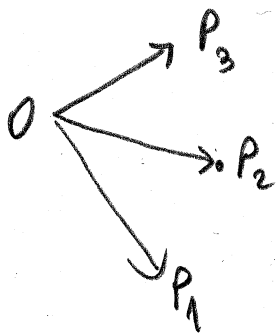


Problema restrânsă a celor 3 corpuri

Acastă problemă constă în studiul mișcării a trei corpuri, dintre care două sunt mult mai masive comparativ cu cel de-al treilea corp, mișcarea acestora fiind influențată gravitațional de particula având masa infinitesimală. Cele două corpuri masive, numite și corpuri primare, se mișcă conform legilor lui Kepler în jurul centrului comun de masă.

Notăm prin P_1 și P_2 corpurile masive având masele m_1 și respectiv m_2 , iar prin P_3 particula infinitesimală de masă m_3 ($m_3 \ll m_1, m_3 \ll m_2$). Fie O un punct fix din spațiu, iar $\vec{r}_i = \vec{OP}_i$ vectorul de poziție al punctului P_i . În baza legilor lui Newton, putem scrie:



$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12},$$

(1)

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{21},$$

$$m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = \frac{G m_1 m_3}{r_{13}^3} \vec{r}_{31} + \frac{G m_2 m_3}{r_{23}^3} \vec{r}_{32},$$

unde

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i, \quad r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad i \neq j \quad (2)$$

Primele două ecuații din (1) se pot integra (problema celor două corpuri). Se obține rezultatul care menționează că P_1 și P_2 se mișcă pe conice emetice având ca focar centrul de masă al punctelor P_1 și P_2 . Astfel studiul acestei probleme se reduce la studiul unei ecuații vectoriale de ordinul al doilea.

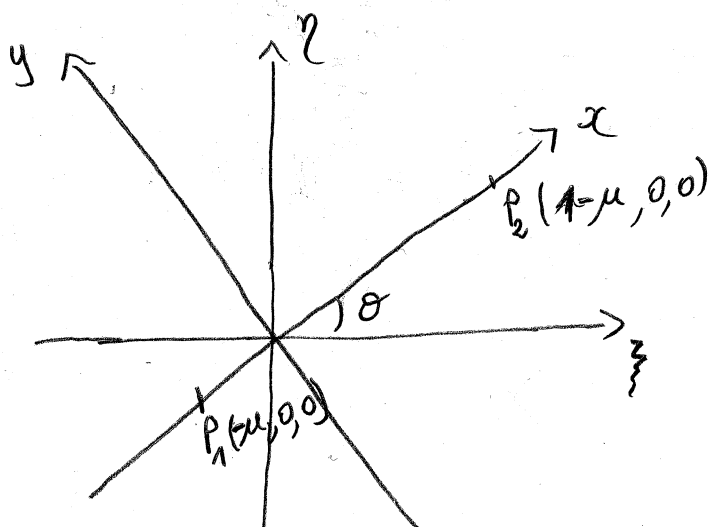
Presupunem că P_1 și P_2 se mișcă pe cercuri emetice în jurul centrului comun de masă. În această ipoteză, problema considerată

se numește problema restrânsă circulară a celor trei corpuri.

Fie $O \xi \eta \zeta$ un sistem de axe cu originea în centrul de masă al corpurilor primare. Axe ζ coincide cu axa pe care se află P_1 și P_2 la momentul inițial $t=0$, iar η este situată în planul orbital al corpurilor primare și perpendiculară pe axa ζ .

Presupunem că $m_2 \leq m_1$. Distanța dintre P_1 și P_2 rămâne constantă în timpul mișcării și în același timp vitezele unghiulare de celor două puncte sunt egale. Alegem unitățile de măsură a masei și distanței astfel încât

$$\mu = G(m_1 + m_2) = 1, \quad |\overline{P_1 P_2}| = a = 1. \quad (3)$$



Dim legii a treia a lui Kepler rezultă că viteze unghiulare, și unghiul θ sunt

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}} = 1, \quad \theta = nt. \quad (4)$$

