

Fișa de exerciții 1
Inducția matematică. Mulțimi de numere

Exercițiul 1. Să se demonstreze că numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu n elemente într-o mulțime cu m elemente este m^n . Deduceți că numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n .

Soluție. Fie A o mulțime cu n elemente și B o mulțime cu m elemente și notăm prin $\mathcal{F}(A, B)$ mulțimea tuturor funcțiilor $f : A \rightarrow B$. Vrem să demonstrăm că $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$.

Fixăm $B = \{y_1, \dots, y_m\}$ și procedăm prin inducție după n , numărul de elemente din domeniu. Mai precis, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm propoziția:

$$P(n) : |\mathcal{F}(A, B)| = m^n, \text{ pentru orice mulțime } A \text{ cu } n \text{ elemente.}$$

Etapa de verificare: Presupunem $n = 1$, deci putem scrie $A = \{x\}$. $\mathcal{F}(A, B)$ este formată atunci din funcțiile $f_j : A \rightarrow B$, $f_j(x) = y_j$, $j = 1, \dots, m$. Așadar $|\mathcal{F}(A, B)| = m$ și $P(1)$ este adevărată.

Etapa inductivă: Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $P(n)$ este adevărată: $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$ pentru orice A cu elemente și demonstrăm

$$P(n+1) : |\mathcal{F}(A', B)| = m^{n+1}, \text{ pentru orice mulțime } A' \text{ cu } n+1 \text{ elemente.}$$

Fie deci o mulțime A' cu $n+1$ elemente. Fixăm $x \in A'$ și scriem $A' = A \sqcup \{x\}$ unde A este o mulțime cu n elemente. Din ipoteza inductivă știm

$$|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$$

Considerăm funcțiile $\phi : \mathcal{F}(A, B) \times B \rightarrow \mathcal{F}(A', B)$ care asociază perechii $(f, y) \in \mathcal{F}(A, B) \times B$, funcția

$$f' : A' \rightarrow B, f'(z) = \begin{cases} f(z), & \text{dacă } z \in A \\ y, & \text{dacă } z = x \end{cases}$$

și $\psi : \mathcal{F}(A', B) \rightarrow \mathcal{F}(A, B) \times B$, definită prin

$$(f' : A' \rightarrow B) \in \mathcal{F}(A', B) \mapsto (f|_A, f(x)) \in \mathcal{F}(A, B) \times B$$

Se verifică ușor că ϕ și ψ sunt inverse una alteia, deci ϕ este bijectivă. Așadar:

$$|\mathcal{F}(A', B)| = |\mathcal{F}(A, B) \times B| = |\mathcal{F}(A, B)| \cdot |B| = m^n \cdot m = m^{n+1}$$

Deci $P(n+1)$ este adevărată.

Din principiul inducției, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Observație. Funcția ϕ definită mai sus asociază unui $y \in B$ și unei funcții $f : A \rightarrow B$ extensia sa $f' : A' = A \sqcup \{x\} \rightarrow B$ ce satisface $f'(x) = y$. Inversa sa ψ asociază unui $f' : A' \rightarrow B$, restricțiile la A respectiv $\{x\}$.

A doua afirmație, legată de numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente, se deduce din prima parte după cum urmează. Fie A o mulțime cu n elemente. Fiecărei submulțimi $C \subset A$ îi asociem funcția caracteristică

$$\chi_C : A \rightarrow \{0, 1\}$$
$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in C \\ 0, & \text{dacă } x \in A \setminus C \end{cases}$$

obținând astfel o funcție

$$\chi : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A, \{0, 1\}), C \mapsto \chi_C$$

Reciproc, fiecărei funcții $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ putem să îi asociem submulțimea $f^{-1}(1)$ a lui f , obținând o aplicație

$$h : \mathcal{F}(A, \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{P}(A), \quad f \mapsto f^{-1}(1)$$

Este ușor de verificat că χ și h sunt inverse una alteia deci:

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{F}(A, \{0, 1\})| = 2^n$$

Observație. O demonstrație mai intuitivă a formulei $\mathcal{F}(A, \mathcal{B}) = m^n$ este următoarea. Notăm $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ și $B = \{y_1, \dots, y_m\}$. O funcție $f : A \rightarrow B$ este determinată (în mod unic) de valorile $f(x_1), \dots, f(x_n)$.

Așadar, avem m valori posibile pentru $f(x_1)$. Pentru fiecare alegere a lui $f(x_1)$, avem m moduri de alegere a lui $f(x_2)$. În total, obținem $m \cdot m$ moduri de alegere a valorilor $f(x_1)$ și $f(x_2)$. Repetând procedeul pentru restul valorilor, obținem că numărul de funcții $A \rightarrow B$ este $m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n$. ■

Exercițiul 2. Să se calculeze următoarele sume. Demonstrați apoi prin inducție matematică formulele găsite.

(a) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2);$

(b) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!;$

(c) $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!};$

(d) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}};$

(e) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}.$

Soluție. (a) Avem

$$k(k+1)(k+2) = k^3 + 3k^2 + 2k$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, deci:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{4} (n^2 + n + 4n + 2 + 4) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \end{aligned}$$

Considerăm acum propoziția:

$$P(n) : \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

pe care o vom demonstra prin inducție.

Etapa de verificare: Pentru $n = 1$, propoziția devine

$$P(1) : 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}$$

și este evident adevărată.

Etapa inductivă: Fie $n \geq 1$ astfel încât $P(n)$ este adevărată și arătăm că

$$P(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$$

este adevărată. Avem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4} \end{aligned}$$

deci $P(n+1)$ este adevărată. Din principiul inducției, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Calculăm mai întâi suma direct:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \cdot k! &= \sum_{k=1}^n (k+1-1) \cdot k! = \sum_{k=1}^n (k+1)! - k! \\ &= \sum_{k=1}^n (k+1)! - \sum_{k=1}^n k! \\ &= (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

Considerăm acum propoziția:

$$P(n) : \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

pe care o vom demonstra prin inducție.

Etapa de verificare: Pentru $n = 1$, $P(1) : 1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$ este evident adevărată.

