

Introducere în teoria perturbațiilor

Problema generală a celor n corpuri, cu $n > 2$, nu este integrabilă în sens Liouville, adică nu putem determina expresii analitice care să descrie mișcarea celor n corpuri pe orice interval de timp. Cu toate acestea, dacă masa unuia dintre corpuri, să zicem m_0 , este mult mai mare decât masele celorlalte corpuri și distanțele dintre corpuri rămân suficient de mari (spre exemplu, cazul mișcării planetelor în jurul Soarelui) atunci ecuațiile de mișcare a oricărui corp din sistem, să zicem m , față de m_0 (planeta față de Soare) sunt descrise prin intermediul unui potențial de tipul

$$V^0 + V$$

unde V^0 este potențialul asociat problemei celor două corpuri (planeta m - Soarele m_0), iar V este o funcție potențială care descrie prezența oricăror altor corpuri în sistemul mecanic.

Cum masa m_0 este mult mai mare comparativ cu masele celorlalte corpuri, efectul funcției V este de regulă mult mai mic decât cel al potențialului V^0 . Funcția V joacă rolul unei funcții perturbatoare, iar teoria perturbațiilor își propune să descrie efectele induse de potențialul V asupra mișcării kepleriene descrise de planeta m în jurul Soarelui m_0 .

Teoria perturbațiilor face uz de faptul că orbite kepleriene (orbita obținută ca soluție a problemei celor două corpuri) se modifică lent în timp ca urmare a perturbațiilor (prezenței potențialului V) induse de celelalte corpuri din sistemul mecanic. Dacă elementele orbitale ale planetei m sunt $(a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0)$ la un anumit moment t_0 , atunci elipsa cu aceste elemente se numește elipsă osculatoare, iar elementele orbitale se numesc elemente orbitale osculatoare la momentul t_0 . Datorită perturbațiilor (prezenței funcției V)

elementele la un alt moment, să zicem t_1 , vor fi $(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \omega_1, M_1)$, iar cantitățile $(a_1 - a_0), (e_1 - e_0)$ etc. reprezintă perturbările elementelor în intervalul de timp $(t_1 - t_0)$.

Teoria perturbărilor încearcă să găsească expresii analitice care să descrie variația în timp a elementelor orbitale, adică să determine funcțiile $a(t)$, $e(t)$, etc. Teoria perturbărilor propune mai multe metode pentru studiul variațiilor elementelor orbitale, bazate pe ecuațiile planetare ale lui Lagrange (un set de ecuații diferențiale de ordinul întâi $\dot{x} = f(t, x)$, $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^6$, unde $x = (a, e, i, \Omega, \omega, M)$ și f se exprimă în funcție de $f: I \times \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$, unde $x = (a, e, i, \Omega, \omega, M)$ și f se exprimă în funcție de potențialul perturbator $V = V(t, a, e, i, \Omega, \omega, M)$ și derivatele parțiale ale lui V), ecuațiile lui Gauss (la fel ca în cazul ecuațiilor planetare ale lui Lagrange ca deosebirea că f se exprimă în funcție de poziția perturbatoare și nu de potențialul V al acesteia) sau pe ecuațiile canonice asociate unui hamiltonian de forma $H = H_0 + \epsilon H_1$, unde H_0 reprezintă partea integrabilă (de cele mai multe ori H_0 este hamiltonianul asociat problemei celor două corpuri), iar ϵH_1 este partea perturbatoare care cuantifică efectele celorlalte corpuri din sistemul mecanic.

Vom utiliza formalismul Hamiltonian pentru a studia variația elementelor orbitale. Însă, înainte de a obține funcția lui Hamilton să formulăm problema, și să descriem principalele ingrediente ale acesteia.

Ecuațiile mișcării relative

Pentru a putea introduce principalele ingrediente de teorie perturbărilor este util, mai întâi, să deducem ecuațiile mișcării relative. Vom considera un sistem mecanic format din $n+1$ corpuri, de mase $m_0, m_1, m_2, \dots, m_n$ unde $m_0 \gg m_1, m_0 \gg m_2, \dots, m_0 \gg m_n$ (corul mișcării a n planete față de Soare).

Fie O originea unui sistem de referință inertial. Notăm prin $\vec{R}_i$, $i=0, \dots, n$ vectorul de poziție al corpului având masă m_i , $i=0, \dots, n$.

