

Fișa de exerciții 2
Permutări. Aranjamente. Combinări

Exercițiul 1. În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât numerele $\{1, 2, 3\}$ să stea la rând (eventual în ordine crescătoare).

Soluție. Considerăm mai întâi cazul când $1, 2, 3$ apar în ordine strict crescătoare.

Vrem așadar să numărăm permutările mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $1, 2, 3$ să apară în această ordine unul după altul. Aceasta înseamnă că $1, 2, 3$ apar în permutările căutate pot fi văzute ca un singur element, iar restul de $n - 3$ elemente sunt ordonate arbitrar. Deci numărul căutat va fie $(n - 3 + 1)! = (n - 2)!$.

Dacă nu mai impunem ca $1, 2, 3$ să apară în această ordine, vom obține $(n - 2)!$ permutări pentru fiecare ordonare a numerelor $1, 2, 3$. Cum aceste numere pot fi ordonate în $3! = 6$ moduri, rezultă că numărul de permutări astfel încât $1, 2, 3$ să apară unul după altul este $6(n - 2)!$. ■

Exercițiul 2. Se consideră mulțimile disjuncte A și B astfel încât $|A| = n$ și $|B| = m$. Să se determine numărul de permutări ale mulțimii $A \cup B$ astfel încât primul element al permutării este din A iar ultimul este din B .

Soluție. Primul element al unei permutări căutate poate fi ales în n moduri, iar ultimul în m moduri. Pentru fiecare alegere a primei și ultimei poziții din permutare, avem $(m + n - 2)!$ moduri de a permuta celelalte $m + n - 2$ elemente.

Am obținut astfel $mn(m + n - 2)!$ permutări ale lui $A \cup B$ care au pe prima poziție un element din A și pe ultima un element din B . ■

Exercițiul 3. În câte moduri pot fi așezate n persoane la o masă circulară?

Soluție. Dacă masa ar fi liniară, numărul de moduri ar fi numărul de permutări de n elemente, adică $n!$. Când masa este circulară, aranjarea $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ devine identică cu $(a_2, a_3, \dots, a_n, a_1)$, $(a_3, a_4, \dots, a_1, a_2)$ etc., adică identificăm o aranjare cu toate cele n permutări circulare ale ei. Deci numărul căutat va fi: $\frac{n!}{n} = (n - 1)!$. ■

Exercițiul 4. Câte numere de 6 cifre, care nu conțin cifre identice, se pot forma cu cifrele $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

Soluție. Deoarece cifrele nu se repetă, numerele vor conține fiecare cifră exact o dată, fără repetiții. Astfel, putem vedea numerele căutate ca permutări ale mulțimii $\{0, 1, \dots, 6\}$ astfel încât pe prima poziție să nu se afle 0. Deci numărul căutat este $6! - 5! = 600$ (numărul total de permutări – numărul de permutări care încep cu 0).

Alternativ, putem vedea numerele căutate ca 6 cutii pe care trebuie să le completăm cu cifrele date, fără repetiții. Pe prima poziție avem 5 posibilități de a le completa (cele 6 cifre date, din care eliminăm 0). O dată prima cifră completată, trecem la a doua unde avem iarăși 5 valori posibilități (eliminăm prima cifră, deoarece cifrele nu trebuie să se repete, dar îl adăugăm pe 0). După completarea primelor două cifre, avem 4 posibilități de a completa a treia cifră (din totalul de șase, eliminăm două). Procedând similar în continuare, obținem în total $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 5! = 600$ de numere. ■

Exercițiul 5. Câte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele $0, 1, 2, 3$ dacă în astfel de număr orice cifră intră cel mult o dată?

Soluție. Deoarece fiecare cifră apare maxim o dată, numerele căutate pot avea maxim 4 cifre.

- Avem trei numere (nenule) ce se pot forma cu cifrele date.
- Un număr de două cifre din cele căutate se poate forma astfel. Alegem prima cifră; putem face aceasta în 3 moduri. Pentru fiecare alegere a primei cifre, putem alege a doua cifră în 3 moduri (din cele 4 cifre disponibile, eliminăm prima cifră aleasă dar luăm în considerare și 0). În total, obținem $3 \cdot 3 = 9$ numere.
- Pentru a construi un număr de trei cifre procedăm similar cu cazul precedent. Putem alege prima cifră în 3 moduri. O dată aleasă prima cifră, a doua cifră are trei valori disponibile. După ce am ales primele două cifre, a treia are două valori disponibile. În total obținem $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ numere.
- Procedând similar, găsim că putem construi $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ numere de patru cifre cu forma căutată.