Etapa inductivă: Fie $n \geq 1$. Presupunem că $P(n)$ este adevărată și arătăm că

$$P(n+1) : \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n+2)! - 1$$

este adevărată. Avem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^n k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &= (n+2)! - 1 \end{aligned}$$

deci $P(n+1)$ este adevărată. Din principiul inducției, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned} \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} &= \frac{k+2}{k!(1+k+1+(k+1)(k+2))} = \frac{k+2}{k!(k+2)^2} \\ &= \frac{1}{k!(k+2)} = \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{k+2-1}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!} \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k! + (k+1)! + (k+2)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+2)!} \\ &= \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{3!} - \cdots - \frac{1}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

Pentru ultimele două sume, vom deduce formulele, justificarea prin inducție făcându-se analog.

(d) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} &= \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

(e) Vom determina constante $A, B, C \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1} + \frac{C}{2k+3}$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Aducând la același numitor și simplificând obținem

$$k = 4(A+B+C)k^2 + (8A+4B)k + 3A - 3B - C$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, deci

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 8A+4B=1 \\ 3A-3B-C \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem obținem $A = \frac{1}{16}$, $B = \frac{2}{16}$, $C = -\frac{3}{16}$. Așadar,

$$\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{16} \frac{1}{2k-1} + \frac{2}{16} \frac{1}{2k+1} - \frac{3}{16} \frac{1}{2k+3}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

de unde găsim:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} &= \frac{1}{16} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \frac{2}{16} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{2k-1} - \frac{3}{16} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{2k-1} \\ &= \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{16} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n+1}\right) - \frac{3}{16} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}\right) \\ &= \frac{1}{16} \left(2 - \frac{1}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}\right)\end{aligned}$$

■

Exercițiul 3. Arătați că pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, avem $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.

Soluție. Considerăm predicatul $P(n) : a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$, unde $n \in \mathbb{N}$.

Etapa de verificare: $P(0)$ este evident adevărată, iar $P(1)$ este adevărată din ipoteză.

Etapa inductivă: Fie $n > 0$. Presupunem că $P(n-1)$ și $P(n)$ sunt adevărate și arătăm că $P(n+1)$ este adevărată. Avem:

$$\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) \left(a + \frac{1}{a}\right) = a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} + a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}$$

Deoarece $P(n)$ și $P(1)$ sunt adevărate, rezultă că membrul stâng este număr întreg. Dar $a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}} \in \mathbb{Z}$, deci $a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}$ este întreg, ceea ce înseamnă că $P(n+1)$ este adevărată. Din principiul inducției, rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Observație. Putem determina explicit numerele reale a astfel încât $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$.

Dacă $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, atunci există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a + \frac{1}{a} = k$, sau echivalent $a^2 - ka + 1 = 0$.

Cum a este real, trebuie ca discriminantul acestei ecuații să fie pozitiv adică: $k^2 - 4 \geq 0$, adică $|k| \geq 2$. Rezolvând ecuația, găsim că numerele căutate sunt

$$a = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}, k \in \mathbb{Z}, |k| \geq 2.$$

De exemplu, pentru $k = 4$, obținem că $a = 2 \pm \sqrt{3}$ are proprietatea $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. ■

Exercițiul 4. Fie k un număr natural fixat. Să se demonstreze că:

(a) $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{k}$, pentru orice număr natural n ;

(b) $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n < 1 + \frac{n}{k} + \frac{n^2}{k^2}$, pentru orice număr natural $n \leq k$.

Soluție. (a) Procedăm prin inducție după n .

Pentru $n = 1$, inegalitatea devine $1 + \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{k}$, evident adevărată. Presupunem că

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{k}$$

și demonstrăm că

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{k}$$

Avem

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq \left(1 + \frac{n}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= 1 + \frac{n+1}{k} + \frac{n}{k^2} \geq 1 + \frac{n+1}{k} \end{aligned}$$

Din principiul inducției, inegalitatea este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Observație. Inegalitatea este un caz particular al inegalității lui Bernoulli.

(b) Procedăm prin inducție după n (numărul k rămânând fixat). Pentru $n = 1$, inegalitatea devine $1 + \frac{1}{k} < 1 + \frac{1}{k} + \frac{1^2}{k^2}$, evident adevărată. Fie $n < k$. Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru n :

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n < 1 + \frac{n}{k} + \frac{n^2}{k^2}$$

și arătăm că inegalitatea pentru $n + 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n+1} < 1 + \frac{n+1}{k} + \frac{(n+1)^2}{k^2}$$

(observăm că $n + 1 \leq k$). Folosind ipoteza inductivă

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) < \left(1 + \frac{n}{k} + \frac{n^2}{k^2}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= 1 + \frac{n+1}{k} + \frac{n+n^2}{k^2} + \frac{n^2}{k^3} \end{aligned}$$

Este suficient deci să arătăm

$$\frac{n+n^2}{k^2} + \frac{n^2}{k^3} \leq \frac{(n+1)^2}{k^2}$$

sau echivalent

$$\frac{n^2}{k^3} \leq \frac{n+1}{k^2}$$

Dar $n + 1 \leq k$ deci

$$\frac{n^2}{k^3} = \frac{1}{k^2} n \frac{n}{k} \leq \frac{1}{k^2} (n+1) \cdot 1 = \frac{n+1}{k^2}$$

deci inegalitatea este adevărată pentru $n + 1$. Din principiul inducției rezultă concluzia cerută.

Observație. Combinând (a) și (b), pentru $n = k$ obținem că:

$$2 = 1 + \frac{n}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{n^2} = 3$$

■

Exercițiul 5. Folosind inducția matematică să se demonstreze următoarele inegalități:

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1, \forall n \geq 1;$

(b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1, \forall n \geq 1;$

(c) $n^n < (n!)^2 < 2^{n(n-1)}, \forall n \geq 3;$

(d) $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2, a_i, b_i \in \mathbb{R};$

(e) $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2, a_i, b_i \in \mathbb{R}.$

Soluție. (a) Considerăm pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, propoziția

$$P(n) : \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

Etapa de verificare: $P(1) : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ este echivalentă cu $\frac{13}{12} > 1$, ce este evident adevărată.

Etapa inductivă: Presupunem că are loc $P(n)$ și arătăm că

$$P(n+1) : \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{3n+4} > 1$$

Avem atunci:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+4} &= -\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+1} \right) + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \\ &> 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4}\end{aligned}$$

Pentru a arăta $P(n+1)$, este suficient să arătăm că

$$-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \geq 0$$

Aceasta inegalitate este echivalentă cu

$$\frac{6n+6}{(3n+2)(3n+4)} \geq \frac{2}{3n+3}$$

sau încă

$$2 \cdot (3n+3)^2 \geq 2 \left((3n+3)^2 - 1 \right)$$

care este evident adevărată.

