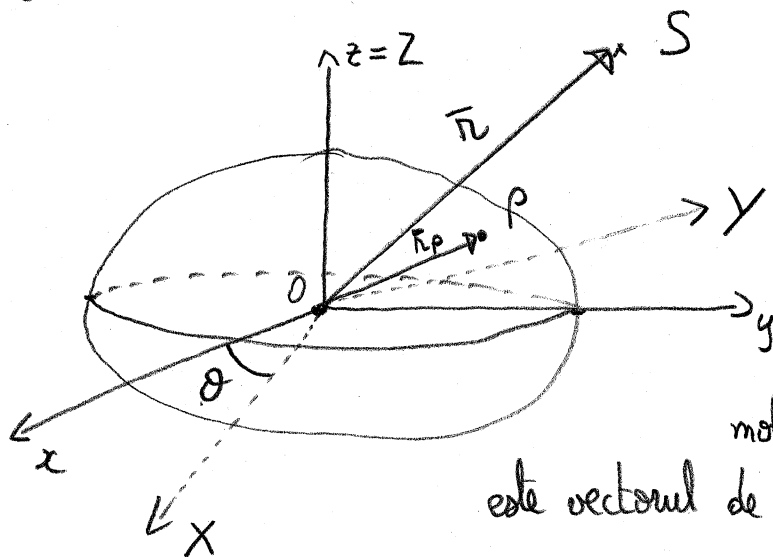


Miscarea unui punct material în jurul unui corp neregular

Considerăm un punct material S (un satelit) care se mișcă în jurul unui corp neregular ($\varnothing$ planetă având forma neregulată) sub acțiunea forței de atracție. Presupunem că planeta se rotește uniform în jurul unei axe cu viteza unghiulară $\dot{\varnothing} = \text{constant}$.

- Pentru a descrie mișcarea satelitului S în jurul planetei și mișcarea de rotație a planetei considerăm următoarele două sisteme de referință:
- i) sistemul de axe $Oxyz$ cu originea O în centrul planetei, axele x, y, z sunt axe fixe orientate așa încât z coincide cu axa de rotație a planetei;
 - ii) sistemul de referință mobil $OXYZ$, solidul legat de planetă (orice punct din interiorul planetei este fix față de $OXYZ$), unde axa Z coincide cu axa de rotație a planetei.

Rotația uniformă a planetei este descrisă prin intermediul unghiului $\varnothing$ format de axele Ox și OX , care variază liniar în timp ($\varnothing = \dot{\varnothing} t$).



Notăm prin (x, y, z) coordonatele satelitului în reperul fix $Oxyz$ și prin (X, Y, Z) coordonatele satelitului în reperul mobil $OXYZ$. Dacă $\vec{r}$ este vectorul de poziție al satelitului, atunci

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = X\bar{I} + Y\bar{J} + Z\bar{K}, \quad (1)$$

unde $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt versorii axelor fixe x, y, z și $\bar{I}, \bar{J}, \bar{K}$ versorii axelor X, Y, Z .

Utilizând formulele de rotație rezultă

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_3(-\theta) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (2)$$

unde $R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ reprezintă matricea de rotație de unghi θ în

jurul celui de-a treia axe.

Fie P un punct (generic) din interiorul planetei. Notăm prin $\bar{r}_p$ vectorul de poziție, iar prin dm_p masa punctului P . Forța cu care satelitul S este atras de punctul P este:

$$\bar{F}_p = - \frac{\gamma m dm_p}{|\bar{r} - \bar{r}_p|^3} (\bar{r} - \bar{r}_p) \quad (3)$$

unde m este masa satelitului. Aplicând principiul lui Newton, din (3) rezultă că ecuația vectorială care descrie mișcarea satelitului S este

$$\ddot{\bar{r}} = - \gamma \int_D \frac{\bar{r} - \bar{r}_p}{|\bar{r} - \bar{r}_p|^3} dm_p, \quad (4)$$

unde D este volumul ocupat de planetă. Dacă notăm prin $\rho(\bar{r}_p)$ densitatea în punctul P , atunci relația (4) se poate rescrie în forma

$$\ddot{\bar{r}} = - \gamma \int_D \rho(\bar{r}_p) \frac{\bar{r} - \bar{r}_p}{|\bar{r} - \bar{r}_p|^3} dv \quad (5)$$

unde dv este elementul de volum.

