

**Fișa de exerciții 3**  
**Teorema împărțirii cu rest**

- **Teorema împărțirii cu rest pe  $\mathbb{N}$ .** Pentru orice două numere naturale  $a$  și  $b$ ,  $b \neq 0$ , există și sunt unice numerele naturale  $q$  și  $r$  astfel încât  $a = bq + r$ , cu  $r < b$ .
- **Teorema împărțirii cu rest pe  $\mathbb{Z}$ .** Pentru orice două numere întregi  $a$  și  $b$ ,  $b \neq 0$ , există și sunt unice numerele întregi  $q$  și  $r$  astfel încât  $a = bq + r$  și  $0 \leq r < |b|$ .

Numerele  $q$  și  $r$  se numesc câtul, respectiv restul, împărțirii lui  $a$  la  $b$ .

Pentru aplicațiile următoare, va fi utilă următoarea notație. Pentru  $a, b \in \mathbb{Z}$ , prin  $a \bmod b$  vom nota restul lui  $a$  la împărțirea cu  $b$ .

De exemplu, vom avea:

$$\begin{array}{llll} 7 \bmod 5 = 2, & \text{deoarece} & 7 = 5 \cdot 1 + 2 & \text{și } 2 < 5 \\ 156 \bmod 10 = 6, & \text{deoarece} & 156 = 10 \cdot 15 + 6 & \text{și } 6 < 10 \\ -23 \bmod 9 = 4, & \text{deoarece} & -23 = 9 \cdot (-3) + 4 & \text{și } 4 < 9 \\ -1 \bmod 4 = 3, & \text{deoarece} & -1 = 4 \cdot (-1) + 3 & \text{și } 3 < 4 \end{array}$$

În literatură, se mai folosește exprimarea " $a$  este un număr de forma  $bq + r$ " în loc de " $a$  da restul  $r$  la împărțirea cu  $b$ ".

De exemplu, " $a$  și  $b$  sunt de forma  $4k + 1$ " înseamnă că  $a$  și  $b$  dau ambele restul 1 la împărțirea cu 4, adică există  $q, q' \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $a = 4q + 1$  și  $b = 4q' + 1$ .

**Numerele  $q$  și  $q'$  nu sunt neapărat egale.** Este important de reținut că parametrul  $k$  din exprimarea "forma  $4k + 1$ " va avea, de obicei, valori diferite pentru fiecare număr considerat.

**Propoziția 1.** Fie  $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ . Dacă  $a_1$  și  $a_2$  dau resturile  $r_1$ , respectiv  $r_2$  la împărțirea cu  $b$ , atunci:

- $r_1 = r_2$  dacă și numai dacă  $a_1 - a_2$  se divide cu  $b$ .
- restul lui  $a_1 + a_2$  la împărțirea cu  $b$  este egal cu restul lui  $r_1 + r_2$  la împărțirea cu  $b$ , adică

$$(a_1 + a_2) \bmod b = (r_1 + r_2) \bmod b.$$

- restul lui  $a_1 a_2$  la împărțirea cu  $b$  este egal cu restul lui  $r_1 r_2$  la împărțirea cu  $b$ , adică

$$(a_1 a_2) \bmod b = (r_1 r_2) \bmod b.$$

- pentru  $n \in \mathbb{N}$ , restul lui  $a_1^n$  este egal cu restul lui  $r_1^n$  la împărțirea cu  $b$ , adică

$$(a_1^n) \bmod b = (r_1^n) \bmod b.$$

- restul lui  $-a_1$  la împărțirea cu  $b$  este  $b - r_1$ , dacă  $r_1 > 0$  și 0, dacă  $r_1 = 0$ , adică

$$-a_1 \bmod b = \begin{cases} b - r_1, & r_1 > 0 \\ 0, & r_1 = 0 \end{cases}$$

De exemplu, dacă notăm  $u(a) := a \bmod 10$  ultima cifră a unui număr  $a \in \mathbb{N}$ , obținem:

$$\begin{aligned}u(a+b) &= u(u(a) + u(b)) \\u(ab) &= u(u(a)u(b)) \\u(a^n) &= u(u(a)^n)\end{aligned}$$

pentru orice  $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercițiul 1.** Determinați ultima cifră a numerelor:  $2156^{43}$  și  $1489^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Soluție.** Se demonstrează folosind proprietățile de mai sus (prin inducție) că

$$\begin{aligned}u(2156^n) &= u(6^n) = 6 \\u(1489^n) &= u(9^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ par} \\ 9, & n \text{ impar} \end{cases}\end{aligned}$$

