

Fiză de exerciții.

1. Trasați portretul spațiului fazelor pentru un oscilator armonic unidimensional descris de hamiltonianul

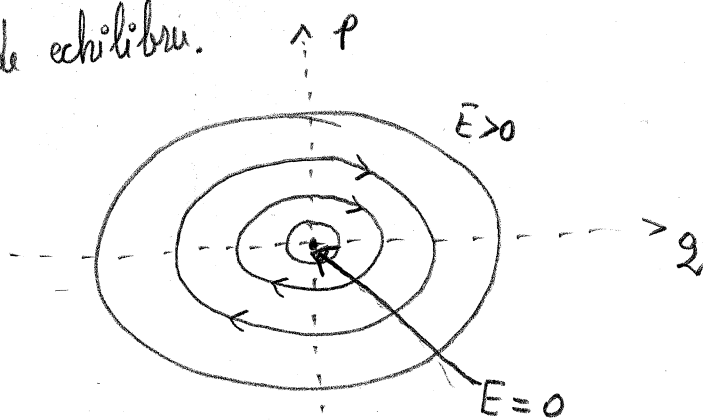
$$H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{q^2}{2}, \quad \omega > 0.$$

Rezolvare. Întrucât sistemul este autonom, acesta admite integrale primă

$$H(q, p) = h, \text{ unde } h = H(q(0), p(0)) \text{ este o constantă.}$$

Pentru $h = 0$ orbita $H(q, p) = 0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{q^2}{2} = 0$ are un singur punct, și anume poziția de echilibru $p = 0, q = 0$.

Pentru $h > 0$, curbele de nivel $H(q, p) = h \Leftrightarrow \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{q^2}{2} = h$ sunt elipse cu centrul în origine. Aceste curbe descriu oscilația în jurul punctului de echilibru.



2. Trasați portretul spațiului fazelor pentru hamiltonianul

$$H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2}, \quad \omega > 0.$$

Rezolvare. Pentru $h = 0$, unde $h = H(q(0), p(0))$, curba de nivel

$$H(q, p) = 0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{2} - \omega^2 \frac{q^2}{2} = 0 \Leftrightarrow (p + \omega q)(p - \omega q) = 0 \text{ reprezintă}$$

două drepte concurente în origine. Cele două drepte reprezintă de fapt cinci orbite diferite. Într-adevăr, ecuațiile canonice

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = \omega^2 q,$$

au soluția generală $q = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}, \quad p = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t}.$

Dacă condițiile inițiale ale sistemului canonice sunt $q(0) = \pm q_0$, $p(0) = \pm \omega q_0$, $q_0 > 0$ atunci obținem:

i) $q(t) = 0$, $p(t) = 0$, dacă $q_0 = 0$. Obținem ca soluție punctul de echilibru instabil (hiperbolic) $q=0$, $p=0$.

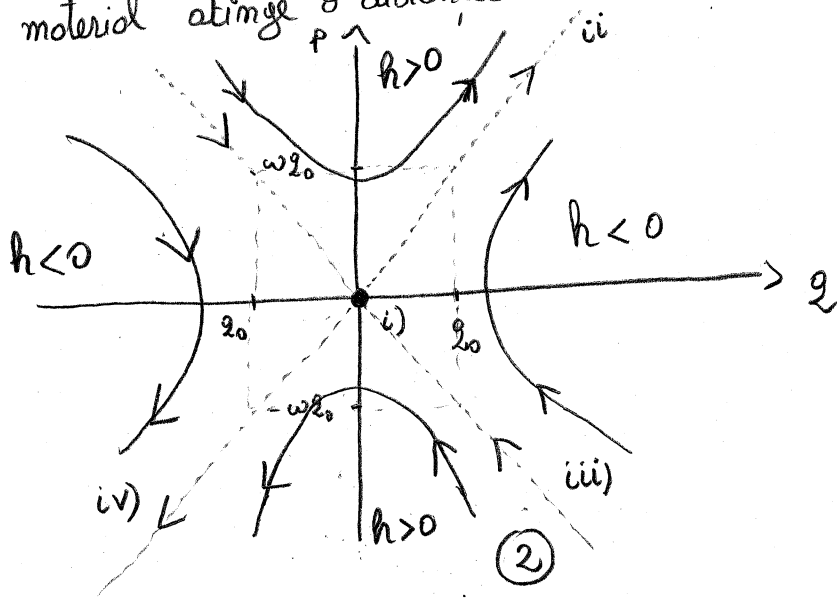
ii) $q(t) = q_0 e^{\omega t}$, $p(t) = \omega q_0 e^{\omega t}$, dacă $q_0 > 0$. Anodul, orbita reprezintă semidreapta notată în figura de mai jos prin ii). Pentru $t \rightarrow -\infty$ orbita tinde asimptotic spre punctul de echilibru, din acest motiv, această traiectorie se numește varietate instabilă în contextul sistemelor dinamice.