Notăm prin ∇_M, ∇_I gradientii în reperul sinodic (mobil) și respectiv fix (inertial):

$$\nabla_M = \bar{I} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{J} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{K} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_I = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (6)$$

Observația 1° În cazul problemei (clasice) a celor două corpuri, mișcarea satelitului este descrisă prin ecuația

$$\ddot{\vec{r}} = - \mathcal{G} M_p \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (7)$$

unde M_p este masa planetei. Ecuația de mai sus se poate rescrie în formă

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = - \frac{\mathcal{G} M_p}{|\vec{r}|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

sau, dacă ținem cont de (2), în mod echivalent

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = - \mathcal{G} M_p R_3(-\theta) \begin{pmatrix} \frac{x}{|\vec{r}|^3} \\ \frac{y}{|\vec{r}|^3} \\ \frac{z}{|\vec{r}|^3} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Relația (9) se poate scrie în formă

$$\ddot{\vec{r}} = - \mathcal{G} M_p R_3(-\theta) \nabla_M \left(- \frac{1}{r} \right) \quad (10)$$

Observația 2° În ipotezele observației 1°, dacă mișcarea satelitului este perturbată de atracția exercitată de un alt corp atunci ecuația (10) se îmbrățișează prin (a se vedea notițele anterioare unde a fost introdusă forța perturbatoare)

$$\ddot{\vec{r}} = - \mathcal{G} M_p R_3(-\theta) \nabla_M \left(- \frac{1}{r} \right) + \mathcal{G} M^* \nabla_I \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}^*|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}^*}{|\vec{r}^*|^3} \right), \quad (11)$$

unde $\vec{r}^*$ și M^* sunt vectorul de poziție și masa corpului perturbator.

Dacă ținem cont de observația 1°, rezultă că ecuația (5) se poate pune sub forma

$$\ddot{\vec{r}} = - R_3(-\theta) \nabla_M V,$$

(12)

unde

$$V = - \mathcal{G} \int_D \frac{\rho(\vec{r}_p)}{|\vec{r} - \vec{r}_p|} d\sigma,$$

(13)

reprezintă potențialul gravitațional al planetei. Se verifică ușor că $V(\vec{r})$ satisface ecuația lui Laplace

(14)

$$\Delta V = 0$$

în exteriorul domeniului D , și respectiv ecuația lui Poisson

(15)

$$\Delta V = 4\pi \mathcal{G} \rho$$

în interiorul domeniului D .

Evident, orbita satelitului este inclusă în exteriorul domeniului D .

Observația 3°. Dacă planeta are formă sferică și este omogenă (densitatea este constantă) atunci V are forma

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} - \frac{\mathcal{G} M_P}{|\vec{r}|}, & |\vec{r}| > R, \\ - \frac{\mathcal{G} M_P}{2 R^3} (3R^2 - |\vec{r}|^2), & |\vec{r}| \leq R, \end{cases}$$

(16)

unde R este raza sferei.

Pentru un corp nesferic au fost introduse mai multe modele pentru a specifica potențialul V , bazate pe: utilizarea armonicalor sferice sau armonicalor eliptice, forme corpului, concentrației masei (mascons). Vom exemplifica metoda armonicalor sferice. Astfel, se poate arăta că ecuația lui Laplace poate fi rezolvată prin metoda separării variabilelor dacă sunt utilizate coordonatele sferice (a se vedea Kaula (1966), Theory of satellite geodesy)

(r, ϕ, λ) definite prin

(4)

$$X = r \cos \phi \cos \lambda$$

(17)

$$Y = r \sin \phi \sin \lambda$$

$$Z = r \sin \phi$$

unde r este nota vectorie, $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ este latitudinea, iar $\lambda \in [0, 2\pi)$ este longitudinea. Utilizând faptul că un anumită clasă de armonice sferice formează un sistem ortogonal într-un spațiu funcțional, se arată că potențialul V (soluție ecuației lui Laplace) are forma

$$V(r, \phi, \lambda) = - \frac{GM_p}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_p}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda), \quad (18)$$

unde R_p este ^{nota} normalizată a planetei (deosebi a fi fie nota maximă, fie nota medie a planetei), P_{nm} sunt polinoamele Legendre asociate, definite prin

