

Introducere în combinatorică și teoria grafurilor

Cuprins

1	Recurențe liniare	1
2	Principiul lui Dirichlet	13
3	Principii de numărare elementare	14
4	Șiruri, aranjamente, combinări, multiseturi	16
5	Coeficienți binomiali	20
6	Coeficienți multinomiali	21
7	Principiul includerii și al excluderii	23
8	Partiții ale unei mulțimi	26
9	Partiții ale unui număr natural	29
10	Configurații combinatoriale clasice	32
	10.1 Bile distincte, urne distincte	32
	10.2 Bile identice, urne distincte	34
	10.3 Bile distincte, urne identice	35
	10.4 Bile identice, urne identice	36
11	Diverse	37
	11.1 O interpretare a coeficientului multinomial	37
	11.2 Numărul de surjecții via principiul includerii și al excluderii	38
12	Exerciții	39
	12.1 Relații de recurență liniare	39
	12.2 Principiul lui Dirichlet	41
	12.3 Probleme de numărare	43

1 Recurențe liniare

Definiția 1.1. (a) O recurență liniară cu coeficienți constanți de ordin $r \geq 1$ este o familie de ecuații de forma

$$x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \cdots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = h_n, \forall n \geq 0$$

unde $r \geq 1$, $c_{r-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{R}$, $c_0 \neq 0$, sunt constante, $(h_n)_{n \geq 0}$ este un șir fixat de numere reale, iar $(x_n)_{n \geq 0}$ este șirul de necunoscute.

(b) O soluție a recurenței este un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ de numere reale care verifică toate ecuațiile recurenței:

$$a_{n+r} + c_{r-1}a_{n+r-1} + \cdots + c_1a_{n+1} + c_0a_n = h_n, \forall n \geq 0$$

(c) Dacă $h_n = 0$ pentru orice $n \geq 0$, spunem că recurența este omogenă. În caz contrar, recurența se numește neomogenă.

Putem rescrie recurența de mai sus sub forma:

$$x_{n+r} = -c_{r-1}x_{n+r-1} - \cdots - c_1x_{n+1} - c_0x_n + h_n, \forall n \geq 0$$

de unde găsim că x_{n+r} este unic determinat de precedenții r termeni $x_{n+r-1}, \dots, x_n$.

Astfel, x_r este unic determinat de $x_0, \dots, x_{r-1}$. Termenul x_{r+1} este unic determinat de $x_1, \dots, x_r$, deci și el se poate afla în mod unic din valorile $x_0, \dots, x_{r-1}$.

Inductiv, rezultă că o soluție $(x_n)_n$ a recurenței este unic determinată de primii r termeni $x_0, x_1, \dots, x_{r-1}$.

Cu alte cuvinte, date r numere reale $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$, există și este unic un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ de numere reale (respectiv complexe) astfel încât

$$\begin{cases} x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = h_n, \forall n \geq 0 \\ x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_{r-1} = a_{r-1} \end{cases}$$

Vom numi valorile $a_0, \dots, a_{r-1}$ termenii inițiali sau condițiile inițiale ale recurenței.

Propoziția 1.2 (Principiul superpoziției). Fie scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $(a_n)_{n \geq 0}$, respectiv $(b_n)_{n \geq 0}$ soluții ale recurențelor de ordin r următoare

$$x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = s_n, n \geq 0$$

$$x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = t_n, n \geq 0$$

Atunci șirul $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n \geq 0}$ este soluție a recurenței

$$x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = \alpha s_n + \beta t_n, n \geq 0$$

Demonstrație. Avem, pentru orice $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} & (\alpha a_{n+r} + \beta b_{n+r}) + c_{r-1}(\alpha a_{n+r-1} + \beta b_{n+r-1}) + \dots + c_1(\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}) + c_0(\alpha a_n + \beta b_n) = \\ & = \alpha(a_{n+r} + c_{r-1}a_{n+r-1} + \dots + c_1a_{n+1} + c_0a_n) + \beta(b_{n+r} + c_{r-1}b_{n+r-1} + \dots + c_1b_{n+1} + c_0b_n) \\ & = \alpha s_n + \beta t_n \end{aligned}$$

■

Considerăm acum două recurențe cu coeficienți reali:

$$(\text{RLNH}) : x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = h_n, \forall n \geq 0$$

$$(\text{RLH}) : x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = 0, \forall n \geq 0$$

Spunem că recurența omogenă (RLH) este asociată recurenței neomogene (RLNH). Un prim rezultat legat de structura soluțiilor lor este:

Propoziția 1.3. (a) Mulțimea $\mathcal{S}$ a soluțiilor lui (RLH) formează un spațiu liniar real de dimensiune r .

(b) Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ o soluție particulară a recurenței neomogene (RLNH). Atunci soluția generală pentru (RLNH) este

$$x_n = a_n + u_n, n \geq 0$$

unde $(u_n)_{n \geq 0}$ este o soluție a recurenței omogene asociate (RLH).

Astfel, mulțimea soluțiilor (RLNH) este spațiul afin $(a_n)_{n \geq 0} + \mathcal{S}$, de dimensiune r .

Demonstrație. (a) Fie $(u_n)_{n \geq 0}, (v_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{S}$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aplicând principiul superpoziției (pentru $h_n = k_n = 0$), rezultă că șirul $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n \geq 0}$ este și el o soluție a recurenței omogene, deci $\mathcal{S}$ este spațiu liniar.

Am văzut mai sus că o soluție $(x_n)_{n \geq 0}$ este unic determinată de primii r termeni. Obținem astfel o aplicație $\phi : \mathbb{R}^r \rightarrow S$, care asociază unui r -uplu $(a_0, \dots, a_{r-1})$ șirul $(x_n)_{n \geq 0} \in S$ astfel încât primii r termeni sunt $a_0, \dots, a_{r-1}$.

Din construcție, aplicația ϕ este **bijectivă**. Să arătăm că ϕ este aplicație liniară. Considerăm două r -upluri $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{r-1})$, $\mathbf{b} = (b_0, \dots, b_{r-1}) \in \mathbb{R}^r$ și doi scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Notăm $(x_n)_n = \phi(\mathbf{a})$, $(y_n)_n = \phi(\mathbf{b})$. Atunci

$$\alpha \phi(\mathbf{a}) + \beta \phi(\mathbf{b}) = (\alpha x_n + \beta y_n)_{n \geq 0}$$

Deoarece $\mathcal{S}$ este spațiu liniar, șirul $z_n = \alpha x_n + \beta y_n, n \geq 0$ se află în $\mathcal{S}$ și primii r termeni sunt

$$(z_0, \dots, z_{r-1}) = (\alpha x_0 + \beta y_0, \dots, \alpha x_{r-1} + \beta y_{r-1}) = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$$

Pe de altă parte, în $\mathcal{S}$, există un unic șir cu primii termeni dați de $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ și anume $\phi(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})$.

Rezultă astfel că

$$\alpha \phi(\mathbf{a}) + \beta \phi(\mathbf{b}) = \phi(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b})$$

deci $\phi: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathcal{S}$ este un izomorfism liniar, iar $\mathcal{S}$ este un spațiu liniar de dimensiune r .

(b) Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ o soluție a recurenței neomogene (RLNH). Din propoziția anterioară rezultă că șirul $(x_n)_{n \geq 0} - (a_n)_{n \geq 0}$ este o soluție a recurenței omogene, deci $(x_n)_{n \geq 0} \in (a_n)_{n \geq 0} + \mathcal{S}$.

Invers, dacă $(x_n)_{n \geq 0} = (a_n)_{n \geq 0} + (u_n)_{n \geq 0}$, cu $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathcal{S}$, se verifică imediat că $(x_n)_{n \geq 0}$ este o soluție a recurenței neomogene RLNH. ■

Din rezultatul anterior deducem următoarele. Dacă $(u_{0,n})_n, \dots, (u_{r-1,n})_n$ este o bază a lui $\mathcal{S}$, atunci orice soluție a ecuației omogene (RLH) este de forma

$$x_n = \alpha_0 u_{0,n} + \alpha_1 u_{1,n} + \dots + \alpha_{r-1} u_{r-1,n}, n \geq 0$$

unde $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}$ sunt constante reale.

Aceste constante sunt unic determinate de termenii inițiali ai soluției $x_0, \dots, x_{r-1}$, rezolvând sistemul liniar

$$\begin{cases} \alpha_0 u_0^0 + \alpha_1 u_0^1 + \dots + \alpha_{r-1} u_0^{r-1} = x_0 \\ \alpha_0 u_1^0 + \alpha_1 u_1^1 + \dots + \alpha_{r-1} u_1^{r-1} = x_1 \\ \dots \\ \alpha_0 u_{r-1}^0 + \alpha_1 u_{r-1}^1 + \dots + \alpha_{r-1} u_{r-1}^{r-1} = x_{r-1} \end{cases}$$

Așadar, pentru a determina termenul general al unei recurențe omogene, este suficient să determinăm o bază de soluții. Vom face aceasta în teoremele 1.6 și 1.7.

Exemplul 1.4. Considerăm șirul dat prin

$$\begin{cases} x_0 = 5, \\ x_{n+1} - 2x_n = 0, n \geq 0 \end{cases}$$

Spațiul soluțiilor ai acestei recurențe omogene are dimensiunea 1 și vom vedea mai târziu că are ca bază șirul $(2^n)_{n \geq 0}$. Așadar, termenul general al lui $(x_n)_n$ are forma

$$x_n = \alpha 2^n, n \geq 0$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$ îl determinăm impunând condiția inițială

$$x_0 = \alpha 2^0$$

Rezultă că $\alpha = 5$, deci $x_n = 5 \cdot 2^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Similar, dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este o soluție particulară a recurenței neomogene (RLNH), atunci soluția generală are forma

$$x_n = a_n + \alpha_0 u_n^0 + \alpha_1 u_n^1 + \dots + \alpha_{r-1} u_n^{r-1}, n \geq 0$$

unde $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}$ sunt constante reale care se determină din termenii inițiali, similar cu cazul omogen.

Așadar, determinarea termenului general al unei recurențe neomogene se reduce la găsirea unei soluții particulare (precum și a soluțiilor recurenței omogene). În general, găsirea unei soluții particulare nu este o problemă simplă, dar vom da exemple când $(h_n)_n$ are niște forme particulare.

Exemplul 1.5. Considerăm șirul dat prin

$$\begin{cases} x_0 = 5, \\ x_{n+1} - 2x_n = 1 \end{cases}$$

Se verifică imediat că șirul constant $c_n = -1, n \geq 0$ este o soluție particulară a recurenței (dar nu cea căutată). Din exemplul de mai sus, soluția recurenței omogene asociate este

$$u_n = \alpha 2^n, n \geq 0$$

unde α este un parametru real.

Rezultă că soluția generală a recurenței neomogene va fi

$$x_n = u_n + c_n = \alpha 2^n - 1, n \geq 0$$

Pentru a determina parametrul α impunem condiția

$$x_0 = 5$$

Obținem:

$$x_0 = 5 \iff \alpha 2^0 - 1 = 5 \iff \alpha = 6$$

deci termenul general al șirului dat este

$$x_n = 6 \cdot 2^n - 1, n \geq 0$$

Am formulat rezultatele precedente pentru cazul recurențelor cu coeficienți reali. Aceleași definiții și proprietăți pot fi date și considerând coeficienți în $\mathbb{C}$.

Deși cazul de interes este cel al coeficienților reali (de obicei, chiar întregi), se va dovedi util să studiem recurențele și în cazul coeficienților complecși.

Fie astfel, recurența liniară omogenă de ordin r cu coeficienți complecși

$$(RLH_c) : x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = 0, \forall n \geq 0$$

unde $c_{r-1}, \dots, c_1, c_0 \in \mathbb{C}, c_0 \neq 0$.

Acestei recurențe îi asociem polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \lambda^r + c_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$$

Notăm prin $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}^\times$ rădăcinile acestui polinom, cu multiplicitățile $\mu_1, \dots, \mu_s$.

Teorema 1.6. O bază a spațiului de soluții ale recurenței (RLH_c) este formată din șirurile

$$\lambda_1^n, \lambda_1^n n, \dots, \lambda_1^n n^{\mu_1-1}, \dots, \lambda_s^n, \lambda_s^n n, \dots, \lambda_s^n n^{\mu_s-1}$$

Echivalent, orice soluție a recurenței (RLH_c) are forma

$$x_n = \lambda_1^n p_1(n) + \lambda_2^n p_2(n) + \dots + \lambda_s^n p_s(n)$$

unde p_j este un polinom din $\mathbb{C}[X]$ de grad $< \mu_j$, pentru $j = 1, \dots, s$.

Demonstrație. Vom rescrie recurența (RLH_c) în formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+r-1} \\ x_{n+r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{r-2} & -c_{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+r-2} \\ x_{n+r-1} \end{bmatrix}$$

Notăm matricea $r \times r$ din membrul drept prin A . Obținem atunci

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+r-1} \\ x_{n+r} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+r-2} \\ x_{n+r-1} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n+r-3} \\ x_{n+r-2} \end{bmatrix} = \cdots = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{r-2} \\ x_{r-1} \end{bmatrix}$$

Pentru a determina x_n , trebuie să calculăm puterile matricei A . Pentru aceasta vom folosi forma Jordan a lui A .

Observăm că matricea A este matricea companion a polinomului $P(X) = X^r + c_{r-1}X^{r-1} + \cdots + c_1X + c_0$. Din exercițiul 12.1.1, rezultă că există matricea inversabilă $S \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ astfel încât

$$S^{-1}AS = J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix}$$

unde J_k este un bloc Jordan $\mu_k \times \mu_k$ cu λ_k pe diagonală (și 1 deasupra diagonalei).

Rezultă că

$$A^n = SJ^nS^{-1} = S \begin{bmatrix} J_1^n & & 0 \\ & J_2^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_s^n \end{bmatrix} S^{-1}$$

Din exercițiul 12.1.2, deducem că fiecare bloc J_k^n este o matrice triunghiulară superior ce are λ_k^n pe diagonală principală, iar deasupra diagonalei numere de forma $\lambda_k^{n-j} \binom{n}{j}$ unde $j \leq \mu_k - 1$.

Rezultă că elementele matricei $J^n S^{-1}$ sunt de forma $\lambda_k^n p_k(n)$, cu p_k polinom de grad $< \mu_k$, iar elementele matricei $A^n = SJ^nS^{-1}$ vor fi de combinații liniare de acestea. Obținem astfel că x_n are forma

$$x_n = \lambda_1^n p_1(n) + \lambda_2^n p_2(n) + \cdots + \lambda_s^n p_s(n)$$

unde p_k este un polinom din $\mathbb{C}[X]$ de grad $< \mu_k$, pentru fiecare $k = 1, \dots, s$.

Rezultă atunci că șirurile

$$\lambda_1^n, \lambda_1^n n, \dots, \lambda_1^n n^{\mu_1-1}, \dots, \lambda_s^n, \lambda_s^n n, \dots, \lambda_s^n n^{\mu_s-1}$$

formează un sistem de generatori ai spațiului de soluții ai recurenței **RHL_c**. Cum numărul acestor șiruri este $\sum_{k=1}^s \mu_k = r$ coincide cu dimensiunea acestui spațiu, găsim că acestea formează o bază. ■

Putem folosi teorema precedentă pentru a determina soluția generală a unei recurențe cu coeficienți reali. Fie pentru aceasta recurența de ordin r

$$(\text{RLh_r}) : x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \cdots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = 0, n \geq 0$$

unde $c_0, \dots, c_{r-1} \in \mathbb{R}, c_0 \neq 0$. Polinomul caracteristic asociat este

$$P(\lambda) = \lambda^r + c_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

Vom nota prin:

- $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ rădăcinile *reale* ale lui P , cu multiplicități $\mu_1, \dots$, respectiv μ_t , și prin
- $\rho_1(\cos \varphi_1 \pm i \sin \varphi_1), \dots, \rho_h(\cos \varphi_h \pm i \sin \varphi_h)$ rădăcinile complexe nereale cu multiplicitățile $\mu'_1, \dots, \mu'_h$ (amintim că rădăcinile complexe nereale ale unui polinom *cu coeficienți reali* pot fi grupate în perechi de numere conjugate, fiecare având aceeași multiplicitate).