În total avem

$$3 + 9 + 18 + 18 = 48$$

numere nenule ce se pot construi cu cifrele 0, 1, 2, 3, fără repetiții. ■

Exercițiul 6. O grupă de studenți trebuie să programeze 4 examene în 8 zile. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se dă în mod obligatoriu în ultima zi?

Soluție. Dacă ordinea examenelor contează numărul de moduri va fi

$$A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$$

iar dacă ultimul examen este în ultima zi:

$$A_7^3 \cdot 4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

(ultimul examen se poate fixa în 4 moduri, iar celelalte 3 se aranjează în mod arbitrar în primele 7 zile).

Dacă ordinea examenelor nu contează, numărul de moduri va fi

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

(alegem patru zile din cele 8 pentru examene), iar dacă ultimul e în ultima zi va fi $C_7^3 = 35$. ■

Exercițiul 7. Din 11 persoane, 7 bărbați și 4 femei, se formează o delegație de 5 persoane, care conține cel puțin 2 femei. În câte moduri se poate forma delegația?

Soluție. Grupăm după numărul exact de femei din echipă.

Dacă în echipă sunt exact 2 femei, ceilalți 3 membri sunt bărbați. Deci, numărul de echipe care conțin exact 2 femei va fi: $C_4^2 C_7^3$.

Similar, vor fi $C_4^3 C_7^2$ echipe cu exact 3 femei și $C_4^4 C_7^1$ echipe care conțin exact 4 femei.

În total obținem:

$$C_4^2 C_7^3 + C_4^3 C_7^2 + C_4^4 C_7^1 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} + 4 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} + 1 \cdot 7 = 301$$

Exercițiul 8. În câte moduri se pot așeza, pe o tablă de șah, opt turnuri astfel încât nici unul din ele nu poate lua pe celălalt? ■

Soluție. Tabla de șah are dimensiunea 8×8 și noi avem 8 turnuri. Două turnuri se atacă dacă sunt pe aceeași linie sau coloană. Așadar, trebuie să aranjăm turnurile astfel încât pe fiecare linie și pe fiecare coloană să avem exact un turn. Vom prezentăm două moduri de numărare.

Prima dată, numerotăm turnurile $T_1, T_2, \dots, T_8$. Turnul T_1 poate fi pus în oricare dintre cele 64 de pătrate, T_2 în oricare din cele 49 rămase, T_3 în unul din cele 36 rămase etc. Obținem astfel $64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot \dots \cdot 1 = (8!)^2$ moduri de aranjare.

Însă, în acest mod de numărare am impus o ordine între turnuri (adică pe T_1 l-am pus primul, pe T_2 al doilea etc.) iar o distribuție de turnuri este independentă de ordine deoarece turnurile sunt identice. Deoarece turnurile pot fi renumerotate în $8!$ moduri, obținem că numărul de distribuții de turnuri va fi $(8!)^2 / 8! = 8!$.

Un alt mod de numărare este următorul. Cum pe fiecare linie și pe fiecare coloană noi trebuie să avem un turn, o distribuție de turnuri poate fi văzută astfel: pentru fiecare coloană C_j a tablei de șah trebuie să alegem o linie L_i și fiecare linie trebuie asociată exact unei coloane. Aceasta înseamnă că o distribuție poate fi identificată cu o funcție bijectivă $f: \{C_1, C_2, \dots, C_8\} \rightarrow \{L_1, \dots, L_8\}$.

Invers, dată o astfel de bijectie, plasăm cele 8 turnuri astfel: turnul de pe coloana C_j se află pe linia $f(C_j)$, unde $j = 1, \dots, 8$. Bijectivitatea lui f garantează că turnurile nu se atacă (liniile nu se repetă). Deducem astfel că numărul de distribuții de turnuri egal cu numărul de bijecții între cele două mulțimi cu 8 elemente adică $8!$. ■

Exercițiul 9. La o petrecere participă 8 băieți și 7 fete. În câte moduri se pot forma 4 perechi băiat-fată?

