

Noțiuni de teoria grafurilor

Cuprins

1	Grafuri. Definiție și exemple	1
2	Arbori	4
3	Grafuri bipartite	10
4	Exerciții și probleme	12

1 Grafuri. Definiție și exemple

Definiția 1.1. Prin graf (simplu neorientat) înțelegem o pereche $G = (V, E)$ unde

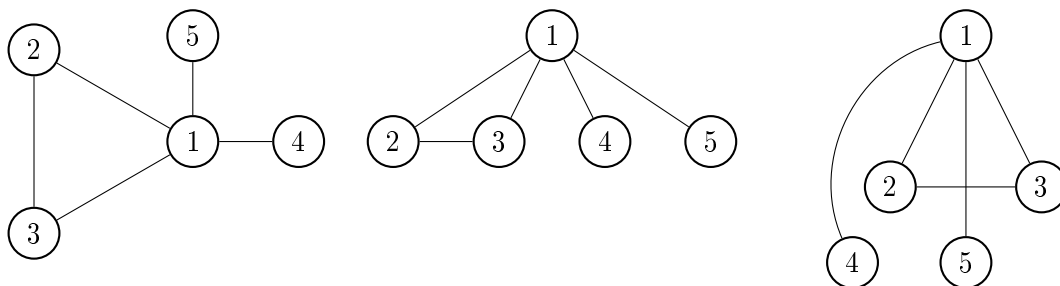
- (a) V este o mulțime finită. Elementele lui V se numesc vârfurile sau nodurile lui G .
- (b) E este o mulțime (finită) de perechi neordonate de vârfuri. Elementele lui E se numesc muchiile lui G . Pentru simplitate, o muchie $\{u, v\} \in E$ va fi notată simplu uv .

Spunem în acest caz că:

- u și v sunt adiacente,
- muchia uv este incidentă vârfurilor u și v ,
- u și v sunt extremitățile muchiei uv .

Observația 1.2. Dat un graf G , vom nota prin $V(G)$ mulțimea vârfurilor lui G și prin $E(G)$ mulțimea muchiilor lui G .

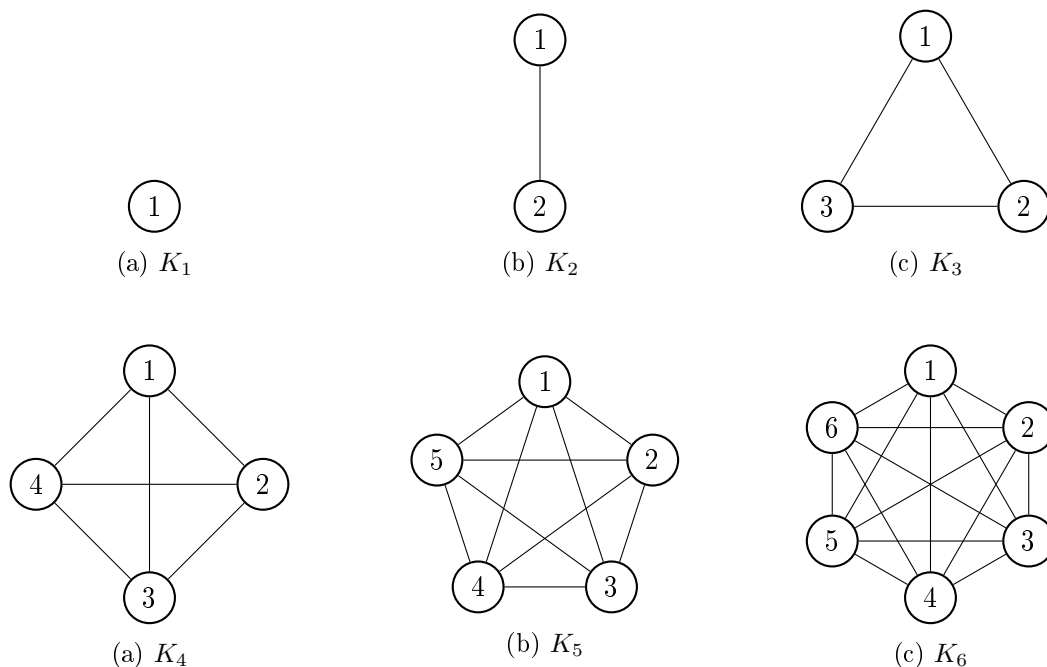
Un graf se reprezintă de obicei astfel: vârfurile sunt puncte în plan, iar muchiile sunt segmente sau arce de curbă între vârfuri. De exemplu, următoarele figuri sunt reprezentări ale grafului $G = (V, E)$ cu $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $E = \{12, 23, 31, 14, 15\}$:



Observația 1.3. Muchiile au extremități distincte (nu permitem bucle) și între două vârfuri avem cel mult o muchie (nu permitem muchii multiple). De asemenea, muchiile nu sunt orientate. În literatură, astfel de grafurile cu care vom lucra sunt numite în literatură grafuri simple neorientate.

