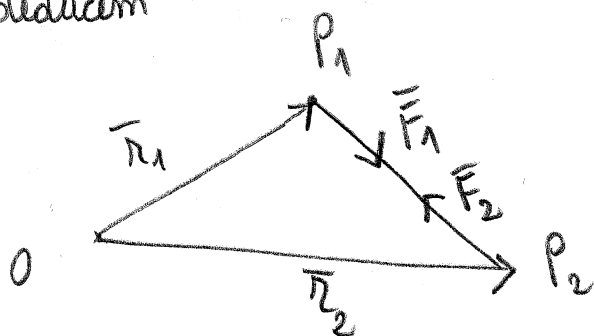


Fisa de exercitii

1. Determinați funcția lui Hamilton pentru problema celor două corpuri.

Rezolvare Considerăm două corpuri P_1 și P_2 , de mase m_1 și respectiv m_2 , care se trag conform legii atracției universale. Fie O originea unui reper inertial. Vom nota prin $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ vectorii de poziție a celor două puncte, iar prin $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ forțele care acționează asupra punctelor P_1 și respectiv P_2 . Aplicând principiul lui Newton deducem



$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1,$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2.$$

Dacă introducem notația

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad r = |\vec{r}|$$

și aplicăm principiul acțiunii și reacțiunii, forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ se scriu astfel

$$\vec{F}_1 = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{P}_1\vec{P}_2}{|\vec{P}_1\vec{P}_2|} = \frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Ecuatiile lui Newton devin

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Împărțind prima ecuație prin m_1 , iar a doua prin m_2 , și scăzând relațiile obținute, deducem

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{0}$$

unde $\mu = G(m_1 + m_2)$. Fie m un număr real pozitiv. Înmulțind ecuația de mai sus prin m , deducem

$$m \ddot{\vec{r}} = -\frac{m\mu}{r^3} \vec{r},$$

care formal reprezintă ecuația lui Newton ce descrie mișcarea unui punct material de masă m și având vectorul de poziție $\vec{r}$, asupra căruia acționează forța $\vec{F} = -\frac{m\mu}{r^3} \vec{r}$. Utilizând un sistem de coordonate cartezian, vectorul $\vec{r}$ îl putem scrie în forma $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, unde (x, y, z) sunt coordonatele punctului în acest sistem. Folosind aceste coordonate, se poate arăta că $\vec{F}$ este o forță conservativă, adică $\exists V = V(x, y, z)$ astfel încât

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = -\vec{F}, \quad (*)$$

unde $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$. Într-adevăr, dacă V are forma

$$V = -\frac{\mu m}{r},$$

atunci relația (*) este satisfăcută. Pentru a verifica această afirmație remarcăm că $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (r^{-1}) = -r^{-2} \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3}$.

Astfel, putem scrie

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\mu m}{r} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\mu m}{r} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\mu m}{r} \right) \vec{k} = \frac{\mu m}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\mu m}{r^3} \vec{r} = -\vec{F}.$$

Remarcăm că V depinde de x, y, z , prin intermediul mării vectoriale $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, adică $V = V(r)$.

Dacă utilizăm un sistem de coordonate sferice (r, θ, φ) (a se vedea Fișele de exerciții anterioare), atunci energia cinetică este

$$E(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta).$$

Introducând funcția lui Lagrange $L = E - V$, deducem impulsurile generalizate

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = m r^2 \dot{\theta}, \quad p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta,$$

și hamiltonianul

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) - \frac{\mu m}{r}.$$

(2)

2. Determinați variabilele unghiuri acțiuni pentru problema celor două corpuri, în cazul mișcării eliptice.

Rezolvare Hamiltonianul pentru problema celor două corpuri are forma

$$\mathcal{H}(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] - \frac{\mu m}{r},$$

unde $m > 0$ și $k > 0$, iar (r, θ, φ) sunt coordonatele sferice ale planetei. Se poate verifica (prin calcul) că variabilele dinamice

$$J = p_\varphi, \quad \Gamma^2 = p_\theta^2 + \frac{J^2}{\sin^2 \theta}, \quad E = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{\Gamma^2}{r^2} \right) - \frac{\mu m}{r}$$

formează un sistem involutiv, adică cele trei funcții sunt independente și paranteza Poisson a oricăror două funcții este nulă. Cum una dintre cele trei funcții este chiar hamiltonianul sistemului, rezultă că ecuațiile canonice sunt integrabile în sens Liouville. Mai mult, întrucât mișcarea eliptică este periodică, în baza teoremei Arnold-Jost putem construi un set de coordonate canonice în așa fel încât coordonatele generalizate să fie unghiuri. Modul de determinare a unui astfel de sistem de coordonate canonice a fost detaliat în cadrul cursului pentru un sistem hamiltonian cu un singur grad de libertate. Pentru un sistem hamiltonian cu, să zicem, n grade de libertate, procedura nu diferă cu nimic față de cazul sistemelor cu un singur grad de libertate totuși putem identifica n familii de curbe închise $\gamma_i, i=1, \overline{n}$, asociate celor n mișcări (multiplu) periodice. Odată determinate aceste curbe închise $\gamma_i, i=1, \overline{n}$, variabilele acțiuni se obțin prin cuadraturi. Astfel, introducând

pentru fiecare din curbele închise γ_i , $i = \overline{1, n}$ câte o variabilă unghiulară care parametrizează curba γ_i , putem calcula integralele

$$I_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} \sum_{j=1}^n p_j dq_j$$

