

Fisa de exercitii

1. Cunoscând elementele orbitale $(a, e, i, \Omega, \omega, t_0)$ ale unei planete, determinăm componentele vectorului de poziție și vectorului viteză față de reperul ecliptic heliocentric $Sxyz$, la un moment fixat t .

Rezolvare. Cunoscând a și t_0 calculăm anomalia medie la momentul t

$$M = \frac{\mu}{a^{3/2}} (t - t_0),$$

iar apoi din ecuația lui Kepler

$$u - e \sin u = M,$$

determinăm anomalia excentrică u la momentul t . Pe baza vectorilor r și anomalia observată f , la momentul t , se determină din relațiile

$$r = a(1 - e \cos u),$$

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2}.$$

Pentru a calcula componentele vectorului viteză sunt necesari să determinăm $\dot{r}$ și $r\dot{f}$ la momentul t . Pentru aceasta, vom utiliza ecuația traiectoriei

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f},$$

și integrând prima a orbiților

$$r^2 \dot{f} = h,$$

unde $h = \sqrt{\mu p}$, $p = a(1 - e^2)$. Ecuația traiectoriei poate fi scrisă în forma $r(1 + e \cos f) = p$, și prin derivare în raport cu t ,

deducem

$$\dot{r}(1+e\cos f) - r e \dot{f} \sin f = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{r} p}{r} - r e \dot{f} \sin f = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{r} p - e r^2 \dot{f} \sin f \Leftrightarrow \dot{r} = \frac{h e}{p} \sin f.$$

utilizând relațiile $h = \sqrt{\mu p}$, $p = a(1-e^2)$, obținem

$$\dot{r} = e \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \sin f.$$

Integrala primă a orbitei și ecuația traiectoriei conduc la

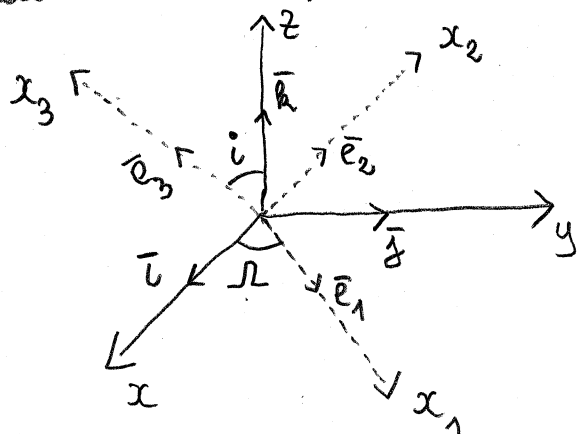
$$r \dot{f} = \frac{h}{r} \Leftrightarrow r \dot{f} = \frac{h}{p} (1+e\cos f),$$

sau echivalent

$$r \dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} (1+e\cos f).$$

$r, f, \dot{r}, r \dot{f}$ sunt astfel calculate la momentul t .

Fie $\{S; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ reperul cu originea în centrul Soarelui S , unde $\bar{e}_1$ și $\bar{e}_2$ sunt în planul orbital al planetei, $\bar{e}_1$ fiind versorul liniei nodurilor $N'N$ (dreapta de intersecție dintre planul orbital al planetei și planul eclipticii) orientat dinspre nodul descendent N' spre nodul ascendent N (vezi figura din curs), iar $\bar{e}_3$ versorul vectorului $\bar{h}$ ($\bar{e}_3$ este normal la planul orbital). Dacă notăm prin x_1, x_2, x_3 coordonatele planetei P în acest reper atunci vectorul de poziție se poate scrie în forma



$$\vec{r} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3,$$

unde (a se vedea figura din curs referitoare la elementele orbitale)

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\omega + f), \\ x_2 = r \sin(\omega + f), \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Vectorul viteză față de acest reper este

$$\vec{v} = \dot{x}_1 \vec{e}_1 + \dot{x}_2 \vec{e}_2 + \dot{x}_3 \vec{e}_3,$$

unde

$$\dot{x}_1 = \dot{r} \cos(\omega + t) - r \dot{\theta} \sin(\omega + t)$$

$$\dot{x}_2 = \dot{r} \sin(\omega + t) + r \dot{\theta} \cos(\omega + t)$$

$$\dot{x}_3 = 0.$$

Pentru a determina componentele vectorului de poziție și componentele vectorului viteză față de reperul $\{S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ definit în cadrul cursului vom face următoarele două rotații: o rotație de unghi i în jurul versorului $\vec{e}_1$; și o rotație de unghi Ω în jurul versorului $\vec{k}$ (a se vedea figura de mai sus):

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \xrightarrow{R_1(i)} \{\vec{e}_1, \vec{k} \times \vec{e}_1, \vec{k}\} \xrightarrow{R_3(\Omega)} \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}.$$