Dacă introducem notația

$$\bar{r}_{ij} = \bar{r}_j - \bar{r}_i, \quad i, j = \overline{0, n}, \quad i \neq j \quad (1)$$

atunci ecuațiile de mișcare ale sistemului mecanic se pot scrie în formă

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \bar{r}_{ij}, \quad i = \overline{0, n} \quad (2)$$

unde $r_{ij} = |\bar{r}_{ij}|$. Dacă împărțim fiecare ecuație din (2) prin m_i , obținem

$$\ddot{\bar{r}}_0 = \sum_{j=1}^n \frac{G m_j}{r_{0j}^3} \bar{r}_{0j}, \quad (3)$$

$$\ddot{\bar{r}}_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_j}{r_{ij}^3} \bar{r}_{ij}, \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

Scăzând (3) din (4) obținem

$$\ddot{\bar{r}}_{0i} = - \frac{G(m_0 + m_i)}{r_{0i}^3} \bar{r}_{0i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_j}{r_{ij}^3} \bar{r}_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{G m_j}{r_{0j}^3} \bar{r}_{0j}. \quad (5)$$

Dacă ținem cont că

$$\bar{r}_{ij} = \bar{r}_j - \bar{r}_i = \bar{r}_j - \bar{r}_0 + \bar{r}_0 - \bar{r}_i = \bar{r}_{0j} - \bar{r}_{0i}, \quad (6)$$

emitând indicele 0 în notația (5), deducem

$$\ddot{\bar{r}}_i + \frac{\mu_i}{r_i^3} \bar{r}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_j \left(\frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|^3} - \frac{\bar{r}_j}{r_j^3} \right), \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

unde $\mu_i = G(m_0 + m_i)$ și $\bar{r}_i$ reprezintă poziția planetei m_i față de Soare.

Dacă sistemul mecanic conține, pe lângă Soare și cele n planete, un corp infinitesimal (Asteroid sau Cometă) a cărui masă este neglijabilă în comparație cu masa celorlalte corpuri din sistem (nu modifică ecuațiile (3)(4) care descriu mișcarea celor $n+1$ corpuri) atunci notând prin $\bar{r}$ vectorul de poziție al corpului infinitesimal față de Soare, obținem următoarea ecuație

(3)

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{\mu}{r^3} \bar{r} = \sum_{j=1}^n \mathcal{G} m_j \left(\frac{\bar{r}_j - \bar{r}}{|\bar{r}_j - \bar{r}|^3} - \frac{\bar{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (8)$$

unde $\mu = \mathcal{G} m_0$.

Obs 1°. Dacă în relația (7) masele m_j , $j = \overline{1, n}$, $j \neq i$ (sau în relația (8) masele m_j , $j = \overline{1, n}$) se omitează, obținem ecuația de mișcare a masei m_i față de m_0 (sau a corpului de masă neglijabilă față de m_0) în problema celor două corpuri.

2°. Termenii din membrul drept al relației (7) (respectiv relația (8)) se determină perturbărilor exercitate de celelalte corpuri din sistem.

Funcția perturbatoare

Să considerăm, în cazul problemei celor $n+1$ corpuri, funcția scalară R_i , definită

$$\text{prim} \quad R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathcal{G} m_j \left(\frac{1}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|} - \frac{\bar{r}_i \cdot \bar{r}_j}{r_j^3} \right), \quad i = \overline{1, n} \quad (9)$$

Dacă considerăm un sistem de coordonate carteziene cu originea în centrul corpului m_0 , și notăm prin (x_j, y_j, z_j) coordonatele corpului m_j , iar prin

$$\nabla_i = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (10)$$

atunci

$$\nabla_i R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathcal{G} m_j \left(\frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|^3} - \frac{\bar{r}_j}{r_j^3} \right), \quad i = \overline{1, n} \quad (11)$$

Astfel, ecuația (7) se poate rescrie în forma

$$\ddot{\bar{r}}_i = -\nabla_i (V_i^0 + V_i) \quad i = \overline{1, n} \quad (12)$$

unde

$$V_i^0 = -\frac{\mu_i}{r_i}, \quad V_i = -R_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Funcția V_i^0 este potențialul asociat problemei celor două corpuri $m_0 - m_i$.