■

**Exercițiul 2.** (i) Arătați că dacă un număr natural dă restul 3 împărțirea cu 4 atunci el este impar.

(ii) Invers, arătați că un număr natural impar poate da resturile 1 sau 3 la împărțirea cu 4.

(iii) Arătați că dacă un număr natural este de forma  $6k+5$ , atunci el este de forma  $3k+2$ .

(iv) Arătați că un număr de forma  $3k+2$  este de forma  $6k+2$  sau  $6k+5$ .

**Soluție.** (i) Deoarece  $a \bmod 4 = 3$ , există  $k \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $a = 4k + 3$ . Putem scrie atunci

$$a = 2(2k + 1) + 1$$

Cum  $2k + 1 \in \mathbb{Z}$  și  $1 < 2$ , rezultă că  $a$  dă restul 1 la împărțirea cu 2.

(ii) Fie  $r = a \bmod 4$ . Există atunci  $k \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $a = 4k + r$ .

Pe de altă parte,  $a$  este impar, deci există  $q \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $a = 2q + 1$ . Obținem atunci:

$$a = 4k + r = 2q + 1 \implies r - 1 = 2(q - 2k)$$

deci  $2 \mid r - 1$ . Dar  $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ , de unde găsim  $r \in \{1, 3\}$ , adică  $a$  poate da resturile 1 sau 3 la împărțirea cu 4.

(iii) Dacă  $a = 6k + 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , atunci

$$a = 3(2k + 1) + 2$$

ceea ce arată că  $a \bmod 3 = 2$ .

(iv) Fie  $a = 3k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Notăm  $r = a \bmod 6$ ; există atunci  $q \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $a = 6q + r$ . Avem atunci:

$$a = 6q + r = 3k + 2 \implies r - 2 = 3(k - 2q) \implies 3 \mid (r - 2)$$

Cum  $r \in \{0, 1, \dots, 5\}$ , găsim  $r \in \{2, 5\}$ , deci  $a$  este de forma  $6q + 2$  sau  $6q + 5$ .

■

**Exercițiul 3.** Să se determine cel mai mic număr natural care împărțit la  $-7$  dă restul 3 și împărțit la 11 dă restul 2.

**Soluție.** Fie  $a$  numărul căutat. Aplicând teorema împărțirii cu rest putem scrie:

$$\begin{cases} a = (-7)q + 3 \\ a = 11q' + 2 \end{cases}$$

unde  $q, q' \in \mathbb{Z}$ . Are loc egalitatea:

$$11 \cdot 2 + (-7) \cdot 3 = 1$$

Înmulțind prima ecuație cu  $11 \cdot 2$  și a doua cu  $(-7) \cdot 3$  și adunând relațiile, obținem

$$\begin{aligned} a &= 77(-2q - 3q') + 3 \cdot 11 \cdot 2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \\ &= 77(2q - 3q') + 24 \end{aligned}$$