Soluție. Alegem mai întâi prima pereche. Băiatul îl putem alege în C_8^1 moduri, iar fata în C_7^1 moduri, deci prima pereche poate fi aleasă în $C_8^1 \cdot C_7^1$ moduri.

O dată aleasă prima pereche, au rămas 7 băieți și 6 fete. Analog, a doua pereche poate fi aleasă în $C_7^1 \cdot C_6^1$ moduri. Continuând procedeul obținem

$$(C_8^1 \cdot C_7^1) (C_7^1 \cdot C_6^1) (C_6^1 \cdot C_5^1) (C_5^1 \cdot C_4^1)$$

moduri de alegere a perechilor. Însă, prin acest procedeu am realizat o alegere **ordonată** a perechilor. Deoarece cele 4 perechi pot fi ordonate în $4!$ moduri, numărul de moduri în care putem construi 4 perechi, *fără ca ordinea lor să conteze*, este

$$\frac{1}{4!} (C_8^1 \cdot C_7^1) (C_7^1 \cdot C_6^1) (C_6^1 \cdot C_5^1) (C_5^1 \cdot C_4^1) = \frac{8 \cdot 7^2 \cdot 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4}{4!}$$

Un mod alternativ de a număra este următorul. Alegem o submulțime de 4 băieți din cei 8, apoi alegem o submulțime de 4 fete din cele 7. Cele patru perechi vor corespunde unei funcții bijective între mulțimea de băieți și mulțimea de fete alese. Obținem astfel

$$C_8^4 \cdot C_7^4 \cdot 4! = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{7!}{4!3!} \cdot 4! = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} \cdot 4!$$

moduri de alegere a perechilor. ■

Exercițiul 10. Fie $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$. Să se demonstreze că

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \dots + C_{k+1}^k S_1 + n.$$

Să se deducă S_2, S_3, S_4 .

Soluție. Din binomul lui Newton avem, pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$:

$$(j+1)^{k+1} = j^{k+1} + C_{k+1}^1 j^k + C_{k+1}^2 j^{k-1} + \dots + C_{k+1}^k j + 1$$

Sumând aceste relații pentru $j = 1, \dots, n$ obținem:

$$\sum_{j=1}^n (j+1)^{k+1} = \sum_{j=1}^n j^{k+1} + C_{k+1}^1 \sum_{j=1}^n j^k + \dots + C_{k+1}^k \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1$$

Dar

$$\sum_{j=1}^n (j+1)^{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1} j^{k+1} = \sum_{j=1}^n j^{k+1} - 1^{k+1} + (n+1)^{k+1}$$

deci

$$(n+1)^{k+1} - 1 = C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \dots + C_{k+1}^k S_1 + n$$

■

Exercițiul 11. Să se calculeze sumele:

- (i) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$;
- (ii) $C_n^0 - 3C_n^2 + 9C_n^4 - 27C_n^6 + \dots$;
- (iii) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots$.

Soluție. Strategia de calcul pentru aceste sume constă în a calcula $(a+b)^n$ în două moduri, pentru niște valori bine alese ale lui a și b .

(i) Avem nevoie de niște valori pentru a și b astfel încât $C_n^2 a^{n-2} b^2 = -C_n^2$. De exemplu, $a = 1$ și $b = i$ satisfac această condiție. Avem atunci

$$\begin{aligned} (1+i)^n &= C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + iC_n^5 + \dots \\ &= (C_n^0 - C_n^2 + \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + \dots) \end{aligned}$$

de unde

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 + \dots = \operatorname{Re} (1+i)^n$$

Membrul drept îl calculăm cu formula lui Moivre:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n = \sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

deci

$$C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 + \dots = \operatorname{Re} (1+i)^n = \sqrt{2}^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

(iii) Aplicăm binomul lui Newton pentru $a = 1$ și $b = \pm 1$ și obținem:

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n \\ 0 &= (1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n \end{aligned}$$

de unde, prin adunarea relațiilor, găsim că

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$$

Adunând această relație cu formula obținută la (i), obținem

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \dots = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + \sqrt{2}^n \cos \frac{n\pi}{4} \right)$$

