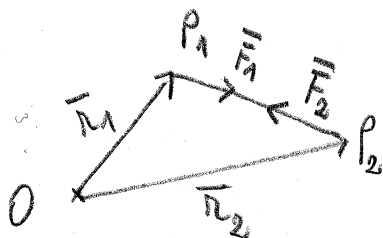
m_1, m_2 masele corpurilor, r distanța dintre corpuri, G - o constantă care se numește constanta atracției universale.

Ecuațiile de mișcare. Integrale prime

În această secțiune vom formula problema celor două corpuri și vom deduce integrala primă a centrului de masă, integrala primă a momentului cinetic și integrala primă a energiei.

Considerăm două puncte materiale notate prin P_1 și P_2 , de mase m_1 și m_2 care se atrag conform legii atracției universale. Conform primului principiu al lui Newton, există un sistem de referință inertial. Fie O originea acestui reper inertial. Dacă notăm prin $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ vectorii de poziție ai celor două puncte, iar prin $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ forțele care acționează asupra punctelor P_1 și respectiv P_2 , atunci aplicând ce-l de-al doilea principiu al lui Newton, putem scrie

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2. \quad (2)$$



Vom nota prin $\vec{r}$ vectorul $\vec{P_1 P_2}$, adică

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (3)$$

iar prin r mărimea vectorului r ($r = |\vec{r}|$).

Aplicând ce-l de-al treilea principiu al lui Newton, adică principiul acțiunii și reacțiunii, și utilizând (1) deducem

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}, \quad \vec{F}_1 = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (4)$$

Astfel, ecuațiile (2) pot fi rescrise în formă

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = - \frac{G m_1 m_2}{r^3} \vec{r}. \quad (5)$$

Sistemul (5) reprezintă un sistem de două ecuații vectoriale de ordinul al doilea (sau echivalent, 6 ecuații scalare de ordinul al doilea). Prin integrarea acestui sistem vom introduce 12 constante.

Primele 6 constante sunt obținute astfel: dacă adunăm cele două ecuații vectoriale (5) obținem

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}, \quad (6)$$

care prin integrare conduce la următoarele integrale prime

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{a}, \quad m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (7)$$

unde $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt vectori constanți (6 scalari).

Prin definiție centrul de masă al punctelor P_1 și P_2 este un punct fictiv al cărui vector de poziție este

$$\vec{r}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (8)$$

Ce de-a doua relație (7) se poate rescrie în formă

$$\vec{r}^* = \frac{\vec{a}t + \vec{b}}{m_1 + m_2}, \quad (\text{integrală primă a centrului de masă}) \quad (9)$$

și arată că centrul de masă este staționar (dacă $\vec{a} = \vec{0}$) sau se mișcă rectiliniu și uniform (dacă $\vec{a} \neq \vec{0}$).

În cele ce urmează vom studia mișcarea punctului P_2 față de P_1 . Acest studiu permite simplificarea problemei fără a pierde vreo proprietate esențială. Într-adevăr dacă vom determina vectorul

$\vec{r}(t)$, care descrie mișcarea punctului P_2 față de P_1 , atunci din (3) și cea de-a doua relație din (7) determinăm $\vec{r}_1(t)$ și $\vec{r}_2(t)$.

Scărzând cele două relații din (5), după ce în prealabil au fost împărțite prin m_1 și respectiv m_2 , și introducând notația

$$\mu = G(m_1 + m_2), \quad (10)$$

obținem ecuația

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{0}. \quad (11)$$

Prin integrarea acestei ecuații vectoriale de ordinul al doilea vom introduce 6 constante. Primele trei constante se obțin astfel (integrarea primă a orilor): dacă înmulțim vectorial relația (11) prin $\vec{r}$, deducem

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$$

care prin integrare conduce la

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$$

unde $\vec{h}$ este un vector constant. Integrarea primă (13) arată că momentul cinetic se conservă în timpul mișcării. Din (13), deducem

$$\vec{h} \cdot \vec{r} = 0, \quad (14)$$

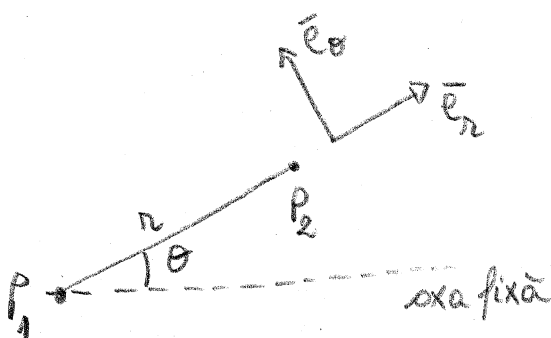
ceea ce arată că mișcarea punctului P_2 față de P_1 este plană. Acest plan se numește planul orbital al punctului P_2 . Să considerăm în planul mișcării (planul orbital) un sistem de coordonate polare