Dacă introducem notație

$$\mu = Gm_2, \quad (5)$$

rezultă

$$Gm_1 = G(m_1 + m_2 - m_2) = 1 - \mu, \quad \mu \leq \frac{1}{2} \quad (6)$$

În acest sistem de axe P_1, P_2, P_3 au coordonatele $(\xi_1, \eta_1, 0), (\xi_2, \eta_2, 0)$, (ξ, η, ζ) și deci din cele trei ecuații din (1) obținem

$$\ddot{\xi} = (1-\mu) \frac{\xi_1 - \xi}{r_{13}^3} + \mu \frac{\xi_2 - \xi}{r_{23}^3},$$

$$\ddot{\eta} = (1-\mu) \frac{\eta_1 - \eta}{r_{13}^3} + \mu \frac{\eta_2 - \eta}{r_{23}^3}, \quad (7)$$

$$\ddot{z} = -(1-\mu) \frac{z}{r_{13}^3} - \mu \frac{z}{r_{23}^3},$$

unde

$$r_{13}^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + z^2, \quad r_{23}^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + z^2. \quad (8)$$

Sistemul de ecuații (7) este un sistem newtonian, întrucât $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ depind de timp. Întrucât dreapta $P_1 P_2$ se rotește în planul mișcării punctelor P_1, P_2 cu viteză unghiulară n , vom raporta mișcarea punctului P_3 la sistemul simodic $Oxyz$, unde axa x coincide cu dreapta $P_1 P_2$, iar axa y este situată în planul $O\xi\eta$ și perpendiculară pe x . Dacă notăm prin $(x_1, 0, 0), (x_2, 0, 0)$ coordonatele punctelor P_1 și P_2 în acest nou reper, întrucât O este centrul de masă al acestor puncte, rezultă

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad x_2 - x_1 = 1 \quad (9)$$

de unde obținem

$$x_1 = -\mu, \quad x_2 = 1 - \mu. \quad (10)$$

și

$$r_{13}^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad r_{23}^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad (11)$$

unde (x, y, z) sunt coordonatele punctului P_3 .

Utilizând formulele de rotație, deducem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Dim (12), prin derivare obținem

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\text{și} \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt & 0 \\ \sin nt & \cos nt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Dim (7), (11)-(14) obținem

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = - \left[(1-\mu) \frac{x+\mu}{r_{13}^3} + \mu \frac{x-1+\mu}{r_{23}^3} \right], \quad (15)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = - \left[(1-\mu) \frac{y}{r_{13}^3} + \mu \frac{y}{r_{23}^3} \right],$$

$$\ddot{z} = - \left[(1-\mu) \frac{z}{r_{13}^3} + \mu \frac{z}{r_{23}^3} \right],$$

Dacă introducem funcția

$$U = \frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}}, \quad (16)$$

atunci ecuațiile (15) se rescriu în forma

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

(4)

(17)

Integrala Jacobi

Dacă înmulțim relațiile (17) prin $\dot{x}$, $\dot{y}$ și respectiv $\dot{z}$, iar relațiile obținute le sumăm, deducem

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z},$$

care prin integrare conduce la

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_J \quad (18)$$

sau echivalent

$$v^2 = 2U - C_J, \quad (19)$$

unde C_J este o constantă, iar v este viteza punctului P_3 .

Obs 1°. Relație (18) reprezintă integrala Jacobi sau integrala primă a energiei relative, iar C_J se numește constanta Jacobi. Această integrală este singura integrală primă în problema restrânsă a celor trei corpuri.

Dacă viteza corpului P_3 este nulă atunci

$$2U = C_J \quad (20)$$

sau, dacă ținem cont de (16)

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_{13}} + \frac{2\mu}{r_{23}} = C_J. \quad (21)$$

Suprafața (21) se numește suprafață Hill. Această suprafață mărginește regiunile în care particula P_3 se poate deplasa, adică regiunile delimitate de ecuația

$$2U \geq C_J. \quad (22)$$

Vom realiza, în cele ce urmează, un studiu calitativ al suprafețelor Hill. Pentru simplitate, să presupunem că P_3 se mișcă în planul

