

Sisteme hamiltoniene

Variabile dinamice. Paranteza Poisson Operatorul Lie. Integrale prime

Considerăm un sistem hamiltonian autonom, caracterizat de funcția lui Hamilton $H: \mathbb{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, $H = H(q, p)$, unde $\mathbb{F}_{2n}$ reprezintă spațiul fazelor, iar $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ sunt coordonatele canonice. Presupunem că $H \in C^\infty(\mathbb{F}_{2n})$. Ecuațiile canonice au forma:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Def. 1. O funcție reală definită pe spațiul fazelor $f: \mathbb{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ poartă numele de variabilă dinamică.

Evident funcția lui Hamilton H este variabilă dinamică. Întrucât variabilele canonice evoluează în timp $(q_i(t), p_i(t))$, $t \in [t_0, t_1)$, $i = \overline{1, n}$, rezultă că variabile dinamice evoluează în timp $(f(t) = f(q(t), p(t)))$.

Def. 2. O variabilă dinamică $\phi: \mathbb{F}_{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ neidentic constantă spunem că este integrală primă a sistemului canonic dacă pentru o soluție $(q(t), p(t))$ a sistemului canonic (1) avem

$$\phi(q(t), p(t)) = \text{const.} \quad (2)$$

Obs. 1°. Dacă ϕ este diferentiabilă atunci ϕ este integrală primă a sistemului canonic (1) dacă și numai dacă $\dot{\phi}(q(t), p(t)) = 0$, pentru o soluție $(q(t), p(t))$ a sistemului (1).

Fie f o variabilă dinamică. Dacă f este diferentiabilă atunci în baza ecuațiilor (1) obținem:

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \quad (3)$$

Def 3. Fie f și g două variabile dinamice diferentiale. Poarta Boisson a funcțiilor f și g este prin definiție

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (4)$$

Def 4. Fie g o variabilă dinamică diferentiale. Operatorul Lie asociat funcției g este prin definiție

$$L_g = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right). \quad (5)$$

În baza relațiilor (4) și (5), relația (3) poate fi scrisă în formă

$$\dot{f} = \{f, H\} = L_H f. \quad (6)$$

Obs 2. O variabilă dinamică diferentiale ϕ este integrală primă a sistemului canonic dacă și numai dacă

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = L_H \phi = 0. \quad (7)$$

3. Ecuațiile canonice se pot scrie în formă:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (8)$$

sau echivalent

$$\dot{q}_i = L_H q_i, \quad \dot{p}_i = L_H p_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Într-adevăr, se verifică printr-un simplu calcul că

$$\{q_i, H\} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\{p_i, H\} = \sum_{j=1}^n \left(-\frac{\partial p_i}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = -\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial H}{\partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Prin calcul simplu se poate verifica faptul că paranteza Poisson are următoarele proprietăți. Astfel, fie z, g, h trei variabile dinamice diferentiale, iar α o constantă reală. Atunci au loc relațiile:

(i) liniaritate: $\{z, g+h\} = \{z, g\} + \{z, h\}$, $\{z, \alpha g\} = \alpha \{z, g\}$;

(ii) anticomutativitate: $\{z, g\} = -\{g, z\}$;

(iii) identitatea lui Jacobi: $\{z, \{g, h\}\} + \{h, \{z, g\}\} + \{g, \{h, z\}\} = 0$;

(iv) distributivitate față de înmulțire: $\{z, gh\} = g\{z, h\} + h\{z, g\}$;

(v) regula lui Leibniz de derivare:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \{z, g\} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial q_i}, g \right\} + \left\{ z, \frac{\partial g}{\partial q_i} \right\}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \{z, g\} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial p_i}, g \right\} + \left\{ z, \frac{\partial g}{\partial p_i} \right\}, \quad i = \overline{1, n};$$

În termenii operatorii Lie, proprietățile de mai sus se pot scrie în forma

(i) $L_z(g+h) = L_z g + L_z h$, $L_z(\alpha g) = \alpha L_z g$;

(ii) $L_z g = -L_g z$

(iii) $[L_z, L_g] = L_{\{g, z\}} = L_{L_z g}$,

unde $[]$ este alternatorul a doi operatori diferențiali (dacă U, V sunt operatori diferențiali atunci $[U, V]z = UVz - VUz$ pentru orice variabilă dinamică z)

(iv) $L_z(gh) = g L_z h + h L_z g$;

(v) $\left[\frac{\partial}{\partial q_i}, L_z \right] = L_{\frac{\partial z}{\partial q_i}}$, $\left[\frac{\partial}{\partial p_i}, L_z \right] = L_{\frac{\partial z}{\partial p_i}}$, $i = \overline{1, n}$.