Dacă permitem muchii multiple sau bucle, obținem conceptul de multigraf sau graf general. De asemenea, dacă muchiile sunt orientate, obținem conceptul de graf orientat sau digraf.

Exemplul 1.4. Considerăm V o mulțime cu n vârfuri și $E = \binom{V}{2}$, mulțimea tuturor perechilor posibile între vârfurile din V . Graful $G = (V, E)$ astfel obținut se numește graf complet cu n vârfuri și îl vom nota prin K_n .



Exemplul 1.5. Graful Petersen este următorul graf cu 10 vârfuri și 15 muchii.

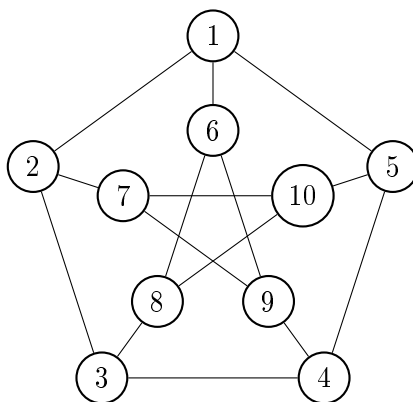
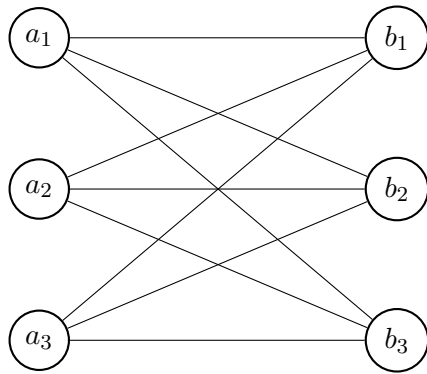


Figure 4: Graful Petersen

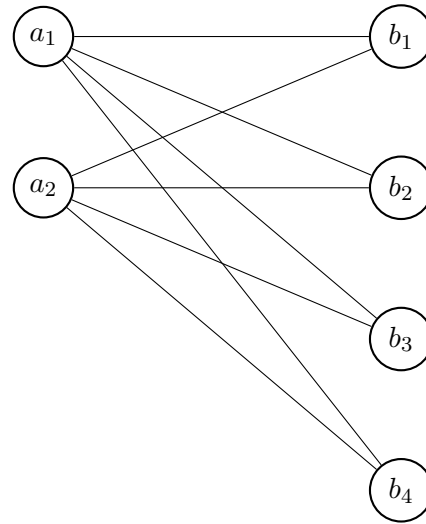
Exemplul 1.6. Graful bipartit complet $K_{n,m}$ este graful format din două mulțimi (disjuncte) de vârfuri $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ și $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ și muchii trasate între fiecare vârf din A și fiecare vârf din B . Astfel, acest graf are $m + n$ vârfuri și mn muchii.

Definiția 1.7. Fie G un graf și v un vârf al lui G . Prin gradul (sau valența) lui v , notat $d(v)$, înțelegem numărul de muchii din G incidente lui v , sau echivalent numărul de vârfuri adiacente lui v :

$$d(v) = |\{e \in E(G) \mid v \in e\}| = |\{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}|$$



(a) $K_{3,3}$



(b) $K_{2,4}$

Un instrument util pentru studiul grafurilor este matricea de adiacență:

Definiția 1.8. Fie $G = (V, E)$ un graf cu n vârfuri. Numerotând vârfurile putem presupune că $V = [n]$.

Matricea de adiacență a lui G este matricea $A = (A(x, y))_{x, y=1, \dots, n}$ de ordin $n \times n$ dată prin:

$$A(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă există muchia } xy \in E \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

Definiția 1.9. Fie $G = (V, E)$ un graf.

(a) Prin **lanț** (eng: walk) în G înțelegem un șir muchii de forma

$$v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{k-1} v_k$$

(oricare două muchii consecutive din șir au o extremitate comună).

- Vom nota lanțul L de mai sus prin $k + 1$ -uplul de vârfuri $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ (notația are sens: o muchie este *unic determinată* de extremitățile sale).
- $v_0, v_1, \dots, v_k$ se numesc vârfurile lanțului L , iar v_0 și v_k sunt extremitățile lanțului L . Numărul k de muchii din lanț se numește lungimea lanțului L .