Observație. O demonstrație alternativă este următoarea. Notăm

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}, n \geq 0$$

Avem atunci:

$$\begin{aligned}x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+4} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+1} \right) \\ &= \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Folosind calculele de mai sus, rezultă că pentru orice $n \geq 0$ are loc

$$-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} > 0$$

ceea ce arată că șirul $(x_n)_n$ este strict crescător. Deducem atunci că, pentru orice $n \geq 1$ avem

$$x_n > x_0 = 1$$

(b) Folosind același procedeu ca în punctul precedent în pasul inductiv obținem

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+4} &= -\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+1} \right) + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \\ &< 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4}\end{aligned}$$

Dar noi am arătat că

$$-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \geq 0$$

de unde deducem că membrul stâng al lui $P(n+1)$ este mai mic decât un număr de forma $2 + \varepsilon$ cu $\varepsilon \geq 0$. De aici **nu** putem deduce că are loc $P(n+1)$, ceea ce înseamnă că acest procedeu inductiv nu va duce la rezultatul dorit.

De aceea, vom modifica inegalitatea astfel încât pasul inductiv să poată fi demonstrat relativ ușor. Considerăm astfel:

$$Q(n) : \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} < 2 - \frac{1}{n+1}, n \geq 1$$

Cum este evident că din inegalitatea $Q(n)$ rezultă concluzia dorită, este suficient să demonstrăm $Q(n)$, prin inducție după n .

Etapa de verificare: $Q(1) : \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < 2 - \frac{1}{2}$ este echivalentă cu $\frac{13}{12} < \frac{3}{2}$, ce este evident adevărată.

Etapa inductivă: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Presupunem că are loc $Q(n)$ și demonstrăm $Q(n+1)$. Avem atunci:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+4} &= -\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+1} \right) + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \\ &< -\frac{1}{n+1} + 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \end{aligned}$$

Dar noi vrem să demonstrăm că

$$\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+4} < 2 - \frac{1}{n+2}$$

deci este suficient să arătăm că pentru orice $n \geq 1$ are loc

$$-\frac{1}{n+1} + 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \leq 2 - \frac{1}{n+2}$$

Această inegalitate este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} \frac{6n+6}{(3n+2)(3n+4)} - \frac{2}{3n+3} &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \iff \frac{2((3n+3)^2 - (3n+2)(3n+4))}{(3n+2)(3n+4)(3n+3)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &\iff \frac{2}{3(3n+2)(3n+4)} \leq \frac{1}{n+2} \\ &\iff 2(n+2) \leq 3(3n+2)(3n+4) \end{aligned}$$

Ultima inegalitate este evident adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+4} &< -\frac{1}{n+1} + 2 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+4} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Așadar $Q(n+1)$ este adevărată. Din principiul inducției rezultă că $Q(n)$ are loc pentru orice $n \geq 1$. Evident $Q(n)$ implică inegalitatea cerută **(b)**.

Observație. Membrul stâng al inegalității cerute este același x_n ca la punctul precedent. Deoarece $(x_n)_n$ este strict crescător, un majorant (constant) al șirului nu va putea fi obținut direct prin inducție: dacă $x_n < 2$, nu putem deduce că are loc și $x_{n+1} < 2$.

Inegalitatea modificată, pe de altă parte, compară șirul x_n nu cu o constantă, ci cu un alt șir crescător, și anume $a_n := 2 - \frac{1}{n+1}$. În pasul inductiv am demonstrat că șirul x_n crește mai 'lent' decât cel cu care comparăm:

$$x_{n+1} - x_n \leq a_{n+1} - a_n$$

Din această inegalitate și $x_1 < a_1$ rezultă că $x_n < a_n$ pentru orice $n \geq 1$:

$$x_n = x_n - x_{n-1} + \cdots x_2 - x_1 + a_1 < a_n - a_{n-1} + \cdots a_2 - a_1 + a_1 = a_n$$

O soluție alternativă mai scurtă rezultă din studiul convergenței lui x_n . Un rezultat standard din analiză spune că șirul

$$u_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este convergent la un număr real γ (numit constanta Euler-Mascheroni). Este clar atunci că:

$$x_n = (u_{3n+1} + \ln(3n+1)) - (u_n + \ln n) = u_{3n+1} - u_n + \ln \frac{3n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 3$$

Cum șirul $(x_n)_n$ este strict crescător obținem estimarea $x_n < \ln 3$, pentru orice n .

(c) Considerăm propoziția $P(n) : n^n < (n!)^2 < 2^{n(n-1)}, n \geq 3$.

Etapa de verificare: $P(3) : 3^3 < (3!)^2 < 2^6$ este evident adevărată.

Etapa inductivă: Fie $n \geq 3$. Presupunem că

$$P(n) : n^n < (n!)^2 < 2^{n(n-1)}$$

este adevărată și arătăm că

$$P(n+1) : (n+1)^{n+1} < ((n+1)!)^2 < 2^{n(n+1)}$$

este adevărată. Avem:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} &= \frac{n^n}{n!^2} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \\ &= \frac{n^n}{(n!)^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Din ipoteza inductivă știm că $\frac{n^n}{(n!)^2} < 1$. Pe de altă parte, din exercițiul precedent avem $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, iar $n \geq 3$ implică $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4}$. Deci membrul drept al egalității de mai sus este mai mic decât $1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4}$. Așadar:

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} < 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4} < 1$$

Pentru cealaltă inegalitate procedăm similar:

$$\begin{aligned} \frac{((n+1)!)^2}{2^{n(n+1)}} &= \frac{(n!)^2}{2^{n(n-1)}} \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \frac{2^{n(n-1)}}{2^{n(n-1)}} \\ &= \frac{(n!)^2}{2^{n(n-1)}} \left(\frac{n+1}{2^n}\right)^2 \end{aligned}$$

Din ipoteza inductivă știm că $\frac{(n!)^2}{2^{n(n-1)}} < 1$. De asemenea, are loc $n+1 < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, deci

$$\frac{((n+1)!)^2}{2^{n(n+1)}} < 1 \cdot 1 = 1$$

Deducem astfel că $P(n+1)$ este adevărată. Din principiul inducției, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq 3$.