(r, θ) , unde r este raza vectorie $P_1 P_2$, iar θ este unghiul format de raza vectorie cu o axă fixă. În coordonate polare, vectorul de poziție al punctului P_2 și vectorul vitezei se pot scrie în forma

$$\vec{r} = r \vec{e}_r, \quad (15)$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta, \quad (16)$$

unde $\vec{e}_r$ și $\vec{e}_\theta$ sunt vectorii bazei naturale.



Dacă notăm prin $\bar{e}_3$ versorul normal la planul orbital cu sensul des așe încoț $\{\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_3\}$ să formeze o bază ortonomată orientată drept, adică

$$\bar{e}_3 = \bar{e}_r \times \bar{e}_\theta \quad (17)$$

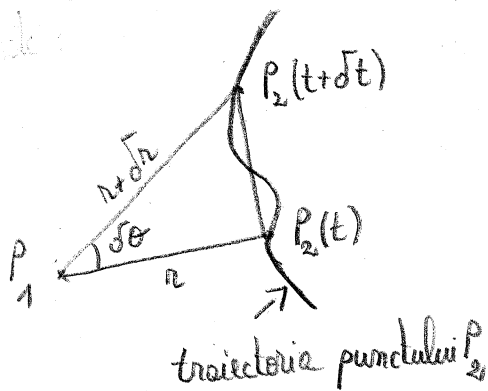
atunci pe baza relațiilor (15) și (16) integralele primă și secundă (13) se rescrie în forma

$$r^2 \dot{\theta} \bar{e}_3 = \bar{h},$$

sau dacă ținem cont că $\bar{h} = h \bar{e}_3$ ($\bar{h}$ - este normal la planul orbital)

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (19)$$

Relația (19) reprezintă expresia matematică a celei de-a două legi ale lui Kepler (enunțată mai sus). Într-adevăr, dacă considerăm mișcarea punctului P_2 în intervalul δt , presupunând că la momentul t acesta are coordonatele polare (r, θ) , iar la momentul $t + \delta t$ coordonatele sunt $(r + \delta r, \theta + \delta \theta)$ atunci aria măturată de raza vectorie $P_1 P_2$ în intervalul δt este:



$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{1}{2} r(r + \delta r) \sin \delta \theta + O(\delta t^2) = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \delta \theta + O(\delta t^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Împărțind (20) prin δt și făcând $\delta t \rightarrow 0$, în baza relației (19) obținem

$$\dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2}. \quad (21)$$

Dacă notăm prin A_0 aria măturată de raza vectorie $P_1 P_2$ până la momentul t_0 , iar prin $A(t)$ aria măturată de $P_1 P_2$ până la momentul t , din (21) deducem

$$A(t) = A_0 + \frac{h}{2} (t - t_0). \quad (22)$$

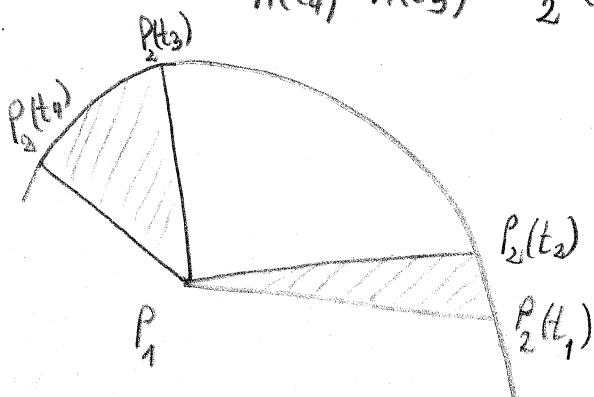
Fie $A(t_i)$ aria măturată de raza vectorie $P_1 P_2$ până la momentul t_i , $i = 1, 4$, unde $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Din (22) rezultă că ariile măturate de $P_1 P_2$ în intervalele de timp $[t_1, t_2]$ și respectiv $[t_3, t_4]$

sunt

$$A(t_2) - A(t_1) = \frac{h}{2}(t_2 - t_1), \quad (23)$$

și respectiv

$$A(t_4) - A(t_3) = \frac{h}{2}(t_4 - t_3). \quad (24)$$



Evident, dacă intervalele de timp $t_2 - t_1$ și $t_4 - t_3$ sunt egale atunci din (23) și (24) rezultă că și orile $A(t_2) - A(t_1)$, $A(t_4) - A(t_3)$ sunt egale, ceea ce justifică denumirea

de integrală primă a orilor.