(ii) Căutăm a, b astfel încât $a^{n-2} b^2 = -3$ și luăm $a = 1$ și $b = i\sqrt{3}$. Avem atunci:

$$\begin{aligned}
(1 + i\sqrt{3})^n &= C_n^0 + C_n^1 i\sqrt{3} - C_n^2 \cdot 3 - C_n^3 i\sqrt{3^3} + \\
&\quad + C_n^4 \cdot 3^2 + C_n^5 i\sqrt{3^4} - C_n^6 \cdot 3^2 - C_n^7 i\sqrt{3^7} + \dots \\
&= (C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2 C_n^4 - \dots) + i\sqrt{3} (C_n^1 - 3C_n^3 + 9C_n^5 - \dots)
\end{aligned}$$

deci

$$C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2 C_n^4 - \dots = \operatorname{Re} \left(1 + i\sqrt{3} \right)^n$$

Avem

$$\left(1 + i\sqrt{3} \right)^n = 2^n \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = 2^n \left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3} \right)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i\sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

de unde găsim

$$C_n^0 - 3C_n^2 + 3^2 C_n^4 - \dots = 2^n \cos \frac{n\pi}{3}$$

■

Exercițiul 12. Să se calculeze sumele:

- (i) $(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \dots + (-1)^n (C_n^n)^2$;
- (ii) $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + 3(C_n^3)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$;
- (iii) $C_{2n}^n + 2C_{2n-1}^n + 2^2 C_{2n-2}^n + \dots + 2^n C_n^n$;
- (iv) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$.

Soluție. (iv) Considerăm următoarea identitate polinomială

$$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$$

Determinăm coeficientul lui x^n în cei doi membri. Coeficientul lui x^n din membrul drept este C_{2n}^n .

Pe de altă parte, membrul stâng este egal cu:

$$(C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n)$$

deci coeficientul lui x^n este egal cu:

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0 = \sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

adică exact suma cerută. Obținem astfel că:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

(i) Considerăm identitatea polinomială $(1+x)^n (1-x)^n = (1-x^2)^n$ și determinăm coeficientul lui x^n în ambii membri.

Mai întâi, avem:

$$(1+x)^n (1-x)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 - C_n^1 x + \dots + C_n^n (-1)^n x^n)$$

deci coeficientul lui x^n în dezvoltarea membrului stâng este

$$C_n^0 C_n^n (-1)^n + C_n^1 C_n^{n-1} (-1)^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} C_n^1 (-1) + C_n^n C_n^0 = (C_n^n)^2 (-1)^n + (C_n^{n-1})^2 (-1)^{n-1} + \dots + (C_n^0)^2$$

adică exact suma cerută.

Pe de altă parte, membrul drept este

$$(1 - x^2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k x^{2k}$$

deci coeficientul lui x^n este 0, dacă n este impar (polinomul de mai sus nu conține monoame de grad impar) și $C_n^k (-1)^k$ dacă $n = 2k$ este par. Așadar,

$$(C_n^0)^2 - (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 - \dots = \begin{cases} 0, & n \text{ este impar} \\ C_n^{n/2} (-1)^{n/2}, & n \text{ este par} \end{cases}$$

(ii) Notăm cu S suma cerută. Deoarece $C_n^k = C_n^{n-k}$ pentru orice $k = 0, \dots, n$, avem

$$\begin{aligned} S &= 0 \cdot (C_n^0)^2 + 1 \cdot (C_n^1)^2 + \dots + (n-1) \cdot (C_n^{n-1})^2 + n \cdot (C_n^n)^2 \\ &= n \cdot (C_n^0)^2 + (n-1) \cdot (C_n^1)^2 + \dots + 1 \cdot (C_n^{n-1})^2 + 0 \cdot (C_n^n)^2 \end{aligned}$$

deci

$$2S = n \left((C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2 \right)$$

de unde găsim $S = \frac{n}{2} C_n^n$.