Teorema (Jacobi-Poisson). Dacă ϕ și ψ sunt două integrale prime diferentiale ale sistemului canon atunci $\{\phi, \psi\}$ este integrală primă a sistemului canon.

Dem. În baza relației (7), este suficient să arătăm că $\{\{\phi, \psi\}, H\} = 0$, știind că $\{\phi, H\} = 0$ și $\{\psi, H\} = 0$.

Utilizând identitatea lui Jacobi, putem scrie:

$$\{ \{ \Phi, \Psi \}, H \} = - \{ H, \{ \Phi, \Psi \} \} = \{ \Psi, \{ H, \Phi \} \} + \{ \Phi, \{ \Psi, H \} \} = 0$$

ceea ce demonstrează teorema.

Obs. 4° Pornind de la două integrale prime f_1, f_2 , în baza teoremei Jacobi-Poisson rezultă că $\{f_1, f_2\}$ este integrală primă. Aceasta înseamnă că putem genera o infinitate de integrale prime de sistemului cononic, însă acestea nu sunt independente. Pentru un sistem general de $2n$ ecuații diferențiale de ordinul întâi putem găsi cel mult $2n-1$ integrale prime. Pentru sistemul cononic sunt necesare n integrale prime (conform teoremei lui Liouville) pentru determinarea soluției.

Exemplu: Mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe elastice $\vec{F} = -k\vec{r}$ unde $k > 0$.

În coordonate carteziene, vectorul de poziție și vectorul vitezei au forma:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

de unde rezultă că energia cinetică este

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Forța elastică este conservativă, adică există $V = V(x, y, z)$ astfel încât

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}. \text{ Potențialul forței elastice are forma:}$$

$$V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Funcția lui Lagrange este

$$L = E - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

de unde obținem impulsurile generalizate:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Funcția lui Hamilton are forma

$$H = p_x \hat{x} + p_y \hat{y} + p_z \hat{z} - L = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Se poate verifica faptul că variabilele dinamice $f = x p_y - y p_x$, $g = y p_z - z p_y$, $h = z p_x - x p_z$ sunt integrale prime. Acestea nu sunt independente deoarece $\{f, g\} = h$.

Un sistem autonom admite cel puțin o integrală primă, și anume hamiltonianul H , care reprezintă chiar energia mecanică a sistemului. Într-odivă, pe baza proprietății de anticomutativitate a parantezei Poisson rezultă

$$\{H, H\} = 0, \quad (10)$$

ceea ce demonstrează că H este integrală primă.

Def. 3. O coordonată canonică q_k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se numește ciclică (sau ignobilă) dacă Hamiltonianul H nu depinde explicit de q_k , adică

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n).$$

Teoremă. Dacă q_α , $\alpha = m+1, m+2, \dots, n$, sunt coordonate ciclice atunci variabilele canonice $p_\alpha = \dot{q}_\alpha$, $\alpha = m+1, m+2, \dots, n$, sunt integrale prime ale sistemului canonic

Dem. Demonstrația teoremei rezultă din relație:

$$\{p_\alpha, H\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = - \sum_{i=1}^n \delta_{\alpha i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (11)$$

Teorema de mai sus arată că dacă H nu depinde explicit de coordonatele q_α , $\alpha = m+1, m+2, \dots, n$, atunci

$$p_\alpha = b_\alpha, \quad \alpha = m+1, m+2, \dots, n \quad (12)$$

unde b_α sunt constante. Astfel, funcția lui Hamilton devine:

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_n). \quad (13)$$

Deci sistemul canonic se reduce la $2m$ ecuații cu $2m$ necunoscute $(q_1, q_2, \dots, q_m, p_1, p_2, \dots, p_m)$. După rezolvarea acestui sistem, în care cazul acest fapt este posibil, obținem soluția

$$q_j = q_j(t, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n), \quad p_j = p_j(t, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n), \quad j = \overline{1, m}. \quad (14)$$

Coordonatele rămase $q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_n$ se determină prin simple cuadraturi, deoarece H devine funcție de $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n$.

