

Problema celor n corpuri (formularea problemei, integrale prime, studiu numeric în cazul $n=3$)

Problema celor n corpuri a fost formulată de Newton. Aceasta constă în studiul mișcării a n puncte materiale masive, care se atrag conform legii atracției universale. Se cunosc pozițiile și vitezele punctelor la un moment inițial fixat.

Obs 1°. Pentru $n=2$, problema este integrabilă prin cuadraturi. Soluția poate fi exprimată printr-un număr finit de operații algebrice, care includ inversarea unor funcții cunoscute sau calculul unor integrale ale unor funcții cunoscute. Soluția problemei celor două corpuri (cazul mișcării relative) poate fi exprimată prin intermediul a 6 parametri cunoscuți sub numele de elemente orbitale, 5 de natură geometrică definesc conica și orientarea acesteia în spațiu, iar cel de-al șaselea parametru, de natură cinematică, descrie mișcarea. Problema celor două corpuri este singura problemă gravitațională, cu excepția unor cazuri speciale de problemă celor n corpuri $n > 2$, care admite soluție analitică generală și completă.

2°. Pentru $n > 2$, problema este neintegrabilă în sensul teoremei lui Liouville. În ciuda simplității formulării, problema celor n corpuri cu $n > 2$, este o complexitate mult mai mare, comparativ cu problema celor două corpuri, chiar și în cazul a trei corpuri. Deoarece fiecare corp al sistemului

meconic se află într-un câmp gravitațional variabil, datorită atracției și mișcării celorlalte corpuri din sistem, este posibilă o varietate mare de regimuri orbitale. Spre exemplu, dacă considerăm doar problema celor trei corpuri, atunci în funcție de diverși parametri, cum ar fi masele corpurilor și condițiile inițiale, putem avea: mișcări mărginite (sisteme planetare sau satelitare), traiectorii hiperbolice rezultate în urma trecerii unui corp prin vecinătatea unui alt corp, coliziuni, resermonțe orbitale, mișcări haotice, mișcări periodice sau aproape periodice, puncte de echilibru, curbe invariante, etc. Dacă ar exista o soluție analitică, de tipul celei pentru cazul a două corpuri, aceste ar trebui să fie de o complexitate inimaginabilă pentru a putea descrie toate aceste regimuri orbitale.

3°. Problema celor n corpuri admite 10 integrale prime.

4°. Problema celor n corpuri, $n > 2$, nu este integrabilă prin cuadraturi, însă este integrabilă în sensul teoremei de existență și unicitate a lui Cauchy-Peano. Dacă o stare inițială a sistemului, teorema asigură existența și unicitatea soluției pe un anumit interval. Această soluție poate fi determinată numeric.

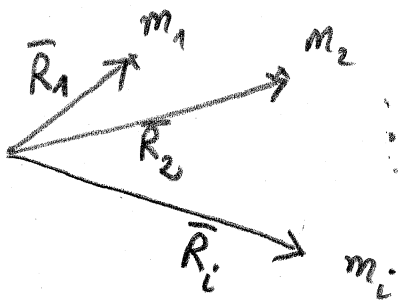
5°. Problema este și mai complexă dacă se iau în considerare formele corpurilor și distribuția internă a masei.

6°. Chiar dacă problema generală nu are o soluție generală, putem obține o multitudine de informații referitoare la diverse probleme

particulare, precum problema restrânsă a celor trei corpuri, modele care se pot reduce la sisteme aproape integrabile, dinamica corpurilor având mase mici comparativ cu mase corpului (corpurilor) primar (primare), dinamica rezonanțelor orbitale, designul traiectoriilor navelor cosmice, etc.

Formularea problemei. Integrale prime

Fie O originea unui sistem de referință inertial. Notăm prin $\bar{R}_i$ vectorul de poziție al corpului având masa m_i , $i=1,2,\dots,n$.