În cazul mișcării unui corp infinitesimal sub influența a $n+1$ corpuri, ecuația (8) se poate rescrie în formă

$$\ddot{\vec{r}} = -\nabla(V^0 + V) \quad (14)$$

unde

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (15)$$

$$V^0 = -\frac{\mu}{r}, \quad V = -R, \quad (16)$$

$$R = \sum_{j=1}^n \gamma m_j \left(\frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right). \quad (17)$$

Funcția lui Hamilton

Să considerăm problema celor $n+1$ corpuri. Dacă înmulțim relația (12) prin $\dot{\vec{r}}_i$ și sumăm după i , ^{prin integrare} obținem integrala primă a energiei, care după cum este binecunoscut definește funcția lui Hamilton, adică

$$H = \text{const}, \quad (18)$$

$$H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\dot{\vec{r}}_i^2}{2} + V_i^0 + V_i \right). \quad (19)$$

Funcția lui Hamilton H se poate scrie în forma

$$H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\dot{\vec{r}}_i^2}{2} - \frac{\mu_i}{r_i} \right) + \sum_{i=1}^n V_i \quad (20)$$

adică fiecare termen din prima sumă reprezintă hamiltonianul asociat problemei celor două corpuri $m_0 - m_i$. Dacă introducem elementele Delaunay, definite prin

$$L_i = \sqrt{\mu_i} a_i, \quad M_i \quad (21)$$

$$G_i = L_i \sqrt{1 - e_i}, \quad \omega_i$$

$$H_i = G_i \cos i_i, \quad \Omega_i$$

atunci funcția lui Hamilton devine

$$\mathcal{H}(M_i, \omega_i, \Omega_i, L_i, G_i, H_i) = - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i^2}{2L_i^2} + \mathcal{H}_1 \quad (22)$$

unde $\mathcal{H}_1$ definit prin

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{i=1}^n V_i \quad (23)$$

se exprimă în funcție de elementele Delaunay (21).

În cazul mișcării unui corp infinitesimal sub influența a $n+1$ corpuri, funcția lui Hamilton are forma (se presupune cunoscută mișcarea celor n corpuri)

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{\vec{r}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} + V. \quad (24)$$

Introducând elementele Delaunay

$$L = \sqrt{\mu a}, \quad M,$$

$$G = L \sqrt{1 - e^2}, \quad \omega,$$

$$H = G \cos i, \quad \Omega,$$

obținem

$$\mathcal{H}(L, M, \omega, \Omega, L, G, H) = - \frac{\mu^2}{2L^2} + \mathcal{H}_1, \quad (26)$$

unde

$$\mathcal{H}_1 = V = -R = \sum_{j=1}^n \gamma m_j \left(\frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_j}{r r_j} \right), \quad (27)$$

se exprimă în funcție de elementele Delaunay ale corpului infinitesimal și de cele mai multe ori și în funcție de elementele Delaunay ale corpurilor perturbatoare m_j).

Ecuatiile canonice asociate hamiltonianului (26) sunt

$$\dot{M} = \frac{\mu^2}{L^3} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L}, \quad \dot{\omega} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G}, \quad \dot{L} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H}, \quad (28)$$

$$\dot{L} = -\frac{\partial H_1}{\partial M}, \quad \dot{G} = -\frac{\partial H_1}{\partial \omega}, \quad \dot{H} = -\frac{\partial H_1}{\partial \Omega}.$$

Obs 3°. Dacă în cazul problemei celor două corpuri, L, G, H, ω, Ω sunt constante și M variază liniar în timp, ca urmare a perturbațiilor, aceste elemente nu mai rămân constante. Întrucât $\gamma_{m_i} \ll \gamma_{m_0} = \mu$, $i = \overline{1, n}$, dacă $|\bar{r}_j - \bar{r}|$ rămâne suficient de mare în timpul mișcării sistemului (corpul infinitesimal nu se apropie de nicio planetă), atunci magnitudinea funcției H_1 este mică comparativ cu magnitudinea (mărimea) părții integrabile $\frac{\mu^2}{2L^2}$ și astfel elementele (elementele orbitale) variază lent în timp.