Observație. Și aici putem da o demonstrație directă. Avem mai întâi

$$(n!)^2 = (1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \cdots (n \cdot 1) = \prod_{k=1}^n k(n+1-k)$$

Este ușor de văzut că pentru orice $k = 2, \dots, n-1$ avem

$$k(n+1-k) > n$$

iar pentru $k = 1$ și $k = n$ avem egalitate. Rezultă că

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^n k(n+1-k) > \prod_{k=1}^n n = n^n$$

Pentru cealaltă inegalitate, folosim inegalitatea

$$k < 2^k$$

pentru orice $k \geq 1$ și obținem:

$$n! < 2 \cdot 2^2 \cdots 2^n = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Ridicând la pătrat, găsim inegalitatea din dreapta. **(d)** Considerăm propoziția, pentru $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(n) : \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$$

Cum $P(1)$ este evident adevărată, putem trece la pasul inductiv: presupunem $P(n)$ adevărată și arătăm că $P(n+1)$ este adevărată. Avem atunci:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i + a_{n+1} b_{n+1} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + 2a_{n+1} b_{n+1} \sum_{i=1}^n a_i b_i + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + \sum_{i=1}^n (a_i b_{n+1} - a_{n+1} b_i)^2 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 - 2a_{n+1} b_{n+1} \sum_{i=1}^n a_i b_i + a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\ &\quad + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\ &\quad + b_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \sum_{i=1}^{n+1} b_i^2 \end{aligned}$$

deci $P(n+1)$ este adevărată. Din principiul inducției matematice, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Observație. Punctul **(c)** rezultă imediat din **(d)**. Inegalitatea de la **(c)** poartă numele de inegalitatea Cauchy-Schwarz (vezi link-ul sau link-ul pentru demonstrații și aplicații).

Observație. Pentru $n = 3$, identitatea **(d)** poate fi rescrisă vectorial sub forma

$$\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 = \langle u, v \rangle^2 + \|u \times v\|^2$$

pentru orice vectori $u, v \in \mathbb{R}^3$. ■

Exercițiul 6. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n avem: $10^n + 18n - 28 \vdots 27$.

Soluție. Considerăm, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, propoziția $P(n) : 10^n + 18n - 28 \vdots 27$

Pentru $n = 0$, propoziția devine $10^0 + 18 \cdot 0 - 28 \vdots 27$ sau echivalent $-27 \vdots 27$, ce este evident adevărată.

Presupunem propoziția adevărată pentru $n \geq 0$ și o arătăm pentru $n+1$. Trebuie deci să arătăm că $10^{n+1} + 18(n+1) - 28 \vdots 27$. Avem:

$$\begin{aligned} 10^{n+1} + 18(n+1) - 28 &= 10(10^n + 18n - 28) - 18 \cdot 10n + 28 \cdot 10 + 18n - 10 \\ &= 10(10^n + 18n - 28) - 18 \cdot 9n + 27 \cdot 10 \end{aligned}$$

Din ipoteza inductivă deducem că membrul drept se divide cu 27, deci propoziția este adevărată pentru $n + 1$. Din principiul inducției rezultă concluzia cerută: $10^n + 18n - 28 \div 27$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. ■

Exercițiul 7. Să se demonstreze că orice număr întreg n poate fi reprezentat, într-o infinitate de moduri, sub forma $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$, pentru un anumit număr natural m și o anumită alegere a semnelor $+$ sau $-$.

Soluție. Mai întâi observăm că este suficient să demonstrăm rezultatul pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (pentru $n < 0$ inversăm semnele pentru orice reprezentare a lui $-n \in \mathbb{N}$ și obținem o reprezentare a lui $-n$). Deci, putem presupune că $n \in \mathbb{N}$.

În al doilea rând, observăm că dacă n admite o scriere de forma $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$ atunci admite o infinitate de astfel de scrieri. Într-adevăr, folosind egalitatea

$$0 = (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 - (m+5)^2 + (m+6)^2 + (m+7)^2 - (m+8)^2$$

deducem că:

$$\begin{aligned} n &= \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2 \\ &= \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm (m+8)^2 \\ &= \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm (m+16)^2 = \dots \end{aligned}$$

deci n admite o infinitate de reprezentări (din ce în ce mai lungi).

Rămâne astfel să demonstrăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, are loc:

$$P(n) : n \text{ se poate scrie în cel puțin un mod sub forma } n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2.$$

Vom demonstra aceasta prin inducție cu pasul $k = 4$. Mai precis vom arăta că $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ sunt adevărate și că are loc implicația $P(n) \implies P(n+4)$.

Egalitățile

$$\begin{aligned} 0 &= 1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 \\ 1 &= 1^2 \\ 2 &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 \\ 3 &= -1^2 + 2^2 \end{aligned}$$

arată că $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ sunt adevărate.

Presupunem acum că n admite o scriere $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2$ și demonstrăm aceasta pentru $n+4$. Folosind egalitatea

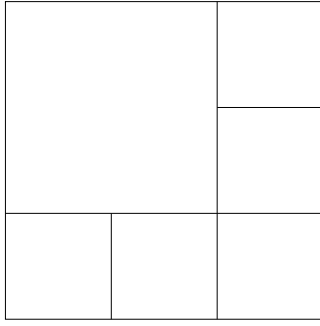
$$(m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2 = 4$$

obținem că

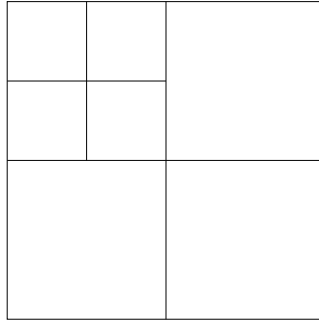
$$n+4 = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm m^2 + (m+1)^2 - (m+2)^2 - (m+3)^2 + (m+4)^2$$

deci $n+4$ admite o reprezentare de forma cerută. Așadar $P(n+3)$ este adevărată. Folosind principiul inducției, deducem că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. ■

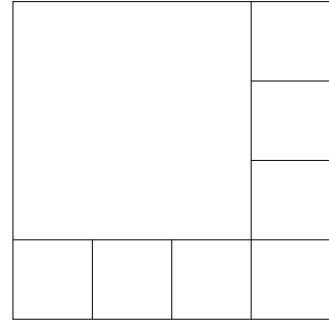
Exercițiul 8. Să se arate că un pătrat poate fi împărțit în n pătrate pentru orice $n \neq 2, 3, 5$. Să se arate că un cub poate fi împărțit în n cuburi pentru $n \geq 58$.