Cum  $a$  este minim, valoarea căutată este  $a = 24$ . ■

**Exercițiul 4.** Care este restul împărțirii numerelor  $19^{42} \cdot 23^{51}$ ,  $17^{36} \cdot 21^{41}$  prin 5 ?

**Soluție.** Notăm prin  $a \bmod 5$  restul la împărțirea cu 5 a lui  $a \in \mathbb{Z}$ . Avem atunci:

$$\begin{aligned} 19^{42} \bmod 5 &= (20 - 1)^{42} \bmod 5 = (-1)^{42} \bmod 5 = 1 \bmod 5 = 1 \\ 23^{51} \bmod 5 &= 3^{51} \bmod 5 = 3 \cdot 9^{25} \bmod 5 = 3 \cdot (-1)^{25} \bmod 5 = (-3) \bmod 5 = 2 \end{aligned}$$

deci

$$(19^{42} \cdot 23^{51}) \bmod 5 = (1 \cdot 2) \bmod 5 = 2$$

Similar:

$$\begin{aligned} 17^{36} \bmod 5 &= 2^{36} \bmod 5 = 4^{18} \bmod 5 = (-1)^{18} \bmod 5 = 1 \\ 21^{41} \bmod 5 &= (1^{41}) \bmod 5 = 1 \end{aligned}$$

deci

$$(17^{36} \cdot 21^{41}) \bmod 5 = 1 \cdot 1 = 1. \quad \blacksquare$$

**Exercițiul 5.** Determinați ultimele două cifre ale pătratului unui număr natural care se termină în cifra 5.

**Soluție.** Un număr natural  $n$  care se termină în cifra 5 are forma  $n = 10q + 5$  unde  $q \in \mathbb{Z}$ . Așadar:

$$n^2 = (10q + 5)^2 = 100q^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10q + 25 = 100(q^2 + q) + 25$$

deci restul lui  $n^2$  la 100 este 25. ■

**Exercițiul 6.** Folosind Teorema împărțirii cu rest arătați că:

- pătratul oricărui număr întreg este de forma  $4k$  sau  $4k + 1$ ;
- pătratul oricărui număr întreg impar este de forma  $8k + 1$ .

**Soluție.** Fie  $n$  un număr întreg. Putem scrie așadar  $n = 2q + r$  unde  $q \in \mathbb{Z}$  și  $r \in \{0, 1\}$ . Atunci:

$$n^2 = 4q^2 + 4qr + r^2 = 4q(q + r) + r^2$$

Așadar, restul împărțirii lui  $n^2$  la 4 poate fi  $0^2 = 0$  sau  $1^2 = 1$ .

Când  $n$  este impar, avem  $r = 1$  și

$$n^2 = 4q(q+1) + 1 = 8 \frac{q(q+1)}{2} + 1$$

Cum  $q(q+1)$  este număr par, obținem că restul lui  $n^2$  la împărțirea cu 8 este 1.

O soluție alternativă este să folosim propoziția de la început. Dacă notăm  $r = a \bmod 4$ , avem că  $a^2 \bmod 4 = r^2 \bmod 4$ . Rezultă că pentru a calcula restul oricărui pătrat este suficient să calculăm resturile pătratelor  $0^2, 1^2, 2^2, 3^2$  la împărțirea cu 4.

Putem sintetiza calculul sub forma unui tabel:

|               |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|
| $a \bmod 4$   | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $a^2 \bmod 4$ | 0 | 1 | 0 | 1 |

Am obținut astfel că  $a^2 \bmod 4 \in \{0, 1\}$  pentru orice  $a \in \mathbb{Z}$ .

Pentru cealaltă cerință, observăm mai întâi că, dacă  $a$  este impar, restul său la împărțirea cu 8 poate fi 1, 3, 5 sau 7. Avem atunci următorul tabel

|               |   |   |   |   |
|---------------|---|---|---|---|
| $a \bmod 8$   | 1 | 3 | 5 | 7 |
| $a^2 \bmod 8$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

deci  $a^2 \bmod 8 = 1$  pentru orice  $a$  impar. ■

**Exercițiul 7.** Arătați că șirul de numere naturale

$$11, 111, 1111, 11111, \dots$$

nu conține nici un pătrat perfect.

**Soluție.** Toate numerele din șir dau restul 3 la împărțirea cu 4, iar un pătrat perfect dă restul 0 sau 1. ■

**Exercițiul 8.** Arătați că dacă un număr natural este simultan un pătrat perfect și un cub perfect, atunci este de forma  $7k$  sau  $7k+1$ .