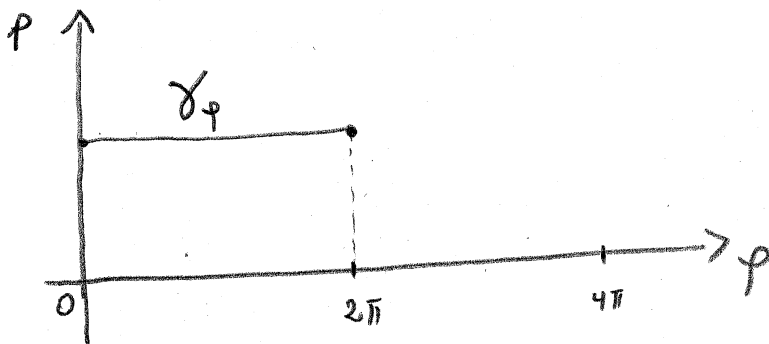
(*)

și determinăm astfel acțiunile $I_1, I_2, \dots, I_n$. În final, pentru noul sistem involutiv $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ de integrale prime a sistemului canonic aplicăm algoritmul descris de teorema lui Liouville pentru a determina unghiurile asociate acțiunilor $I_1, I_2, \dots, I_n$.

În cazul problemei celor două corpuri, determinarea curbelor închise, notate prin γ_p, γ_E și γ_H , asociate mișcărilor periodice, implică utilizarea soluțiilor ecuațiilor canonice asociate următoarelor trei sisteme hamiltoniene:

- sistemul hamiltonian caracterizat de funcția lui Hamilton J ,
- sistemul caracterizat de hamiltonianul Π^2 și respectiv
- sistemul caracterizat de funcția lui Hamilton E .

i) Hamiltonianul J este integrabil, iar variabila φ conjugată impulsului generalizat p_φ este un unghi. Astfel, curba închisă γ_φ poate fi parametrizată de unghiul φ .

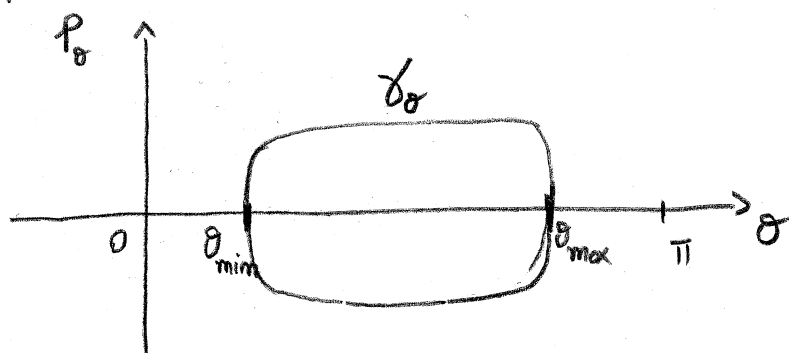


ii) Funcția Γ^2 poate fi considerată a fi Hamiltonianul unui punct material de masă $m=1$ care se mișcă pe segmentul $[0, \pi]$ sub acțiunea potențialului $V(\theta) = \frac{J^2}{\sin^2 \theta}$. Funcția Γ^2 definește o curbă închisă

γ_θ în planul (θ, p_θ) . Altfel, pentru $\Gamma^2 > \Gamma_{\min}^2 = J^2$, curba închisă

$$\gamma_\theta = \left\{ (\theta, p_\theta) / p_\theta^2 + \frac{J^2}{\sin^2 \theta} = \Gamma^2 \right\}$$

este reprezentată în figura de mai jos



unde

$$\theta_{\min} = \arcsin \left| \frac{J}{\Gamma} \right|, \quad \theta_{\max} = \pi - \theta_{\min}.$$

iii) Funcția E poate fi considerată a fi Hamiltonianul unui punct care se mișcă în semiplanul $r > 0$ sub acțiunea potențialului