(a) $n = 6$



(b) $n = 7$



(c) $n = 8$

Soluție. Pentru $n = 4$, împărțim pătratul în 4 tăindu-l cu mediatoarele laturilor. Pentru $n \geq 6$, folosim inducție cu pas $k = 3$. Pentru $n = 6, 7, 8$, împărțim conform figurii de mai jos. Pentru pasul inductiv $n \rightarrow n + 3$, procedăm astfel. Împărțim pătratul original în patru ca mai sus. Unul dintre pătratele mici obținute îl împărțim, conform ipotezei inductive în n pătrate. Am obținut astfel o împărțire a pătratului original în $n + 3$ pătrate. Din principiul inducției rezultă concluzia dorită. ■

Exercițiul 9. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, n \geq 2$, sunt numere reale pozitive, atunci

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Putem presupune că a_i sunt strict pozitive. Vom prezenta mai multe soluții (cu și fără folosirea inducției).

Soluția 1. Logaritmând, inegalitatea este echivalentă cu:

$$\frac{\ln a_1 + \dots + \ln a_n}{n} \leq \ln \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

Aceasta rezultă imediat din Inegalitatea lui Jensen aplicată funcției concave $\ln$. ■

Soluția 2. Procedăm prin inducție după n . Mai precis considerăm, pentru $n \geq 2$, propoziția

$$P(n) : \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \forall a_1, \dots, a_n > 0$$

Etapă de verificare: Arătăm $P(2) : \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}, \forall a_1, a_2 > 0$. Prelucrăm prin echivalențe:

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} &\iff a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geq 0 \\ &\iff (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ultima inegalitate este evident adevărată, deci $P(2)$ este adevărată.

Fie $n \geq 3$ și presupunem că $P(n-1)$ este adevărată. Vom arăta că $P(n)$ este adevărată. Fie deci $a_1, \dots, a_n > 0$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Notăm pentru simplitate $g = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$. Atunci

$$\begin{aligned} g &\leq \sqrt[n]{a_n \dots a_n} = a_n \\ g &\geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_1} = a_1 \end{aligned}$$

deci $(g - a_1)(a_n - g) \geq 0$. Prelucrăm prin echivalențe:

$$\begin{aligned} (g - a_1)(a_n - g) &\geq 0 \iff ga_n - g^2 - a_1 a_n + a_1 g \geq 0 \\ &\iff a_n - g - \frac{a_1 a_n}{g} + a_1 \geq 0 \\ &\iff a_1 + a_n \geq g + \frac{a_1 a_n}{g} \end{aligned}$$

Din $P(n-1)$ obținem

$$a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_1 a_n}{g} \geq (n-1) \sqrt[n-1]{a_2 \dots a_{n-1} \frac{a_1 a_n}{g}} = (n-1) \sqrt[n-1]{\frac{g^n}{g}} = (n-1)g$$

Combinând aceste inegalități, deducem:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n &\geq a_2 + \dots + a_{n-1} + \frac{a_1 a_n}{g} + g \\ &\geq (n-1)g + g = ng \end{aligned}$$

deci $P(n)$ este adevărată. Din principiul inducției, inegalitatea este adevărată pentru orice $n \geq 2$. ■

Soluția 3 (Cauchy). Strategie: Demonstrăm mai întâi că inegalitatea mediilor are loc pentru $n = 2^m$, $m \geq 1$, apoi, pentru n general o deducem aplicând-o convenabil pentru o putere 2^m mai mare ca n .

Fie așadar propoziția

$$P(m) : \sqrt[2^m]{a_1 \dots a_{2^m}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_{2^m}}{2^m}, \forall a_1, \dots, a_{2^m} > 0$$

asociată lui $m \in \mathbb{N}^*$.

$P(1)$ este inegalitatea mediilor pentru două numere, demonstrată în **Soluția 2** (etapa de verificare). Presupunem acum $P(m)$ și demonstrăm $P(m+1)$. Fie astfel $a_1, \dots, a_{2^{m+1}} > 0$. Avem atunci:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + \dots + a_{2^m}}{2^m} + \frac{a_{2^m+1} + \dots + a_{2^{m+1}}}{2^m} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[2^m]{a_1 \dots a_{2^m}} + \sqrt[2^m]{a_{2^m+1} \dots a_{2^{m+1}}} \right) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[2^m]{a_1 \dots a_{2^m} a_{2^m+1} \dots a_{2^{m+1}}}} \\ &= \sqrt[2^{m+1}]{a_1 \dots a_{2^{m+1}}} \end{aligned}$$

deci are loc $P(m+1)$. Din principiul inducției rezultă $P(m)$ are loc pentru orice $m \geq 1$.

Considerăm acum cazul general $n \geq 2$. Considerăm $a_1, \dots, a_n > 0$ și notăm prin M și G mediile aritmetică respectiv geometrică ale numerelor a_i și vrem să arătăm $M \geq G$.

Alegem $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $n \leq 2^m$. Aplicăm inegalitatea mediilor pentru următoarele 2^m numere: $a_1, \dots, a_n, M, M, \dots, M$ și obținem:

$$\sqrt[2^m]{a_1 \dots a_n M^{2^m-n}} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n + (2^m - n)M}{2^m}$$

sau echivalent

$$\sqrt[2^m]{G^n M^{2^m-n}} \leq \frac{nM + (2^m - n)M}{2^m}$$

sau încă

$$G^n M^{2^m-n} \leq M^{2^m}$$

ceea ce revine la $G \leq M$, adică ceea ce voiam să arătăm. ■

Soluția 4. Împărțind prin produsul $a_1 \dots a_n$, inegalitatea este echivalentă cu

$$n \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_1 \dots a_n} \frac{a_2}{a_1 \dots a_n} \dots \frac{a_n}{a_1 \dots a_n}} \leq \frac{a_1}{a_1 \dots a_n} + \frac{a_2}{a_1 \dots a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 \dots a_n}$$

Notând $x_i = \frac{a_i}{a_1 \dots a_n} > 0$, $i = 1, \dots, n$, are loc $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ iar inegalitatea ce trebuie să o arătăm este: $n \leq x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Pentru $n \geq 2$, considerăm propoziția:

$$P(n) : \text{Pentru orice } x_1, \dots, x_n > 0 \text{ cu } x_1 \dots x_n = 1 \text{ are loc } x_1 + \dots + x_n \geq n$$

pe care o vom demonstra prin inducție. Înainte de aceasta, vom demonstra un rezultat auxiliar.