Aplicând principiul lui Newton și principiul acțiunii și reacțiunii, obținem următorul sistem de ecuații pentru determinarea vectorilor $\bar{R}_i(t)$

$$m_1 \ddot{\bar{R}}_1 = \frac{G m_1 m_2}{|\bar{R}_1 - \bar{R}_2|^3} (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) + \frac{G m_1 m_3}{|\bar{R}_1 - \bar{R}_3|^3} (\bar{R}_3 - \bar{R}_1) + \dots + \frac{G m_1 m_n}{|\bar{R}_1 - \bar{R}_n|^3} (\bar{R}_n - \bar{R}_1),$$

$$m_2 \ddot{\bar{R}}_2 = \frac{G m_1 m_2}{|\bar{R}_1 - \bar{R}_2|^3} (\bar{R}_1 - \bar{R}_2) + \frac{G m_2 m_3}{|\bar{R}_2 - \bar{R}_3|^3} (\bar{R}_3 - \bar{R}_2) + \dots + \frac{G m_2 m_n}{|\bar{R}_2 - \bar{R}_n|^3} (\bar{R}_n - \bar{R}_2),$$

⋮

$$m_n \ddot{\bar{R}}_n = \frac{G m_1 m_n}{|\bar{R}_1 - \bar{R}_n|^3} (\bar{R}_1 - \bar{R}_n) + \frac{G m_2 m_n}{|\bar{R}_2 - \bar{R}_n|^3} (\bar{R}_2 - \bar{R}_n) + \dots + \frac{G m_n m_{n-1}}{|\bar{R}_{n-1} - \bar{R}_n|^3} (\bar{R}_{n-1} - \bar{R}_n).$$

(1)

(3)

Dacă introducem relația

$$\bar{r}_{ij} = \bar{R}_j - \bar{R}_i, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j \quad (2)$$

și observăm că

$$\bar{r}_{ij} = -\bar{r}_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j \quad (3)$$

atunci ecuațiile (1) se pot scrie în mod compact în forma

$$m_i \ddot{\bar{R}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \bar{r}_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

unde $r_{ij} = |\bar{r}_{ij}|$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

Integrarea primă a centrului de masă. Dacă sumăm relațiile (4) pentru i de la 1 la n , și utilizăm (3), deducem

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\bar{R}}_i = \sum_{\substack{i, j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \bar{r}_{ij} = \sum_{\substack{j, i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ji}^3} \bar{r}_{ji} = \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} (\bar{r}_{ij} + \bar{r}_{ji}) = 0.$$

Prin integrare obținem

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{R}}_i = \bar{a}, \quad \bar{a} - \text{constant} \quad (6)$$

$$\text{și} \quad \sum_{i=1}^n m_i \bar{R}_i = \bar{a} t + \bar{b}, \quad \bar{b} - \text{constant} \quad (7)$$

Dacă ținem cont de faptul că centrul de masă al sistemului mecanic este prin definiție un punct fictiv al cărui vector de

poziție este definit prin

$$\bar{R}^* = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{R}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (8)$$

atunci relația (7) se rescrie în forma

$$\bar{R}^* = \frac{\bar{a}t + \bar{b}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (9)$$

Așadar centrul de masă este staționar dacă $\bar{a} = \bar{0}$, sau se mișcă rectiliniu și uniform dacă $\bar{a} \neq \bar{0}$.

Integrala primă a momentului cinetic. Un simplu calcul

arată că

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \bar{R}_i \times \bar{R}_j &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \bar{R}_i \times \bar{R}_j = \\ &= \sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_j m_i}{r_{ji}^3} \bar{R}_j \times \bar{R}_i = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} (\bar{R}_i \times \bar{R}_j + \bar{R}_j \times \bar{R}_i) = \end{aligned} \quad (10)$$

$$= \bar{0}.$$

Înmulțind vectorul la stânga prin $\bar{R}_i$ relația (4) și sumând după i , deducem în baza relației (10) că

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{R}_i \times \ddot{\bar{R}}_i = \bar{0}. \quad (11)$$

Dim (11) deducem

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{R}_i \times \dot{\bar{R}}_i = \bar{h}, \quad \bar{h} - \text{constant}. \quad (12)$$

Relația (12) poartă numele de integrală primă a momentului cinetic.