Ce-a de-a patra constantă este introdusă prin intermediul integralei prime a energiei. Înmulțind scalar prin $\dot{\vec{r}}$ relația (11), deducem

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r^3} = 0. \quad (25)$$

Remarcăm faptul că termenul $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$ se poate rescrie astfel

$$\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{r^2}{2} \right) = r \dot{r}. \quad (26)$$

Ținând cont de (26), relația (25) se rescrie în forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0, \quad (27)$$

care prin integrare conduce la următoarea integrală primă numită integrală primă a energiei

$$\vec{v}^2 = \frac{2\mu}{r} + C, \quad (28)$$

unde C este o constantă (constantă energiei).

Relația (28) reprezintă ecuația conservării energiei.

Ecuatia traiectoriei

În acest paragraf vom determina ecuația traiectoriei în coordonate polare, adică o relație de tipul $r=r(\theta)$. De asemenea vom determina și ce-a de-a cincea constantă de integrare. Dacă luăm în considerare relația (16), rezultă că integrala primă a energiei (28) se rescrie astfel

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{2\mu}{r} + C. \quad (29)$$

Vom elimina dt din (29), utilizând integrala primă a unghiului (19). Astfel, putem scrie

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (30)$$

Folosind (19) și (30), relația (29) se rescrie în forma

$$h^2 \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 = -\frac{h^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + C. \quad (31)$$

sau echivalent

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r} \right) = \pm \sqrt{C + \frac{\mu^2}{h^2} - \left(\frac{h}{r} - \frac{\mu}{h} \right)^2}. \quad (32)$$

Întrucât h, μ, C sunt constante relația (32) este echivalentă cu

$$\pm \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}} = d\theta \quad (33)$$

unde

$$\varphi = \frac{\frac{h}{r} - \frac{\mu}{h}}{\sqrt{C + \frac{\mu^2}{h^2}}}. \quad (34)$$

Integrând (33) obținem

$$\arcsin \frac{\frac{h}{r} - \frac{\mu}{h}}{\sqrt{C + \frac{\mu^2}{h^2}}} = \theta - \omega, \quad (35)$$

unde ω este o constantă (ce-a de-a cincea constantă de integrare), sau echivalent

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{C h^2}{\mu^2}} \cos(\theta - \omega)}{\frac{h^2}{\mu}} \quad (36)$$

Dacă introducem notațiile

$$e = \sqrt{1 + \frac{C h^2}{\mu^2}}, \quad p = \frac{h^2}{\mu}, \quad \varphi = \theta - \omega, \quad (37)$$

atunci ecuația traiectoriei (36) se scrie în forma

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (38)$$

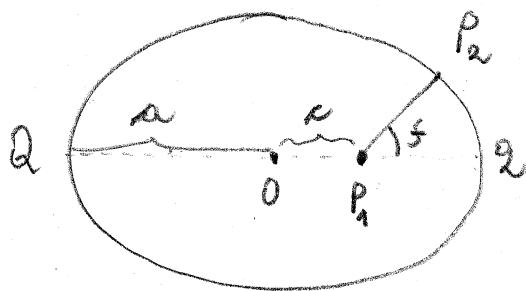
Obs 1°. Relația (38) reprezintă ecuația focală a unei conice. Tipul conicei este dat de semnul constantei C . Astfel, ținând cont de faptul că e este excentricitatea conicei, distingem cazurile

- a) $C < 0 \Leftrightarrow e \in [0, 1)$ (elipsă);
- b) $C = 0 \Leftrightarrow e = 1$ (parabolă);
- c) $C > 0 \Leftrightarrow e > 1$ (hiperbolă).

2°. Ecuația (38) este expresie matematică a primei legi a lui Kepler.

3°. p se numește parametru conicei. Spre exemplu, în cazul elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, acesta este $p = \frac{b^2}{a}$, sau dacă ținem cont de relațiile $a^2 = b^2 + c^2$ și $e = \frac{c}{a}$, unde e este distanța focală atunci $p = a(1 - e^2)$.