Lemă. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $x \geq 1$ și $y \leq 1$ atunci $x + y \geq 1 + xy$.

Demonstrație. Avem $1 + xy - x - y = (x - 1)(y - 1) \leq 0$.

Etapa de verificare: Vrem să arătăm că are loc $P(2)$. Pentru aceasta, fie $x_1, x_2 > 0$ cu $x_1 x_2 = 1$. Amândouă x_1, x_2 nu pot fi strict mai mici ca 1 (altfel $x_1 x_2 < 1$) și nici strict mai mari ca 1 (în caz contrar $x_1 x_2 > 1$), deci unul este ≤ 1 și celălalt este ≥ 1 . Putem presupune $x_1 \geq 1$ și $x_2 \leq 1$. Aplicând Lema pentru aceste două numere, obținem

$$x_1 + x_2 \geq 1 + x_1 x_2 = 2$$

deci $P(2)$ este adevărată.

Etapa inductivă: Presupunem că $P(n)$ este adevărată și arătăm $P(n+1)$. Fie astfel $x_1, \dots, x_{n+1} > 0$ cu $x_1 \dots x_{n+1} = 1$. Analog ca în etapa de verificare, unul dintre x_i trebuie să fie ≥ 1 și unul ≤ 1 . Eventual renumerotând numerele x_i , putem presupune că $x_1 \geq 1$ și $x_2 \leq 1$. Din lema avem atunci

$$x_1 + x_2 \geq 1 + x_1 x_2$$

iar din ipoteza inductivă aplicată celor $n-1$ numere $(x_1 x_2), x_3, \dots, x_n$ (produsul lor este evident 1) avem

$$x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n - 1$$

Combinând cele două inegalități obținem:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 1 + x_1 x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq 1 + n - 1 = n$$

deci $P(n)$ este adevărată. Din principiul inducției, $P(n)$ este adevărată, pentru orice $n \geq 2$. ■

Exercițiul 10. Se consideră pătratul de latura 2^n împărțit în $2^n \times 2^n$ pătrate de latură unu. Să se arate că dacă se elimină un pătrat oarecare de latură unu, atunci restul pătratului de latură 2^n poate fi acoperit cu figuri formate din trei pătrate de latura unu în formă de L.

Soluție. Procedăm prin inducție după n . Pentru $n = 1$, pătratul de latură 2 este împărțit în patru pătrate de latura 1 ca în figura de mai jos. Eliminând oricare dintre cele patru, rămânem cu 3 pătrate în formă de L. Presupunem acum eliminând un pătrat de latură 1 dintr-unul de latura 2^{n-1} , obținem o figură ce poate fi acoperită cu L-uri, și demonstrăm același lucru pentru pătratul de latura 2^n minus un pătrat de latură 1.

Împărțim pătratul de latură 2^n în patru pătrate de latură 2^{n-1} , pe care le notăm P_i , $i = 1, \dots, 4$. Pătratul eliminat se află într-unul dintre P_i , presupunem pentru simplitate P_1 . Atunci putem aplica ipoteza inductivă lui P_1 din care am eliminat pătratul de latură 1, și îl acoperim cu L-uri. A mai rămas să acoperim cu figuri L celelalte 3 pătrate P_2, P_3, P_4 . Pentru aceasta considerăm figura L în jurul centrului pătratului care are câte un pătrat component în P_2, P_3 respectiv P_4 . Așadar, figura $P_2 \cup P_3 \cup P_4$ este formată din acest L central și 3 pătrate de latură 2^{n-1} din care am eliminat câte un pătrat de latură 1. Din ipoteza inductivă și acestea pot fi acoperite cu figuri L. Am acoperit astfel tot pătratul de latura 2^n cu figuri L. Din principiul inducției, obținem concluzia cerută. ■

Exercițiul 11. Se consideră n drepte care împart un plan în regiuni cu interioare disjuncte. Două regiuni se numesc vecine dacă au în comun cel puțin un segment. Să se arate ca sunt suficiente două culori pentru a colora regiunile date, astfel încât două regiuni vecine sunt colorate diferit.

Vom da două demonstrații, una prin inducție, cealaltă fără. Vom nota cele două culori prin A și B.

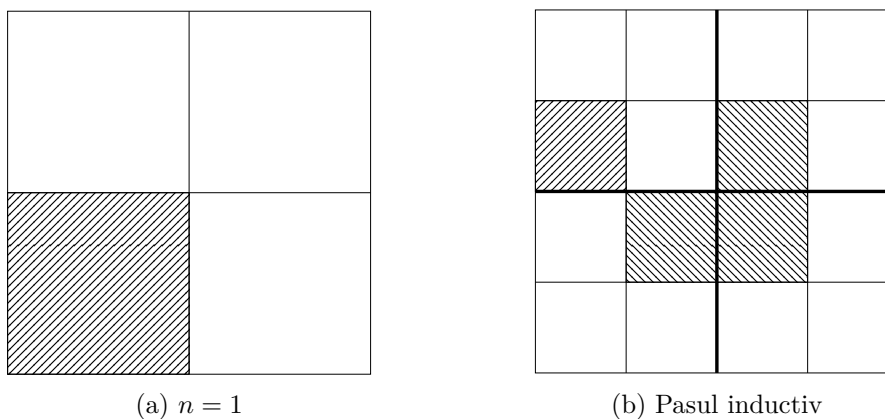


Fig. 2: Exercițiul 11

Soluția 1. Inducție după numărul n al dreptelor. Pentru $n = 1$, avem 2 regiuni, colorăm una cu A , cealaltă cu B . Presupunem că am obținut o colorare a regiunilor determinate de n drepte, și realizăm o colorare după ce mai adăugăm și a $(n + 1)$ -a dreaptă. Această ultimă dreaptă împarte planul în două semiplane, superior și inferior, iar regiunile precedente sunt sau lăsate întregi, sau tăiate în două. Colorarea inițială pentru n drepte satisface condițiile cerute pentru regiunile întregi, dar nu mai convine în cazul "jumătăților". Pentru a obține concluzia dorită, inversăm culorile tuturor regiunilor și "jumătăților" din semiplanul superior celei de-a $(n + 1)$ -a drepte (adică A devine B și B devine A), iar în semiplanul inferior păstrăm colorarea originală. Regiunile întregi adiacente vor fi colorate diferit, iar cele tăiate sunt împărțite în două regiuni, colorate diferit, datorită construcției. Deci dintr-o colorare a regiunilor determinate de n drepte am obținut o colorare pentru regiunile determinate de $(n + 1)$ -drepte. Din principiul inducției, rezultă concluzia. ■

