

Fisă de exerciții

1. Un punct material P de masă m este atras de două centre fixe $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, proporțional cu distanța, factorul de proporționalitate fiind mk , $k > 0$. Să se determine:

- Energia cinetică și forțele generalizate;
- Potentialul forțelor și funcția lui Lagrange;
- Ecuațiile lui Lagrange;
- Impulsurile generalizate și funcția lui Hamilton;
- Ecuațiile canonice
- Arătați că ecuațiile canonice admit integrale primă

$$\Phi = \left(x - \frac{a}{2}\right) p_y - \left(y - \frac{b}{2}\right) p_x,$$

unde (p_x, p_y) sunt impulsurile asociate variabilelor canonice (x, y) .

- Determinați soluția ecuațiilor lui Lagrange. Aplicație numerică: $m = \frac{1}{2}$, $k = 2$, $a = 2$, $b = 4$. La momentul inițial $t_0 = 0$ poziția și viteza punctului P sunt: $\vec{r}(0) = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v}(0) = 3\vec{i} + 6\vec{j}$

Rezolvare. i) Punctul P are două grade de libertate deoarece se mișcă liber în planul xOy . Cele două variabile care descriu mișcarea sunt coordonatele carteziene x, y ale punctului P .

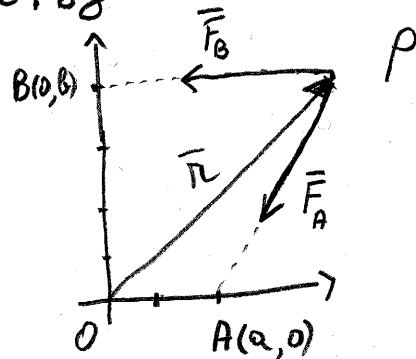
Vectorul de poziție, vectorul viteză și energia cinetică au forma

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j},$$

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Punctul P este atras de două centre fixe, A și B proporțional cu distanța. Notăm prin $\vec{F}_A$ și $\vec{F}_B$ cele două forțe (ca în figură).



Amintim că o forță se modelează matematic printr-un vector legat, adică este caracterizată prin punctul de aplicare, mărime, direcție și sens. Să considerăm, spre exemplu forța $\vec{F}_A$. Aceasta, are ca punct de aplicare punctul P, mărimea (conform ipotezei) egală cu $mk \|\vec{PA}\|$, adică factorul de proporționalitate mk înmulțit cu distanța dintre P și centrul atractiv, direcția este dreapta PA, iar sensul este dinspre P spre A (forță de atracție).

Altfel, putem scrie:

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= mk \|\vec{PA}\| \frac{\vec{PA}}{\|\vec{PA}\|} = mk \vec{PA} = mk (\vec{PO} + \vec{OA}) = mk (\vec{OA} - \vec{r}) = \\ &= mk [(a-x)\vec{i} - y\vec{j}].\end{aligned}$$

Analog, forța $\vec{F}_B$ are forma:

$$\begin{aligned}\vec{F}_B &= mk \|\vec{PB}\| \frac{\vec{PB}}{\|\vec{PB}\|} = mk \vec{PB} = mk (\vec{OB} - \vec{r}) = \\ &= mk [-x\vec{i} + (b-y)\vec{j}].\end{aligned}$$

Rezultanta celor două forțe este

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = mk [(a-2x)\vec{i} + (b-2y)\vec{j}].$$

Forțele generalizate Q_x și Q_y au expresiile:

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{F} \cdot \vec{i} = mk(a-2x),$$

$$Q_y = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{F} \cdot \vec{j} = mk(b-2y).$$

ii) Să arătăm că forțele generalizate Q_x și Q_y admit un potențial, adică $\exists V = V(x, y)$ așa încât

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -Q_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -Q_y.$$

Sistemul cu derivate parțiale de mai sus are soluții dacă este îndeplinită condiția de integrabilitate

$$\frac{\partial Q_x}{\partial y} = \frac{\partial Q_y}{\partial x}.$$

Se verifică prin calcul direct că această condiție este identic satisfăcută. Urmind algoritmul standard de integrare obținem:

$$V = -mk[(ax - x^2) + (by - y^2)].$$

Funcția lui Lagrange L are expresia:

$$L = E - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mk(ax - x^2 + by - y^2).$$

iii) Ecuațiile lui Lagrange sunt următoarele:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

În acest caz, ecuațiile devin

$$\begin{cases} m\ddot{x} - mk(a - 2x) = 0, \\ m\ddot{y} - mk(b - 2y) = 0. \end{cases}$$

iv) Impulsurile generalizate au forma:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},$$

de unde obținem funcția lui Hamilton

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \hat{L} = p_x \frac{p_x}{m} + p_y \frac{p_y}{m} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_x^2}{m^2} + \frac{p_y^2}{m^2} \right) - mk(ax - x^2 + by - y^2) =$$

$$= \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + mk(x^2 - ax + y^2 - by).$$

v) Ecuațiile canonice au forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, & \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{cases}$$

de unde obținem

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, & \dot{y} = \frac{p_y}{m} \\ \dot{p}_x = mk(a - 2x), & \dot{p}_y = mk(b - 2y) \end{cases}$$

vi) Variabila dinamică $\phi(x, y, p_x, p_y) = (x - \frac{a}{2})p_y - (y - \frac{b}{2})p_x$ este integrală primă a sistemului canonic dacă și numai dacă poartă relația Poisson $\{\phi, H\} = 0$. Să verificăm această condiție:

$$\begin{aligned} \{\phi, H\} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial \phi}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial \phi}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} = \\ &= p_y \frac{p_x}{m} + (y - \frac{b}{2})mk(2x - a) - p_x \frac{p_y}{m} - (x - \frac{a}{2})mk(2y - b) = 0 \end{aligned}$$

vii) Ecuațiile lui Lagrange devin

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4(x - 1) = 0, \\ \ddot{y} + 4(y - 2) = 0. \end{cases}$$

Condițiile initiale sunt: $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $\dot{x}(0) = 3$, $\dot{y}(0) = 6$.