4°. Variabila φ poartă numele de anomolie adevărată și reprezintă, în cazul mișcării eliptice, unghiul dintre axa mare a elipsei și raza vector $P_1 P_2$ (vezi figura)



2Q - oxa mare a elipsei
 Q - pericentru (periheliu dacă
 P_1 este Soarele, perigeu dacă P_1
 este Pământul, periastru dacă
 P_1 este un anumit astru)

Q - apocentru (afeliu dacă P_1 este Soarele, apogeu dacă P_1 este Pământul,
 apoastru pentru un anumit astru).

P_1 - se află în unul din focarele elipsei.

Miscarea eliptică

Vom studia mișcarea punctului P_2 în cadrul traiectoriei eliptice. Vom
 determina ultimele constante de integrare. În baza relației $\dot{\theta} = \dot{\varphi} - \omega$,
 integrala primă a energiei și integrala primă a orilor se rescriu
 astfel:

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{2\mu}{r} + C, \quad r^2 \dot{\varphi} = h. \quad (39)$$

Dacă exprimăm constantele C și h prin intermediul elementelor elipsei, adică

$$h^2 = \mu p = \mu a(1-e^2), \quad C = (e^2 - 1) \frac{\mu^2}{h^2} = \frac{(e^2 - 1) \mu^2}{\mu a(1-e^2)} = -\frac{\mu}{a}, \quad (40)$$

atunci relațiile (39) devin

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}, \quad r^2 \dot{\varphi} = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \quad (41)$$

Eliminând $\dot{\varphi}$ din cele două relații de mai sus deducem

$$\dot{r}^2 + r^2 \frac{\mu a(1-e^2)}{r^4} = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}, \quad (42)$$

care se poate rescrie în forma

$$r^2 \dot{r}^2 = \frac{\mu}{a} [a^2 e^2 - (r-a)^2]. \quad (43)$$

Separând variabilele, găsim

$$\frac{r dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} dt. \quad (44)$$

Pentru a integra ecuația (44) facem următoarea schimbare de variabilă

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (45)$$

unde u se numește anomolie excentrică și are următoarea interpretare.

Să considerăm elipsa și cercul circumscris elipsei. Notăm ca mai sus prin Q și Q' , pericentrul și respectiv apocentrul. Fie P_2' punctul de pe cerc cu proprietatea că $P_2 P_2' \perp Q Q'$. Notăm prin A punctul de intersecție dintre axa mare a elipsei $Q Q'$ și dreapta $P_2 P_2'$. Anomolia excentrică este unghiul dintre $P_2' O$, unde

O este centrul cercului, și axa mare a elipsei, $u = \angle P_2' O A$.

Să arătăm că între raza vector r și anomolia excentrică u are loc relația (45).

Astfel, dacă privim elipsa ca proiecție a unui cerc situat într-un plan diferit, care formează cu planul figurii unghiul ψ , adică

$\cos \psi = \frac{b}{a}$, atunci avem

$$P_2 A = P_2' A \cos \psi = \frac{b}{a} P_2' A = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{a} P_2' A = \sqrt{1-e^2} P_2' A. \quad (46)$$

Exprimând $P_1 A$ și $P_2 A$ în două moduri diferite, și ținând cont de (46) deducem:

$$r \cos \psi = a \cos u - c = a(\cos u - e), \quad (47)$$

$$r \sin \psi = a \sqrt{1-e^2} \sin u. \quad (48)$$

Relațiile (47) și (48) conduc la

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 [\cos^2 u - 2e \cos u + e^2 + \sin^2 u - e^2(1 - \cos^2 u)] = \\ &= a^2 (1 - e \cos u)^2. \end{aligned} \quad (49)$$

din care se obține relația (45). Mai mult, utilizând relațiile (45) și

și (47) putem stabili legătura dintre u și t . Astfel, putem scrie

$$r(1 + \cos \varphi) = a[1 - e \cos u + \cos u - e] = a[(1 - e) + (1 - e) \cos u] = a(1 - e)[1 + \cos u],$$

$$r(1 - \cos \varphi) = a[1 - e \cos u - \cos u + e] = a[(1 + e) - (1 + e) \cos u] = a(1 + e)[1 - \cos u].$$

Împărțind cele două relații de mai sus, obținem

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}. \quad (50)$$

Să revenim la studiul ecuației (44). Cu schimbarea de variabilă (45), deducem

$$\frac{a(1 - e \cos u) a e \sin u du}{\sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2 u}} = \sqrt{\frac{\mu}{a}} dt, \quad (51)$$

care prin integrare conduce la relația

$$u - e \sin u = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} (t - t_0) \quad (52)$$

unde t_0 este o constantă (ce-a de-a șasea constantă de integrare). Astfel, soluția problemei celor două corpuri este determinată.