Teorema 1.7. O bază a spațiului de soluții reale ale recurenței (RHL- r) este formată din șirurile

$$\begin{aligned} \lambda_k^n, n\lambda_k^n, \dots, n^{\mu_k-1}\lambda_k^n, & k=1, \dots, t \\ \rho_k^n \cos n\varphi_k, n\rho_k^n \cos n\varphi_k, \dots, n^{\mu'_k-1}\rho_k^n \cos n\varphi_k, & k=1, \dots, h \\ \rho_k^n \sin n\varphi_k, n\rho_k^n \sin n\varphi_k, \dots, n^{\mu'_k-1}\rho_k^n \sin n\varphi_k, & k=1, \dots, h \end{aligned}$$

Demonstrație. Notăm prin $z_k = \rho_k(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k)$, $k=1, \dots, h$. Din teorema 1.6 rezultă că o bază a spațiului $\mathbb{C}$ -liniar de soluții **complexe** ale recurenței este dată de șirurile

$$\begin{aligned} \lambda_k^n, n\lambda_k^n, \dots, n^{\mu_k-1}\lambda_k^n, & k=1, \dots, t \\ z_k^n, nz_k^n, \dots, n^{\mu'_k-1}z_k^n, & k=1, \dots, h \\ \bar{z}_k^n, n\bar{z}_k^n, \dots, n^{\mu'_k-1}\bar{z}_k^n, & k=1, \dots, h \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} n^j \rho_k^n \cos n\varphi_k &= \operatorname{Re} n^j z^k = \frac{1}{2} n^j z^k + \frac{1}{2} n^j \bar{z}^k \\ n^j \rho_k^n \sin n\varphi_k &= \operatorname{Im} n^j z^k = \frac{1}{2i} n^j z^k - \frac{1}{2i} n^j \bar{z}^k \end{aligned}$$

Așadar în baza de mai sus putem înlocui șirurile $n^j z_k^n$ și $n^j \bar{z}_k^n$ prin $n^j \rho_k^n \cos n\varphi_k$ și $n^j \rho_k^n \sin n\varphi_k$. Rezultă că familia de șiruri din concluzie este o bază a spațiului de soluții **complexe**. Dar toate șirurile respective sunt reale, deci ele vor forma o bază a spațiului de soluții **reale** ale recurenței. ■

Exemplul 1.8. Considerăm șirul dat prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = 5x_n, n \geq 0 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Ecuția caracteristică este

$$\lambda = 5$$

care are, evident, o singură rădăcină $\lambda = 5$, cu multiplicitatea 1. Soluția generală a recurenței va fi

$$x_n = c5^n, n \geq 0$$

unde c este un parametru real. Acesta se determină folosind termenul inițial:

$$x_0 = 1 \iff c5^0 = 1 \iff c = 1$$

deci $x_n = 5^n$, pentru orice $n \geq 0$.

Puteam determina acest șir și iterând recurența:

$$x_n = 5x_{n-1} = 5^2x_{n-2} = 5^3x_{n-3} = \dots = 5^{n-1}x_1 = 5^n x_0 = 5^n$$

Exemplul 1.9 (Șirul lui Fibonacci). Considerăm șirul

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \\ x_0 = 0, x_1 = 1 \end{cases}$$

Folosim teoremele anterioare pentru a găsi o formulă pentru x_n . Polinomul caracteristic este

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

și are rădăcinile $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ambele simple. Rezultă că există constantele $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

Pentru a determina α_1, α_2 impunem condițiile $x_0 = 0, x_1 = 1$. Obținem sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

ce are soluția

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Așadar

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n, n \geq 0$$

Exemplul 1.10. Considerăm recurența

$$x_{n+2} = -x_n, n \geq 0$$

Ecuția caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0$, cu rădăcinile complex conjugate $\lambda_{1,2} = \pm i$ (cu multiplicitatea 1). Astfel soluțiile complexe sunt

$$x_n = a_1 i^n + a_2 (-i)^n, n \geq 0$$

cu a_1, a_2 constante complexe. Deoarece

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

soluțiile reale ale recurenței vor avea forma

$$x_n = \alpha_1 \cos \frac{n\pi}{2} + \alpha_2 \sin \frac{n\pi}{2}$$

unde α_1, α_2 sunt constante reale.

Exemplul 1.11. Considerăm șirul $(x_n)_n$ dat prin

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n, n \geq 0$$

și termenii inițiali $x_0 = -1, x_1 = 2$.

Polinomul caracteristic este

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

cu rădăcina $\lambda = 2$, cu multiplicitatea $\mu = 2$. Rezultă că soluția generală a acestei recurențe este

$$x_n = a2^n + bn2^n, n \geq 0$$

unde a, b sunt niște parametri reali. Aceștia se determină impunând condițiile $x_0 = -1$ și $x_1 = 2$. Obținem sistemul:

$$\begin{cases} (a \cdot 0 + b)2^0 = -1 \\ (a \cdot 1 + b)2^1 = 2 \end{cases}$$

de unde rezultă $a = 2, b = -1$, deci

$$x_n = (2n - 1)2^n, n \geq 0$$

Prezentăm acum și un rezultat legat de recurențe neomogene:

Teorema 1.12. Considerăm recurența cu coeficienți în $\mathbb{C}$ de ordin r următoare

$$(R): x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \dots + c_1x_{n+1} + c_0x_n = Q(n)q^n$$

unde $q \in \mathbb{C}$ și $Q(X) \in \mathbb{C}[X]$.

Atunci recurența admite o soluție particulară de forma

$$x_n = n^\mu \tilde{Q}(n)q^n$$

unde $\tilde{Q} \in \mathbb{C}[X]$, cu $\deg \tilde{Q} \leq \deg Q$ și μ este multiplicitatea lui q ca rădăcină a polinomului caracteristic al recurenței (dacă q nu este rădăcină, $\mu = 0$).

Demonstrație. Punctul de plecare este observația că termenul neomogen este la rândul său o soluție al unei recurențe omogene, de unde rezultă că soluțiile ecuației neomogene sunt soluții ale unei ecuații omogene (de ordin mai mare). Soluția particulară din concluzie va fi o soluție a acestei ecuații omogene.

Fie $d = \deg Q$ și $P(X)$ polinomul caracteristic al recurenței (R) cu rădăcinile $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ cu multiplicitățile $\mu_1, \dots, \mu_s$ și considerăm o soluție $(x_n)_n$ a lui (R).

Din teorema 1.6, rezultă că șirul $Q(n)q^n$ este o soluție a recurenței omogene cu polinomul caracteristic $(X - q)^{d+1}$. Folosind exercițiul 12.1.5, șirul $(x_n)_n$ va fi o soluție a recurenței omogene cu polinomul caracteristic $P(X)(X - q)^{d+1}$.

Avem două cazuri. Dacă q nu este rădăcină a lui $P(X)$, rădăcinile lui $P(X)(X - q)^{d+1}$ sunt $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ și q , cu multiplicitățile $\mu_1, \dots, \mu_s$, respectiv $d + 1$, deci (cf. Teorema 1.6), vor exista polinoamele $p_1, \dots, p_s$, respectiv $\tilde{Q}$ de grade strict mai mici ca $\mu_1, \dots, \mu_s$, respectiv $d + 1$ astfel încât

$$x_n = \sum_{k=1}^s p_k(n)\lambda_k^n + \tilde{Q}(n)q^n$$

Dar $\sum_{k=1}^s p_k(n)\lambda_k^n$ este o soluție a recurenței omogene asociate lui (R), de unde rezultă, folosind principiul superpoziției, că șirul $\tilde{Q}(n)q^n$ este o soluție particulară a lui (R).

Dacă q este o rădăcină a lui $P(X)$, putem presupune (reindexând rădăcinile) că $q = \lambda_s$. Rădăcinile lui $P(X)(X - q)^{d+1}$ sunt atunci $\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}, \lambda_s = q$, cu multiplicitățile $\mu_1, \dots, \mu_{s-1}$, respectiv $\mu_s + d + 1$.

Din teorema 1.6, există polinoamele $p_1, \dots, p_{s-1}$ și $\tilde{p}_s$ de grade mai mici strict ca $\mu_1, \dots, \mu_{s-1}$,

respectiv $\mu_s + d + 1$ astfel încât

$$x_n = \sum_{k=1}^{s-1} p_k(n) \lambda_k^n + \tilde{p}_s(n) q^n, n \geq 0$$

Deoarece, $\deg \tilde{p}_s \leq \mu_s + d$, putem scrie $\tilde{p}_s = X_s^\mu \tilde{Q} + p_s$, cu $\deg \tilde{Q} \leq d$ și $\deg p_s < \mu_s$.

Atunci $p_k(n) \lambda_k^n, k = 1, \dots, s-1$ și $p_s(n) q^n$ sunt soluții ale recurenței omogene asociate lui (R), deci, din principiul superpoziției, avem că $n^\mu \tilde{Q}(n) q^n$ este o soluție a recurenței neomogene (R).

În ambele cazuri am arătat că recurența are o soluție de forma $n^\mu \tilde{Q}(n) q^n$, cu $\deg \tilde{Q} \leq d = \deg Q$. ■

Exemplul 1.13. Considerăm recurența

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n + 2^n, n \geq 0$$

Folosind teorema anterioară vom determina soluția generală a acestei recurențe.

Recurența omogenă asociată este $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n, n \geq 0$, ce are ecuația caracteristică

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Soluția generală a recurenței omogene este atunci

$$u_n = \alpha_1 + \alpha_2 3^n, n \geq 0$$

cu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Partea neomogenă este 2^n și 2 nu este o rădăcină a polinomului caracteristic. Vom căuta astfel o soluție particulară de forma

$$y_n = a 2^n, n \geq 0$$

cu $a \in \mathbb{R}$. Înlocuind în recurență, obținem

$$a 2^{n+2} = 4a 2^{n+1} - 3a 2^n + 2^n$$

de unde obținem $a = -1$, deci $y_n = -2^n, n \geq 0$ este o soluție particulară a recurenței. Soluția generală va fi:

$$x_n = \alpha_1 + \alpha_2 3^n - 2^n, n \geq 0$$

unde α_1 și α_2 sunt parametri reali.

Exemplul 1.14. Considerăm şirul dat prin

$$\begin{cases} x_{n+3} = 3x_{n+1} + 2x_n + 18(-1)^n n, n \geq 0 \\ x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 11 \end{cases}$$

Recurenţa omogenă asociată este $x_{n+3} = 3x_{n+1} + 2x_n$, cu ecuaţia caracteristică

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = 2$ cu multiplicităţile $\mu_1 = 2$, respectiv $\mu_2 = 1$.

Soluţia generală a recurenţei omogene va fi atunci

$$u_n = \alpha(-1)^n + \beta n(-1)^n + \gamma 2^n, n \geq 0.$$

cu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Conform teoremei anterioare (-1 este rădăcină a ecuaţiei caracteristice de multiplicitate 2) căutăm o soluţie particulară a recurenţei neomogene de forma

$$y_n = n^2(an + b)(-1)^n, n \geq 0$$

cu $a, b \in \mathbb{R}$. Înlocuind în recurenţă găsim

$$(a(n+3)^3 + b(n+3)^2)(-1)^{n+3} = 3(a(n+1)^3 + b(n+1)^2)(-1)^{n+1} + 2(an^3 + bn^2)(-1)^n + 18(-1)^n n, \forall n \geq 0$$

sau echivalent

$$an^3 + (9a+b)n^2 + (27a+6b)n + 27a+9b = 3(an^3 + (3a+b)n^2 + (3a+2b)n + a+b) - 2(an^3 + bn^2) - 18n, \forall n \geq 0$$

Deoarece egalitatea de mai sus are loc pentru orice $n \geq 0$, coeficienţii polinoamelor din cei doi membri coincid. Obţinem astfel sistemul

$$\begin{cases} a = 3a - 2a \\ 9a + b = 9a + 3b - 2b \\ 27a + 6b = 9a + 6b - 18 \\ 27a + 9b = 3a + 3b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Aşadar, am obţinut soluţia particulară a recurenţei neomogene

$$y_n = -n^2(n-4)(-1)^n, n \geq 0$$

În concluzie, soluţia generală a recurenţei omogene este

$$x_n = y_n + u_n = -n^2(n-4)(-1)^n + \alpha(-1)^n + \beta n(-1)^n + \gamma 2^n$$

unde α, β, γ sunt parametri reali.

Pentru a-i determina impunem condiţiile

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -3 - \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 8 + \alpha + 2\beta + 4\gamma = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Deci termenul general al şirului dat este

$$x_n = -(n^3 - 4n^2 + 1)(-1)^n + 2^n, n \geq 0$$

Exemplul 1.15. Considerăm recurența

$$x_{n+2} = x_n + \cos \frac{n\pi}{4}, n \geq 0$$

Folosind teorema anterioară vom determina soluția generală (reală) a acestei recurențe. Polinomul caracteristic este $\lambda^2 - 1$, cu rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm 1$, deci soluția generală a recurenței omogene este

$$u_n = \alpha_1 + \alpha_2(-1)^n, n \geq 0$$

Observăm că

$$\cos \frac{n\pi}{4} = \operatorname{Re}(\varepsilon^n), \varepsilon = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$$

Cum ε nu este o rădăcină a polinomului caracteristic, recurența va avea o soluție de forma

$$z_n = a\varepsilon^n, n \geq 0$$

unde $a \in \mathbb{C}$. Partea sa reală va avea forma

$$y_n = a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4}, n \geq 0$$

cu a, b parametri reali.

Înlocuind în recurență, găsim

$$a \cos \frac{(n+2)\pi}{4} + b \sin \frac{(n+2)\pi}{4} = a \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4}$$

Dar

$$\begin{aligned} \cos \frac{(n+2)\pi}{4} &= \cos \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{n\pi}{4} \\ \sin \frac{(n+2)\pi}{4} &= \sin \left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{n\pi}{4} \end{aligned}$$

deci

$$-a \sin \frac{n\pi}{4} + b \cos \frac{n\pi}{4} = (a+1) \cos \frac{n\pi}{4} + b \sin \frac{n\pi}{4} \iff \begin{cases} -a = b \\ b = a+1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Am obținut astfel o soluție particulară a recurenței neomogene:

$$y_n = -\frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{4}$$

Soluția generală (reală) a recurenței este atunci:

$$x_n = y_n + u_n = -\frac{1}{2} \cos \frac{n\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{4} + \alpha_1 + \alpha_2(-1)^n, n \geq 0$$

cu α_1, α_2 sunt parametri reali.