iii) $q(t) = q_0 e^{-\omega t}$, $p(t) = -\omega q_0 e^{-\omega t}$, dacă $q_0 > 0$. Orbita reprezintă semidreapta notată în figura de mai jos prin iii). Pentru $t \rightarrow \infty$ orbita tinde asimptotic spre punctul de echilibru. Aceasta poartă numele de varietate stabilă.

iv) $q(t) = -q_0 e^{\omega t}$, $p(t) = -\omega q_0 e^{\omega t}$, $q_0 > 0$. Obținem varietatea instabilă notată prin iv).

v) $q(t) = -q_0 e^{-\omega t}$, $p(t) = \omega q_0 e^{-\omega t}$, $q_0 > 0$. Obținem varietatea stabilă notată prin v).

Pentru $h \neq 0$ curbele de nivel $H(q, p) = h \Leftrightarrow \frac{p^2}{2} - \frac{\omega^2 q^2}{2} = h$ reprezintă hiperbole. Dacă $h > 0$, acestea se numesc orbite colizionale întrucât intersecționează axa p (ating originea $q=0$ în spațiul fizic). Dacă $h < 0$, acestea se numesc orbite necolizionale (în spațiul fizic, punctul material atinge o distanță minimă nemulă).



3. Trădăți portretul spațiului fazelor pentru pendulul matematic
 $H: \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2} - \omega \cos q, \quad \omega > 0.$

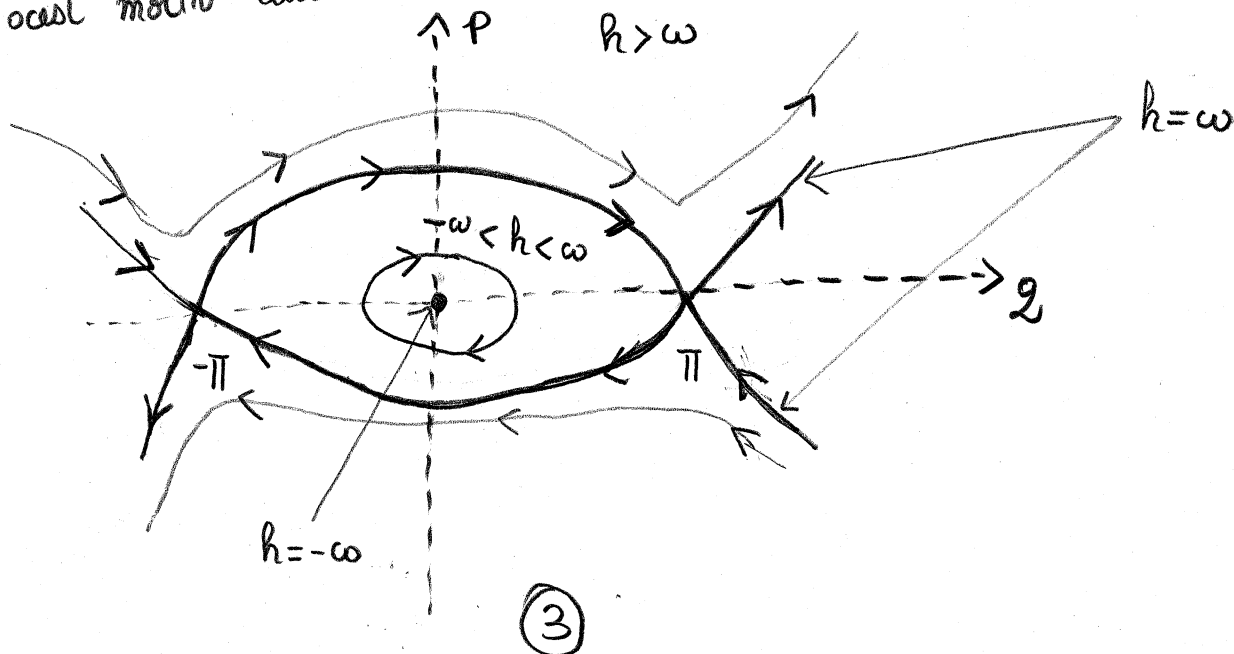
Rezolvare. Ecuațiile canonice asociate sunt

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\omega \sin q.$$

Dim aceste relații deducem că pozițiile de echilibru sunt $p=0, q=0$ (punctul de echilibru stabil) și $p=0, q=\pi$ (punctul de echilibru instabil).