Putem să obținem suma S și determinând coeficientul lui x^{n-1} în polinomul următor în două moduri:

$$P(x) = (1+x)^n \frac{d}{dx} (1+x)^n$$

(iii) Indicație: Fie S suma cerută. Punctul de plecare va fi polinomul:

$$P(x) = (1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + 2^2(1+x)^{2n-2} + \dots + 2^n(1+x)^n$$

Dezvoltând fiecare termen cu binomul lui Newton, obținem imediat că S este coeficientul lui x^n în $P(x)$. Pe de altă parte:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2^n (1+x)^n \left(\left(\frac{1+x}{2} \right)^n + \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-1} + \dots + \frac{1+x}{2} + 1 \right) \\ &= 2^n (1+x)^n \frac{\left(\frac{1+x}{2} \right)^{n+1} - 1}{\frac{1+x}{2} - 1} = \frac{(1+x)^{2n+1} - 2^{n+1} (1+x)^n}{x-1} \end{aligned}$$

Observăm că numărătorul se anulează în $x = 1$ deci se divide cu $x - 1$. Efectuând împărțirea, se determină coeficientul lui x^n . ■

Exercițiul 13. În câte moduri se poate scrie un număr natural m ca o sumă de n întregi nenegativi: $m = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, două sume fiind diferite dacă ele diferă și prin ordinea termenilor? Dar dacă impunem condiția ca cei n termeni ai sumei să fie strict pozitivi?

Soluție. Considerăm mai întâi cazul când numerele u_i sunt strict pozitive. Pentru o scriere de forma $m = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ considerăm șirul

$$s_1 = u_1, s_2 = u_1 + u_2, \dots, s_{n-1} = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

Deoarece $u_j > 0$ pentru toți j , avem că

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < m$$

deci $(s_i)_i$ este un șir strict crescător de $n-1$ numere naturale între 1 și $m-1$. Invers dat un șir $(s_i)_i$ de această formă putem construi o scriere $m = u_1 + \dots + u_n$ punând:

$$u_1 = s_1, u_2 = s_2 - s_1, \dots, u_{n-1} = s_{n-1} - s_{n-2}, u_n = m - s_{n-1}$$

Obținem astfel o bijecție între mulțimea scrierilor $m = u_1 + \dots + u_n$ cu $u_j > 0$ și mulțimea șirurilor strict crescătoare de lungime $n - 1$ de numere între 1 și $m - 1$. Dar mulțimea acestor șiruri este de fapt mulțimea tuturor submulțimilor lui $\{1, 2, \dots, m - 1\}$ cu $n - 1$ elemente. Deci numărul scrierilor este egal cu C_{m-1}^{n-1} .

Considerăm acum celălalt caz, când $u_j \geq 0$. Procedând la fel ca mai sus, atașăm unei scrieri $m = u_1 + \dots + u_n$ șirul $(s_i)_i$ care verifică:

$$0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{n-1} \leq m$$

Acestui șir îi punem în corespondență șirul

$$t_1 = s_1 + 1, t_2 = s_2 + 2, \dots, t_{n-1} = s_{n-1} + n - 1$$

care verifică:

$$1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} \leq m + n - 1$$

Invers, plecând de la un șir strict crescător (t_i) , de lungime $n - 1$, cu valori între 1 și $m + n - 1$, obținem un șir $(s_i)_i$ crescător cu valori între 0 și m punând: $s_i = t_i - i$. Rezultă că avem o bijecție între mulțimea scrierilor $m = u_1 + \dots + u_n$ cu $u_j \geq 0$ și mulțimea șirurilor strict crescătoare $1 \leq t_1 < \dots < t_{n-1} \leq m + n - 1$, deci numărul căutat de scrieri va fi C_{m+n-1}^{n-1} . ■

O soluție alternativă. Putem reformula problema dată astfel. Considerăm m stelute identice aranjate în linie. Le separăm apoi prin $n - 1$ bare între ele, pentru a obține n seturi de stelute, ce conțin $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$, respectiv u_n stelute. Evident suma numerelor u_i este egală cu n , deci este o soluție a ecuației date.

De exemplu, pentru $m = 7$ și $n = 4$, configurația

$$\underbrace{**}_{u_1=2} \mid \underbrace{*}_{u_2=1} \mid \underbrace{*}_{u_3=1} \mid \underbrace{***}_{u_4=3}$$

corespunde soluției $u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 3$ a ecuației $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 7$.

Invers, pornind de la o soluție a ecuației date, putem construi o configurație de stelute și bare astfel. Aranjăm stelutele în linie și plasăm o bară de la stânga la dreapta după primele u_1 stelute, apoi după următoarele u_2 stelute mai plasăm o bară etc.