(b) Dacă $v_0 = v_k$, spunem că lanțul L este închis.

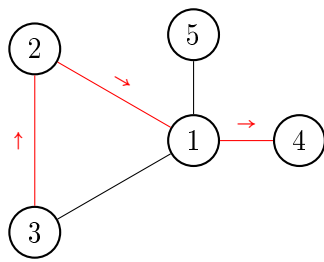
(c) Lanțul L se numește **drum** (eng: path) dacă toate vârfurile sale sunt distincte.

(d) Lanțul L se numește **ciclu** (eng: cycle) dacă este închis și toate vârfurile sunt distincte cu excepția extremităților.

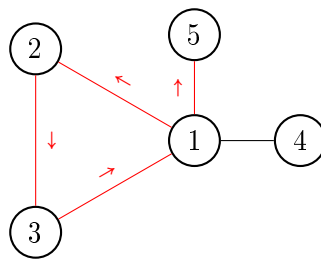
(e) Lanțul L se numește **parcurs** (eng: trail) dacă toate muchiile sale sunt distincte.

(f) Lanțul L se numește **circuit** (eng: circuit) dacă este un parcurs cu extremitățile egale.

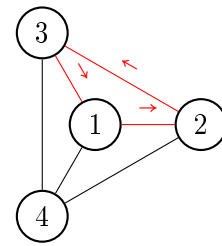
Definiția 1.10. Graful G se numește conex dacă între orice două vârfuri ale lui G există măcar un drum. În caz contrar, spunem că G este neconex.



(3, 2, 1, 4) este un drum



(1, 3, 2, 1, 5) este lanț
care nu este drum



(1, 2, 3, 1) este un ciclu
de lungime 3

Definiția 1.11. Fie $G = (V, E)$. Considerăm pe V relația de echivalență

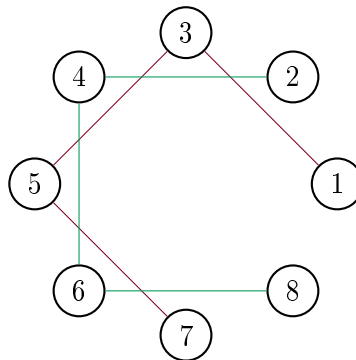
$$u \sim v \iff \text{există un drum de la } u \text{ la } v \text{ în } G$$

Subgrafurile induse de clasele de echivalență în raport cu " $\sim$ " se numesc componente conexe ale lui G .

Observația 1.12. Componentele conexe ale unui graf G sunt subgrafurile conexe maximale ale lui G . Fiecare vârf $v_0 \in V$ face parte dintr-o componentă conexă C_0 unic determinată. Vârfurile lui C_0 sunt cele la care se poate ajunge prin drumuri care pleacă din v_0 . Muchiile lui C_0 sunt toate acele din G care leagă vârfurile din C_0 .

Evident, fiecare componentă conexă este la rândul ei graf conex (justificați!). De asemenea, un graf conex are o unică componentă conexă.

Exemplul 1.13. Considerăm $V = [8]$ și $E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V, |i - j| = 2\}$ (trasăm o muchie între i și j dacă $|i - j| = 2$). Atunci G are două componente conexe determinate de vârfurile $\{1, 3, 5, 7\}$, respectiv $\{2, 4, 6, 8\}$:



Graf cu două componente conexe

2 Arbori

Definiția 2.1. (a) Prin arbore înțelegem un graf conex și fără cicluri.

(b) Un graf fără cicluri se numește pădure. Echivalent, o pădure este un graf ale cărui componente conexe sunt arbori.