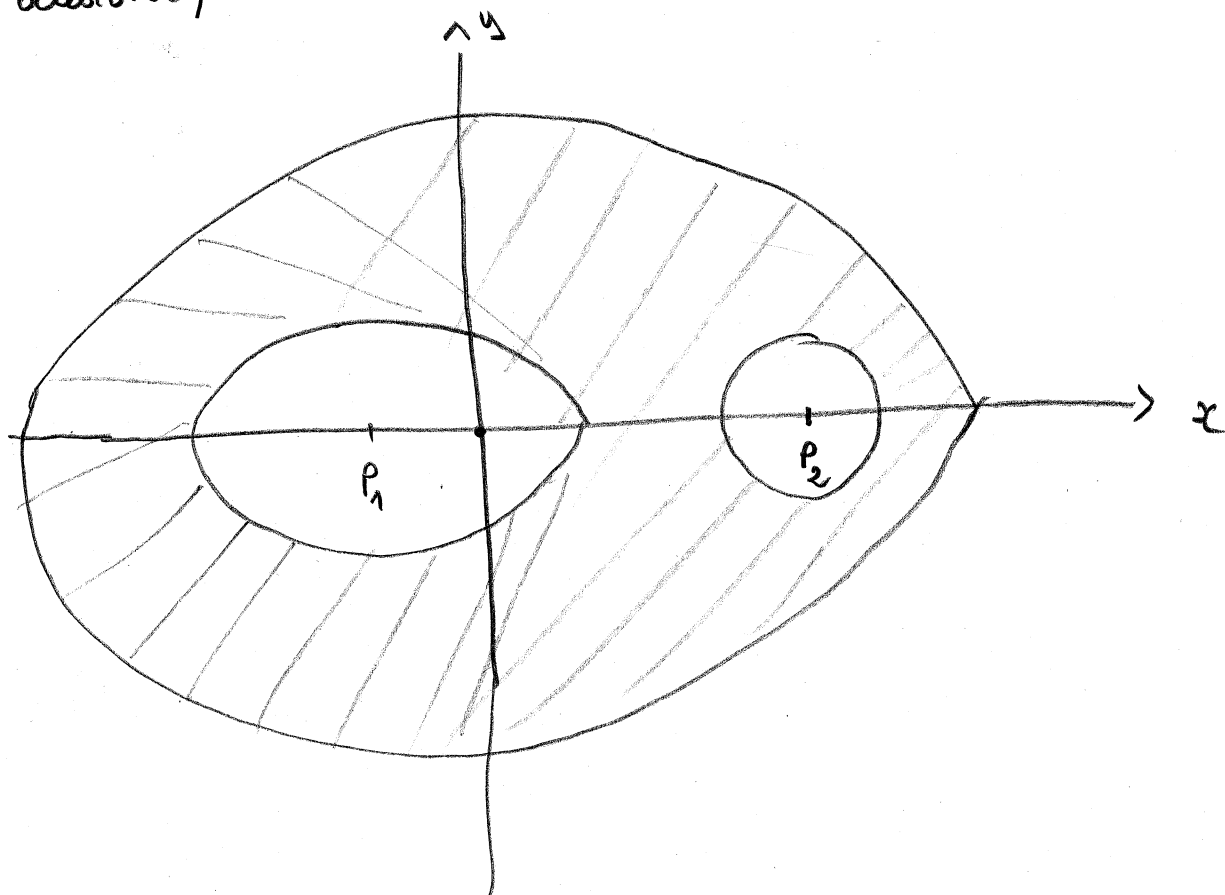
Oxy. Astfel ecuația (21) determină o curbă Hill.

Presupunem pentru început că $C_j = C_j^{(1)}$ unde $C_j^{(1)}$ are o valoare mare. Dacă $x^2 + y^2$ are valoare mare atunci