Exemplul 1.16. Considerăm șirul dat prin

$$x_{n+1} = x_n + n + 1, n \geq 0$$

cu termenul inițial $x_0 = 1$. Polinomul caracteristic este

$$X - 1$$

cu rădăcina caracteristică $\lambda = 1$. Soluția generală a recurenței omogene este

$$u_n = \alpha 1^n = \alpha$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cum partea neomogenă este $n+1 = (n+1)1^n$ și 1 este rădăcina polinomului caracteristic, aplicând teorema anterioară, căutăm o soluție particulară de forma

$$x_n = n(an + b) = an^2 + bn, n \geq 0$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$. Înlocuind în recurență găsim

$$a(n+1)^2 + b(n+1) = an^2 + bn + n + 1, n \geq 0$$

de unde obținem $a = b = \frac{1}{2}$. Așadar o soluție particulară a recurenței neomogene

$$y_n = \frac{1}{2}(n^2 + n), n \geq 0$$

Soluția generală a recurenței neomogene este atunci:

$$x_n = \alpha + \frac{1}{2}(n^2 + n), n \geq 0$$

Impunem acum condiția inițială $x_0 = 1$ și obținem $\alpha = 1$. Așadar, șirul căutat este

$$x_n = 1 + \frac{1}{2}(n^2 + n), n \geq 0$$

Puteam determina șirul și iterând recurența:

$$x_n = x_{n-1} + n = x_{n-2} + n + (n-1) = \dots = x_0 + 1 + 2 + \dots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

2 Principiul lui Dirichlet

Principiul lui Dirichlet (sau principiul cutiei) este formulat de obicei sub următoarea formă:

Teorema 2.1. *Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă plasăm $n + 1$ obiecte în n cutii, atunci măcar una dintre cutii trebuie să conțină cel puțin două obiecte.*

Demonstrație. Presupunem că putem plasa obiectele în cutii astfel încât fiecare să conțină cel mult un obiect. Deoarece avem n cutii, numărul de obiecte va fi cel mult n , ceea ce contrazice ipoteza. Așadar, trebuie să existe o cutie cu cel puțin două obiecte. ■

O formulare echivalentă este:

Teorema 2.2. *Fie A și B două mulțimi finite astfel încât $|A| > |B|$ și $f : A \rightarrow B$ o funcție. Atunci f nu este injectivă.*

Putem generaliza principiul cutiei:

Teorema 2.3. *Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$. Dacă plasăm $nk + 1$ obiecte în n cutii, atunci măcar una dintre cutii trebuie să conțină cel puțin $k + 1$ obiecte.*

Exemplul 2.4. Oricum am alege trei numere întregi, există două care au aceeași paritate. Mai general, oricum am alege $n + 1$ numere întregi, există două dau același rest la împărțirea cu n . Într-adevăr, în prima situație avem trei numere (obiectele) ce pot avea două parități (cutiile). Astfel două dintre numere trebuie să aibă aceeași paritate (două obiecte trebuie să fie plasate în aceeași cutie).

Pentru a doua situație, cele $n + 1$ numere pot da n resturi la împărțirea cu n , deci două dintre ele trebuie să aibă același rest.

Exemplul 2.5. Fie $a_1, \dots, a_n$ numere întregi. Există atunci o mulțime de termeni consecutivi cu suma divizibilă prin n .

Pentru a justifica aceasta consideră următoarele n numere:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_{n-1} = a_1 + \dots + a_{n-1}, s_n = a_1 + \dots + a_n$$

Dacă unul dintre ele se divide cu n , el este suma de termeni consecutivi căutată. În caz contrar, cele n numere dau la împărțirea cu doar $n - 1$ resturi ($1, 2, \dots, n - 1$). Conform principiului cutiei, două dintre ele trebuie să dea același rest.

Există astfel doi indici $i < j$ astfel încât $a_1 + \dots + a_i \equiv a_1 + \dots + a_j \pmod{n}$. De aici rezultă că suma de termeni consecutivi $a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$ este divizibilă cu n .

Exemplul 2.6. La o conferință un număr de persoane dau mâna între ele. Atunci există două care au dat mâna cu același număr de participanți.

Pentru a demonstra acest lucru, notăm prin n numărul de participanți și prin $a_1, a_2, \dots, a_n$ numărul de persoane cu care au dat mâna aceștia. Deoarece fiecare participant poate da mână cu oricare din ceilalți $n - 1$, numerele a_j sunt numere între 0 și $n - 1$.

Mai mult, valorile 0 și $n - 1$ sunt mutual exclusive: dacă există un i cu $a_i = 0$, atunci nu există un j cu $a_j = n - 1$ și invers. (Justificați!)

Deducem astfel că numerele a_i iau valori între 0 și $n - 1$, astfel încât cel mult unul dintre numerele 0 și $n - 1$ apare, adică cele n numere a_i au $n - 1$ valori disponibile. Deci, două dintre ele trebuie să fie egale.

3 Principii de numărare elementare

Notăție 3.1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Prin convenție, $[0] = \emptyset$.

Prima unealtă pentru problemele de numărare este dată de:

Teorema 3.2. Fie A și B două mulțimi finite cu n , respectiv m elemente. Atunci:

- (a) Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $|A \cup B| = n + m$.
- (b) $|A \times B| = mn$.
- (c) $|A^k| = n^k$, pentru orice $k \geq 1$.

Demonstrație. (a) Scriem $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ și $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Deoarece A și B sunt disjuncte, elementele a_i sunt diferite de elementele b_j , deci $A \cup B = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}$ de unde găsim că $|A \cup B| = n + m$.

Mai mult, putem scrie explicit și o bijecție între $[m+n]$ și $A \cup B$ și anume funcția $f : [m+n] \rightarrow A \cup B$ dată prin

$$f(j) = \begin{cases} j, & \text{dacă } j = 1, 2, \dots, n \\ j - n, & \text{dacă } j = n + 1, n + 2, \dots, n + m \end{cases}$$

(b) Procedăm prin inducție după $n := |A|$.

Pentru $n = 0$, $A = \emptyset$, deci $A \times B = \emptyset$ și evident $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 0$.

Fie $n \in \mathbb{N}$. Să presupunem că (b) are loc pentru orice mulțime finită B și orice mulțime A cu n elemente.

Pentru a demonstra pasul inductiv, considerăm B o mulțime finită arbitrară și A o mulțime finită cu $n + 1$ elemente. Fixăm un element $a \in A$ și notăm $A' = A \setminus \{a\}$. Avem atunci:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \\ &= \{(a, y) \mid y \in B\} \cup \{(x, y) \mid x \in A', y \in B\} \\ &= (\{a\} \times B) \cup (A' \times B). \end{aligned}$$

Mulțimea $\{a\} \times B$ are $m = |B|$ elemente, iar din pasul inductiv $|A' \times B| = nm$ (deoarece $|A'| = n$). Cum mulțimile $\{a\} \times B$ și $A' \times B$ sunt disjuncte, (a) implică

$$|A \times B| = |\{a\} \times B \cup A' \times B| = |\{a\} \times B| + |A' \times B| = m + nm = (n + 1)m$$

adică ceea ce voiam să arătăm.

(c) Iterând (b), obținem:

$$|A^k| = n \cdot |A^{k-1}| = n^2 \cdot |A^{k-2}| = \dots = n^{k-1} |A| = n^k.$$

■

Observația 3.3. Din teorema precedentă, știm că produsul cartezian $A \times B$ are nm elemente, când $|A| = n$ și $|B| = m$, deci știm că există o bijecție între $[nm]$ și $A \times B$, dar demonstrația precedentă nu construiește efectiv un astfel de funcție.

O bijecție $[nm] \rightarrow A \times B$ este, în esență, un mod de enumerare (sau de parcurgere) a "matricei" $A \times B$. Putem scrie explicit o bijecție astfel. Numerotând elementele lui A și B , putem presupune că $A = [n]$ și $B = [m]$ și vizualizăm $A \times B$ ca o matrice cu n linii și m coloane. Dacă parcurgem această matrice pe linii una după alta obținem enumerarea lui $A \times B$:

$$(1, 1), \dots, (1, m), (2, 1), \dots, (2, m), \dots, (n, 1), \dots, (n, m)$$

Asociind unui număr k perechea de pe poziția k vom obține funcția căutată. Explicit considerăm funcția $f : [nm] \times [n] \times [m]$ dată prin

$$f(k) = (q + 1, r + 1)$$

unde $q = \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor$ și $r = k \pmod{m}$ sunt câtul, respectiv restul lui k la m . Se arată că f este bine definită (adică $(q + 1, r + 1) \in [n] \times [m]$) și că f este bijectivă cu inversa $g : [n] \times [m] \rightarrow [nm]$ dată prin:

$$g(i, j) = m(i - 1) + j$$

Propoziția precedentă ilustrează două principii importante în combinatorica enumerativă:

- (principiul adunării) Să presupunem că vrem să numărăm niște obiecte pe care putem să le împărțim în două cazuri disjuncte A și B . Atunci numărul total de obiecte va fi suma numărului obiectelor din cazul A cu cel al obiectelor din cazul B .
- (principiul multiplicării) Presupunem că pentru a construi un obiect trebuie să facem două alegeri. Prima se poate face în n moduri și pentru fiecare primă alegere, a doua se poate face în m moduri. Atunci numărul total de alegeri este nm .

O aplicație (relativ) simplă a acestui rezultat este:

Corolarul 3.4. Fie $A = [n]$ și $B = [m]$. Numărul de funcții $f : A \rightarrow B$ este m^n .

Demonstrație 1. O funcție $f : A \rightarrow B$ este unic determinată de valorile $(f(1), f(2), \dots, f(n))$. Astfel, pentru a construi o funcție, trebuie să alegem un element din B pe care să îl atribuim

Invers, dat un n -uplu $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$, lui îi putem asocia funcția $f : A \rightarrow B$ dată prin $f(i) = b_i$, pentru fiecare $i \in A$.

P

■

Demonstrație 2. O funcție $f : A \rightarrow B$ este unic determinată de n -uplul $(f(1), f(2), \dots, f(n)) \in B^n$. Invers, dat un n -uplu $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$, lui îi putem asocia funcția $f : A \rightarrow B$ dată prin $f(i) = b_i$, pentru fiecare $i \in A$. Am obținut astfel două corespondențe:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A, B) &\leftrightarrow B^n \\ (f : A \rightarrow B) &\mapsto (f(1), \dots, f(n)) \\ f(i) = a_i, \forall i \in A &\leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Se arată imediat că cele două corespondențe sunt inverse una alteia, deci ele stabilesc o corespondență bijectivă $\mathcal{F}(A, B) \rightarrow B^n$. Rezultă astfel că $|\mathcal{F}(A, B)| = m^n$.

■

Corolarul 3.5. Fie M o mulțime cu $n \geq 0$ elemente. Atunci numărul de submulțimi ale lui M este 2^n .

Demonstrație. Vom construi explicit o bijecție între $\mathcal{P}(M)$, mulțimea părților lui M , și $\mathcal{F}(M, \{0, 1\})$, mulțimea funcțiilor $f : M \rightarrow \{0, 1\}$.

Pentru o submulțime $A \subset M$, vom nota prin $\chi_A : M \rightarrow \{0, 1\}$ funcția dată prin:

$$\chi_A(a) = \begin{cases} 1, & a \in A. \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

numită **funcția caracteristică a lui A** .

Am obținut astfel o aplicație $\chi : A \in \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M, \{0, 1\}), A \mapsto \chi_A$. Invers, unei funcții $f : M \rightarrow \{0, 1\}$ îi asociem submulțimea $A = f^{-1}(1)$ a lui M și obținem o aplicație $\phi : \mathcal{F}(M, \{0, 1\}) \rightarrow \mathcal{P}(M)$.

Să demonstrăm că aceste două aplicații sunt inverse una alteia.

Considerăm mai întâi $A \in \mathcal{P}(M)$. Avem atunci

$$\phi \circ \chi(A) = \phi(\chi_A) = \chi^{-1}(1) = A.$$

(ultima egalitate rezultând din definiția lui χ_A). Cum A a fost ales arbitrar, am obținut $\phi \circ \chi = \text{id}_{\mathcal{P}(M)}$.

Invers, luăm $f \in \mathcal{F}(M, \{0, 1\})$ și notăm $A = \phi(f)$.

Cum $A = \phi(f) = f^{-1}(1)$, rezultă că pentru orice $a \in A$ avem $f(a) = 1$. Dacă $a \notin A$, $f(a)$ trebuie să fie diferit de 1. Dar f ia doar valorile 0 sau 1, deci $f(a) = 0$. Am obținut astfel că f ia valoarea constantă 1 pe A și 0 în rest, deci $f = \chi_A$. Așadar

$$\chi \circ \phi(f) = \chi(A) = \chi_A = f$$

ceea ce arată că $\chi \circ \phi = \text{id}_{\mathcal{F}(M, \{0, 1\})}$.

Deci ϕ și χ sunt inverse una alteia, de unde deducem că (folosind teorema anterioară)

$$|\mathcal{P}(M)| = |\mathcal{F}(M, \{0, 1\})| = 2^n$$

■

Demonstrația 2. Procedăm prin inducție după n . Pentru $n = 0$, $M = \emptyset$, deci $|\mathcal{P}(M)| = 1 = 2^0$.

Presupunem că rezultatul are loc pentru orice mulțime cu n elemente și îl demonstrăm pentru mulțimi cu $n + 1$ elemente. Fie astfel M o mulțime cu $|M| = n + 1$.

Considerăm a un element fixat al lui M și notăm $M' = M \setminus \{a\}$. Atunci M' are n elemente, iar ipoteza inductivă garantează că $|M'| = 2^n$.

Împărțim submulțimile A ale lui M în două clase: $a \in A$, sau $a \notin A$.

Dacă $a \notin A$, atunci A este de fapt o submulțime a lui M' . Obținem în acest 2^n submulțimi ale lui M .

Dacă $a \in A$, atunci $A \setminus \{a\}$ este o submulțime a lui M' , deci A se obține adăugând la o submulțime a lui M' elementul a (exterior lui M'). Deci numărul submulțimilor din această clasă va fi iarăși 2^n .

Cum cele două clase sunt disjuncte, M va avea $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ submulțimi. ■

4 Șiruri, aranjamente, combinări, multiseturi

În această secțiune studiem câteva tipuri de obiecte combinatoriale clasice. Mai precis, vrem să numărăm colecțiile de k elemente dintr-o mulțime finită, în care elementele sunt ordonate sau ordonate, permițând sau nu repetiții. Mai întâi, considerăm cazul neordonat.

Definiția 4.1. Fie A o mulțime finită cu n elemente și k un număr natural.

- (a) Prin k -șir cu elemente din A înțelegem un k -uplu $(a_1, \dots, a_k)$ cu $a_i \in A$ nu neapărat distincte.
- (b) Prin k -aranjament (sau k permutare) al lui A înțelegem un k -șir $(a_1, \dots, a_k)$ din A cu elementele a_i distincte două câte două.
- (c) Prin permutare a lui $[n]$ înțelegem un n -aranjament al lui A , adică un n -uplu format din toate elementele lui A , aranjate într-o anumită ordine.

Observația 4.2. Fie A o mulțime cu n elemente. Numărul de k -șiruri și de k -aranjamente depinde doar de cardinalul n al lui A și nu de mulțimea explicită A . De aceea, pentru a calcula aceste cantități putem presupune că $A = [n]$.

Exemplul 4.3. (a) 2-șirurile mulțimii $[3]$ sunt: $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)$.

(b) Aranjamentele de 2 elemente ale mulțimii $[4]$ sunt: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$.

Teorema 4.4. Fie $n, k \in \mathbb{N}$. Numărul de k -șiruri din $[n]$ este n^k .

Demonstrație. Un k -șir este prin definiție un element din produsul cartezian $[n]^k$. Astfel, numărul de k -șiruri este egal cu $|[n]^k| = n^k$. ■

Teorema 4.5. Fie $n, k \in \mathbb{N}$. Atunci, numărul de k -aranjamente din $[n]$ este

$$A_n^k := (n)_k := n(n-1) \dots (n-k+1).$$

În particular, dacă $n < k$, $A_n^k = 0$. De asemenea, numărul de permutări ale lui $[n]$ este $n!$.

Demonstrația 1. Un aranjament al lui $M = [n]$ de k elemente este un k -uplu ordonat $(a_1, \dots, a_k)$ de elemente distincte ale lui M .

Pentru a construi acest aranjament trebuie să alegem mai întâi o valoare pentru a_1 . Acest lucru se poate face în n moduri. O dată ales a_1 , al doilea element a_2 poate fi ales în $n-1$ moduri (din $[n]$, excludem valoarea aleasă pentru a_1). Astfel, a_1 și a_2 (în această ordine) pot fi alese în $n(n-1)$ moduri.

Pentru fiecare dintre aceste alegeri, a_3 va putea fi ales în $n-2$ moduri (din $[n]$ eliminăm valorile alese pentru a_1 și a_2). Continuând procedeul, ajungem la final că pentru fiecare dintre alegerile lui $a_1, \dots, a_{k-1}$ avem $n-k+1$ moduri de alegere ale lui a_k . Obținem astfel $n(n-1) \dots (n-k+1)$ moduri de a alege aranjamentul $(a_1, \dots, a_k)$. ■

Demonstrația 2. Aceasta este o variantă mai riguroasă a celei de mai sus. Vom demonstra rezultatul obținând mai întâi o relație de recurență pentru A_n^k . Fie $k \geq 1$.