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^n], \quad (19)$$

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} [P_n(x)],$$

iar C_{nm} și S_{nm} sunt constante. Valorile acestor constante determină forma planetei. În diverse studii se utilizează cantitățile J_{nm} , λ_{nm} definite prin

$$J_{nm} = \sqrt{C_{nm}^2 + S_{nm}^2} \text{ dacă } m \neq 0, \quad J_{n0} \equiv J_n = -C_{n0}, \quad (20)$$

$$C_{nm} = -J_{nm} \cos(m\lambda_{nm}), \quad S_{nm} = -J_{nm} \sin m\lambda_{nm}.$$

Astfel, (18) devine

$$V(r, \phi, \lambda) = \frac{GM_p}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R_p}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) J_{nm} \cos[m(\lambda - \lambda_{nm})]. \quad (21)$$

(5)

Observația 4°: Dacă se consideră originea O a reperului în centrul de masă al planetei atunci se are că

$$C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0.$$

Observația 5°: În cazul Pământului, valorile constantelor C_{nm} , S_{nm} , J_{nm} , λ_{nm} , până la gradul și ordinul $n=m=2$ sunt

$$C_{20} = -1082,6263 \cdot 10^3, \quad S_{20} = 0, \quad J_{20} = -C_{20}, \quad \lambda_{20} = 0$$

$$C_{21} = 0(10^{-9}), \quad C_{31} = 0(10^{-9})$$

$$C_{22} = 1,574 \cdot 10^{-6}, \quad S_{22} = -0,903 \cdot 10^{-6}, \quad J_{22} = 1,816 \cdot 10^{-6}, \quad \lambda_{22} = 75^\circ, 07$$

Valorile constantelor C_{nm} , S_{nm} pot fi obținute consultând modelul:

Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008).

Observația 6°: Dacă axa de rotație este aliniată cu axa principală de inerție atunci $C_{21} = S_{21} = 0$.

Observația 7°: Utilizând (19) rezultă că

$$P_{00}(x) = 1, \quad P_{20}(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_{22}(x) = 3(1 - x^2) \quad (22)$$

Dacă ținem cont de observațiile de mai sus, până la gradul și ordinul $n=m=2$, potențialul V se exprimă în formă

$$V(r, \phi, \lambda) = -\frac{\gamma M_p}{r} - \frac{\gamma M_p}{r} \left(\frac{R_p}{r}\right)^2 \left[\frac{1}{2}(3 \sin^2 \phi - 1) C_{20} + 3 C_{22} \cos^2 \phi \cos 2\lambda + 3 S_{22} \cos^2 \phi \sin 2\lambda \right]. \quad (23)$$

În plus, întrucât $\cos 2\lambda = \cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda$, $\sin 2\lambda = 2 \sin \lambda \cos \lambda$, din (17) și (23) deducem

$$V(X, Y, Z) = -\frac{GM_P}{r} - \frac{GM_P}{r} \left(\frac{R_P}{r}\right)^2 \left[C_{20} \left(\frac{3}{2} \frac{Z^2}{r^2} - \frac{1}{2} \right) + 3C_{22} \frac{X^2 - Y^2}{r^2} + 6S_{22} \frac{XY}{r^2} \right]. \quad (24)$$

Se calculează

$$\nabla_M V,$$

unde ∇_M este definit prin (6), iar apoi

$$R_3(-\theta) \nabla_M V. \quad (25)$$

În baza relației (2), conținute (26) se exprimă în funcție de coordonatele x, y, z . Înlocuind în (12) obținem ecuația vectorială a mișcării satelitului S.

Observație 8° Mișcarea satelitului S poate fi descrisă utilizând formalismul 'Hamiltonian în termenii elementelor Delaunay. Se arată că Hamiltonianul are forma

$$H(\theta, L, G, H, M, \omega, \Omega) = -\frac{(GM_P)^2}{2L^2} + H_1(\theta, L, G, H, M, \omega, \Omega) \quad (27)$$

unde H_1 este funcția perturbatoare datorată relației și formei neregulate a planetei