Obs. 5° Relația (52) poartă numele de ecuația lui Kepler. Aceasta descrie mișcarea relativă a punctului P_2 față de P_1 .

6° Dacă $u = 0$, atunci din (52) rezultă că $t = t_0$, ceea ce arată că t_0 reprezintă momentul trecerii la pericentru.

7° Constanta definită prin

$$M = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} (t - t_0) \quad (53)$$

se numește anomalie medie. Dacă $e = 0$ (traiectoria este un cerc)

atunci $M = u = \varphi$. De asemenea, constanta

$$n = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} \quad (54)$$

poartă numele de viteză unghiulară medie.

8° Dacă notăm prin T perioada de revoluție siderală (perioada de timp după care P_2 revine în același punct al orbitei, atunci luând $u = 2\pi$

În ecuația lui Kepler deducem

$$2\pi = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} T,$$

(55)

sau echivalent, ținând cont că $\mu = G(m_1 + m_2)$.

$$\frac{T^2(m_1 + m_2)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G}.$$

(56)

Relația (56) reprezintă legea a treia generalizată a lui Kepler.

Această lege permite determinarea masei planetelor care posedă sateliți. În baza relației (55) anomalia medie M și viteza unghiulară medie pot fi scrise și în forma:

$$M = \frac{2\pi}{T} (t - t_0), \quad n = \frac{2\pi}{T}$$

(57)

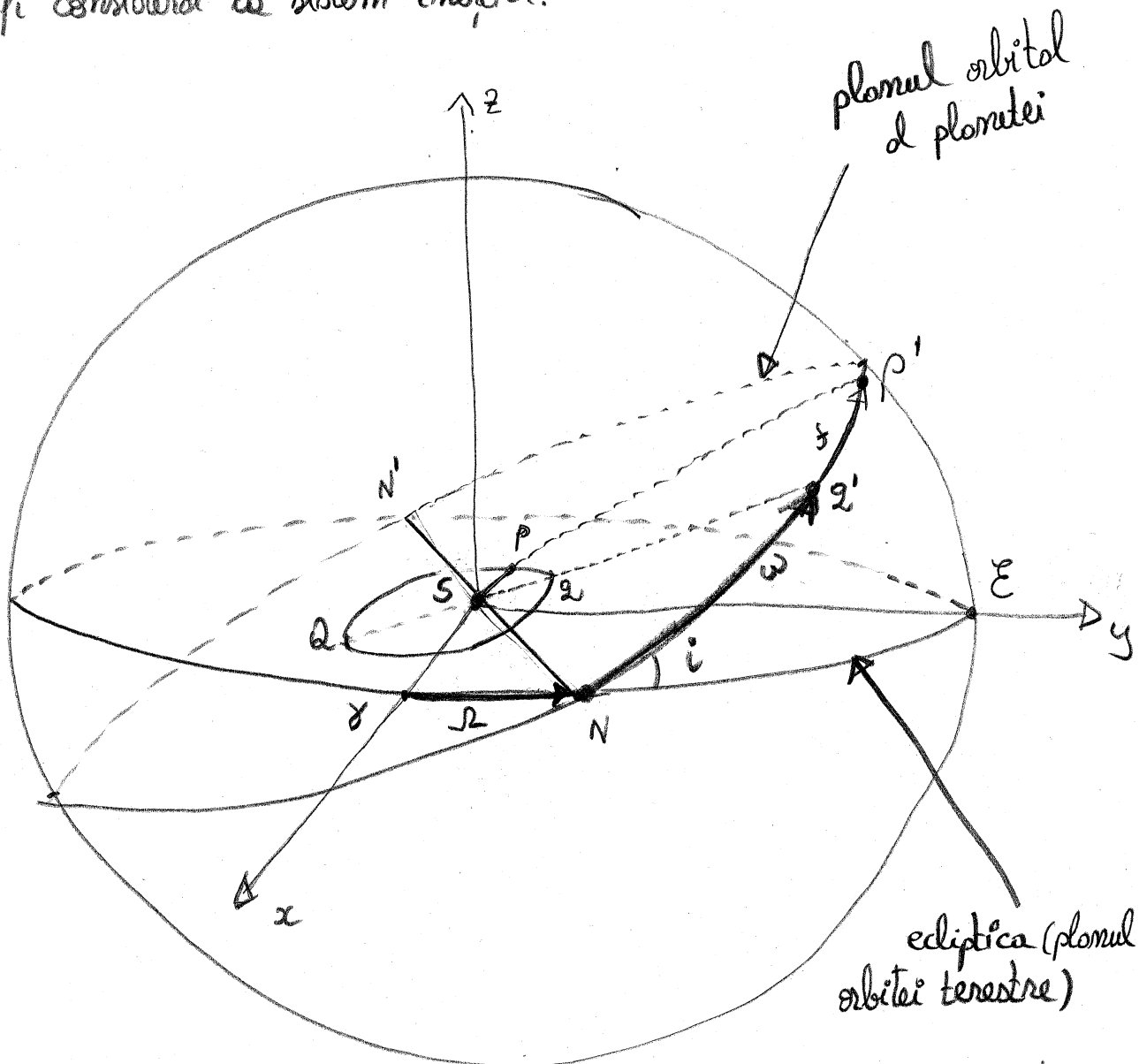
9°. Pentru orice anomalia medie $M \in \mathbb{R}$ ecuația lui Kepler are o singură soluție reală u , care poate fi determinată prin metoda aproximațiilor succesive (a se vedea fișe de exerciții).