**Soluție.** Pentru  $k \in \mathbb{N}$ , notăm  $k \bmod 7$  restul lui  $k$  la împărțirea cu 7. Fie  $n = a^2 = b^3$  cu  $a, b \in \mathbb{N}$ . Atunci:

$$n \bmod 7 = (a \bmod 7)^2 \bmod 7 \in \{k^2 \bmod 7 \mid 0 \leq k \leq 6\} = \{0, 1, 4, 2\}.$$

$$n \bmod 7 = (b \bmod 7)^3 \bmod 7 \in \{k^3 \bmod 7 \mid 0 \leq k \leq 6\} = \{0, 1, 6\}$$

deci  $n \bmod 7 \in \{0, 1\}$ . ■

**Exercițiul 9.** Să se arate că nu există nici un număr întreg  $n$  pentru care expresia  $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$  se împarte exact la 7.

**Soluție.** Fie  $r$  restul împărțirii lui  $n$  la 7. Atunci restul lui  $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$  la 7 este egal cu restul lui  $r^4 + r^3 + r^2 + r + 1$  la 7. Calculând restul acestei expresii pentru  $r = 0, 1, \dots, 6$ , obținem că resturile posibile ale expresiei date la 7 pot fi 1, 2, 3, 4, 5, deci expresia nu se divide niciodată cu 7. ■

**Exercițiul 10.** Să se arate că restul împărțirii a două numere întregi la diferența lor este același iar caturile diferă printr-o unitate.

**Soluție.** Fie numerele întregi distincte  $a, b$ . Putem presupune  $a > b$ , iar din teorema împărțirii cu rest avem:

$$\begin{aligned} a &= (a-b)q + r \\ b &= (a-b)q' + r' \end{aligned}$$

unde  $q, q' \in \mathbb{Z}$  și  $0 \leq r, r' < a-b$ . Așadar:

$$\begin{aligned} -(a-b) &< r - r' < (a-b) \\ (a-b) &| (r - r') \end{aligned}$$

de unde găsim că  $r = r'$ . Înlocuind mai sus și scăzând celor două relații obținem că

$$a - b = (a-b)(q - q')$$

deci  $q - q' = 1$ . ■

**Exercițiul 11.** Să se arate că din 2007 numere naturale se pot alege două a căror diferență se divide cu 2006.

**Soluție.** Există 2006 de resturi posibile la împărțirea cu 2006. Deci, din 2007 de numere naturale, două dintre ele vor da același rest la împărțirea cu 2006. Diferența acestor numere se divide cu 2006. ■

**Exercițiul 12.** Să se afle câtul și restul împărțirii numărului  $A = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \cdots (2^{2^{2007}} + 1)$  la  $2^{2^{2007}}$ .

**Soluție.** Avem

$$\begin{aligned} A &= (2^{2^0} - 1) A = (2^{2^0} - 1)(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1) \cdots (2^{2^{2007}} + 1) \\ &= (2^{2^1} - 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \cdots (2^{2^{2007}} + 1) \\ &= (2^{2^{2007}} - 1)(2^{2^{2007}} + 1) \\ &= (2^{2^{2007}})^2 - 1 \\ &= 2^{2^{2007}}(2^{2^{2007}} - 1) + 2^{2^{2007}} - 1 \end{aligned}$$

deci restul împărțirii lui  $A$  la  $2^{2^{2007}}$  este  $2^{2^{2007}} - 1$ . ■

**Exercițiul 13.** Se consideră numărul  $A = 3^n + 7^n + k^n$ ,  $n$  impar. Să se afle restul împărțirii lui  $k$  la 5 știind că  $A$  se divide la 5.