Soluția are forma: $x = \frac{3}{2} \sin 2t + 1$, $y = 3 \sin 2t + 2$.

2. Se consideră un punct material de masă $m = \frac{1}{2}$, obligat să se miște în plan pe dreapta $x+y=1$, sub acțiunea forței

$\vec{F} = x\vec{i} + 2(1-y)\vec{j}$. Să se determine: energie cinetică, potențialul forței $\vec{F}$, funcția lui Lagrange, ecuațiile lui Lagrange, funcția lui Hamilton, ecuațiile canonice. Studiați mișcarea dacă la momentul inițial punctul material ocupă poziția $M_0(2, -1)$ și are viteza $\vec{v}(0) = \vec{i} - \vec{j}$.

Răspuns. Punctul material are un singur grad de libertate; mișcarea poate fi descrisă, spre exemplu, de funcția $x = x(t)$.

Din ecuația $x+y=1$, rezultă că vectorul de poziție, vectorul vitezei și energia cinetică au forme:

$$\vec{r} = x\vec{i} + (1-x)\vec{j},$$

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} - \dot{x}\vec{j},$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + (-\dot{x})^2) = m\dot{x}^2.$$

Forța generalizată are expresia (utilizăm din nou relația $x+y=1$):

$$Q_x = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (x\vec{i} + 2x\vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = x - 2x = -x.$$

Potențialul forței se obține din ecuația

$$\frac{dV}{dx} = -Q_x,$$

adică

$$\frac{dV}{dx} = x$$

de unde obținem

$$V(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Funcția lui Lagrange este:

$$L = E - V = m\dot{x}^2 - \frac{x^2}{2}.$$

Ecuația lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

derivate

$$2m\ddot{x} + x = 0.$$

Impulsul generalizat asociat variabilei x este

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x}.$$

Funcția lui Hamilton are forma

$$H(x, p_x) = p_x \dot{x} - \hat{L} = p_x \frac{p_x}{2m} - m \frac{p_x^2}{4m^2} + \frac{x^2}{2} = \frac{p_x^2}{4m} + \frac{x^2}{2}$$

Ecuațiile canonice sunt

$$\dot{x} = \frac{p_x}{2m}, \quad \dot{p}_x = -x.$$

Să considerăm problema Cauchy ($m = \frac{1}{2}$)

$$\ddot{x} + x = 0,$$

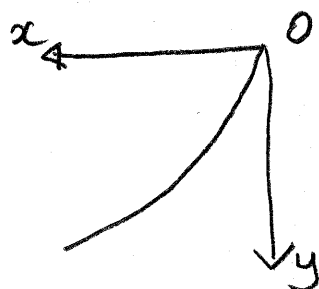
$$x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Soluția acestei este, $x(t) = 2\cos t + \sin t$.

- ③ Un punct material greu de masă m se mișcă fără viteză inițială pe cicloida $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $a > 0$, unde axa Oy este verticală descendentă.

Știind că asupra punctului material acționează doar greutatea, determinați funcția lui Lagrange și funcția lui Hamilton. Studiați mișcarea.

$$R: L = m a^2 \dot{\theta}^2 (1 - \cos\theta) - m g a \cos\theta, \quad H = \frac{p_\theta^2}{4m a^2 (1 - \cos\theta)} + m g a \cos\theta.$$



4. Un punct material de masă m este atras de vârfurile unui triunghi echilateral proporțional cu distanța, factorul de proporționalitate fiind mk , $k > 0$. Să se determine funcția lui Lagrange și funcția lui Hamilton. Studiați mișcarea.

R. Dacă A, B, C sunt vârfurile triunghiului, degeți sistemul de axe Oxy așa încât A să se afle pe axa y , iar B, C pe axa x .

5. Studiați mișcarea a două puncte P_1, P_2 care se atrag cu forțe mutuale ale căror mărimi sunt proporționale cu masele punctelor și cu distanța dintre ele.

R: Se poate arăta că mișcarea este plană. În rezolvare, presupunem că știm acest rezultat. Sistemul mecanic are 4 grade de libertate, și așadar coordonatele carteziene (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ale celor două puncte. Să introducem notațiile:

$q_1 = x_1, q_2 = y_1, q_3 = x_2, q_4 = y_2$. Energie cinetică se calculează cu formula $E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$, iar forțele generalizate cu

formula

$$Q_i = \sum_{\alpha=1}^2 \bar{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \pi_{\alpha}}{\partial q_i}, \quad i=1,4,$$

unde $\bar{F}_1$ este forța cu care P_2 acționează asupra lui P_1 , iar

$\bar{F}_2$ este forța cu care P_1 acționează asupra punctului P_2 .

Utilizând principiul acțiunii și reacțiunii, și ipoteza problemei

$$\bar{F}_1 = k m_1 m_2 \overrightarrow{P_1 P_2}, \quad \bar{F}_2 = -\bar{F}_1.$$