Integrula primă a energiei. Prin calcule deducem că

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{R}}_i \cdot \vec{\pi}_{ij} &= \sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_j m_i}{r_{ji}^3} \dot{\vec{R}}_j \cdot \vec{\pi}_{ji} = \\
 &= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{R}}_j \cdot \vec{\pi}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} (\dot{\vec{R}}_i - \dot{\vec{R}}_j) \cdot \vec{\pi}_{ij} = \\
 &= - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \dot{\vec{r}}_{ij} \cdot \vec{\pi}_{ij} = - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\pi}_{ij}^2}{2} \right) = \\
 &= - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \dot{r}_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} \right). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Înmulțind scalar prin $\dot{\vec{R}}_i$ relația (4) și sumând după i , deducem în baza relației (13) că

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{\vec{R}}_i^2}{2} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}} \right]. \quad (14)$$

Dacă notăm prin E energia cinetică a sistemului mecanic și prin V potențialul forțelor, adică

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{R}}_i^2, \quad V = - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (15)$$

atunci din (14), prin integrare obținem integrula primă a energiei

$$E + V = C, \quad C - \text{constant} \quad (16)$$

(6)

Obs 7°. Peimcore' a arătat că nu există alte integrale prime care implică funcții algebrice sau funcții integrale a căror variabile sunt coordonatele și componentele vectorilor viteze ale punctelor materiale din sistem.

8°. Dacă (x_i, y_i, z_i) , $i = \overline{1, n}$ sunt coordonatele carteziene ale punctelor din sistem față de un reper $R = \{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ atunci ecuațiile de mișcare (4) se pot rescrie în forma

$$m_i \ddot{\vec{R}}_i = -\nabla_i V, \quad i = \overline{1, n} \quad (17)$$

unde

$$\nabla_i = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Pe componente, ecuațiile (17) au forma

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (19)$$

9°. Integrala primă a energiei este foarte utilă în cazul studiilor numerice, întrucât aceasta asigură controlul preciziei de calcul (alegerea pasului de integrare).

10°. Deoarece centrul de masă al sistemului se mișcă rectiliniu și uniform, iar în baza principiului inerției rezultă că orice reper care se mișcă rectiliniu și uniform este la rândul său reper inertial, în aplicații putem considera originea O a reperului în centrul de masă al sistemului mecanic.

Studiu numeric al problemei celor 3 corpuri

Considerăm un sistem mecanic format din trei puncte materiale.

Presupunem că $m_3 \geq m_2 \geq m_1$. În baza observației 10° alegem originea 0 a reperului în centrul de masă al sistemului format din cele trei puncte. În acest caz potențialul V are forma

$$V = - \frac{G m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{G m_2 m_3}{r_{23}} - \frac{G m_3 m_1}{r_{31}}. \quad (20)$$

Dacă introducem notările $\dot{x}_i = u_i$, $\dot{y}_i = v_i$, $\dot{z}_i = w_i$, $i = \overline{1,3}$, putem scrie ecuațiile de mișcare în forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_i = u_i, \\ \dot{y}_i = v_i, \\ \dot{z}_i = w_i, \\ \ddot{x}_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{G m_k}{r_{ik}^3} (x_i - x_k), \\ \ddot{y}_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{G m_k}{r_{ik}^3} (y_i - y_k), \\ \ddot{z}_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 \frac{G m_k}{r_{ik}^3} (z_i - z_k), \end{array} \right. \quad i = \overline{1,3} \quad (21)$$

Putem integra acest sistem de 18 ecuații de ordinul 1 cu 18 necunoscute, și anume $x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i$, $i = \overline{1,3}$, prin metode numerice. Dacă considerăm mișcări plane atunci sistemul (21) se reduce la 12 ecuații.

Vom identifica m_3 cu Soarele m_2 cu o planetă și m_1 cu un asteroid. Alegem unitățile de măsură a masei, distanței, și timpului astfel încât $Gm_3 = 1$, unitatea de lungime este unitatea astronomică ($1 \text{ a.u.} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km} = \text{distanța medie Pământ - Soare}$), iar unitatea de timp este $\frac{1}{2\pi}$ ani.

În baza relațiilor (6) și (7), unde $\bar{a} = \bar{o}$, $\bar{b} = \bar{o}$ (centrul de masă reprezentat originea 0 a reperului) rezultă că este suficient să prescriem datele inițiale ale planetei m_2 și asteroidului m_3 . Poziția și viteza Soarelui la momentul inițial se obțin din (6) și (7).