De exemplu, soluția $u_1 = 4, u_2 = 0, u_3 = 2, u_4 = 1$ a ecuației $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 7$ corespunde configurației

$$\underbrace{****}_{u_1=4} \mid \underbrace{}_{u_2=0} \mid \underbrace{**}_{u_3=2} \mid \underbrace{*}_{u_4=1}$$

În concluzie, o soluție a ecuației date poate fi identificată cu o configurație de m stelute aranjate în linie, separate prin $n - 1$ bare.

O soluție de numere naturale nenule corespunde unei configurații de în care orice două bare sunt separate prin măcar o stelută, adică nu putem avea două bare consecutive. Așadar, o configurație se poate obține alegând $n - 1$ dintre cele $m - 1$ "spații" între stelute și completându-le cu câte o bară. Rezultă că numărul de configurații este C_{m-1}^{n-1} .

În celălalt caz, când permitem ca valorile u_i să fie și zero, o configurație poate avea și bare consecutive, fără stelute între ele. Astfel, o configurație poate fi văzută ca un șir de $m + n - 1$ poziții care trebuie completate cu cele două simboluri: m stelute și $n - 1$ bare. Obținem astfel că numărul de configurații este $C_{m+n-1}^m = C_{m+n-1}^{n-1}$. ■

Exercițiul 14. Să se determine numărul monoamelor din dezvoltarea polinomului:

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_p)^n.$$

Soluție. Dezvoltarea polinomului va conține toate monoamele $X_1^{d_1} \dots X_p^{d_p}$ cu gradul total $d_1 + \dots + d_p = n$. Așadar numărul de monoame coincide cu numărul de soluții naturale ale acestei ecuații. Din exercițiul anterior, acest număr este C_{n+p-1}^n . ■

Exercițiul 15. Într-o școală sunt 733 elevi. Arătați că există cel puțin trei elevi care își serbează ziua de naștere în aceeași zi.

Soluție. Sunt maxim 366 de zile într-un an și $733 = 2 \cdot 366 + 1$. Deci vor exista 3 elevi cu aceeași zi de naștere. Într-adevăr, în caz contrar, fiecare zi din an ar fi ziua de naștere a maxim 2 elevi, ceea ce înseamnă că în școală ar fi maxim $2 \cdot 366 = 732$ elevi, contradicție. ■

Exercițiul 16. Să se arate că oricum am alege 7 pătrate perfecte, distincte, există cel puțin două a căror diferență este divizibilă cu 10.

Soluție. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi una din următoarele 6 cifre: 0, 1, 4, 5, 6, sau 9. Din cele 7 pătrate date vor fi două cu aceeași ultimă cifră, iar diferența lor se va divide cu 10. ■

Exercițiul 17. Să se arate că pentru orice număr natural există un multiplu al său a cărei scriere în baza 10 folosește doar cifrele 0 și 1. Să se arate că orice număr prim cu 10 admite un multiplu care se scrie folosind numai cifra 3.

Soluție. Fie n un număr natural nenul. Considerăm șirul de numere 1, 11, 111, 1111, ... Din principiul cutiei vor exista două numere din șir care dau același rest la împărțirea cu n . Diferența dintre ele are forma 11...100...0 și se va divide cu n . Dacă, în plus, $(n, 10) = 1$, rezultă că n va divide un număr de forma 11...1. ■

Exercițiul 18. Se pot scoate dintr-o carieră de piatră 50 de blocuri de piatră având masele de 370 kg, 372 kg, 374 kg, ..., 468 kg cu 7 camioane de trei tone?

Soluție. Avem:

$$\begin{aligned} 370 + 372 + \dots + 468 &= 370 + (370 + 2) + \dots + (370 + 2 \cdot 49) \\ &= 50 \cdot 370 + 49 \cdot 50 \\ &= 20950 < 3 \cdot 7000 \end{aligned}$$

deci greutatea totală a blocurilor e mai mică decât capacitatea camioanelor, însă nu rezultă de aici că putem pune blocurile în camioane (se presupune că blocurile nu pot fi tăiate în bucăți mai mici).

Avem $50 = 7 \cdot 7 + 1$ de blocuri ce trebuie plasate în 7 camioane, deci într-unul vor fi cel puțin $7 + 1 = 8$ blocuri. Greutatea minimă a celor 8 va fi:

$$370 + (370 + 2) + \dots + (370 + 14) = 370 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 3016.$$

Deci, oricum am lua 8 blocuri nu putem să le punem într-un camion. Așadar nu putem să distribuim cele 50 blocuri în 7 camioane.