Pentru $h=-\omega$ curba de nivel $H(q, p)=h \Leftrightarrow \frac{p^2}{2} - \omega \cos q = -\omega$ este punctul de echilibru stabil $p=0, q=0$ (la fel ca în cazul oscilatorului armonic).

Pentru $h=\omega$ curba de nivel $H(q, p)=h \Leftrightarrow \frac{p^2}{2} - \omega \cos q = \omega$ reprezintă punctul de echilibru instabil $p=0, q=\pi$ și varietățile stabile și instabile care emană din acest punct. În vecinătatea punctului instabil $p=0, q=\pi$, figura este similară portretului spațiului fazelor asociat hamiltonianului din problema 2; însă în afara acestei vecinătăți deosebim că varietățile stabile și instabile coincid (deoarece q este un unghi, punctele $q=\pi$ și $q=-\pi$ sunt două reprezentări de același punct pe torul $\mathbb{T}$). Curbele invariante (varietățile stabile și instabile) sepoartă orbitele reprezentând oscilațiile ($|h| < \omega$) de orbitele circulatorii ($|h| > \omega$). Din acest motiv curbele invariante se mai numesc și curbe separatoare.



4. Studiați dinamica pendulului matematic perturbat

$$H: \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(t, q, p) = \frac{p^2}{2} - \omega \cos q - \varepsilon \cos(q-t), \quad \omega > 0, \varepsilon > 0$$

utilizând aplicația lui Poincaré.

Rezolvare Pentru sistemele hamiltoniene care au mai multe grade de libertate nu putem face o analiză a dinamicii similă cu cea din problemele anterioare. Cu toate acestea, pentru sisteme cu mai multe grade de libertate, putem obține informații privind comportamentul orbitelor, regulat sau haotic, dacă utilizăm o așa numită aplicație a lui Poincaré, care este bine definită în vecinătatea soluțiilor periodice ale sistemului hamiltonian considerat. În vecinătatea unei soluții periodice, putem studia caracterul dinamic al unei orbite prin intersecția acesteia cu un hiperplan transversal.

Spre exemplu, să presupunem că avem un sistem Hamiltonian $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ cu două grade de libertate care admite o orbită periodică, iar hiperplanul $q_2 = 0$ este un hiperplan transversal vectorului $\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial q_1}, \frac{\partial H}{\partial q_2} \right) \Big|_{q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0}$, unde $(q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0)$ reprezintă condiția inițială asociată orbitei periodice. Dacă $(\tilde{q}_1^0, \tilde{q}_2^0, \tilde{p}_1^0, \tilde{p}_2^0)$ sunt datele inițiale ale unei alte orbite, unde $(\tilde{q}_1^0, \tilde{q}_2^0, \tilde{p}_1^0, \tilde{p}_2^0)$ se află în vecinătatea punctului $(q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0)$, atunci putem analiza caracterul dinamic al acestei orbite reprezentând în planul (q_1, p_1) acele puncte de intersecție ale orbitei cu hiperplanul $q_2 = 0$. Dacă orbita este periodică atunci intersecția orbitei cu hiperplanul constă într-un număr discret (finit) de puncte; dacă orbita este regulată obținem o curbă, iar dacă orbita este haotică atunci intersecția reprezintă o infinitate de puncte dispuse aleatoriu într-un anumit domeniu.

Pentru sistemele neautonome cu un singur grad de libertate, periodică în timp, aplicația Poincaré poate fi obținută prin reprezentarea grafică a intersecției soluției cu planul $t = 0$ modulo 2π . În cazul pendulului (problema 3), sunt

posibile (oșă cum am văzut) două tipuri de mișcări, și anume mișcări
 oscilatorii (curbele închise în vecinătatea punctului de echilibru stabil), și
 mișcări circulatorii (unghiul q ia toate valorile din intervalul $[0, 2\pi)$).

Putem integra ecuațiile canonice

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega \sin q - \epsilon \sin(q-t) \end{cases}$$

prin intermediul unei metode numerice (Runge-Kutta, metode cu pași multipli, etc.)
 Spre exemplu, dacă utilizăm metoda lui Euler, obținem următoarea recurență

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n + h p_n, \\ p_{n+1} = p_n + h(-\omega \sin q_n - \epsilon \sin(q_n - t_n)), \\ t_{n+1} = t_n + h, \end{cases} \quad (x) \quad n=0, 1, \dots$$

unde $t_0 = 0$ și q_0, p_0 sunt date.