Obs. 5°. Dacă toate coordonatele sunt ciclice atunci toate coordonatele p_i vor fi constante. Aceasta observație se poate utiliza pentru a căuta o transformare $(q, p) \rightarrow (\bar{q}, \bar{p})$, care învioriază sistemul canonic, așa încât $\bar{q}_i$ să fie toate coordonate ciclice.

Transformări canonice: simplecticitatea matricii Jacobiene, păstrarea parantezei Poisson

Considerăm un sistem hamiltonian autonom descris de funcția lui Hamilton $H = H(q, p)$, $(q, p) \in \mathbb{T}_{2n}$, $H \in C^\infty(\mathbb{T}_{2n})$.

Considerăm o transformare de coordonate

$$q_i = q_i(\bar{q}, \bar{p}), \quad p_i = p_i(\bar{q}, \bar{p}), \quad i = \overline{1, n} \quad (1)$$

unde funcțiile q_i, p_i , $i = \overline{1, n}$, sunt de clasă C^2 așa încât

$$\det \left(\frac{\partial(q, p)}{\partial(\bar{q}, \bar{p})} \right) \neq 0. \quad (2)$$

Def 1. Spunem că transformarea (1) păstrează forma canonică a ecuațiilor, dacă funcției lui Hamilton $H(q, p)$ îi putem asocia o funcție $K(\bar{q}, \bar{p})$ așa încât ecuațiile canonice

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

să se transforme în

$$\dot{\bar{q}}_i = \frac{\partial K}{\partial \bar{p}_i}, \quad \dot{\bar{p}}_i = -\frac{\partial K}{\partial \bar{q}_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Def 2. Spunem că transformarea (1) este canonică dacă forma ecuațiilor se păstrează cu noul Hamiltonian $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = H(q, p) \Big|_{\substack{q=q(\bar{q}, \bar{p}) \\ p=p(\bar{q}, \bar{p})}}$

Obr. 1°. Diferența dintre prima și a doua definiție este aceea că în cazul al doilea, noul Hamiltonian se obține direct din primul Hamiltonian prin înlocuirea coordonatelor q, p cu funcțiile $Q(\bar{Q}, \bar{P})$, $P(\bar{Q}, \bar{P})$.

2°. Importanța transformărilor canonice constă în aceea că printr-o alegere judicioasă a lor, putem ajunge de la sisteme canonice complicate la sisteme mult mai simple.

3°. În cazul sistemelor integrabile, dacă găsim transformarea pentru care $\bar{H}$ (sau K) depinde doar de impulsurile generalizate $\bar{P}$ atunci ecuațiile canonice se integrează în mod direct. Astfel, dacă $K = K(\bar{P})$ atunci din ecuațiile canonice

$$\begin{cases} \dot{\bar{Q}}_i = \frac{\partial K}{\partial \bar{P}_i} \\ \dot{\bar{P}}_i = 0 \end{cases} \quad i = \overline{1, n}$$

rezultă $\bar{P}_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$ unde b_i sunt constante, $\frac{\partial K}{\partial \bar{P}_i} = \omega_i$, $i = \overline{1, n}$, ω_i - const
și $\bar{Q}_i = \omega_i t + \bar{Q}_i^0$. Apoi soluția sistemului este
 $\bar{Q}_i = \omega_i t + \bar{Q}_i^0$, $\bar{P}_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$,
unde $\bar{Q}_i^0$ sunt constante.

Exemple de transformări canonice

1. Translația. Transformarea

$$q_i = \bar{q}_i + a_i, \quad p_i = \bar{p}_i + b_i, \quad a_i, b_i - \text{const}, \quad i = \overline{1, n}$$

este canonică.

2. Transformarea

$$q_i = \alpha \bar{q}_i, \quad p_i = \beta \bar{p}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad \alpha, \beta - \text{const.}$$

păstrează forma canonică a ecuațiilor dacă $K(\bar{Q}, \bar{P}) = \frac{1}{\alpha\beta} H(q(\bar{Q}, \bar{P}), p(\bar{Q}, \bar{P}))$

3. Schimbarea de coordonate. Transformarea

$$q_i = \bar{p}_i, \quad p_i = -\bar{q}_i, \quad i = \overline{1, n}$$

este canonică.