Un aranjament de k elemente $a_1, \dots, a_k$ al lui $[n]$ se poate obține adăugând la aranjamentul $(a_1, \dots, a_{k-1})$ de $k-1$ elemente, ultimul elemente a_k . Deoarece a_k este diferit de ceilalți a_i , el poate lua $n-(k-1)$ valori. Invers, adăugând la orice aranjament $(a_1, \dots, a_{k-1})$ o valoare a_k din cele $n-(k-1)$ rămase, obținem un aranjament de k elemente.

Rezultă astfel că

$$A_n^k = A_n^{k-1} \cdot (n-k+1)$$

Iterând această relație găsim

$$A_n^k = A_n^{k-1} \cdot (n-k+1) = A_n^{k-2} \cdot (n-k+2)(n-k+1) = \dots = A_n^0 \cdot n(n-1) \dots (n-k+1)$$

Cum $A_n^0 = 1$ (aranjamentul vid), obținem formula cerută. ■

Considerăm acum cazul colecțiilor de elemente **neordonate**, fără repetiții.

Definiția 4.6. Fie A o mulțime finită cu n elemente și k un număr natural. Prin combinare de k elemente ale lui A înțelegem o submulțime $\{a_1, \dots, a_k\}$ de k elemente (distincte) ale lui A . Notăm prin $\binom{n}{k}$ numărul de combinații de k elemente ale lui A .

Observația 4.7. Numărul de k -combinări depinde doar de cardinalul n al lui A și nu de mulțimea explicită A . De aceea, pentru a calcula aceste cantități putem presupune că $A = [n]$.

Exemplul 4.8. Combinările de 2 elemente ale lui $[4]$ sunt:

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}.$$

Teorema 4.9. Fie $n, k \in \mathbb{N}$. Atunci: Numărul de combinări de k elemente ale lui $[n]$ este

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

În particular, dacă $n < k$, avem $\binom{n}{k} = 0$, iar pentru $n \geq k$, putem scrie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Demonstrație 1. Pentru a construi o submulțime $S = \{a_1, \dots, a_k\}$ de k elemente putem proceda astfel: alegem un element a_1 al lui $[n]$. O dată fixat a_1 , pentru a_2 rămân $n-1$ valori posibile. Repetând procedeul construim întreaga submulțime.

Însă prin acest procedeu, nu am construit doar o submulțime, ci am impus și o ordine a alegerii. Dacă alegem 1 și apoi 2 sau dacă alegem 2 și apoi 1, obținem aceeași submulțime $\{1, 2\}$, deși în procedeul nostru ele sunt numărate separat. Astfel numărăm aceleași submulțimi de mai multe ori. Pentru a obține rezultatul corect, trebuie să "eliminăm" ordinea din submulțimi. Cu alte cuvinte, vrem să identificăm aranjamentele care furnizează aceeași submulțime.

Un aranjament de k elemente poate fi construit și astfel: alegem o submulțime de k elemente ale lui $[n]$ și apoi alegem o permutare a acestor elemente. Pentru fiecare alegere a celor k elemente, avem $k!$ moduri de a le permuta. Rezultă astfel că numărul de combinări de k elemente va fi $k! \cdot A_n^k$, adică exact valoarea cerută.

Raționamentul anterior poate fi făcut mai precis astfel. Spunem că două aranjamente de k elemente sunt echivalente dacă ele au la bază aceeași combinație (adică se obțin una din alta printr-o permutare a celor k elemente). Fiecare clasă de echivalență va corespunde (bijectiv) unei combinații. În fiecare clasă de echivalență avem exact $k!$ aranjamente, corespunzând tuturor posibilităților de ordonare ale submulțimii suport. Așadar, numărul de combinări va fi de $k!$ ori numărul de aranjamente. ■

Demonstrație 2. Vom obține o relație de recurență pentru $\binom{n}{k}$ din care vom deduce formula cerută.

Putem presupune $n \geq k \geq 1$. Numărăm în două moduri perechile (A, x) cu $A \in \binom{[n]}{k}$ și $x \in A$.

Mai întâi alegem A (în $\binom{n}{k}$ moduri) și apoi elementul $x \in A$ (în k moduri), obținând astfel $k\binom{n}{k}$ perechi.

Pe de altă parte, putem alege mai întâi x (în n moduri). Submulțimile A care îl conțin pe x sunt de forma $\{x\} \cup B$ cu $B \subset [n]$ având $k-1$ elemente. Așadar avem $\binom{n-1}{k-1}$ de posibilități de alegere a lui A . Rezultă că numărul de perechi este egal cu $n\binom{n-1}{k-1}$.

Am obținut astfel recurența

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

de unde obținem

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \frac{n-1}{k-1} \binom{n-2}{k-2} = \cdots = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \binom{n-k}{0}$$

Cum $\binom{n-k}{0} = 1$ (există o singură submulțime cu 0 elemente și anume $\emptyset$), rezultă formula din concluzie. ■

Ultimul tip de obiecte considerat va fi cel al submulțimilor neordonate în care repetiția elementelor.

Definiția 4.10. (a) Prin multiset vom înțelege o mulțime, în care permitem ca elementele să se repete. Vom nota

$$S = \{\{a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, \dots, a_r^{m_r}\}\}$$

multisetul ce conține elementul a_1 de m_1 ori, elementul a_2 de m_2 ori, ..., elementul a_r de m_r ori.

Numărul de apariții m_i al lui a_i se numește multiplicitatea lui a_i în S . Prin definiție, cardinalul unui multiset este suma multiplicităților fiecărui element. În notația precedentă,

$$|S| = m_1 + m_2 + \dots + m_r.$$

(b) Fie M o mulțime cu n elemente. Prin (sub)multiset al lui M (sau combinare cu repetiții a lui M) înțelegem un multiset ale cărui elemente fac parte din M .

(c) Vom nota prin vom nota $\binom{n}{k}$ numărul de multiseturile cu k elemente ale lui $[n]$ (sau orice mulțime de n elemente.)

Observația 4.11. O definiție riguroasă a unui multiset este următoarea: prin multiset înțelegem o pereche (A, m) formată dintr-o mulțime finită $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ și o funcție $m : A \rightarrow \mathbb{N}^*$ ce asociază fiecărui element a_i al lui A un număr natural nenul m_i , numit multiplicitatea lui a_i .

Teorema 4.12. Fie $n, k \geq 0$. Atunci numărul de submultiseturi cu k elemente ale lui $[n]$ este

$$\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$$

Demonstrația 1. Orice multiset de k elemente ale lui $[n]$ se poate reprezenta în mod unic printr-un șir crescător fi văzut ca un șir crescător $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ de numere din $[n]$.

De exemplu, multisetul $\{\{5^3, 2^1, 1^2\}\}$ este reprezentat prin: $(1, 1, 2, 5, 5, 5)$. Astfel, este suficient să numărăm șirurile crescătoare de k elemente din $[n]$.

Unui astfel de șir $(a_1 \leq \dots \leq a_k)$ îi asociem șirul de k numere strict crescător din $[n+k-1]$

$$(1 \leq) a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < \dots < a_k + k - 1 (\leq n + k - 1)$$

Invers, unui șir strict crescător $s_1 < s_2 < \dots < s_k$ din $[n+k-1]$ îi putem asocia șirul crescător de elemente din $[n]$:

$$a_1 = s_1, a_2 = s_2 - 1, a_3 = s_3 - 2, \dots, a_k = s_k - k + 1$$

Cele două corespondențe sunt inverse una alteia, deci $\binom{n}{k}$ este egal cu numărul de șiruri strict crescătoare de k elemente din $[n+k-1]$. Dar acesta din urmă este egal cu numărul de submulțimi de k elemente din $[n+k-1]$. Deci $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$. ■

Demonstrația 2. Vedem $[n]$ ca o mulțime (ordonată) de n cutii.

Un k -multiset al lui $[n]$ poate fi văzut ca o distribuție de k obiecte identice în n cutii diferite. Mai precis, considerăm n cutii diferite, numerotate de la 1 la n și k obiecte identice.

Identificăm multisetul $\{a_1^{k_1}, \dots, a_r^{k_r}\}$ al lui n poate fi văzut ca o distribuție a obiectelor în cutii, punând în cutia a_j exact k_j dintre obiecte, pentru fiecare indice j . Putem reprezenta o astfel de împărțire astfel: scriem k stelute în linie și apoi plasăm $n-1$ bare pentru ale delimita în cutii.

De exemplu, multisetul $\{1^2, 2, 4^2\}$ din $[4]$ va arăta astfel:

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{**}_{\text{cutia 1}} & | & \underbrace{*}_{\text{cutia 2}} & | & \underbrace{\quad}_{\text{cutia 3}} & | & \underbrace{**}_{\text{cutia 4}} \end{array}$$

Cu alte cuvinte, avem $k+n-1$ "căsuțe" pe care le completăm cu 2 simboluri: k stelute și $n-1$ bare. Numărul de astfel de completări este $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$. ■

5 Coeficienți binomiali

Fie $n \in \mathbb{N}$. Numărul de combinări de k -elemente ale lui $[n]$ este $\binom{n}{k}$ și poartă numele de coeficient binomial. Această denumire se datorează faptului că astfel de numere apar în dezvoltarea binomului $(a+b)^n$:

Teorema 5.1. Fie R un inel comutativ și $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Demonstrație. Pentru $n = 0, 1$, formula se verifică imediat. Să presupunem $n \geq 2$. Avem:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ factori}}$$

Dezvoltarea acestui produs se face alegând câte un termen, a sau b , din fiecare paranteză înmulțindu-i și sumând după toate alegerile posibile.

Termenul generic al dezvoltării va avea forma $a^{n-k}b^k$ (unde $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ este numărul de alegeri ale lui b). Numărul de apariții ale acestui termen este egal cu numărul de moduri în care putem alege k de b și $n-k$ de a . Acest lucru se poate face în $\binom{n}{k}$ moduri: alegem k din cele n paranteze din care selectăm b , din restul vom lua automat a . Așadar coeficientul lui $a^{n-k}b^k$ din dezvoltarea produsului este $\binom{n}{k}$ și rezultă formula cerută. ■

În continuare prezentăm câteva proprietăți ale coeficienților binomiali:

Propoziția 5.2. Fie $n, k \in \mathbb{N}$ numere naturale. Atunci:

(a) Coeficienții binomiali sunt simetrici:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(b) Coeficienții binomiali satisfac relația de recurență

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, n \geq 1, k \leq 1$$

cu condiția inițială $\binom{0}{k} = \delta_{k,0}$.

(c) Are loc egalitatea

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Demonstrație. Primele două afirmații, (a) și (b), rezultă imediat din teorema 4.9, prin calcul direct.

Este instructiv însă să dăm și niște demonstrații combinatoriale, ilustrând o tehnică de numărare în două moduri ("double counting").

Pentru (a), considerăm aplicația $\phi : \binom{[n]}{k} \rightarrow \binom{[n]}{n-k}$ dată prin $A \subset [n] \mapsto [n] \setminus A$ (lui A îi asociem complementara). Se arată imediat că ϕ este o bijecție cu inversa $\psi : \binom{[n]}{n-k} \rightarrow \binom{[n]}{k}, B \mapsto [n] \setminus B$. Astfel cele două mulțimi de combinări $\binom{[n]}{k}$ și $\binom{[n]}{n-k}$ au același cardinal, adică are loc (a).

Pentru (b), observăm că o submulțime $A \in \binom{[n]}{k}$ este în exact una din categoriile:

- $n \in A$. Notăm mulțimea acestor submulțimi cu X .
- $n \notin A$. Notăm mulțimea acestor submulțimi cu Y .

Evident, avem $\binom{[n]}{k} = A \cup B$ și $A \cap B = \emptyset$.

Eliminând dintr-o submulțime din $A \in X$ elementul n , obținem o mulțime $A' \subset [n-1]$ ce va avea $k-1$ elemente. Invers, adăugând la o mulțime $A' \in \binom{[n-1]}{k-1}$ elementul n , găsim o mulțime $A \in X$. Așadar, am obținut o corespondență bijectivă:

$$\begin{aligned} X &\leftrightarrow \binom{[n-1]}{k-1} \\ A &\mapsto A \setminus \{n\} \\ A' \cup \{n\} &\leftrightarrow A' \end{aligned}$$

ceea ce arată că $|X| = \binom{n-1}{k-1}$.

Pe de altă parte, este clar că o submulțime a lui $[n]$ care nu îl conține pe n este de fapt o submulțime a lui $[n-1]$, deci $Y = \binom{n-1}{k}$. Am obținut astfel că:

$$\binom{n}{k} = \left| \binom{[n]}{k} \right| = |X| + |Y| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Pentru (c), observăm că membrul stâng numără submulțimile de $k = 0, 1, \dots, n$ elemente ale lui $[n]$, adică toate submulțimile lui k . Rezultatul va rezulta atunci din corolarul 3.5. ■

Putem reprezenta coeficienții binomiali sub forma unui triunghi, plasând pe linia n coeficienții binomiali $\binom{n}{k}, k = 0, \dots, n$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Acest triunghi se poate completa folosind formula (ii) din teorema precedentă astfel: pentru fiecare linie pozițiile extreme 0 și k sunt completate cu 1, iar poziția k de pe linia n este suma numerelor de deasupra:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} & \dots \\ \dots & & \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & & \dots \end{array}$$

De exemplu linia a șaptea a tabelului (coeficienții binomiali $\binom{6}{k}, k = 0, \dots, 6$) va fi completată cu:

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & \swarrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \end{array}$$

6 Coeficienți multinomiali

Definiția 6.1. O permutare a unui n -multiset $S = \{\{a_1^{k_1}, \dots, a_r^{k_r}\}\}$ este un k -uplu ordonat care conține toate elementele lui S , cu multiplicitățile aferente. Cu alte cuvinte, o permutare a lui S este o reordonare a șirului

$$\underbrace{(a_1, a_1, \dots, a_1)}_{k_1 \text{ ori}}, \underbrace{(a_2, a_2, \dots, a_2)}_{k_2 \text{ ori}}, \dots, \underbrace{(a_r, a_r, \dots, a_r)}_{k_r \text{ ori}}$$

Teorema 6.2. Fie $S = \{\{a_1^{k_1}, \dots, a_r^{k_r}\}\}$ un multiset cu $n := k_1 + \dots + k_r$ elemente. Numărul de permutări al lui S este:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$$

Demonstrație. Construcția unei permutări ale multisetului S se poate face astfel:

- Vedem permutarea ca un șir de $n = k_1 + \dots + k_r$ cutii goale care trebuie completate cu k_1 de valori de a_1 , k_2 de valori $a_2, \dots$, respectiv, k_r de valori a_r .
- Alegem k_1 dintre cutii în care să plasăm valoarea a_1 . Putem face aceasta în $\binom{n}{k_1}$ moduri.
- Pentru fiecare alegere de k_1 cutii în pasul anterior, rămân $n - k_1$ cutii din care trebuie să alegem k_2 cutii pe care să le completăm cu a_2 . Acest lucru îl putem realiza în $\binom{n-k_1}{k_2}$ moduri.
- După pasul $r - 1$ rămânem cu $n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{r-1})$ cutii din care trebuie completăm k_r cu a_r . Acest lucru îl putem realiza în $\binom{n-(k_1+\dots+k_{r-1})}{k_r}$ moduri.

Rezultă că numărul de n -aranjamente ale lui S este:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-(k_1+\dots+k_{r-1})}{k_r} &= \frac{n!}{k_1! \cdot (n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2! (n-k_2)!} \dots \frac{(n-(k_1+\dots+k_{r-1}))!}{k_r! (n-(k_1+\dots+k_{r-1}+k_r))!} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r! (n-(k_1+\dots+k_{r-1}+k_r))!} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} \end{aligned}$$

(ultima egalitate rezultă din $n - (k_1 + \dots + k_r) = 0$). ■

Numerele $\binom{n}{k_1, \dots, k_r}$ se numesc coeficienți multinomiali. Această denumire se datorează următorului rezultat:

Teorema 6.3. Considerăm $R = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ inelul de polinoame în nedeterminatele $X_1, \dots, X_n$ cu coeficienți în $\mathbb{C}$.