În practică să considerăm $\omega = \epsilon = 0.025$, $h = \frac{2\pi}{10^3}$ și să reprezentăm
 aplicația lui Poincaré atunci când soluția intersectează planul $t=0$ modulo
 2π . Dacă iterăm (x) de $2 \cdot 10^5$ ori și reprezentăm punctele care intersectează
 planul Poincaré ($t=0$ modulo 2π) obținem:

- i) o orbită circulatorie pentru $(q^0, p^0) = (\pi, 1.4)$ (figura 1, curba
 cu roșu);
- ii) o orbită oscilatorie pentru $(q^0, p^0) = (0.1, 1.2)$ (figura 1, curba cu
 albastru);
- iii) o orbită haotică pentru $(q^0, p^0) = (\pi, 0.345)$ (figura 1, curba
 cu verde).

Figura 2 reprezintă aplicația lui Poincaré pentru următoarele condiții
 inițiale:

$$(q^0, p^0) = (0.1 + i, 0.123j), \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, 3, \\ j = 1, 2, \dots, 9. \end{matrix}$$

5. Trasați portretul spațiului fazelor pentru Hamiltonianul

$$H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(q, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \frac{q^4}{4}.$$

6. Se consideră hamiltonianul

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{\omega_1}{2} (p_1^2 + q_1^2) + \frac{\omega_2}{2} (p_2^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{q_2^3}{3},$$

unde $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$. (Hénon și Heiles (1964)).

Studiați dinamica acestui sistem utilizând aplicația lui Poincaré.
(Intersectați orbitele studiate cu planul $q_1 = 0$. Realizați un studiu numeric pentru cazul $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Astfel, fixând o energie inițială, să zicem h_0 , și un punct (q_2^0, p_2^0) determinați p_1^0 din ecuația

$$\frac{\omega_1}{2} (p_1^0)^2 + \frac{\omega_2}{2} [(p_2^0)^2 + (q_2^0)^2] - \frac{(q_2^0)^3}{3} = h_0. \quad (*)$$

Propagați numeric orbita având datele inițiale $(q_1^0, q_2^0, p_1^0, p_2^0)$ și reprezentați în planul (q_2, p_2) acele puncte ale traiectoriei pentru care $q_1 = 0$. Considerați un timp total de integrare de $T \geq 1000$.

Realizați un studiu pentru $h_0 = \frac{1}{100}$ și $h = \frac{1}{6}$ trasând aplicația lui Poincaré pentru următoarele orbite:

Cazul $h_0 = \frac{1}{100}$: i) $q_1^0 = 0, q_2^0 = -0.135, p_1^0, p_2^0 = 0$

ii) $q_1^0 = 0, q_2^0 = -0.0131, p_1^0, p_2^0 = 0,$

iii) $q_1^0 = 0, q_2^0 = -0.005, p_1^0, p_2^0 = 0.057$

iv) $q_1^0 = 0, q_2^0 = 0.04, p_1^0, p_2^0 = 0.06.$

Cazul $h_0 = \frac{1}{6}$: i) $q_1^0 = 0, q_2^0 = 0.08, p_1^0, p_2^0 = 0$

ii) $q_1^0 = 0, q_2^0 = -0.2, p_1^0, p_2^0 = 0.$

Evident, p_1^0 se deduce din relația (*).

Aplicația Poincaré în cazul pendulului matematic perturbat (vezi exercitiul 4):

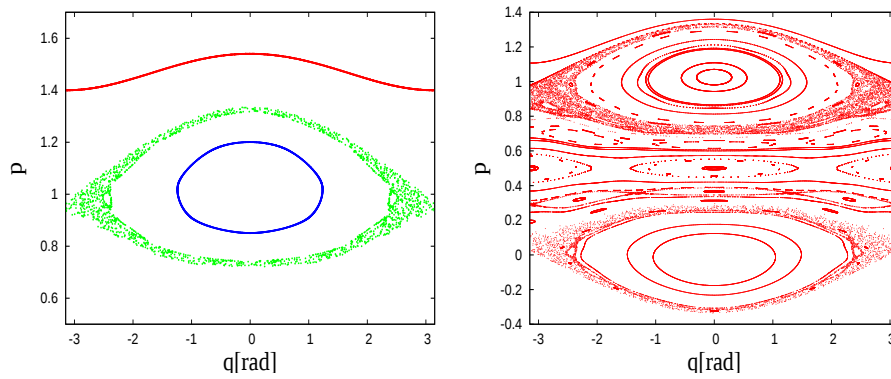


FIGURE 1. Stânga: Orbita circulatorie (roșu), orbită oscilatorie (albastru), orbită haotică (verde). Dreapta: aplicația Poincaré pentru mai multe orbite.