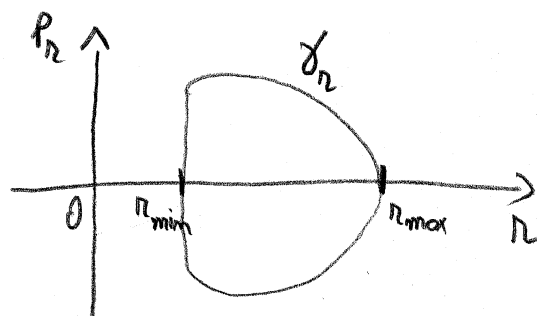
$$V(r) = \frac{\Gamma^2}{2mr^2} - \frac{\mu m}{r}. \text{ Mișcarea este mărginită pentru } E < 0 \text{ și}$$

nemărginită pentru $E \geq 0$. Pentru $E < 0$, orbita din planul (r, p_r)

este curba închisă γ_r . De-a lungul acestei curbe, r oscilează între

$$r_{\min} = -\frac{\mu m}{E} + \frac{1}{mE} \sqrt{m^4 \mu^2 + 2mE\Gamma^2},$$

$$r_{\max} = -\frac{\mu m}{E} - \frac{1}{mE} \sqrt{m^4 \mu^2 + 2mE\Gamma^2}.$$



Pentru $E \geq 0$ (cazul mișcărilor parabolice și hiperbolice) nu sunt satisfăcute ipotezele din teorema Arnold-Jost (mai precis mulțimea M_c nu este compactă). Așadar, putem defini variabilele unghiuri acțiuni doar pentru mișcări eliptice.

Considerând cazul $E < 0$, din relațiile de mai sus (vezi a doua relație după enunțul exercitiului) obținem

$$p_\varphi = J, \quad p_\theta = \left(\Gamma^2 - \frac{J^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2}, \quad p_r = \left[2m \left(E + \frac{\mu m}{r} \right) - \frac{\Gamma^2}{r^2} \right]^{1/2}.$$

Deoarece pe curba γ_φ doar φ variază, $d\theta$ și dr sunt zero, rezultă că suma corectă a relației (*) se reduce la $p_\varphi d\varphi$. O situație analogă are loc pentru curbele γ_θ și γ_r . Utilizând relațiile și observațiile de mai sus, acțiunile definite prin relația (*) pot fi calculate astfel

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\varphi} p_\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J d\varphi = J,$$

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\theta} p_\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} p_\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \left(\Gamma^2 - \frac{J^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2} d\theta = \Gamma - J, \quad (**)$$

$$I_r = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} p_r dr = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \left(2m \left(E + \frac{\mu m}{r} \right) - \frac{\Gamma^2}{r^2} \right)^{1/2} dr = -\Gamma + \mu m \sqrt{-\frac{m}{2E}}.$$

Din relațiile (**) determinăm E , adică hamiltonianul $\mathcal{H}$, în forma

$$\mathcal{H} = -\frac{m^3 \mu^2}{2(I_r + I_\theta + I_\varphi)^2}.$$

O clasă mai convenabilă de variabile canonice este obținută prin introducerea ora-numitelor variabile Delaunay, L, G, H , definite prin transformarea liniară

$$L = I_r + I_\theta + I_\varphi, \quad G = I_\theta + I_\varphi, \quad H = I_\varphi.$$

Transformarea canonică este complet determinată (de la variabilele, r, θ, φ , p_r, p_θ, p_φ la variabilele L, G, H și unghiurile asociate ℓ, g, h , dacă determinăm unghiurile ℓ, g, h . Ținând cont că funcția coregeneratoare a acestei transformări canonică este

$$S = \int p_r dr + \int p_\theta d\theta + \int p_\varphi d\varphi = \int \sqrt{-\frac{m^4 \mu^2}{L^2} + \frac{2m^2 \mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\sin^2 \theta}} d\theta + \int H d\varphi,$$

unghiurile ℓ, g, h se obțin utilizând relațiile

$$\ell = \frac{\partial S}{\partial L} = \frac{m^4 \mu^2}{L^3} \int \frac{dr}{\sqrt{-\frac{m^4 \mu^2}{L^2} + \frac{2m^2 \mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}},$$

$$g = \frac{\partial S}{\partial G} = G \int \frac{d\theta}{\sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\sin^2 \theta}}} - G \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{-\frac{m^4 \mu^2}{L^2} + \frac{2m^2 \mu}{r} - \frac{G^2}{r^2}}},$$

$$h = \frac{\partial S}{\partial H} = \varphi - H \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{G^2 - \frac{H^2}{\sin^2 \theta}}}.$$

Variabilele Delaunay L, G, H, ℓ, g, h se pot exprima în funcție de elementele orbitale. Se arată că

$$L = \sqrt{m^2 \mu a}, \quad G = \sqrt{1 - e^2}, \quad H = G \cos i,$$

$$\text{iar } \ell = M, \quad g = \omega, \quad h = \Omega,$$

unde a este semiaxa orbitei, e - excentricitatea orbitei, i - unghiul de înclinare a planului orbitei față de planul de referință (planul eclipticii în cazul mișcării unei planete în jurul Soarelui), M - anomalie medie, ω - argumentul pericentrului și Ω longitudinea nodului ascendent.