(a) Numărul de monoame din R de grad total d este $\binom{d}{n} = \binom{n+d-1}{n}$.

(b) Are loc

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^d = \sum_{d_1 + \dots + d_n = d} \binom{d}{d_1, d_2, \dots, d_n} X_1^{d_1} \dots X_n^{d_n}$$

suma având $\binom{d}{n}$ termeni.

Demonstrație. Un monom în variabilele $X_1, \dots, X_n$ este o expresie de forma $M = X_1^{d_1} \dots X_n^{d_n}$ (unde $d_i \geq 0$). Numărul d_i se numește gradul lui X_i în monomul M , iar gradul total al lui M este suma gradelor (parțiale ale) tuturor variabilelor: $d = d_1 + \dots + d_n$.

Un monom $M = X_1^{d_1} \dots X_n^{d_n}$, de grad total d poate fi văzut ca un multiset cu d elemente ale mulțimii $\{X_1, \dots, X_n\}$ ce conține d_1 copii ale lui X_1 , d_2 copii ale lui $X_2, \dots$, d_n copii ale lui X_n .

Rezultă că numărul de monoame de grad total d este egal cu numărul de d -multiseturi ale lui $\{X_1, \dots, X_n\}$. Acest număr este $\binom{d}{n} = \binom{n+d-1}{n}$, de unde găsim (a).

Pentru (b), avem:

$$(X_1 + \dots + X_n)^d = \underbrace{(X_1 + \dots + X_n)(X_1 + \dots + X_n) \dots (X_1 + \dots + X_n)}_{d \text{ factori}}$$

Produsul se dezvoltă alegând câte unul dintre X_i din fiecare din cele d paranteze, înmulțindu-i și adunând după toate alegerile posibile.

Termenul generic al dezvoltării are forma $X_1^{d_1} \dots X_n^{d_n}$ unde $d_1, \dots, d_n \geq 0$ și $\sum_{i=1}^n d_i = d$, el apărând alegând din cele paranteze d_1 de X_1 , d_2 de $X_2, \dots$, d_n de X_n .

Cu alte cuvinte, putem vedea un astfel de monom ca o permutare a multisetului $\{X_1^{d_1}, \dots, X_n^{d_n}\}$. Rezultă că numărul de apariții ale acestui monom în dezvoltare este egal cu numărul de permutări ale acestui multiset, adică exact coeficientul multinomial $\binom{d}{d_1, d_2, \dots, d_n}$. Formula cerută rezultă imediat. ■

Propoziția 6.4. Fie $n, m_1, \dots, m_r$ numere naturale nenule astfel încât $m_1 + \dots + m_r = n$. Atunci are loc relația de recurență:

$$\binom{n}{m_1, \dots, m_r} = \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \dots, m_r} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \dots, m_r} + \dots + \binom{n-1}{m_1, m_2, \dots, m_r-1}$$

Demonstrație. Relația poate fi justificată prin calcul direct, folosind formula coeficienților multinomiali. Putem da însă și o demonstrație combinatorială.

Considerăm un multiset $S = \{a_1^{m_1}, \dots, a_r^{m_r}\}$ cu n elemente. O permutare a lui S poate fi obținută astfel: alegem primul element a_i al permutării. Restul de $n-1$ sunt de fapt o permutare a multisetului $S = \{a_1^{m_1}, \dots, a_i^{m_i-1}, \dots, a_r^{m_r}\}$. Așadar, folosind propoziția anterioară, numărul de permutări ale lui S care încep cu a_i este

$$\binom{n-1}{m_1, m_2, \dots, m_i-1, \dots, m_r}.$$

Sumând după toate alegerile primului element obținem că suma acestor coeficienți multinomiali este numărul total de permutări ale lui S , care este membrul stâng al egalității cerute, conform tot propoziției anterioare. ■

7 Principiul includerii și al excluderii

Teorema 7.1. Fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ mulțimi finite. Atunci:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

Demonstrație. Membrul drept al relației este o suma alternantă de termeni, termenul generic fiind suma tuturor cardinalilor intersecțiilor de câte k dintre cele n mulțimi. Astfel, putem rescrie formula cerută astfel:

$$|\bigcup_{i \in [n]} A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Considerăm o mulțime finită U care să conțină toate mulțimile A_i (de exemplu, reuniunea tuturor A_i).

Amintim (vezi corolarul 3.5) că unei submulțimi $B \subseteq U$ îi putem asocia în mod unic o funcție $U \rightarrow \{0, 1\}$ și anume funcția caracteristică $\chi_B : U \rightarrow \{0, 1\}$ dată prin:

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

Prin calcul direct se verifică:

$$\begin{aligned} \chi_{B \cap B'} &= \chi_B \chi_{B'} \\ \chi_{U \setminus B} &= 1 - \chi_B \end{aligned}$$

Avem atunci:

$$\chi_{U \setminus \bigcup_{i \in [n]} A_i} = 1 - \chi_{\bigcup_{i \in [n]} A_i}.$$

Pe de altă parte:

$$\begin{aligned}
\chi_{U \setminus \bigcup_{i \in [n]} A_i} &= \chi_{\bigcap_{i \in [n]} (U \setminus A_i)} \\
&= \prod_{i \in [n]} \chi_{U \setminus A_i} \\
&= \prod_{i \in [n]} (1 - \chi_{A_i})
\end{aligned}$$

Dezvoltarea produsului din urmă se face alegând câte un termen din fiecare paranteză, înmulțindu-i și apoi sumând după toate posibilitățile de alegere. Alegerea unui termen din fiecare paranteză înseamnă de fapt k factori de forma $-\chi_{A_i}$ și $n - k$ factori de 1, unde $k \in \{0, \dots, n\}$.

Deci termenul generic al dezvoltării produsului este

$$1^{n-k} \cdot \prod_{i \in I} (-\chi_{A_i}) = (-1)^k \prod_{i \in I} \chi_{A_i} = (-1)^k \chi_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

unde I parcurge submulțimile lui $[n]$ de k elemente, iar k parcurge $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Rezultă astfel că

$$\prod_{i \in [n]} (1 - \chi_{A_i}) = \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} (-1)^k \chi_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

Observăm că pentru $k = 0$ termenul din sumă este 1 (el corespunde alegerii lui 1 din fiecare paranteză a produsului, fără niciunul dintre A_i). Obținem astfel:

$$\begin{aligned}
1 - \chi_{\bigcup_{i \in [n]} A_i} &= \chi_{U \setminus \bigcup_{i \in [n]} A_i} = \prod_{i \in [n]} (1 - \chi_{A_i}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} (-1)^k \chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \chi_{\bigcap_{i \in I} A_i}
\end{aligned}$$

deci, pentru orice $x \in U$, are loc

$$\chi_{\bigcup_{i \in [n]} A_i}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} \chi_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x)$$

Pentru orice $B \subseteq U$, avem $|B| = \sum_{x \in U} \chi_B(x)$. Sumând egalitatea de mai sus pentru toți $x \in U$, obținem egalitatea de cardinali căutată. ■

Pentru $k = 2$, respectiv $k = 3$, principiul includerii și al excluderii are forma

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C|
\end{aligned}$$

Exemplul 7.2. Care este probabilitatea ca, permutând literele cuvântului `copyrightable`, să apară cuvintele `copy`, `right` sau `able`?

Cuvântul are 13 litere distincte. Numărul total de permutări va fi $13! = 6227020800$.

Notăm prin A_1, A_2 , respectiv A_3 mulțimea permutărilor cuvântului dat care conțin cuvintele `copy`, `right`, respectiv `able`. Trebuie să determinăm cardinalul $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

Pentru a determina A_1 , vedem `copy` ca un singur simbol, deci $|A_1|$ este egal cu numărul de permutări ale 10 obiecte (9 litere plus un bloc) adică $10!$.

Un element al lui $A_1 \cap A_2$ poate fi văzut ca o permutare de 6 obiecte (2 blocuri `copy` și `right` și 4 litere), deci $|A_1 \cap A_2| = 6!$. Procedând analog obținem:

$$\begin{aligned} |A_1| &= 10! & |A_2| &= 9! & |A_3| &= 10! \\ |A_1 \cap A_2| &= 6! & |A_2 \cap A_3| &= 6! & |A_3 \cap A_1| &= 7! \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| &= 3! \end{aligned}$$

de unde găsim:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 10! + 9! + 10! - 6! - 6! - 7! + 3! \end{aligned}$$

Probabilitatea căutată va fi:

$$\frac{|A_1 \cup A_2 \cup A_3|}{13!} = 7609686/6227020800 = 0.0012... \approx 0.1\%$$

Corolarul 7.3. Fie $A_1, \dots, A_n$ submulțimi ale unei mulțimi finite S . Atunci

$$|A_1^c \cap \dots \cap A_n^c| = |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

Demonstrație. Formula rezultă imediat din teorema precedentă dar vom prezenta o demonstrație (ușor) diferită de precedentă.

Membrul stâng al relației indexează elementele lui S , care **nu** aparțin niciuneia dintre A_i . Pe de altă parte, suma din dreapta este o sumă alternantă care numără aparițiile elementelor din S în intersecțiile diverse ale A_i .

În membrul stâng, contribuția unui element din S va fi 0 dacă se află într-unul dintre A_i , respectiv 1 dacă nu se află în nici unul dintre A_i va fi 1. Trebuie să arătăm că acest lucru este valabil și pentru membrul drept.

Dacă un $x \in S$ nu se află în nici unul dintre A_i , contribuția în membrul drept va fi:

$$1 - 0 + 0 - 0 + \dots + (-1)^{n+1} 0 = 1$$

Să presupunem că x se află în măcar unul dintre A_i . Mai precis, vom presupune că x se află în exact $k \leq n$ dintre mulțimile A_i și nu se află în celelalte $n - k$ dintre mulțimi. Pentru simplitatea notației, putem presupune că x se află în $A_1, \dots, A_k$ și nu se află în $A_{k+1}, \dots, A_n$.

În S , elementul x este numărat o dată. În $\sum_{i=1}^n |A_i|$, el va fi numărat de k ori: câte o dată pentru $i = 1, \dots, k$ și de 0 ori pentru $i > k$.

În suma $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j|$, x este numărat de fiecare dată când se află în ambele mulțimi i și j , adică pentru i și j numere de la 1 la k . Deci numărul de apariții este numărul de moduri în care alegem două numere de la 1 la k , adică $\binom{k}{2}$.

Similar, în suma $\sum_{i_1 < i_2 < i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$, numărul de apariții ale lui x va fi egal cu numărul de intersecții de câte 3 ale mulțimilor $A_1, \dots, A_k$. Acestea este numărul de alegeri ale 3 elemente din $1, \dots, k$, adică $\binom{k}{3}$.

Continuând procedeul, obținem contribuția totală a lui x în membrul drept:

$$1 - k + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} + (-1)^k \binom{k}{k} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} = 0$$

■

8 Partiții ale unei mulțimi

Definiția 8.1. Fie M o mulțime finită cu n elemente. Prin partiție a lui M înțelegem o familie (neordonată) $\rho = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ de submulțimi ale lui M astfel încât :

- (a) $B_1, \dots, B_k$ sunt nevide.
- (b) $B_1, \dots, B_k$ sunt disjuncte două câte două.
- (c) $M = B_1 \cup B_2 \dots B_k$

Submulțimile $B_1, B_2, \dots, B_k$ se numesc blocurile partiției și vom nota $\rho = B_1/B_2/\dots/B_k$. De asemenea, vom folosi următoarele notații:

- $S(M, k)$ va fi mulțimea partițiilor lui M cu exact k blocuri.
- $\{n\}_k = S(n, k)$ este numărul de partiții ale lui M în k blocuri, numit număr Stirling de speța a o doua.
- $B(M)$ este mulțimea tuturor partițiilor lui M .
- Al n -lea număr Bell este prin definiție $B(n) = |B(M)|$, numărul de partiții ale mulțimii M . Cu alte cuvinte, $B(n)$ este dat de

$$B(n) = \sum_{k=0}^n \{n\}_k$$

Observația 8.2. Cardinalul $\{n\}_k$ al mulțimii $S(M, k)$ depinde doar de $n = |M|$ și nu de mulțimea particulară M . Pentru a studia aceste numere putem presupune $M = [n]$.

Exemplul 8.3. Considerăm cazul $n = 4$.

- $S([4], 4)$ conține doar o partiție și anume $1/2/3/4$, deci $\{4\}_1$.
- $S([4], 3)$ este formată din 6 partiții: $12/3/4, 13/2/4, 14/2/3, 23/1/4, 24/1/3, 34/1/2$, deci $\{4\}_2 = 6$.
- $S([4], 2)$ este formată din 7 partiții: $1/234, 2/134, 3/124, 4/123, 12/34, 13/24, 14/23$, deci $\{4\}_2 = 7$.
- $S([4], 1)$ conține doar o partiție și anume 1234 , de $\{4\}_4 = 1$.

Rezultă astfel că numărul total de partiții ale lui $[4]$ este $B(4) = 15$.

Deși nu avem o formulă generală simplă câteva cazuri pot fi calculate ușor:

Propoziția 8.4. Fie $n \geq 1$. Au loc:

- (a) $\{n\}_k = 0$, pentru orice $k > n$.
- (b) $\{n\}_n = \{n\}_1 = 1$.
- (c) $\{n\}_k = \binom{n}{k}$.
- (d) $\{n\}_2 = 2^{n-1} - 1$.

Demonstrație. (a) Cum blocurile unei partiții $\rho = B_1/\dots/B_k$ au fiecare cel puțin un element (pentru că sunt nevide), rezultă că nu există nicio partiție a lui $[n]$ care să aibă mai mult strict de n blocuri.

(b) Există o singură partiție a lui $[n]$ în n blocuri și anume $1/2/\dots/n$. Similar, există o doar partiție a lui $[n]$ într-un bloc și anume partiția formată din $[n]$ însuși.

(c) Fiindcă blocurile unei partiții au toate cel puțin un element, o partiție a lui $[n]$ în $n-1$ blocuri este formată dintr-o submulțime de două elemente și $n-2$ submulțimi de un element. De aceea, o partiție va fi unic determinată de acea submulțime de două elemente (celelalte blocuri fiind automat fixate după). Deci, $S(n, n-1)$ va fi egal cu numărul de submulțimi de două elemente ale lui $[n]$, adică $\binom{n}{2}$.

(d) O partiție în două mulțimi a lui $[n]$ este o pereche neordonată de mulțimi nevide $\{A, B\}$ astfel încât $A \cup B = [n]$ și $A \cap B = \emptyset$. Rezultă că B este complementara lui A față de $[n]$, deci alegerea lui A îl fixează și pe B .

Mulțimea A poate fi aleasă în $2^n - 2$ moduri (din $\mathcal{P}([n])$, eliminăm $\emptyset$ și $[n]$, pentru că blocurile partițiilor sunt nevide).

Trebuie însă să ținem cont că partițiile sunt neordonate, adică partiția $A/([n] \setminus A)$ este aceeași cu $([n] \setminus A)/A$. De aceea, numărul de partiții va fi

$$\frac{1}{2} (2^n - 2) = 2^{n-1} - 1.$$

■

Teorema 8.5. Numerele Stirling de speța a doua satisfac relația de recurență

$$\{n\}_k = \{n-1\}_{k-1} + k \{n-1\}_k$$

cu condiția inițială

$$\{0\}_k = \delta_{k,0} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

Demonstrație. Condiția inițială rezultă din faptul că singura partiție a lui $[n] = \emptyset$ este partiția vidă.

Pentru recurență, observăm că o partiție a lui $[n]$ în k blocuri se poate obține astfel. Partiționăm mai întâi $[n-1]$ și apoi adăugăm n . Avem două posibilități.