Notăm prin $J \in M_{2n}(\mathbb{R})$ următoarea matrice pătratică

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Se observă prin calcul direct că

$$J^2 = -I_{2n}, \quad J^{-1} = -J. \quad (6)$$

Def. 3. Spunem că matricea $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ este simplctică dacă

$$A^T J A = J. \quad (7)$$

Dacă în spațiul fazelor, notăm prin $x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ coordonatele canonice și
introducem notația $\partial_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{2n}} \end{pmatrix}$ atunci ecuațiile canonice (3) pot fi

scrise în forma

$$\dot{x} = J \partial_x H. \quad (8)$$

Transformarea (1) poate fi scrisă în forma

$$x = u(y) \quad (9)$$

unde y reprezintă noile coordonate. Notăm prin u_y matricea Jacobiană a transformării.

Propoziție 1 Transformarea (9) este canonică dacă și numai dacă matricea Jacobiană u_y satisface

$$u_y^T J u_y = J, \quad (10)$$

adică u_y este matrice simplctică.

Dem. Notăm prin $K(y)$ Hamiltonianul exprimat în noile coordonate,

adică

$$K(y) = H \circ u(y). \quad (11)$$

Printr-un calcul direct obținem relația

$$\frac{\partial K}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_j} \Big|_{x=u(y)} \quad (12)$$

care poate fi rescrisă în forma compactă

$$\partial_y K = u_y^T \partial_x H u. \quad (13)$$

Ecuatiile canonice (8) se pot rescrie în forma

$$-J \dot{x} = \partial_x H \quad (14)$$

Ținând cont de faptul că $\dot{x} = u_y \dot{y}$, din (14) deducem

$$-J u_y \dot{y} = \partial_x H u. \quad (15)$$

Din (13) și (15) găsim relația

$$-u_y^T J u_y \dot{y} = \partial_y K, \quad (16)$$

care demonstrează proprietatea enunțată.

Fie $f = f(q, p)$ o variabilă dinamice. Atunci în baza transformării (1) putem scrie $f = f(\bar{q}(\bar{q}, \bar{p}), p(\bar{q}, \bar{p}))$, adică f devine funcție de variabilele $\bar{q}, \bar{p}$. Pentru două variabile dinamice diferentiale f și g putem calcula paranteza Poisson relativ la coordonatele q, p , și scriem $\{f, g\}_{q,p}$ sau în raport cu coordonatele $\bar{q}, \bar{p}$, și scriem $\{f, g\}_{\bar{q}, \bar{p}}$.

Enunțăm fără demonstrație următoarea lemă.

Lema 1. Transformarea (1) păstrează paranteza Poisson a oricăror variabile dinamice f și g dacă și numai dacă păstrează parantezele Poisson fundamentale, unde parantezele Poisson fundamentale sunt

$$\{q_i, p_j\}_{q,p} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\}_{q,p} = 0, \quad \{p_i, p_j\}_{q,p} = 0. \quad (17)$$

Cu alte cuvinte, lemma afirmă că

$$\{f, g\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{f, g\}_{q, p}, \quad \forall f, g \Leftrightarrow \{q_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{q_i, p_j\}_{q, p} = \delta_{ij},$$

$$\{q_i, q_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{q_i, q_j\}_{q, p} = 0,$$

$$\{p_i, p_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} = \{p_i, p_j\}_{q, p} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Enunțăm fără demonstrație următorul rezultat de caracterizare a transformărilor canonice.

Propoziția 2. Transformarea (1) este canonică dacă și numai dacă această păstrează paranteza Poisson a oricăror funcții.

Obs. 4°. Propozițiile 1 și 2 reprezintă instrumente utile pentru a verifica dacă o anumită transformare este canonică sau nu. Cu alte cuvinte, dacă este dată o transformare, aceasta se poate verifica dacă este canonică cu ajutorul uneia dintre cele două propoziții.

Există însă metode care generează transformări canonice prin construcție. Două dintre aceste metode se bazează pe spațiul funcțiilor generatoare de transformări canonice și pe proprietățile operatorului Lie.