Folosind formulele de rotație, rezultă că x, y, z și $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ adică componentele vectorului $\vec{r}$ și respectiv vectorului $\vec{v}$ în reperul $\{S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se obțin astfel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix},$$

sau echivalent, dacă ținem cont de relațiile de mai sus

$$x = r [\cos \Omega \cos(\omega + t) - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + t)],$$

$$y = r [\sin \Omega \cos(\omega + t) + \cos \Omega \cos i \sin(\omega + t)],$$

$$z = r \sin i \sin(\omega + t),$$

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{r} [\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + f)] - r \ddot{f} [\cos \Omega \sin(\omega + f) + \sin \Omega \cos i \cos(\omega + f)], \\ \ddot{y} &= \ddot{r} [\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \cos i \sin(\omega + f)] - r \ddot{f} [\sin \Omega \sin(\omega + f) - \cos \Omega \cos i \cos(\omega + f)], \\ \ddot{z} &= \ddot{r} \sin i \sin(\omega + f) + r \ddot{f} \sin i \cos(\omega + f).\end{aligned}$$

2. Cunoșcând coordonatele heliocentrice ecliptice (x, y, z) ale unei planete și componentele vitezei $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ la un anumit moment t , determinăm elementele orbitale ale planetei.

Rezolvare. Pentru determinarea semioxei mari a utilizăm integrala primă a energiei

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}.$$

Astfel, putem calcula mărimea vitezei și distanța dintre planetă și Soare la momentul t

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

iar din relație de mai sus deducem

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}}.$$

Excentricitatea orbitei se obține utilizând integrala primă a mișcării

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$$

și relație

$$h^2 = \mu p = \mu a(1 - e^2).$$

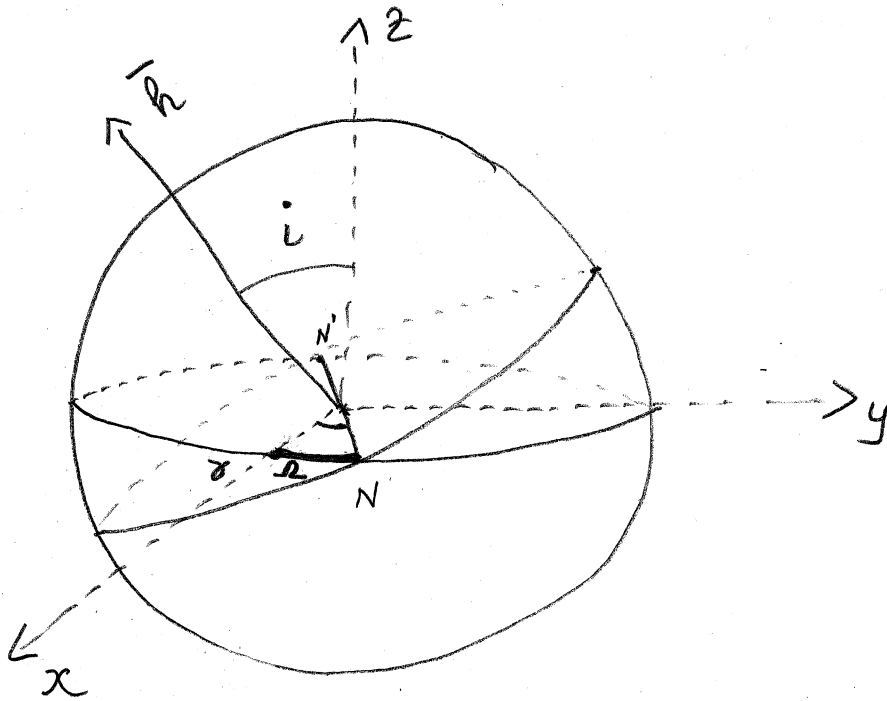
Astfel, calculăm mai întâi

$$h = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|,$$

iar apoi din relație de mai sus deducem

$$e = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}.$$

Pentru determinarea inclinării i a planului orbital față de planul eclipticii și a longitudinii nodului ascendent Ω , procedăm astfel: întrucât $\vec{h}$ este normal la planul orbital, din figura de mai jos deducem:



$$h_x = + h \sin i \sin \Omega$$

$$h_y = - h \sin i \cos \Omega$$

$$h_z = + h \cos i$$

unde h_x, h_y, h_z sunt componentele vectorului $\vec{h}$ în baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, adică $\vec{h} = h_x \vec{i} + h_y \vec{j} + h_z \vec{k}$. Evident, din relația $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, deducem

$$h_x = y\dot{z} - z\dot{y}, \quad h_y = z\dot{x} - x\dot{z}, \quad h_z = x\dot{y} - y\dot{x}, \quad h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}.$$

Unghiul de inclinare i se determină din relație

$$\cos i = \frac{h_z}{h}$$

care furnizează o unică valoare a unghiului i în intervalul $[0^\circ, 180^\circ]$.