În primul caz, adăugăm n ca un bloc separat. Pentru a avem k blocuri la final, partiția lui $[n-1]$, ar trebui să aibă $k-1$ blocuri. Obținem astfel o bijecție între $S([n-1], k-1)$ și mulțimea partițiilor lui $[n]$ cu k blocuri ce are unul dintre blocuri egal cu $\{n\}$. Numărul acestor partiții va fi $S(n-1, k-1)$.

În al doilea caz, adăugăm n într-unul dintre blocurile existente. Astfel, $[n-1]$ este partiționat în k blocuri și n se adaugă într-unul din cele k blocuri, furnizând astfel k partiții distincte. Numărul acestor partiții va fi $kS(n-1, k-1)$.

Suma acestor două numere va fi numărul total de partiții ale lui $[n]$ în k blocuri, adică $S(n, k)$. ■

Exemplul 8.6. Avem

$$\{5\}_3 = \{4\}_2 + 3 \cdot \{4\}_3 = 2^3 - 1 + 3 \binom{4}{2} = 25$$

Următoarea funcție Python permite calculul numerelor Stirling (este aceasta eficientă?) și poate fi folosit pentru generarea tabelului de mai jos:

```

1 def stirling2(n,k):
2     if(n==0):
3         return (1 if k==0 else 0)
4     return stirling2(n-1,k-1) + k*stirling2(n-1,k)

```

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Table 1: Numere Stirling

Teorema 8.7. Numerele Bell $B(n)$ relația de recurență

$$B(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B(n-k)$$

cu condiția inițială $B(0) = 1$.

Demonstrație. Mulțimea $[0] = \emptyset$ admite doar partiția vidă, deci $B(0) = 1$.

Fie $\rho \in B([n])$. Notăm prin k numărul de elemente din blocul B al lui ρ care conține n . Atunci ρ este formată din acest bloc B - ce se poate alege în $\binom{n-1}{k-1}$ moduri - și o partiție a mulțimii $[n] \setminus B$, de $n-k$ elemente.

Astfel, ρ se poate construi în $B(n-k) \binom{n-1}{k-1}$ moduri. Cum k poate lua orice valoare de la 0 la n , rezultă că numărul total de partiții ale lui $[n]$ este

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} B(n-k)$$

■

Exemplul 8.8. Partițiile lui $[3]$ sunt $(123), (12/3), (13/2), (23/1), (1/2/3/4)$, deci $B(3) = 5$. Folosind recurența de mai sus, obținem

$$\begin{aligned}
 B(4) &= \binom{3}{0} B(3) + \binom{3}{1} B(2) + \binom{3}{2} B(1) + \binom{3}{3} B(0) \\
 &= 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\
 &= 15
 \end{aligned}$$

Recuperăm astfel calculul

9 Partiții ale unui număr natural

Definiția 9.1. Prin partiție a numărului natural n înțelegem un multiset λ de numere naturale nenule astfel încât suma elementelor lui λ (cu multiplicități) este n . Numărul de elemente din λ (cu multiplicități) se numește lungimea partiției λ . Vom nota:

- $P(n)$ va fi mulțimea partițiilor lui n , iar $p(n) = |P(n)|$ va fi numărul partițiilor lui n .
- $P(n, k)$ va fi mulțimea partițiilor de lungime k , iar $p_k(n)$ numărul lor. Evident are loc:

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p_k(n).$$

O partiție λ a lui n este, prin definiție un multiset (neordonat). Pentru studiul acestor obiecte se dovedește utilă o altă notație față de cea folosită anterior. Putem enumera elementele lui λ în ordine monoton descrescătoare, iar această ordine este unic determinată. Astfel, vom putea vedea orice partiție ca fiind un *șir* $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de numere naturale nenule astfel încât

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n \text{ și } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$$

De exemplu, partiția $\lambda = \{\{1^3, 2^2, 3^1\}\}$ a lui $n = 10$ va fi scrisă sub forma $\lambda = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$.

Exemplul 9.2. Enumerăm partițiile lui $n = 5$:

- lungime 1 : (5) , deci $p(5, 1) = 1$
- lungime 2 : $(4, 1), (3, 2)$, deci $p(5, 2) = 2$;
- lungime 3 : $(3, 1, 1), (2, 2, 1)$, deci $p(5, 3) = 2$;
- lungime 4 : $(2, 1, 1, 1)$, deci $p(5, 4) = 1$;
- lungime 5 : $(1, 1, 1, 1, 1)$, deci $p(5, 5) = 1$.

Așadar $p(5) = 7$.

Pentru numărul total de partiții $p(n)$ nu există formule generale de calcul, dar, fixând lungimea, putem obține o relație de recurență, precum și niște formule explicite în cazul unor lungimi particulare.

Propoziția 9.3. Fie $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$. Atunci:

- (a) $p_1(n) = p_n(n) = 1$.
- (b) $p_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.
- (c) $p_{n-1}(n) = 1$.
- (d) $p_{n-2}(n) = 2$.

Demonstrație. (a) Singura partiție a lui n de lungime 1 este (n) .

Considerăm $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ o partiție de lungime n . Cum $\lambda_i \geq 1$, rezultă că

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \geq \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ ori}} = n$$

deci fiecare λ_i trebuie să fie egal cu 1, adică $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ este unica partiție de lungime n a lui n . Deci $p_n(n) = 1$.

(b) O partiție de lungime 2 a lui n are forma $\lambda = (a, b)$ cu $a + b = n$ și $a \geq b \geq 1$. Rezultă că $a = n - b$ este unic determinat de b . Deoarece $a \geq b$, avem $1 \leq b \leq \frac{n}{2}$, deci b ia valori de la 1 la $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Așadar, $p_2(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

(c) Considerăm $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ o partiție de lungime $n - 1$. Dacă două dintre numerele λ_i ar fi mai mari sau egale cu 2, am avea:

$$n = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} \geq 2 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-3 \text{ ori}} = 4 + (n - 3) = n + 1$$

ceea ce este imposibil. Deci, cel mult unul dintre λ_i este mai mare sau egal cu 2.

Cu un raționament similar se arată că exact unul dintre λ_i trebuie să fie egal cu 2, ceea ce forțează ca toți ceilalți λ_i să fie egali cu 1. Deci avem o singură partiție de lungime $n - 2$ și anume $\lambda = (2, 1, \dots, 1)$.

(d) Considerăm $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2})$ o partiție de lungime $n - 2$ a lui n . Să presupunem că $\lambda_3 \geq 2$. Atunci:

$$n = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-2} \geq 2 + 2 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-5 \text{ ori}} = 6 + (n - 5) = n + 1$$

ceea ce este imposibil. Deci $\lambda_3 = 1$ și astfel $\lambda_i = 1$ pentru orice $i > 3$.

Rezultă că $\lambda_1 + \lambda_2 = 4$, deci $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ sau $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$. Am obținut astfel că partițiile lui n în $n - 2$ părți sunt $(2, 2, 1, 1, \dots, 1)$ și $(3, 1, 1, \dots, 1)$. ■

Teorema 9.4. Numerele $p_k(n)$ satisfac relația de recurență

$$p_k(n) = p_{k-1}(n - 1) + p_k(n - k)$$

cu condiția inițială $p_k(n) = 0$ pentru $k > n$.

Demonstrație. O partiție $\lambda \in P(n, k)$ are forma $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ astfel încât $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$ și $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$.

Avem atunci două posibilități: $\lambda_k = 1$ au $\lambda_k \geq 2$. Notăm prin A și B mulțimea partițiilor de primul tip, respectiv al doilea.

Fie $\lambda \in A$. Ștergând λ_k din această partiție, obținem o partiție $\lambda' = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})$ a lui $n - 1$. Invers, la o partiție a lui $n - 1$ de lungime $k - 1$, adăugând 1 la final (care este nenul și mai mic sau egal decât toate celelalte părți) găsim o partiție din A . Astfel, am obținut o corespondență bijectivă între A și $P(n - 1, k - 1)$, deci $|A| = p_{k-1}(n - 1)$.

Fie $\lambda \in B$. Scăzând 1 din fiecare dintre cele k părți ale sale, găsim o partiție în k părți a lui $n - k$. Invers, luând o partiție a lui $n - k$ în k părți și adunând 1 la fiecare parte, obținem o partiție din B . Avem astfel o corespondență bijectivă între B și $P(n - k, k)$, deci $|B| = p_k(n - k)$.

Cum $P(n, k) = A \cup B$, rezultă concluzia. ■

Exemplul 9.5. Putem folosi relația de recurență pentru a recalcula $p_2(n)$:

$$p_2(n) = p_1(n - 1) + p_2(n - 2) = p_2(n - 2) + 1$$

deci

$$p_2(n) = p_2(n - 2) + 1 = p_2(n - 4) + 2 = \dots = p_2(n - 2k) + k = \dots = p_2(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Exemplul 9.6. Numărul de partiții ale lui 10 de lungime 5 este:

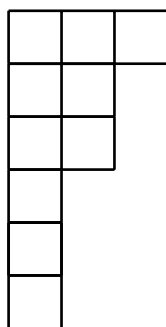
$$\begin{aligned}
 p_5(10) &= p_4(9) + p_5(5) \\
 &= p_3(8) + p_4(5) + p_5(5) \\
 &= p_2(7) + p_3(5) + p_4(5) + p_5(5) \\
 &= \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor + 2 + 1 + 1 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

Partițiile sunt:

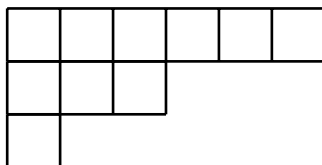
$(6, 1, 1, 1, 1)$
 $(5, 2, 1, 1, 1)$
 $(4, 3, 1, 1, 1), (4, 2, 2, 1, 1)$
 $(3, 3, 2, 1, 1), (3, 2, 2, 2, 1)$
 $(2, 2, 2, 2, 2)$

O partiție $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ (un k -uplu de numere în ordine descrescătoare) poate fi reprezentată sub forma unui tabel, numit diagramă Young. Aceasta este un tablou bidimensional de pătrate astfel încât pe rândul i se află λ_i cutii.

De exemplu, partiția $\lambda = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$ va avea diagrama:



Unei partiții λ a lui n îi putem transpusa (sau conjugata) sa, notată λ^t , ce are diagrama Young obținută prin transpunere. Pentru exemplul $\lambda = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$ transpusa va fi $\lambda^t = (6, 3, 1)$:



Este clar că λ_t este tot o partiție a lui n (numărul total de cutii nu se schimbă prin transpunere)

Propoziția 9.7. Fie $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ o partiție a lui n . Atunci $\lambda^t = (\lambda_1^t, \dots, \lambda_2^t)$ este dată de:

$$\lambda_j^t = \text{card}\{i \mid \lambda_i \geq j\}$$

Demonstrație. Prin construcție, λ_j^t este lungimea coloanei j din diagrama lui λ . Coloana j conține o cutie în rândul i dacă și numai dacă $\lambda_i \geq j$. Deci lungimea coloanei j este egală cu numărul de indici i cu $\lambda_i \geq j$. ■

Teorema 9.8. Fie $1 \leq k \leq n$ numere naturale. Atunci numărul de partiții ale lui n de lungime k , adică $p_k(n)$ este egal cu numărul de partiții cu cea mai mare parte egală cu k .

Demonstrație. Transpusa unei partiții de lungime k este o partiție cu partea cea mai mare egală cu k . Cum transpunerea $\lambda \mapsto \lambda^t$ este o aplicație bijectivă, rezultă concluzia. ■

Exemplul 9.9. Rezultatul anterior spune că $p_5(10)$ este numărul de partiții ale lui 10 care au cea mai mare parte egală cu 5. O astfel de partiție are forma

$$(5, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k)$$

unde $5 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.

Observăm că $(\lambda_2, \dots, \lambda_k)$ este de fapt o partiție a lui $10 - 5 = 5$. Avem:

$$p(5) = p_1(5) + p_2(5) + p_3(5) + p_4(5) + p_5(5) = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$$

deci $p_5(10) = 7$.

10 Configurații combinatoriale clasice

Multe probleme de numărare pot fi interpretate ca probleme de distribuire a unui set de bile într-o serie de urne, eventual cu o serie de restricții (de exemplu, fără să avem urne goale). Scopul acestei secțiuni este de a prezenta sistematic câteva astfel de probleme, folosind conceptele definite în secțiunile precedente.

Mai precis, vom considera un set B de n bile și o colecție U de k urne. Vrem să determinăm în câte moduri putem distribui bilele din B în urnele din U , cu următoarele restricții:

- bilele sunt distincte sau identice.
- urnele sunt distincte sau identice.
- în fiecare urnă putem cel puțin o bilă, sau cel mult o bilă sau nu impunem nicio restricție.

Obținem astfel 12 probleme de numărare, reprezentate sub forma unui tabel. În literatura engleză această sistematizare poartă numele de *the twelvefold way*.

Pentru a simplifica expunerea vom prescurta prin DD, DI, ID, II distribuțiile de bile distincte/identice în urne distincte/identice (D pentru distinct, I pentru identic). Astfel tabelul pe care vrem să îl completăm are forma:

	DD	ID	DI	II
oricâte bile în urne	?	?	?	?
cel puțin o bilă în urne	?	?	?	?
cel mult o bilă în urne	?	?	?	?

Vom completa tabelul pe coloane (adică după tipul de bile și urne). Deși, intuitiv, este clar ce înseamnă distribuții de bile în urne, va fi instructiv să dăm și o definiție matematică riguroasă pentru aceste concepte.

10.1 Bile distincte, urne distincte

Dacă bilele și urnele sunt diferite, B și U sunt mulțimi propriu-zise. Numerotând bilele și urnele, putem presupune că $B = [n]$ și $U = [k]$.

Număr arbitrar de bile în fiecare urnă

O distribuție DD se obține alegând, pentru fiecare bilă $1, 2, \dots, n$, o urnă în care să fie plasată (de la 1 la k). Astfel, o distribuție poate fi văzută ca un n -uplu $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in [k]^n$. Obținem astfel că numărul de distribuții este egal cu cardinalul produsului cartezian $[k]^n$, adică:

Teorema 10.1. Numărul de moduri în care putem plasa n bile distincte în k urne distincte este k^n .

Cel mult o bilă în fiecare urnă

În această situație, vrem ca în fiecare urnă din U să plasăm cel mult o bilă din B . Similar cu cazul precedent, o distribuție DD se identifică cu un n -uplu $(u_1, \dots, u_n)$ de numere din $[k]^n$ care sunt distincte două câte două (nicio urnă nu se repetă). Dar un astfel de n -uplu este de fapt un aranjament de n elemente al lui k . Rezultă că:

Teorema 10.2. Numărul de moduri în care putem distribui k bile distincte în n urne distincte astfel încât în fiecare urnă să avem cel mult o bilă este:

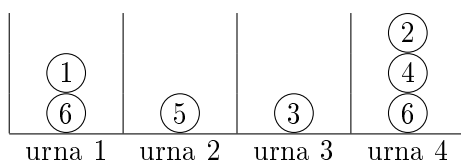
$$A_k^n := k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1)$$

În particular, nu există distribuții dacă $k < n$.

Cel puțin o bilă în fiecare urnă

O distribuție DD în acest caz poate fi văzută ca o familie **ordonată** de mulțimi $(B_1, \dots, B_k)$, unde B_j este mulțimea bilelor plasate în urna j .

De exemplu, distribuția de 7 bile în 4 urne următoare



corespunde 4-uplului de mulțimi

$$(B_1 = \{1, 6\}, B_2 = \{5\}, B_3 = \{3\}, B_4 = \{2, 4, 6\})$$

Deoarece o bilă nu poate fi plasată în două urne simultan și fiecare urnă conține cel puțin o bilă, mulțimile U_i sunt nevide și disjuncte și reuniunea lor este $[n]$, mulțimea întreagă de bile. Cu alte cuvinte, $(B_1, \dots, B_k)$ este o partiție **ordonată** a lui $[n]$ cu k blocuri.