10°. Odată determinată soluția ecuației lui Kepler $u = u(t)$, utilizând relațiile (45) și (50) putem determina $r = r(t)$ și $\dot{s} = \dot{s}(t)$.

Elemente orbitale

Miscarea punctului P_2 față de P_1 este determinată de șase constante de integrare (vectorul $\mathbf{h}$, constanta energiei C , unghiul ω și momentul trecerii la pericentru t_0). În științele spațiale, problema celor două corpuri are numeroase aplicații. Pentru a fixa ideile, vom identifica în cele ce urmează P_1 cu Soarele și P_2 cu o planetă P . În locul celor șase constante enumerate mai sus se utilizează cele definite astfel: Fie $Sx y z$ un sistem de axe cu originea în centrul Soarelui S , planul $Sx y$ coincide cu planul orbitei terestre în jurul Soarelui (numit și plan al eclipticii, iar axa Sx orientată spre un punct

fix de pe sfera cerească și aflat în planul eclipticii, și nume
punctul vernal γ (sau punctul echinocțial de primăvară). La
echinocțial de primăvară, Pământul se află pe axa x , semiaxa
negativă. Dacă nu ținem cont de alte efecte sistemul $Sxyz$ poate
fi considerat ca sistem inertial.



Vom nota prin NN' dreapta de intersecție dintre planul orbitei
terestre (planul eclipticii) și planul orbital al planetei P , prin Q și
 Q' periheliul și respectiv afeliul, Q' proiecția lui Q pe sfera cerească
și prin P' proiecția planetei P pe sfera cerească.

Cele 6 elemente care descriu mișcarea punctului P , numite și elemente
orbitale sunt:

1. Longitudinea nodului ascendent Ω :

$$\Omega = \angle SN = \widehat{SN}, \quad \Omega \in [0^\circ, 360^\circ);$$

2. Inclinarea planului orbital față de planul eclipticii i :

$$i \in [0^\circ, 180^\circ] \quad (\text{unghiul dintre cele două plane});$$

Dacă $i \in [0^\circ, 90^\circ]$ mișcarea este directă, iar dacă $i \in (90^\circ, 180^\circ]$ mișcarea este retrogradă.

3. Argumentul periheliului (pericentrului în caz general) ω :

$$\omega = \angle NSQ' = \widehat{NQ'}, \quad \omega \in [0^\circ, 360^\circ);$$

4. Semiaxa mare a orbitei a :

$$a > 0;$$

5. Excentricitatea orbitei e :

$$e \in [0, 1);$$

6. Momentul trecerii la periheliu t_0 .

Primele 5 elemente sunt de natură geometrică, și anume Ω și i determină planul orbital față de sistemul de axe $Sxyz$, ω determină orientarea elipsei în planul orbital, a precizează dimensiunea elipsei, e descrie forma elipsei, iar cel de-al șaselea parametru este de natură cinematică și fixează poziția planetei la un anumit moment.