Dacă greutatea ar fi fost 368, 370, ..., 466 kg, atunci putem să le distribuim modul următor: cele mai ușoare 8 au greutatea totală

$$368 + (368 + 2) + \dots + (368 + 14) = 368 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 3000$$

deci încap într-un camion. Restul de 42 de blocuri le distribuim în modul următor: în fiecare din cele 6 camioane rămase punem cele mai ușoare 3 și cele mai grele 3 și vom avea $3(466 + 384) = 2550$ kg și am mai rămas cu 6 blocuri cu greutatea între $466 - 2 \cdot 18 = 430$ și $384 + 2 \cdot 18 = 420$, pe care le distribuim arbitrar unul câte unul în camioane. ■

Exercițiul 19. Se dă un cub cu latura 1. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța mai mică sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Soluție. Dacă împărțim fiecare latură a cubului de latură 1 în trei obținem o descompunere a cubului în 27 de cuburi de latură $\frac{1}{3}$. Din cele 28 de puncte, putem alege două care sunt în același cub. Distanța dintre ele va fi mai mică sau egală decât $\frac{\sqrt{3}}{3}$, lungimea diagonalei cubului de latură $\frac{1}{3}$. ■

Exercițiul 20. Să se arate că pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, există un număr natural p astfel încât

$$(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n = \sqrt{p} + \sqrt{p-1}$$

Soluție. Vedem egalitatea cerută ca o ecuație în necunoscuta p . Vom determina $p \in \mathbb{R}$ care să verifice această ecuație, iar apoi vom demonstra că p este, de fapt, număr natural.

Din ecuație rezultă că

$$\frac{1}{(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n} = \frac{1}{\sqrt{p} + \sqrt{p-1}} \implies (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n = \sqrt{p} - \sqrt{p-1}$$

Combinând această relație cu cea inițială obținem că

$$\begin{cases} \sqrt{p} = \frac{1}{2} ((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n) \\ \sqrt{p-1} = \frac{1}{2} ((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n - (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n) \end{cases}$$

Prima ecuație este echivalentă cu

$$p = \frac{1}{4} \left((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^{2n} + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^{2n} + 2 \right)$$

iar a doua cu

$$p = \frac{1}{4} \left((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^{2n} + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^{2n} - 2 \right) + 1$$

Evident, cele două valori ale lui p coincid.

Deci, dacă există un p care să verifice ecuația dată, p trebuie să aibă valoarea de mai sus.

Invers, dacă p este dat de egalitatea precedentă, $\sqrt{p}$ și $\sqrt{p-1}$ au valorile descrise de relațiile de mai sus, de unde deducem că

$$\begin{aligned} \sqrt{p} + \sqrt{p-1} &= \frac{1}{2} \left((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n \right) + \frac{1}{2} \left((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n - (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^n \right) \\ &= (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^n \end{aligned}$$

Așadar ecuația dată are singura soluție p dată de

$$p = \frac{1}{4} \left((\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^{2n} + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^{2n} + 2 \right)$$

Pentru a finaliza demonstrația, trebuie să arătăm p este număr natural. Avem

$$\begin{aligned} (\sqrt{m} + \sqrt{m-1})^{2n} + (\sqrt{m} - \sqrt{m-1})^{2n} &= 2 \left(C_{2n}^0 \sqrt{m}^{2n} + C_{2n}^2 \sqrt{m}^{2n-2} \sqrt{m-1}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} \sqrt{m-1}^{2n} \right) \\ &= 2 \left(C_{2n}^0 m^n + C_{2n}^2 m^{n-1} (m-1) + \dots + C_{2n}^{2n} (m-1)^n \right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} m^{n-k} (m-1)^k \end{aligned}$$

de unde obținem

$$p = \frac{1}{4} \left(2 \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} m^{n-k} (m-1)^k + 2 \right) = \frac{1}{2} \left(1 + m^n + (m-1)^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_{2n}^{2k} m^{n-k} (m-1)^k \right)$$

Cum numerele m și $m-1$ au parități diferite, $1 + m^n + (m-1)^n$ este par și, pentru fiecare $k \in \{1, \dots, n-1\}$, numărul $m^{n-k} (m-1)^k$ este de asemenea par. Rezultă astfel că p este un număr natural. ■