O partiție ordonată a lui $[n]$ se obține dintr-o partiție neordonată, alegând o ordine a blocurilor. Rezultă astfel că

$$\left(\begin{array}{c} \text{număr partiții ordonate} \\ \text{cu } k \text{ blocuri} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{număr partiții neordonate} \\ \text{cu } k \text{ blocuri} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \text{număr de ordonări} \\ \text{ale blocurilor} \end{array} \right)$$

Dar numărul de partiții neordonate este (prin definiție) $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, iar numărul de ordonări este $k!$. Am obținut astfel că

Teorema 10.3. Numărul de distribuții de n bile distincte în k urne distincte astfel încât în fiecare urnă să avem cel puțin o bilă este $k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

Încheiem această secțiune cu următoarea observație:

- O distribuție a bilelor din B în urnele din U poate fi identificată cu o funcție $f : [n] \rightarrow [k]$ dată prin

$$f(j) = \text{urna în care este plasată bila } j$$

și, invers, orice funcție $f : [n] \rightarrow [k]$ dă naștere la o distribuție după regula: bila j este plasată în urna $f(j)$.

- Plasarea în fiecare urnă a cel mult o bilă va însemna că funcția corespunzătoare ia fiecare valoare din codomeniu cel mult o dată, ceea ce revine la a cere ca funcția să fie injectivă.
- Similar, plasarea în fiecare urnă a cel puțin o bilă corespunde unei funcții surjective $f : [n] \rightarrow [k]$. Astfel, problema noastră este echivalentă cu determinarea numărului de funcții, numărul de injectii, respectiv numărul de surjecții $B \rightarrow U$.

Din rezultatele anterioare obținem:

Teorema 10.4. Fie $n, k \in \mathbb{N}$. Atunci:

(a) Numărul de funcții $[n] \rightarrow [k]$ este k^n .

(b) Numărul de funcții injective $[n] \rightarrow [k]$ este

$$A_k^n = k(k-1) \dots (k-n+1)$$

În particular, nu există injectii $[n] \rightarrow [k]$, dacă $n > k$.

(c) Numărul de funcții surjective $[n] \rightarrow [k]$ este

$$k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

În particular, nu există surjecții $[n] \rightarrow [k]$, dacă $n < k$.

(d) Există bijectii $[n] \rightarrow [k]$ dacă și numai dacă $n = k$. În acest caz, numărul de bijectii este $n!$.

10.2 Bile identice, urne distincte

În această situație, urnele formează o mulțime propriu-zisă și, numerotându-le, putem presupune că $U = [k]$. Pe de altă parte, bilele identice formează un multiset de forma $\{\{b^n\}\}$ (un element cu multiplicitate n). De aceea, nu vom mai putea vedea o distribuție ca un n -uplu.

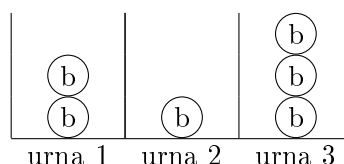
Observăm totuși că o distribuție ID este unic determinată de **numărul de bile** plasate în fiecare urnă.

Număr arbitrar de bile în fiecare urnă

O distribuție ID (fără restricții) poate fi văzută ca un multiset de forma

$$\{\{1^{x_1}, 2^{x_2}, \dots, k^{x_k}\}\}$$

unde x_j este numărul de bile plasat în urna j . De exemplu, pentru $n = 6$ și $k = 3$, distribuția de bile



corespunde multisetului cu 6 elemente ale lui $[3]$

$$\{\{1^2, 2^1, 3^3\}\} = \{\{1, 1, 2, 3, 3, 3\}\}$$

Astfel numărul de distribuții este egal cu numărul de n -multiseturi ale lui k și obținem

Teorema 10.5. Numărul de distribuții de n bile identice în k urne distincte este egal cu numărul de multiseturi de n elemente ale lui $[k]$:

$$\binom{k+n-1}{n} = \binom{k+n-1}{k-1}.$$

Cel mult o bilă în fiecare urnă

În acest caz, o distribuție ID se obține alegând n dintre cele k urne și plasarea unei singure bile în fiecare, celelalte $k - n$ urne rămânând goale. Sub identificarea $U = [k]$, o distribuție va fi o submulțime de n elemente a lui U . Am obținut astfel:

Teorema 10.6. Numărul de moduri în care putem distribui n bile identice în k urne diferite astfel încât în fiecare să plasăm cel mult o bilă este $\binom{k}{n}$.

Cel puțin o bilă în fiecare urnă

Acest caz este tratat similar cu primul (fără restricții în urne). Deoarece fiecare urnă trebuie să conțină măcar o bilă, putem alege k dintre bile și le plasăm câte una în fiecare urnă. Rămân $n - k$ bile care trebuie distribuite arbitrar în urne. Conform primului caz, numărul de distribuții este

$$\binom{n-k+k-1}{n-k} = \binom{n-1}{n-k} = \binom{n-1}{k-1}$$

Deci:

Teorema 10.7. Numărul de moduri în care putem distribui n bile identice în k urne distincte astfel încât în fiecare urnă să se afle cel puțin o bilă este

$$\binom{n-1}{k-1}$$

10.3 Bile distincte, urne identice

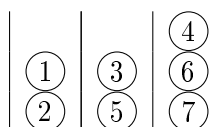
Deoarece bilele sunt distincte le putem numerota și putem presupune că $B = [n]$. O distribuție DI de bile în urne este unic determinată de **mulțimile de bile** care sunt plasate în urne, fără să conteze ordinea acestora.

Cel puțin o bilă în fiecare urnă

O distribuție ID este unic determinată de familia de mulțimi $\{B_1, \dots, B_k\}$ de bile plasate în urne. Deoarece urnele sunt identice, ordinea mulțimilor nu contează.

De asemenea, mulțimile B_i sunt disjuncte (o bilă nu se află simultan în două urne) și nevide (fiecare urnă conține cel puțin o bilă) și reuniunea lor este $[n]$ (toate bilele sunt plasate în urne). Rezultă atunci că $\{B_1, \dots, B_k\}$ este o partiție a lui $[n]$.

De exemplu, pentru $n = 7$ și $k = 3$, distribuția DI următoare



corespunde partiției

12/35/467

Rezultă că numărul de distribuții DI în acest caz este egal cu numărul de partiții, adică

Teorema 10.8. Numărul de distribuții de n bile diferite în k urne identice astfel încât fiecare urnă să conțină cel puțin o bilă este $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

Număr arbitrar de bile în fiecare urnă

Acest caz poate fi redus la cel precedent, sumând după numărul $j \in \{1, \dots, k\}$ de urne folosite (cu măcar o bilă), și obținem:

Teorema 10.9. Numărul de distribuții de n bile diferite în k urne identice (permițând și urne goale) este egal cu

$$\sum_{j=0}^k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ j \end{smallmatrix} \right\}$$

Cel mult o bilă în fiecare urnă

Teorema 10.10. Numărul de moduri în care putem distribui n bile distincte în k urne identice astfel încât fiecare să aibă cel mult o bilă este

$$\delta(n \leq k) = \begin{cases} 1, & n \leq k \\ 0, & n > k \end{cases}$$

Demonstrație. O distribuție în acest caz se poate obține alegând n urne dintre k , plasând câte o bilă în fiecare și lăsând celelalte $k - n$ urne goale. Deoarece urnele sunt identice, nu contează numărul bilei plasat în urnă. Rezultă că, dacă $n > k$, nu există nicio distribuție, iar dacă $n \leq k$, le putem distribui într-un singur mod. ■

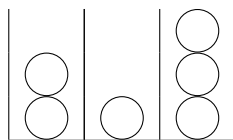
10.4 Bile identice, urne identice

Deoarece și bilele și urnele sunt identice, o distribuție II este unic determinată de numărul de bile plasat în fiecare urnă, fără să conteze ordinea acestor numere.

Cel puțin o bilă în fiecare urnă

O distribuție II în acest caz poate fi identificată cu o partiție cu k părți a numărului n .

De exemplu, pentru $n = 6$ și $k = 3$



corespunde partiției $\lambda = (3, 2, 1)$ a lui 6 (componentele partiției sunt scrise în ordine descrescătoare). Rezultă că numărul de distribuții II căutat este egal cu numărul de partiții, adică:

Teorema 10.11. Numărul de moduri în care putem distribui n bile identice în k urne identice astfel încât în fiecare urnă să avem cel puțin o bilă este $p_k(n)$.

Număr arbitrar de bile în fiecare urnă

Teorema 10.12. Numărul de moduri în care putem distribui n bile identice în k urne identice (permițând și urne goale) este

$$\sum_{j=0}^k p_j(n)$$

Demonstrație. Conform cazului precedent, $p_j(n)$ este numărul de distribuții II de n bile în j urne astfel încât fiecare urnă să aibă măcar o bilă, iar celelalte $k - j$ sunt goale. Sumând aceste numere pentru $j = 0, \dots, k$ obținem rezultatul cerut. ■

Cel mult o bilă în fiecare urnă

Teorema 10.13. Numărul de moduri în care putem distribui n bile identice în k urne identice astfel încât fiecare să aibă cel mult o bilă este

$$\delta(n \leq k) = \begin{cases} 1, & n \leq k \\ 0, & n > k \end{cases}$$

Demonstrație. O distribuție în acest caz se poate obține alegând n urne dintre k , plasând câte o bilă în fiecare și lăsând celelalte $k - n$ urne goale. Rezultă că, dacă $n > k$, nu există nicio distribuție (avem prea multe bile și prea puține cutii), iar dacă $n \leq k$, le putem distribui într-un singur mod. ■

Așadar am terminat de toate cele 12 tipuri de distribuții, ce pot fi sintetizate în tabelul:

	Bile distincte Urne distincte	Bile identice Urne distincte	Bile distincte Urne identice	Bile identice Urne identice
oricâte bile în urne	k^n	$\binom{k+n-1}{n}$	$\sum_{j=0}^k \{n\}_j$	$\sum_{j=0}^k p_j(n)$
cel mult o bilă în urne	A_k^n	$\binom{k}{n}$	$\delta(n \leq k)$	$\delta(n \leq k)$
cel puțin o bilă în urne	$k! \{n\}_k$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\{n\}_k$	$p_k(n)$

S

11 Diverse

În această secțiune discutăm câteva probleme complementare celor anterioare.

11.1 O interpretare a coeficientului multinomial

Teorema 11.1. Considerăm n bile distincte și k urne distincte și $n_1, \dots, n_k$ numere naturale nenule cu suma n . Numărul de moduri în care putem distribui bilele în urne astfel încât în urna i să avem exact n_i bile este egal cu coeficientul multinomial

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k}$$

Demonstrație. Alegem mai întâi bilele pe care le plasăm în urna întâi. Putem face aceasta în $\binom{n}{n_1}$. O dată fixate bilele din urna 1, trebuie să alegem n_2 bile din cele $n - n_1$ rămase pentru a le plasa în urna

2. Aceasta se poate face în $\binom{n-n_1}{n_2}$ moduri. Repetând procedeul găsim numărul total de distribuții:

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

■

11.2 Numărul de surjecții via principiul includerii și al excluderii

Teorema 11.2. Fie $n \geq k \geq 1$ numere naturale. Numărul de surjecții $[n] \rightarrow [k]$ este

$$\text{sur}n, k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Demonstrație. Notăm $\mathcal{F} = \{f : [n] \rightarrow [k] \text{ funcție}\}$, iar pentru $i \in [k]$ notăm prin A_i mulțimea funcțiilor $f : [n] \rightarrow [k]$ astfel încât $i \notin \text{Im}f$. Rezultă că mulțimea funcțiilor surjective este

$$S = \mathcal{F} \setminus \bigcup_{i \in [k]} A_i$$

deci

$$\text{sur}n, k = |S| = |\mathcal{F}| - \left| \bigcup_{i \in [k]} A_i \right|$$

Știm că $|\mathcal{F}| = k^n$, deci rămâne să determinăm cardinalul reuniunii din dreapta.

Vom aplica principiul includerii și excluderii pentru a determina cardinalul reuniunii din dreapta. Pentru aceasta trebuie să determinăm, pentru fiecare $I \subseteq [k], |I| = m \in \{0, \dots, k\}$, cardinalul mulțimii

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{f \in \mathcal{F} \mid f \in A_i, \forall i \in I\}$$

Avem:

$$f \in A_i, \forall i \in I \iff i \notin \text{Im}f, \forall i \in I \iff I \cap \text{Im}f = \emptyset \iff \text{Im}f \subseteq [n] \setminus I$$

Așadar, o funcție $f \in \bigcap_{i \in I} A_i$ este de fapt o funcție $[n] \rightarrow [k] \setminus I$, cu codomeniul extins la $[n]$. Obținem astfel:

$$\left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = |\{g : [n] \rightarrow [k] \setminus I \text{ funcție}\}| = (k-m)^n$$

de unde

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i \in [k]} A_i \right| &= \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \sum_{\substack{I \subseteq [k] \\ |I|=m}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \\ &= \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \sum_{\substack{I \subseteq [k] \\ |I|=m}} (k-m)^n \\ &= \sum_{m=1}^k (-1)^{m-1} \binom{k}{m} (k-m)^n \quad (i := m) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$

de unde obținem

$$\begin{aligned}
\text{sur}_{n,k} &= k^n - \left| \bigcup_{i \in [k]} A_i \right| \\
&= (-1)^0 \binom{k}{k} k^n - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n
\end{aligned}$$

■

Corolarul 11.3. Fie $n \geq k \geq 1$. Numărul Stirling de speța a doua $S(n, k)$ verifică următoarea formulă

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Demonstrație. Anterior am demonstrat că numărul de funcții surjective $[n] \rightarrow [k]$ este $k!S(n, k)$. Combinând aceasta cu rezultatul precedent găsim concluzia. ■

12 Exerciții

12.1 Relații de recurență liniare

Exercițiul 12.1.1. Fie polinomul

$$P(X) = X^r + c_{r-1}X^{r-1} + \cdots + c_1X + c_0 \in \mathbb{C}[X]$$

cu $c_0 \neq 0$ și matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{r-2} & -c_{r-1} \end{bmatrix}$$

numită matricea companion a polinomului P . Arătați că:

- (a) Polinomul caracteristic al matricei A este $P(X)$.
- (b) Pentru fiecare valoare proprie $\lambda \in \mathbb{C}$ a lui A , spațiul propriu are dimensiunea 1 (i.e. multiplicitatea geometrică a lui λ este 1).
- (c) Forma Jordan a matricei A este:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}), J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\mu_k}(\mathbb{C}), k = \overline{1, s}.$$

- (d) Polinomul minimal al matricei A este $P(X)$.

Exercițiul 12.1.2. Fie matricea $\mu \times \mu$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Arătați că $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \dots, B^{\mu-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^\mu = O_r.$

(b) Fie $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ și $J = \lambda I_\mu + B$. Arătați că pentru orice $n \geq 0$ are loc

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \cdots & \binom{n}{\mu-1}\lambda^{n-\mu+1} \\ 0 & \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \cdots & \binom{n}{\mu-2}\lambda^{n-\mu+2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Exercițiul 12.1.3. Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}^\times$ distincte și $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{C}[X]$. Considerăm șirul

$$x_n = \sum_{k=1}^s P_k(n) \lambda_k^n, n \geq 0$$

- (a) Arătați că $(x_n)_{n \geq 0}$ este o soluție a unei recurențe liniare omogene cu coeficienți constanți.
(b) Determinați o astfel de recurență pentru cazul $s = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, P_1 = X, P_2 = 1$.

Exercițiul 12.1.4. Considerăm două recurențe liniare omogene (RP) și (RQ) cu polinoamele caracteristice P , respectiv Q . Arătați că, dacă $P \mid Q$, atunci orice soluție a recurenței (RP) este și o soluție a lui (RQ).