4°. Sistemul hamiltonian (22) este un sistem autonom; Elementele Delaunay (și în consecință elementele orbitale) vor avea liniile în $\mathbb{R}^n$.
Sistemul hamiltonian (26) este un sistem neautonom; Elementele Delaunay de tuturi planetelor sunt necunoscute. Din contra sistemul hamiltonian (26) este un sistem neautonom; Elementele orbitale ale planetelor sunt presupuse cunoscute $a_j(t), e_j(t), \dots, j = \overline{1, n}$, iar H_1 definit de
(27) depinde de aceste elemente orbitale.
Atunci hamiltonianul (22) cât și hamiltonianul (27) au forma

sunt presupuse cunoscute.

(27) depinde de aceste elemente orbitale.

5°. Atât hamiltonianul (22) cât și hamiltonianul (27) au forma

$$H(q, p) = H_0(p) + \epsilon H_1(q, p), \quad (28)$$

unde ϵ este un parametru mic și $\text{grad}_p H_0$ și H_1 sunt de ordinul unității.

Un sistem descris de hamiltonianul (28) poartă numele de sistem cuasiintegrabil (sau aproapeintegrabil). H_0 reprezintă partea integrabilă, iar ϵH_1 perturbarea. Soluția generată de H_0 (adică $p = \text{const}$, $q = \omega_0 t + q_0$, $\omega_0 = \text{grad}_p H_0$) reprezintă o aproximație de ordinul ϵ a dinamicii reale

generate de H , în sensul că aceasta deviază față de traiectoria reală cu o cantitate de ordinul ε într-un timp de ordinul unității și printr-o cantitate de ordinul unității într-un timp de ordinul $1/\varepsilon$. Întrucât suntem interesați de descrierea dinamicii pe un interval de timp mai mare de $1/\varepsilon$, suntem nevoiți să apelăm la diverse metode analitice și semi-analitice pentru a determina soluții aproximative mai precise ale dinamicii reale. În ultimul secol s-a fost dezvoltată o întreagă teorie dedicată sistemelor aproape integrabile (teoreme de tip Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), construcții de forme normale (Birkhoff, Kolmogorov) teoreme de tip Nekhoroshev).

Revenind la funcția perturbatoare H_1 definită de (23) (sau (27)), aceasta poate fi exprimată în funcție de elementele orbitale (sau echivalent în baza relațiilor (21) (sau (25)) în funcție de elementele Delaunay) printr-o serie Fourier de forma

$$H_1 = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n g_{m_j} \sum S_{ij}(a_i, a_j, e_i, e_j, i_i, i_j) \cos \varphi_{ij} \quad (30)$$

unde

$$\cos \varphi_{ij} = k_1 M_i + k_2 M_j + k_3 \omega_i + k_4 \omega_j + k_5 \Omega_i + k_6 \Omega_j, \quad (31)$$

$k_1, k_2, \dots, k_6$ sunt întregi

(sau

$$H_1 = - \sum_{j=1}^n g_{m_j} \sum S_j(a, a_j, e, e_j, i, i_j) \cos \varphi_j \quad (32)$$

unde $\varphi_j = k_1 M + k_2 M_j + k_3 \omega + k_4 \omega_j + k_5 \Omega + k_6 \Omega_j$ (33)

$k_1, k_2, \dots, k_6$ numere întregi).

Derivările în serie (30) și respectiv (32) conțin o infinitate de termeni, însă în practică suntem interesați doar de anumiți termeni, iar pe ceilalți îi neglijăm. La baza acestei decizii stă principiul medierii care presupune că termenii scurt-periodici sunt neimportanți și pot fi neglijati; efectul indus de termenii-periodici o reprezintă variația periodică a elementelor orbitale, iar pentru perioade lungi de timp, unde suntem interesați de variații neperiodice ale elementelor orbitale, acest efect poate fi neglijat.

Determinarea termenilor scurt-periodici, depinde de la caz la caz, și presupune o clasificare a argumentelor trigonometrice φ_{ij} (și respectiv ψ_i) în funcție de frecvențele de variație a acestor unghiuri. Dacă frecvența $\dot{\varphi}_{ij} \gg 0$ (adică $\varphi_{ij}(t) \approx \dot{\varphi}_{ij} t + \varphi_{ij}(0)$ crește sau scade rapid în timp) atunci termenul asociat este scurt-periodic; în caz contrar, dacă $\dot{\varphi}_{ij} \approx 0$ (adică φ_{ij} crește sau scade mult mai lent în timp) atunci efectul indus de termenul asociat nu este scurt-periodic și în consecință termenul nu poate fi neglijat.