Soluția 2. Considerăm un reper ortonormat xOy în plan. Cele n drepte au ecuații

$$d_i : a_i x + b_i y + c_i = 0, i = 1, \dots, n$$

unde $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. Semiplanele determinate de dreapta d_i sunt descrise de inecuațiile $a_i x + b_i y + c_i > 0$ respectiv $a_i x + b_i y + c_i < 0$, iar regiunile determinate de cele n drepte corespund tuturor de sistemelor de n inecuații ca mai sus, pentru diverse alegeri ale semnelor $<$ sau $>$. Un punct (x, y) se află în interiorul uneia dintre regiuni dacă și numai dacă are loc

$$f(x, y) := (a_1 x + b_1 y + c_1) \dots (a_n x + b_n y + c_n) \neq 0$$

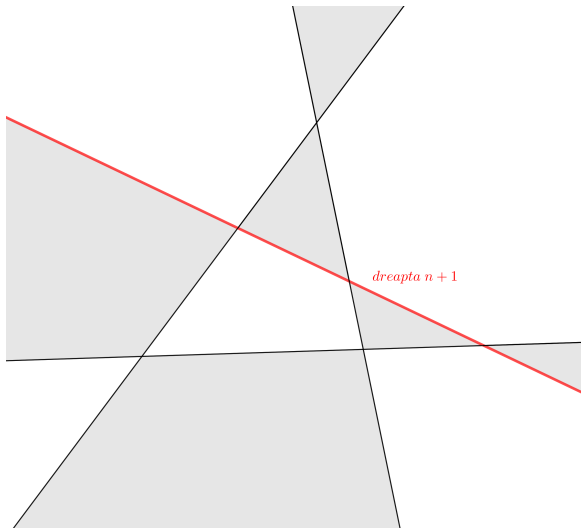
Mai mult dacă pentru un punct (x_0, y_0) dintr-o regiune are loc $f(x_0, y_0) > 0$ atunci această inegalitate are loc pentru toate punctele din regiune și similar dacă $f(x_0, y_0) < 0$.

Vom colora cu A toate punctele (x, y) pentru care $f(x, y) > 0$ și cu B toate punctele (x, y) pentru care $f(x, y) < 0$. Aceasta este o colorare ce satisface cerințele problemei. Într-adevăr, date două regiuni adiacente mărginite de o porțiune S din dreapta d_i , la trecerea dintr-o regiune în alta schimbăm doar semiplanul corespunzător dreptei d_i , rămânând în același semiplan relativ la celelalte drepte $d_j, j \neq i$. Deci, într-o vecinătate a lui S , $(a_i x + b_i y + c_i)$ își schimbă semnul de o parte și de alta a lui d_i , dar pentru $j \neq i$, $(a_j x + b_j y + c_j)$ are semn constant, de unde deducem că f își schimbă semnul de o parte și de alta a porțiunii de frontieră S , adică cele două regiuni adiacente au culori diferite. ■

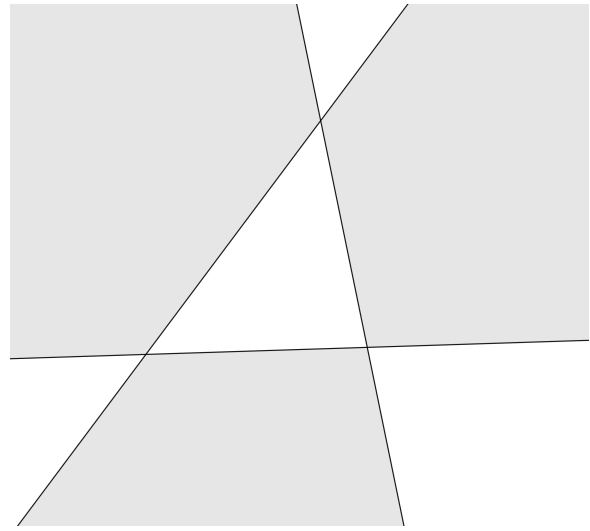
Exercițiul 12. Din 40 elevi, 14 au preocupări pentru matematică, 16 pentru fizică și 11 pentru chimie. De asemenea 7 elevi au preocupări pentru matematică și fizică, 8 pentru fizică și chimie și 5 elevi pentru matematică și chimie, iar 4 elevi au preferințe pentru toate cele trei obiecte.

(a) Câți elevi nu au preferințe pentru matematică, fizică sau chimie?

(b) Câți elevi au preferințe față de matematică și fizică, dar nu față de chimie?



(a) O rețea de n drepte, $n = 3$



(b) O rețea de $n + 1$ drepte, $n = 4$

Soluție. Fie A mulțimea tuturor elevilor și C, F, M mulțimile elevilor cu preocupări pentru chimie, fizică, respectiv matematică. Atunci:

$$\begin{aligned} |A| &= 40 \\ |C| &= 11, \quad |F| = 16, \quad |M| = 14 \\ |M \cap F| &= 7, \quad |F \cap C| = 8, \quad |M \cap C| = 5 \\ |M \cap F \cap C| &= 4 \end{aligned}$$

(i) Numărul cerut este $|A - M \cup F \cup C|$ pe care îl calculăm cu principiul includerii și excluderii:

$$\begin{aligned} |M \cup F \cup C| &= |M| + |F| + |C| - |M \cap F| - |M \cap C| - |C \cap F| \\ &= 14 + 16 + 11 - 7 - 5 - 8 + 4 \\ &= 25 \end{aligned}$$

deci $|A - M \cup F \cup C| = |A| - |M \cup F \cup C| = 40 - 25 = 15$.