Exercițiul 12.1.5. Fie $(a_n)_n$ o soluție a recurenței

$$(R1) : x_{n+r} + c_{r-1}x_{n+r-1} + \cdots + c_1x_{n+1} + c_0 = h_n, n \geq 0$$

și $(b_n)_n$ o soluție a recurenței:

$$(R2) : x_{n+s} + d_{s-1}x_{n+s-1} + \cdots + d_1x_{n+1} + d_0 = a_n, n \geq 0$$

Notăm prin $P_1(X)$, respectiv $P_2(X)$ polinoamele caracteristice ale celor două recurențe și notăm

$$P_1(X)P_2(X) = X^{r+s} + e_{r+s-1}X^{r+s-1} + \cdots + e_1X + e_0$$

Atunci $(b_n)_n$ este o soluție recurenței:

$$x_{n+r+s} + e_{r+s-1}x_{n+r+s-1} + \cdots + e_1x_{n+1} + e_0 = h_n, n \geq 0.$$

Exercițiul 12.1.6. Considerăm șirul lui Fibonacci $(x_n)_n$ din exemplul 1.9. Arătați că x_n este cel mai apropiat număr întreg de $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Exercițiul 12.1.7. Determinați soluțiile generale complexe, respectiv reale, ale recurențelor omogene:

- (a) $x_{n+1} = 4x_n, n \neq 0$.
- (b) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n, n \geq 0$.
- (c) $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0, n \geq 0$.
- (d) $x_{n+4} + 2x_{n+3} + 3x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, n \geq 0$.
- (e) $x_{n+3} = 3x_{n+1} + 2x_n, n \geq 0$.

Exercițiul 12.1.8. Determinați termenul general al următoarelor șiruri definite recurent:

- (a) $x_{n+2} = x_n, n \geq 0$ și $x_0 = 1, x_1 = -1$.
- (b) (șirul lui Lucas) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n \geq 0$ și $x_0 = 2, x_1 = 1$.

Exercițiul 12.1.9. Determinați soluția generală a următoarelor recurențe neomogene:

- (a) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n + n(-1)^n, n \geq 0$.
- (b) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n + n^2 \geq 0$.
- (c) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n + n2^n \geq 0$.

Exercițiul 12.1.10. Determinați termenul general al șirurilor definite recurent:

- (a) $x_{n+1} = 4x_n + n, n \geq 0$ și $x_0 = 1$.
- (b) $x_{n+1} = 2x_n + (-1)^n \cos \frac{n\pi}{2}, n \geq 0$ și $x_0 = 1$.

Exercițiul 12.1.11. Determinați termenul general al șirului definit prin:

$$x_n - 5x_{n/2} + 6x_{n/4} = n, n = 2^k, k \geq 2$$

cu datele inițiale $x_1 = 2, x_2 = 1$.

12.2 Principiul lui Dirichlet

Exercițiul 12.2.1. Arătați că:

- (a) Între treisprezece persoane, există două care au aceeași zi de naștere.
- (b) Într-o școală sunt 1500 de elevi. Există 5 care au aceeași zi de naștere.

Exercițiul 12.2.2. Într-un restaurant iau cina mai mulți englezi, francezi și germani. Care este numărul minim de participanți astfel încât să fim siguri că sunt măcar 15 de o etnie prezenți.

Exercițiul 12.2.3. La o conferință unui participant dau mâna cu alții. Arătați că există două persoane care au dat mâna cu același număr de oameni.

Exercițiul 12.2.4. Un angajat lucrează la un proiect 55 de ore în 12 zile. Presupunând că în fiecare zi a lucrat un număr natural nenul de ore, arătați că în două zile consecutive a lucrat cel puțin două zile.

Exercițiul 12.2.5. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ prime între ele. Atunci există $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $ax - by = 1$.

Exercițiul 12.2.6. Alegem 101 numere de la 1 la 200.

- (a) Arătați că există două între cele alese cu diferența 1.
- (b) Arătați că există două cu suma 201.
- (c) Arătați că există două între cele alese care se divid unul pe celălalt.

Exercițiul 12.2.7. Fie $a_1, \dots, a_{100}$ numere naturale nenule cu suma 150. Arătați că există $i < j$ astfel încât $a_i + \dots + a_j = 49$.

Exercițiul 12.2.8. Alegem 10 puncte în interiorul unui pătrat 3×3 . Arătați că există două dintre puncte la distanța cel mult $\sqrt{2}$.

Exercițiul 12.2.9 (Erdos-Szekeres). Considerăm un șir de $n^2 + 1$ numere reale. Atunci există un subșir monoton de lungime $n + 1$. Arătați că există un șir de n^2 numere reale care nu conține niciun subșir monoton de lungime n .

Exercițiul 12.2.10. Considerăm un șir de $rs + 1$ numere reale. Atunci șirul admite un subșir crescător de lungime $r + 1$ sau un subșir descrescător de lungime $s + 1$.

Exercițiul 12.2.11. În plan considerăm 10 puncte distincte. Există 4 dintre acestea P_1, P_2, P_3, P_4 astfel încât pantele segmentelor P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 sunt toate pozitive sau toate negative.

12.3 Probleme de numărare

Exercițiul 12.3.1. Fie A o mulțime de n elemente și $k \in \mathbb{N}$. Arătați că numerele de k -șiruri, k -aranjamente, k -combinări, respectiv k -multiseturi, depind doar de n și nu de A . Mai precis, dacă B este o altă mulțime de n elemente, arătați că există o bijecție între mulțimea k -șirurilor din A și mulțimea k -șirurilor din B (și similar pentru celelalte trei tipuri de obiecte).

Exercițiul 12.3.2. (a) Câte cuvinte de 5 litere se pot forma cu literele A, B, C ?

(b) Câte cuvinte de 3 litere se pot forma cu literele A, B, C, D, E astfel încât fiecare literă să apară o singură dată?

(c) Câte cuvinte de 10 litere se pot forma cu literele A și B astfel încât A să apară de 7 ori și B să apară de 3 ori.

(d) Câte cuvinte de 10 litere se pot forma cu literele A, B, C astfel încât A și B să apară de 3 ori fiecare iar C de 4 ori.

Exercițiul 12.3.3. În câte moduri putem plasa 8 turnuri identice pe o tablă de șah 8×8 astfel încât ele să nu se atace? Dar dacă turnurile sunt diferite?

Exercițiul 12.3.4. În câte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât numerele $\{1, 2, 3\}$ să stea la rând (eventual în ordine crescătoare).

Exercițiul 12.3.5. În câte moduri pot fi așezate n persoane la o masă circulară?

Exercițiul 12.3.6. Câte numere de 6 cifre, care nu conțin cifre identice, se pot forma cu cifrele $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

Exercițiul 12.3.7. O grupă de studenți trebuie să programeze 4 examene în 8 zile. În câte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se dă în mod obligatoriu în ultima zi?

Exercițiul 12.3.8. Din 11 persoane, 7 bărbați și 4 femei, se formează o delegație de 5 persoane, care conține cel puțin 2 femei. În câte moduri se poate forma delegația?

Exercițiul 12.3.9. La o petrecere participă 8 băieți și 7 fete. În câte moduri se pot forma 4 perechi?

Exercițiul 12.3.10. Un test grilă conține 5 subiecte, fiecare cu 4 variante de răspuns. În câte moduri se pot da răspunsuri, dacă:

(a) pentru fiecare subiect este permis un singur răspuns;

(b) pentru fiecare subiect, trebuie selectată cel puțin o variantă de răspuns.

Care este probabilitatea ca alegând aleatoriu răspunsurile, un student să răspundă corect la mai mult de jumătate din subiecte?

Exercițiul 12.3.11. (a) Câte cuvinte de 5 litere se pot scrie cu literele a, b, c, d, e, f, g ?

- (b) Câte cuvinte de 5 litere se pot scrie cu literele a, b, c, d, e, f, g astfel încât fiecare literă să apară cel mult o dată.
- (c) Câte cuvinte de 8 litere se pot scrie cu literele a, b, c, d, e, f, g astfel încât a să apară de 2 ori și b de 3 ori?
- (d) Câte cuvinte de 8 litere se pot scrie cu literele a, b, c, d, e, f, g astfel încât a să apară de cel puțin 3 ori, b apare cel puțin o dată.
- (e) Câte cuvinte de 8 litere se pot scrie cu literele a, b, c, d, e, f, g astfel încât a să apară pe prima sau ultima poziție, iar b să apară de 3 ori?

Exercițiul 12.3.12 (Birthday Paradox). Într-o sală se află 30 de oameni. Care este probabilitatea ca două dintre persoane să aibă aceeași zi de naștere? Determinați numărul minim de persoane astfel încât probabilitatea ca doi să aibă aceeași zi de naștere să fie $>50\%$, respectiv $>90\%$.

Exercițiul 12.3.13. Ion comandă 10 cărți distincte, trei despre politică, șapte despre chimie. Dintr-o greșeală a editurii, ele ajung într-o ordine aleatoare una câte una. Care este probabilitatea ca cele trei despre politică să ajungă consecutiv, una după alta?

Exercițiul 12.3.14. Determinați numărul de șiruri de 12 biți, formați din 4 de zero și 8 de unu, astfel încât nu există doi de zero alăturați.

Exercițiul 12.3.15. În câte moduri putem împărți 14 persoane în patru grupuri de 2, 3, 4, respectiv 5 oameni?

Exercițiul 12.3.16. În câte moduri putem distribui 10 cărți distincte pe 5 rafturi (distincte) astfel încât pe fiecare raft să avem cel puțin o carte?

Exercițiul 12.3.17. În câte moduri putem distribui 10 bomboane identice la 3 copii? Dar dacă presupunem că fiecare copil primește cel puțin o bomboană?

Exercițiul 12.3.18. Alfabetul latin are 26 de litere.

- (a) Câte cuvinte de două litere există?
- (b) Câte cuvinte de două litere distincte există?
- (c) Câte cuvinte de trei litere se pot forma care nu conțin două vocale alăturate?

Exercițiul 12.3.19. (a) În câte moduri putem permuta literele cuvântului BANANA? Dar dacă vrem ca cei trei de A să nu apară consecutiv?

- (b) În câte moduri putem permuta cifrele numărului 12112025? Dar dacă vrem ca cifrele de 0 și 2 să nu fie consecutive?

Exercițiul 12.3.20. În câte moduri putem împărți 18 studenți în grupuri de 3 sau 4?

Exercițiul 12.3.21. Un zidar cumpără 10 găleți cu vopsea albă, gri, albastră, roșie și verde. Câte combinații există?

Exercițiul 12.3.22. Un magazin primește de la producător 40 de tablete de ciocolată (identice), pe care le aranjează pe 3 rafturi (distincte).

- (a) În câte moduri pot fi aranjate acestea pe rafturi?
- (b) În câte moduri pot fi aranjate astfel încât pe fiecare raft să fie măcar una?
- (c) În câte moduri pot fi aranjate dacă pe raftul de sus și de jos trebuie să fie plasate cel mult 15 (pe fiecare), iar pe cel din mijloc cel puțin 25?
- (d) Să presupunem că ciocolatele sunt de două tipuri: 20 ciocolată cu lapte și 25 ciocolată neagră. În câte moduri putem să le distribuim pe rafturi astfel încât pe fiecare să existe măcar 5 de fiecare tip?
- (e) Să presupunem că ciocolatele sunt de două tipuri: 20 ciocolată cu lapte și 25 ciocolată neagră. În câte moduri putem să le distribuim pe rafturi astfel încât pe fiecare să existe măcar 5 de fiecare tip?

Exercițiul 12.3.23. Câte cuvinte de 7 litere se pot forma cu literele M, A, T, H astfel încât fiecare să apară măcar o dată. Care este probabilitatea ca alegând aleatoriu un astfel de cuvânt să conțină sub-cuvântul MATH?

Exercițiul 12.3.24. Considerăm cuvântul IONPEGARD. În câte moduri putem permuta literele astfel încât unul din (sub)cuvintele ION, PE sau GARD să apară?

Exercițiul 12.3.25. Fie n și k numere naturale. Atunci numărul de funcții strict crescătoare $f: [k] \rightarrow [n]$ este $\binom{n}{k}$. În particular, dacă $k > n$, nu există funcții strict crescătoare $f: [k] \rightarrow [n]$.

Exercițiul 12.3.26. Fie n și k numere naturale nenule. Atunci numărul de funcții crescătoare $f: [k] \rightarrow [n]$ este $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Exercițiul 12.3.27. Fie $n, k \in \mathbb{N}$. Considerăm ecuația $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

- (a) Câte soluții naturale are ecuația?
- (b) Câte soluții naturale nenule are ecuația.

Ordinea necunoscutelor contează (de exemplu, $1 + 2 + 3 = 6$ și $3 + 2 + 1 = 6$ sunt considerate soluții diferite).

Exercițiul 12.3.28. Considerăm ecuația $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$.

- (a) Câte soluții naturale are ecuația?
- (b) Câte soluții naturale nenule are ecuația?
- (c) Câte soluții naturale ale ecuației verifică $x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_3 \geq 3, x_4 \geq 2$?
- (d) Câte soluții naturale ale ecuației verifică $x_1 \leq 5, x_2 \leq 7, x_3 \leq 7, x_4 \leq 5$?

Exercițiul 12.3.29. (a) Determinați numărul funcțiilor injective, respectiv strict crescătoare $[3] \rightarrow [6]$.

- (b) Determinați numărul funcțiilor crescătoare $[6] \rightarrow [3]$.
- (c) Determinați numărul de funcții surjective $[6] \rightarrow [3]$.

Exercițiul 12.3.30. Fie p număr prim și $n \in \mathbb{N}$. Dezvoltând $\underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{n \text{ ori}}^p$, arătați că $n^p \equiv n \pmod{p}$.

Exercițiul 12.3.31. Un deranjament al lui $[n]$ este o permutare $(a_1, \dots, a_n)$ a lui $[n]$ astfel încât $a_i \neq i$, pentru orice $i = 1, \dots, n$.

- (a) Arătați că numărul deranjamentelor este

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

- (b) Arătați că $D_1 = 0, D_2 = 1$ și $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$, pentru orice $n \geq 3$.
- (c) Arătați că $D_1 = 0$ și $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$, pentru orice $n \geq 2$.

Exercițiul 12.3.32. Fie $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$. Să se demonstreze că

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k} S_1 + n.$$

Să se deducă S_2, S_3, S_4 .

Exercițiul 12.3.33. Să se calculeze sumele:

- (a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$;
- (b) $\binom{n}{0} - 3\binom{n}{2} + 9\binom{n}{4} - 27\binom{n}{6} + \dots$;
- (c) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots$.

Exercițiul 12.3.34. Să se calculeze sumele:

(a) $\binom{n}{0}^2 - \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}^2$;

(b) $\binom{n}{1}^2 + 2\binom{n}{2}^2 + 3\binom{n}{3}^2 + \cdots + n\binom{n}{n}^2$;

(c) $\binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n} + 2^2\binom{2n-2}{n} + \cdots + 2^n\binom{n}{n}$.

Exercițiul 12.3.35. Fie $n \geq 1$. Arătați că numărul soluțiilor naturale nenule ale ecuației

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = n$$

este egal cu numărul de partiții $p(n)$.

Exercițiul 12.3.36. Fie $n \geq k \geq 1$. Dacă $n \geq 2k$, atunci că $p_{n-k}(n) = p(k)$.

Exercițiul 12.3.37. Fie $n \geq k \geq 1$. Atunci

$$p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \cdots + p_1(n-k) + p_0(n-k)$$

Bibliografie

- [1] Bogart, K. – Combinatorics Through Guided Discovery, <https://bogart.openmathbooks.org/>
- [2] Sagan, B. – Combinatorics: The Art of Counting, AMS, 2020
- [3] Shahriari, S. – An Invitation to Combinatorics, CUP, 2021
- [4] Grinberg, D. – Enumerative Combinatorics: Class Notes, 2023, <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/>
- [5] Grinberg, D. – An Introduction to Graph Theory, class notes, 2023, <https://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/>
- [6] Tomescu, I. – Introducere în combinatorică, Ed. Tehnica, 1972