Dacă luăm $m=1$ (m este un parametru orbital) atunci putem conchide că Hamiltonianul asociat problemei celor două corpuri (cazul mișcării relative a unei planete față de Soare) este

$$\mathcal{H}(M, \omega, \Omega, L, G, H) = -\frac{\mu^2}{2L^2}$$

unde elementele Delaunay ($M, \omega, \Omega, L, G, H$) sunt legate de elementele orbitale ($a, e, i, \omega, \Omega, M$) prin intermediul relațiilor

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad G = L\sqrt{1-e^2}, \quad H = G \cos i. \quad (***)$$

Ecuatiile canonice asociate hamiltonianului $\mathcal{H}$ sunt

$$\dot{M} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3}, \quad \dot{\omega} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} = 0, \quad \dot{\Omega} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} = 0,$$

$$\dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial M} = 0, \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} = 0, \quad \dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Omega} = 0.$$

Soluția acestui sistem este

$$M = \frac{\mu^2}{L_0^3} (t-t_0) = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} (t-t_0), \quad \omega = \omega_0, \quad \Omega = \Omega_0,$$

$$L = L_0, \quad G = G_0, \quad H = H_0.$$

unde $L_0, G_0, H_0, \omega_0, \Omega_0$ sunt constante. Evident, din relațiile (***) rezultă că a, e, i rămân constante în timpul mișcării.

3. Realizați un program de calcul care integrează numeric problema celor două corpuri (cazul mișcării relative):

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{0},$$

sau echivalent, dacă notăm prin u, v, w componentele vitezei, ecuațiile scolare

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{y} = v, \\ \dot{z} = w, \\ \dot{u} = -\frac{\mu}{r^3} x, \\ \dot{v} = -\frac{\mu}{r^3} y, \\ \dot{w} = -\frac{\mu}{r^3} z. \end{cases} \quad (*)$$

Programul va utiliza următoarele unități de măsură de lungime și timpului:

$$1 \text{ a.u.d} = 1 \text{ u.a} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km},$$

$$1 \text{ a.u.t} = \frac{1}{2\pi} \text{ ani}.$$

În baza legii a treia a lui Kepler, rezultă că în aceste unități de măsură $\mu = 1$.

Programul va utiliza cele două funcții (metode sau subrutine) implementate în tema din fișa precedentă, și va compune soluția numerică obținută prin integrarea ecuațiilor de mai sus cu soluția analitică dată de hamiltonianul

al din problema anterioară:

$$M^* = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}} t + M_0, \quad a^* - \text{const}, \quad e^* - \text{const}, \quad i^* - \text{const}, \quad \omega^* - \text{const}, \quad \Omega^* - \text{const}. \quad (**)$$

Mai precis, dată o condiție inițială $(a_0, e_0, i_0, \omega_0, \Omega_0, M_0)$ prin intermediul primei funcții (tema din fișa de exerciții anterioară) se va determina condiția inițială $x(0), y(0), z(0), u(0), v(0), w(0)$ pentru problema Cauchy (*).

După fiecare iterație (aplicare a metodei numerice de integrare) componentele $x(t_n), y(t_n), z(t_n), u(t_n), v(t_n), w(t_n)$, unde $t_n = 0 + n h$, h -pasul de integrare, se vor utiliza de cea de-a doua funcție (tema anterioară)

pentru a calcula elementele ($a, e, i, \omega, \Omega, M$) la momentele t_n , $n=1, 2, \dots$. Elementele obținute vor fi comparate cu elementele orbitale (**), furnizate de soluția analitică.

Rezultatele obținute prin propagarea unei orbite (condiție inițială) salvate în două fișiere sunt:

i) primul fișier va conține următoarele 7 coloane: timpul, semiorbita mare, excentricitatea, înclinarea, argumentul periheliului, longitudinea nodului ascendent și anomalia medie, obținute prin integrarea numerică a ecuațiilor (*); adică $(t_n, a, e, i, \omega, \Omega, M)$;

ii) al doilea fișier va conține următoarele 7 coloane: timpul pe prima coloană, iar pe celelalte 6 coloane diferența dintre soluția numerică și soluția analitică, adică $t_n, a-a^*, e-e^*, i-i^*, \omega-\omega^*, \Omega-\Omega^*, M-M^*$.

Aplicație numerică:

$$a_0 = 1, 2, \quad e_0 = 0, 1, \quad i_0 = 10^\circ, \quad \omega_0 = 20^\circ, \quad \Omega_0 = 40^\circ, \quad M_0 = 5^\circ.$$