(ii) Numărul căutat este: $|M \cap F - C| = |M \cap F| - |M \cap F \cap C| = 7 - 4 = 3$.

■

Exercițiul 13. Câte numere naturale mai mici sau egale cu 1000

- (a) sunt divizibile sau cu 2 sau cu 3 sau cu 5;
- (b) sunt divizibile sau cu 2 sau cu 3, dar nu sunt divizibile cu 5;
- (c) nu se divid nici cu 2, nici cu 3, nici cu 5?

Soluție. Știm că, date $n, k \in \mathbb{N}^*$, numărul multiplilor naturali nenuli ai lui k care sunt mai mici sau egali cu n este $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$, iar dacă îl includem și pe 0, acest număr este $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor + 1$. Notăm

$$M_k := \{m \mid 0 \leq m \leq 1000 \text{ și } k|m\}$$

Vrem să calculăm cardinalul următoarelor mulțimi: $M_2 \cup M_3 \cup M_5$, $M_2 \cup M_3 \setminus M_5$ și $\{0, 1, \dots, 1000\} \setminus M_2 \cup$

$M_3 \cup M_5$. Vom folosi principiul includerii și excluderii. Avem:

$$\begin{aligned} |M_2| &= [1000/2] + 1 = 501 \\ |M_3| &= [1000/3] + 1 = 334 \\ |M_5| &= [1000/5] + 1 = 201 \\ |M_2 \cap M_5| &= |M_{10}| = [1000/10] + 1 = 101 \\ |M_2 \cap M_3| &= |M_6| = [1000/6] + 1 = 166 \\ |M_3 \cap M_5| &= |M_{15}| = [1000/15] + 1 = 67 \\ |M_2 \cap M_3 \cap M_5| &= |M_{30}| = [1000/30] + 1 = 34 \end{aligned}$$

deci:

$$\begin{aligned} |M_2 \cup M_3 \cup M_5| &= 501 + 334 + 201 - 101 - 166 - 67 + 34 = 736 \\ |(M_2 \cup M_3) \setminus M_5| &= |M_2 \cup M_3 \cup M_5| - |M_5| = 736 - 201 = 535 \\ |\{0, \dots, 1000\} - M_2 \cup M_3 \cup M_5| &= 1001 - 736 = 265 \end{aligned}$$

Observație: $M_a \cap M_b$ este mulțimea numerelor (mai mici ca 1000) care se divid și cu a și cu b , deci care se divid cu $\text{cmmdc}(a, b)$. De exemplu:

$$M_2 \cap M_5 = M_{[2,5]} = M_{10}$$

și

$$M_6 \cap M_9 = M_{[6,9]} = M_{18}$$

■

Exercițiul 14. Fie A și B două mulțimi finite cu m , respectiv n elemente. Determinați numărul de funcții surjective $f : A \rightarrow B$.

Vom arăta că numărul de surjecții este

$$\text{sur}_{m,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^{n-k} k^m$$

Soluție. Notăm $\mathcal{F} = \{f : A \rightarrow B \text{ funcție}\}$, iar, pentru $b \in B$, notăm prin $\mathcal{F}_b$ mulțimea funcțiilor $f : A \rightarrow B$ astfel încât $b \notin \text{Im} f$.

Rezultă că mulțimea funcțiilor surjective $A \rightarrow B$ este

$$\mathcal{S} = \mathcal{F} \setminus \bigcup_{b \in B} \mathcal{F}_b$$

deci

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{F}| - \left| \bigcup_{b \in B} \mathcal{F}_b \right|$$

Știm că $|\mathcal{F}| = n^m$, deci rămâne să determinăm cardinalul reuniunii din dreapta.

Vrem să aplicăm principiul includerii și excluderii pentru a determina cardinalul reuniunii din dreapta. Pentru aceasta trebuie să determinăm, pentru $I \subseteq B$, $|I| = k$ mulțimea

$$\bigcap_{b \in I} \mathcal{F}_b = \{f \in \mathcal{F} \mid f \in \mathcal{F}_b, \forall b \in I\}$$

Avem:

$$f \in \mathcal{F}_b, \forall b \in I \iff b \notin \text{Im} f, \forall b \in I \iff I \cap \text{Im} f = \emptyset \iff \text{Im} f \subseteq B \setminus I$$

Așadar, o funcție $f \in \bigcap_{b \in I} \mathcal{F}_b$ este de fapt o funcție $A \rightarrow B \setminus I$, văzută ca o funcție cu codomeniul extins la B . Obținem astfel:

$$\left| \bigcap_{b \in I} \mathcal{F}_b \right| = |\{g : A \rightarrow B \setminus I \text{ funcție}\}| = (n - k)^m$$

de unde

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \in [n]} \mathcal{F}_i \right| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq B \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{b \in I} \mathcal{F}_b \right| \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq B \\ |I|=k}} (n - k)^m \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} C_n^k (n - k)^m \quad (l := n - k) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-l-1} C_n^{n-l} l^m \quad (k := l) \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} C_n^{n-k} k^m \end{aligned}$$

de unde obținem

$$\begin{aligned} \text{sur}_{m,n} &= n^m - \left| \bigcup_{b \in B} \mathcal{F}_b \right| \\ &= (-1)^{n-n} \binom{n}{n-n} n^m + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} C_n^{n-k} k^m \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^{n-k} k^m \end{aligned}$$

■

Exercițiul 15. Să se afle în câte moduri se pot împărți 5 obiecte distincte la 3 persoane, cu condiția ca fiecare persoană să primească cel puțin un obiect.

Soluție. Notăm obiectele prin 1, 2, 3, 4, 5 iar persoanele prin a, b, c . Presupunem implicit că dacă a primește obiectele 1, 2, b primește 3, 4 iar c obiectul 5, această distribuție este diferită de următoarea: a primește 3, 4, persoana b primește 1, 2 iar c obiectul 5. În această situație, putem vedea o distribuție a obiectelor ca o funcție $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{a, b, c\}$ (obiectul 1 este dat persoanei $f(1)$ etc.), iar ca fiecare să primească măcar un obiect, impunem ca f să fie surjectivă. Deci numărul căutat este numărul de funcții surjective de la o mulțime cu 5 elemente la una cu 3, adică:

$$3^5 - 2^5 \cdot C_3^1 + 1^5 \cdot C_3^2 = 243 - 96 + 3 = 150$$

■