Dacă $i = 0^\circ$ sau $i = 180^\circ$, adică cele două plane (planul orbital și planul eclipticii) coincid, atunci Ω este un unghi nedeterminat.

Dacă $i \neq 0^\circ$ și $i \neq 180^\circ$ atunci Ω se determină din relația

$$\operatorname{tg} \Omega = \frac{h_x}{-h_y}.$$

Pentru determinarea argumentului periheliului ω , va trebui să determinăm în primul rând anamalia adevărată f . Astfel, din relația

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

prin derivare deducem că $\dot{r}$ se poate calcula cu ajutorul relației

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r}.$$

Utilizând relațiile (a se vedea problema anterioară)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}, \quad \dot{r} = e \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \sin f,$$

deducem

$$\cos f = \frac{a(1-e^2)}{re} - \frac{1}{e}, \quad \sin f = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{\mu}} \dot{r}$$

și astfel o unică valoare a lui f în intervalul $[0^\circ, 360^\circ)$.

Argumentul periheliului ω se determină utilizând relațiile (a se vedea problema anterioară)

$$x = r [\cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \cos i \sin(\omega + f)],$$

$$y = r [\sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \cos i \sin(\omega + f)].$$

(*)

Asfel, dacă $i = 0^\circ$, atunci

$$x = r \cos(\Omega + \omega + f), \quad y = r \sin(\Omega + \omega + f)$$

de unde obținem

$$\operatorname{tg}(\Omega + \omega + f) = \frac{y}{x}.$$

Dacă $i = 180^\circ$ atunci

$$x = r \cos(\Omega - \omega - f), \quad y = r \sin(\Omega - \omega - f),$$

de unde deducem

$$\operatorname{tg}(\Omega - \omega - f) = \frac{y}{x}.$$

În ambele cazuri, Ω nu este determinat, însă $\omega + \Omega$ și respectiv $\Omega - \omega$ sunt bine determinate.

Dacă $i \neq 0^\circ$ și $i \neq 180^\circ$ atunci din (*) deducem

$$\cos(\omega + f) = \frac{1}{r} [x \cos \Omega + y \sin \Omega], \quad \sin(\omega + f) = \frac{1}{r \cos i} [-\sin \Omega x + \cos \Omega y],$$

și astfel

$$\operatorname{tg}(\omega + f) = \frac{\frac{1}{\cos i} [-\sin \Omega x + \cos \Omega y]}{x \cos \Omega + y \sin \Omega}.$$

Din relația de mai sus deducem o unică valoare a unghiului ω .

Pentru a determina t_0 , calculăm mai întâi anomalia excentrică u cu ajutorul relației

$$\operatorname{tg} \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{u}{2},$$

iar apoi din ecuația lui Kepler

$$u - e \sin u = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} (t - t_0),$$

deducem t_0 .

3. Realizați un program de calcul care implementează algoritmi descriși în problemele 1 și 2. Programul va cuprinde cel puțin două funcții (metode). Prima dintre acestea primește ca parametri elementele orbitale a, e, i, ω, Ω și M , unde M este anomalia medie și returnează componentele (x, y, z) și $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ale vectorului de poziție și respectiv vectorului viteză ale planetei. Cealaltă metodă (funcție) va avea ca parametri componentele (x, y, z) și $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ale vectorilor de poziție și viteză și va returna elementele orbitale a, e, i, ω, Ω și M .

Obs. 1° Utilizați ca unitate de măsură a distanței unitatea astronomică ($1 \text{ u.a.} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} =$ distanța medie Pământ-Sole). Utilizând legea a treia a lui Kepler, unitățile de măsură de masă și timpului nu pot fi alese în mod arbitrar. Spre exemplu, dacă alegem unitatea de măsură a masei astfel încât $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$, cînd primul corp este Soarele și cel de-al doilea corp este Pământul, atunci din legea a treia a lui Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu},$$

rezultă că unitatea de măsură a timpului poate fi aleasă astfel încât perioada de revoluție a Pământului în jurul Soarelui să fie $T = 2\pi$.

Cu alte cuvinte unitățile de măsură ale distanței și timpului, fie acestea notate prin *aurd* și *aurl* sunt

$$1 \text{ aurd} = 1 \text{ u.a.} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$1 \text{ aurl} = \frac{1}{2\pi} \text{ ani}.$$

Cu aceste unități de măsură $\mu = 1$.

Aplicație numerică: Determinați (x, y, z) , $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ în unitățile de măsură de mai sus, dacă

$$a = 1,2, \quad e = 0,1, \quad i = 10^\circ, \quad \omega = 20^\circ, \quad \Omega = 40^\circ, \quad M = 5^\circ.$$