**Soluție.** Fie  $r$  restul lui  $k$  la împărțirea cu 5 și  $q \in \mathbb{N}$  astfel încât  $n = 2q + 1$ . Atunci

$$\begin{aligned} A \mod 5 &= 3^{2q+1} + 7^{2q+1} + k^{2q+1} \mod 5 \\ &= (3 + 7)(3^{2q} + \dots + 7^{2q}) + r^{2q+1} \mod 5 \\ &= r^{2q+1} \mod 5 \end{aligned}$$

Dar 5 divide  $A$ , deci 5 divide  $r^{2q+1}$ . Cum  $0 \leq r \leq 4$ , obținem că  $r = 0$ . ■

**Exercițiul 14.** Care numere naturale pot fi scrise ca diferență de două pătrate de numere întregi? Există întregi de forma  $4m + 3$  care să fie sumă de două pătrate? Dar de forma  $7m + 3$  care să fie sumă sau diferență de două cuburi perfecte?

**Soluție.** Considerăm o scriere de forma  $n = x^2 - y^2$ . Deducem de aici că există un divizor  $d$  al lui  $n$  astfel încât

$$\begin{aligned}x - y &= d \\x + y &= \frac{n}{d}\end{aligned}$$

Un astfel de sistem are soluții numere naturale  $x, y$  dacă și numai dacă  $d$  și  $n/d$  au aceeași paritate.

Dacă  $n$  este impar, putem lua  $d = 1$ , obținând  $x = \frac{n+1}{2}$  și  $y = \frac{n-1}{2}$ .

Dacă  $n$  este multiplu de 4, luăm  $d = 2$ , când  $x = \frac{n+4}{4}$  și  $y = \frac{n-4}{4}$ .

Dacă  $n = 4k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , atunci nu există un divizor  $d$  astfel încât  $d$  și  $n/d$  să aibă aceeași paritate.

Pentru a doua cerință, folosim faptul că un pătrat perfect este de forma  $4k$  sau  $4k + 1$ , deci o sumă de 2 pătrate va fi de forma  $4k$ ,  $4k + 1$  sau  $4k + 2$ . Așadar, numerele de forma  $4m + 3$ , nu pot fi scrise ca o sumă de 2 pătrate. Pentru a treia cerință se procedează similar. ■

**Exercițiul 15.** Întregii de forma  $4m + 3$  nu se pot reprezenta sub forma  $x^2 - 3y^2$ . Dacă un întreg se poate reprezenta sub forma  $x^2 - 3y^2$ , atunci el se poate scrie sub această formă într-o infinitate de moduri.

**Soluție.** Un pătrat perfect este de forma  $4k$  sau  $4k + 1$ , deci  $x^2 - 3y^2$  este de forma  $4k$ ,  $4k + 1$  sau  $4k + 2$ , deci nu poate fi de forma  $4k + 3$ .

Pentru a doua cerință, observăm că produsul a două numere de forma  $x^2 - 3y^2$  este în continuare de aceeași formă:

$$\begin{aligned}(x_1^2 - 3y_1^2)(x_2^2 - 3y_2^2) &= (x_1 - y_1\sqrt{3})(x_1 + y_1\sqrt{3})(x_2 - y_2\sqrt{3})(x_2 + y_2\sqrt{3}) \\&= (x_1x_2 + 3y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{3})(x_1x_2 + 3y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{3}) \\&= (x_1x_2 + 3y_1y_2)^2 - 3(x_1y_2 + x_2y_1)^2\end{aligned}$$

pentru orice  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ . Deducem de aici că este suficient să arătăm că 1 se poate scrie într-o infinitate de moduri sub forma  $x^2 - 3y^2$ . Pentru aceasta, căutăm o scriere  $1 = x_0^2 - 3y_0^2$  și construim alte scrieri considerând puterile acestora, adică luăm:

$$x_n^2 - 3y_n^2 = (x_0^2 - 3y_0^2)^n = 1$$

pentru fiecare  $n \geq 0$ . Pentru a ne asigura că am obținut o infinitate de scrieri, ar trebui să arătăm că șirurile  $(x_n)_n$  și  $(y_n)_n$  au o infinitate de termeni distincți doi câte doi. Însă din

$$x_{n+1}^2 - 3y_{n+1}^2 = (x_n^2 - 3y_n^2)(x_0^2 - 3y_0^2)$$

și calculele de mai sus rezultă că aceste șiruri verifică relațiile de recurență

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_0x_n + 3y_0y_n \\y_{n+1} &= x_0y_n + y_0x_n\end{aligned}$$