Exemple de traiectorii pentru diverse valori ale parametrilor m_1, m_2, m_3 și datele inițiale:

i) $m_2 = 0.001 m_3, m_1 = 3 \cdot 10^{-6} m_3$

$$x_2 = 5.2, y_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \dot{y}_2 = 0.406401,$$

$$x_1 = -1, y_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{y}_1 = -1$$

(Soare - Jupiter - Pământ)

ii) $m_2 = 0.001 m_3, m_1 = 3 \cdot 10^{-6} m_3$

$$x_2 = 5.2, y_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \dot{y}_2 = 0.406401,$$

$$x_1 = 3.27579, y_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{y}_1 = 0.552512,$$

(Soare - Jupiter - Asteroid în rezonanță orbitală 2:1)

iii) $m_2 = 0.1 m_3, m_1 = 3 \cdot 10^{-6} m_3$

$$x_2 = 5.2044, y_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \dot{y}_2 = 0.458529, x_1 = 5.5, y_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$$

$$\dot{y}_1 = 0.95 \quad (m_1 \text{ este satelit al planetei } m_2, \text{ iar } m_2 \text{ satelit al Soarelui } m_3).$$

iv) $m_2 = 0.1 m_3, m_1 = 3 \cdot 10^{-6} m_3, x_2 = 5, y_2 = 0, \dot{x}_2 = 0, \dot{y}_2 = 0.426401$

$$x_1 = 5.5, y_1 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{y}_1 = 0.95.$$

(9)

Exemple de traiectorii în problema celor trei corpuri:

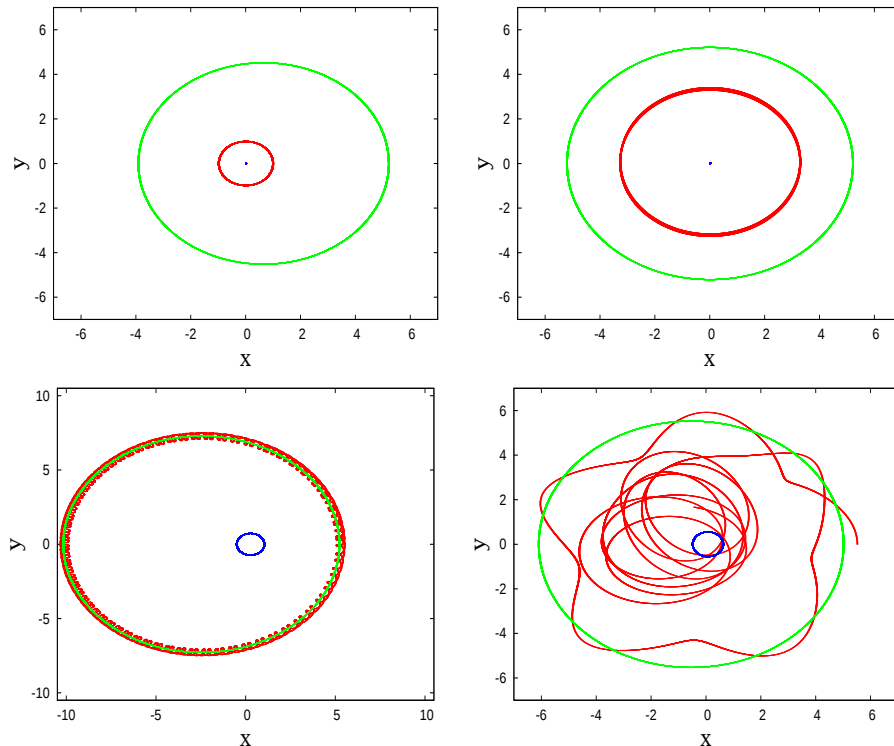


FIGURE 1. Traiectoriile Soarelui m_3 (albastru), planetei m_2 (verde), asteroidului m_1 (roșu). i) Soare–Jupiter–Pământ (stânga sus); ii) Soare–Jupiter–Asteroid, unde asteroidul este în rezonanța 2:1 cu Jupiter (dreapta sus); iii) m_1 este statelit al planetei m_2 și planeta m_2 este satelit al Soarelui m_3 (stânga jos); iv) mișcări impredictibile (dreapta jos).