$$x^2 + y^2 \approx C_j^{(1)}.$$

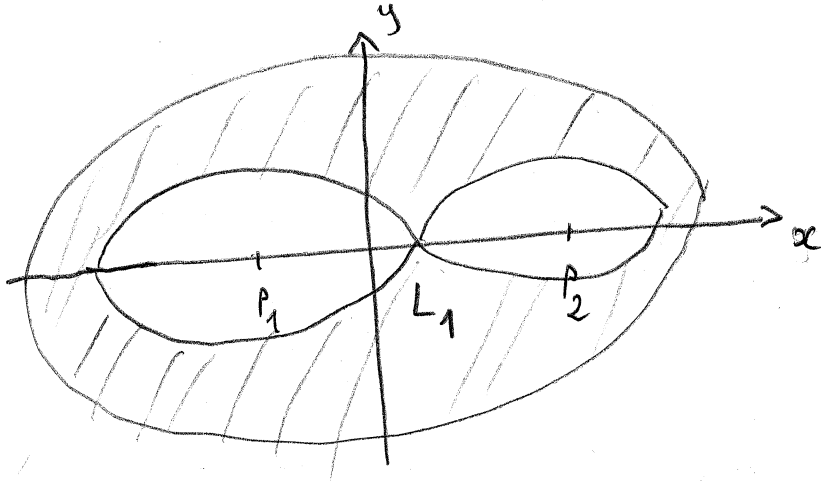
(23)

Dacă în schimb r_{13} sau r_{23} au valori mici atunci curbele definite de ecuația (21) mărginesc două regiuni ovale care conțin punctele P_1 (în cazul în care r_{13} are valoare mică) și P_2 (r_{23} are valoare mică). Acest caz este prezentat în figura de mai jos. Regiunea hachurată nu este accesibilă punctului P_3

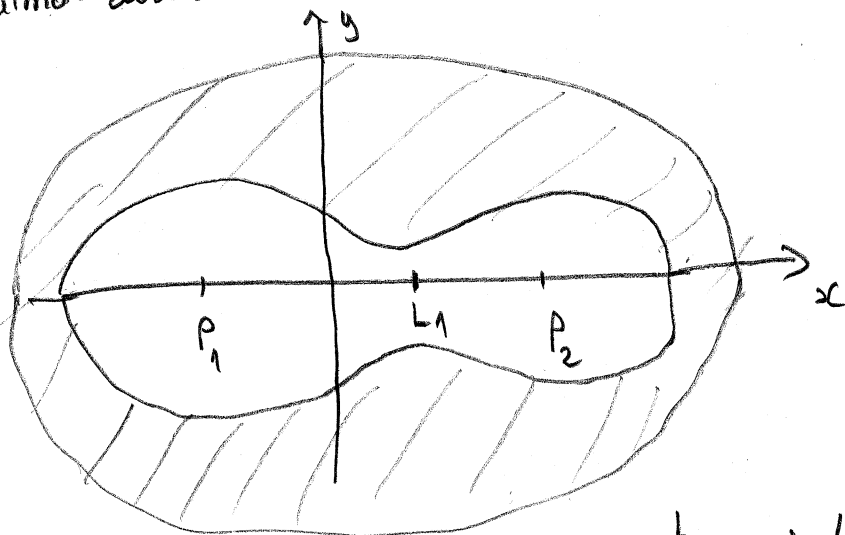


Dacă C_j scade atunci ovalele interioare "se măresc" în timp ce curba exterioară își micșorează "rota". Pentru o valoare $C_j = C_j^{(2)} < C_j^{(1)}$ cele două ovale interioare devin tangente în punctul dublu L_1 :