De aici, putem observa că dacă  $x_0$  și  $y_0$  sunt numere întregi strict pozitive,  $(x_n)_n$  și  $(y_n)_n$  sunt șiruri strict crescătoare, deci au o infinitate de termeni distincți, adică exact ceea ce voiam. Așadar, am redus problema la a găsi o soluție  $(x_0, y_0)$  a ecuației  $x^2 - 3y^2 = 1$  cu  $x_0, y_0 > 0$ . Dar acest lucru este trivial; de exemplu  $(2, 1)$  este o astfel de soluție. ■

**Exercițiul 16.** Împărțind numărul natural  $n$  la 68 se obține restul 39. Să se determine restul împărțirii lui  $n$  la 17.

**Soluție.** Din teorema împărțirii cu rest, avem  $n = 68q + 39$  unde  $q \in \mathbb{Z}$ , egalitate ce poate fi rescrisă în forma

$$n = 17(4q + 2) + 5$$

ceea ce arată că restul împărțirii lui  $n$  la 17 este 5. ■

**Exercițiul 17.** Un număr natural nenul se împarte la 19 și la 16. Câtul împărțirii la 19 este egal cu restul împărțirii la 16 iar câtul împărțirii la 16 este egal cu restul împărțirii la 19. Sa se determine numărul.

**Soluție.** Fie  $n$  numărul căutat. Ipoteza implică:

$$\begin{cases} n = 19q + r, & 0 \leq r < 19 \\ n = 16r + q, & 0 \leq q < 16 \end{cases}$$

de unde, prin scădere, obținem

$$6q = 5r$$

deci  $6|r$  și  $5|q$ . Cum  $r \in \{0, 1, \dots, 18\}$  și  $q \in \{0, \dots, 15\}$ , obținem următoarele soluții:

$$r = 0, q = 0 \implies n = 0$$

$$r = 6, q = 5 \implies n = 101$$

$$r = 12, q = 10 \implies n = 202$$

$$r = 18, q = 15 \implies n = 303$$

Dar numărul  $n$  este nenul, deci soluțiile problemei sunt 101, 202 și 303. ■

**Exercițiul 18.** Diferența a două numere naturale este 243, iar dacă împărțim numărul mai mare la cel mai mic obținem câtul 3 și restul 39. Aflați numerele.

**Soluție.** Fie  $a \geq b$  cele două numere. Avem

$$\begin{cases} a - b = 243 \\ a = 3b + 39 \end{cases}$$

și condiția de existență  $39 < b$  (ce provine din TIR). Rezolvând sistemul obținem soluția  $a = 495$  și  $b = 152$ . ■

**Exercițiul 19.** Să se determine restul împărțirii numărului:

(a)  $182! + 91$  la 1991;

(b)  $41! + 17$  la 2009.

**Soluție.** (a) Avem  $1991 = 11 \cdot 181$ , deci  $182!$  se divide cu 1991, iar restul lui  $182! + 91$  la împărțirea cu 1991 este 91.

(b) Avem  $2009 = 7^2 \cdot 41$  deci restul împărțirii lui  $41! + 17$  la 2009 este 17. ■

**Exercițiul 20.** Determinați numărul  $\overline{abcd}$ , scris în baza 10, știind că dacă îl împărțim la numărul  $\overline{bcd}$  obținem câtul  $a + 1$  și restul  $a + 2$ .

**Soluție.** Impunem condițiile de existență:  $a > 0$  și  $b > 0$ . Avem

$$\overline{abcd} = (a + 1)\overline{bcd} + a + 2$$

sau echivalent:

$$1000a = a \cdot \overline{bcd} + a + 2$$

de unde rezultă că  $a|2$ , deci  $a \in \{1, 2\}$ .

În cazul  $a = 1$ , obținem  $\overline{bcd} = 997$ . În cazul  $a = 2$ , găsim  $\overline{bcd} = 998$ . ■