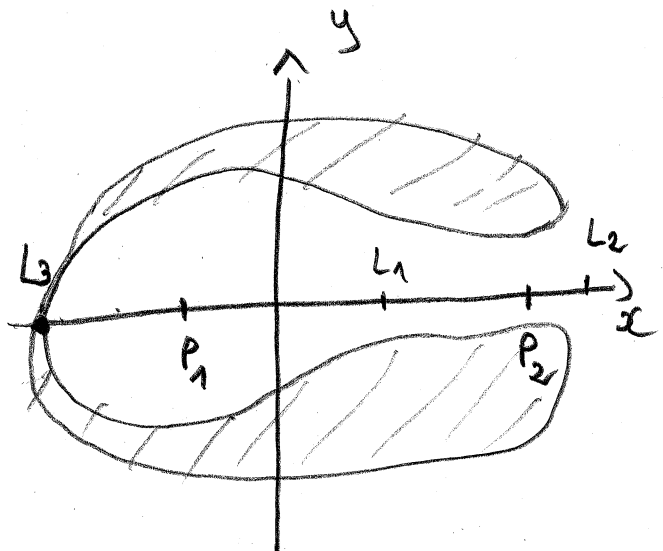
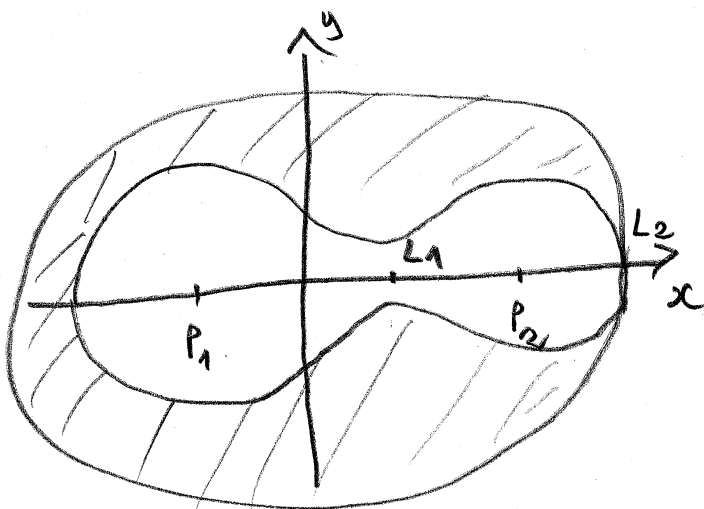
(6)



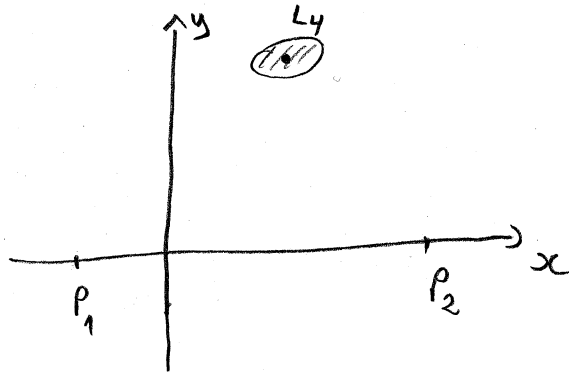
Dacă procesul continuă atunci regiunile admisibile pot fi descrise ca în figura de mai jos. Se poate observa că P_3 poate eroda din vecinătatea unui corp primar devenind satelit al celui alt corp. ($C_j = C_j^{(3)} < C_j^{(2)}$)



Pentru o valoare $C_j = C_j^{(4)} < C_j^{(3)}$ curba interioară devine tangentă curbei exterioare în L_2 , iar pentru $C_j = C_j^{(5)} < C_j^{(4)}$ se obține punctul L_3



Dacă procesul continuă atunci regiunile neadmisibile punctului P_3 și micșorează volumul până când devin două puncte L_4 și L_5 :



Să revenim la cazul tridimensional. L_5

Definiție. O poziție L se numește punct de echilibru pentru punctul P_3 , dacă plasând punctul P_3 fără viteză inițială în L , acesta rămâne mereu în această poziție.

Dim (17), rezultă că pozițiile de echilibru (viteza și accelerația sunt nule) se obțin rezolvând ecuațiile

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (24)$$

Ne propunem să arătăm că punctele $L_1, L_2, \dots, L_5$ sunt puncte de echilibru ale particulei P_3 în reperul $Oxyz$. Pentru aceasta utilizăm următorul rezultat din geometrie: Se consideră suprafața

$$f(x, y, z) = 0 \quad (25)$$

unde f este o funcție de clasă C^1 . Punctele duble ale suprafeței (25) se determină din condițiile

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (26)$$

În cazul problemei noastre

$$f(x, y, z) = 2U - C_j = 0, \quad (27)$$

apoi punctele $L_1, \dots, L_5$ se determină din condițiile

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (2.8)$$

adică (comparând cu (2.4)) aceste poziții $L_1, \dots, L_5$ sunt puncte de echilibru.

Se arată că L_1, L_2, L_3 sunt puncte de echilibru instabil.
Dacă $\mu < 0.0385$ atunci L_4 și L_5 sunt puncte de echilibru stabil,
iar dacă $\mu \geq 0.0385$ atunci L_4 și L_5 sunt puncte de echilibru instabil.