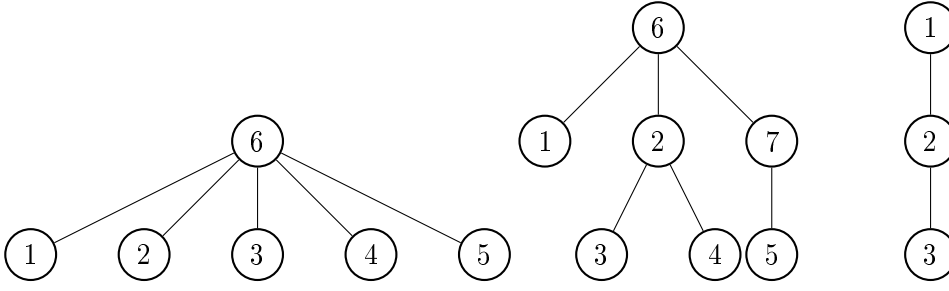


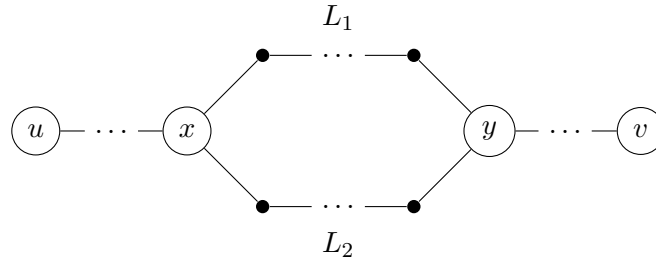
Figure 7: Exemple de arbori

Teorema 2.2. Fie T un graf cu $n \geq 2$ vârfuri și r muchii. Următoarele afirmații sunt echivalente.

- (a) T este un arbore.
- (b) Pentru orice două vârfuri u, v ale lui T , există și este unic un drum de la u la v .
- (c) T este conex și, eliminând orice muchie din T obținem un graf neconex (o astfel de muchie se numește punte – eng: bridge).
- (d) T nu admite cicluri și, adăugând o muchie în T , obținem un graf cu cicluri.
- (e) G este conex și $n = r + 1$.
- (f) G nu admite cicluri și $n = r + 1$.

Demonstrație. (a) $\implies$ (b). Deoarece T este conex, există un drum între u și v . Vrem să arătăm unicitatea acestuia.

Astfel, considerăm două drumuri L_1 și L_2 între u și v . Cele două drumuri au în comun extremitățile u și v , dar vor putea avea în comun și altele. Notăm prin x ultimul vârf comun al lui L_1 și L_2 , înainte de prima bifurcare. După un număr de muchii cele două drumuri trebuie să se unească din nou. Notăm prin y vârful unde aceasta se întâmplă prima dată. Din construcție, porțiunile din L_1 și L_2 dintre x



și y nu au vârfuri comune, exceptând capetele, deci, lipind aceste porțiuni vom obține un ciclu în T , ceea ce contrazice ipoteza. Așadar, între u și v există un unic drum.

(b) $\implies$ (a). Evident T este conex. Dacă T ar admite un ciclu $C = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$ atunci între v_0 și v_1 avem două drumuri distincte: (v_0, v_1) și $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_0)$, ceea ce contrazice unicitatea drumurilor între două vârfuri.

(a) $\implies$ (c). Fie $e = uv$ o muchie a lui T și $T - e$ graful obținut prin ștergerea lui e din T .

Să presupunem că $T - e$ este conex. Atunci există un drum L în $T - e$ care unește u cu v . Adăugând la L muchia e obținem un ciclu în T , contradicție.

(c) $\implies$ (a). Presupunem că T admite un ciclu L . Eliminând din T o muchie uv din L , graful rămas este în continuare conex, contradicție (putem lega u și v prin drumul "ocolitor" prin restul ciclului L).

(a) $\implies$ (d). Fie u și v două vârfuri nelegate printr-o muchie. Ele sunt legate printr-un drum L pentru că T este conex. Adăugând la T la muchia uv , graful rezultat va avea un ciclu: L , împreună

cu uv .

(d) $\implies$ (a). Trebuie să arătăm T este conex. Fie u și v două vârfuri distincte. Dacă $uv \in E$, am terminat. Să presupunem că $uv \notin E$.

Adăugând muchia $e = uv$ la T , graful obținut trebuie să aibă un ciclu, care va conține evident muchia e . Acest ciclu dă naștere la două drumuri de la u la v : muchia e și drumul "ocolitor". Acesta din urmă este conținut în T . Deci T este conex.

(a) $\implies$ (e). Procedăm prin inducție după $n = |V|$.

Pentru $n = 1$, avem $r = 0$ (un graf cu un vârf nu are muchii), deci $n = r + 1$. Presupunem rezultatul adevărat pentru orice arbore cu mai puțin de n vârfuri și considerăm un arbore T cu n vârfuri.

Fie $e = uv$ o muchie a lui T . Graful $T - e$ va fi neconex, cu două componente conexe T_1 și T_2 . Acestea vor fi arbori cu mai puțin de n vârfuri (eliminarea unei muchii nu va introduce cicluri). Din ipoteza inductivă avem $|V(T_1)| = |E(T_1)| + 1$ și $|V(T_2)| = |E(T_2)| + 1$. Rezultă

$$r = |E| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = |V(T_1)| - 1 + |V(T_2)| - 1 + 1 = |V| - 1 = n - 1.$$

(e) $\implies$ (a). Știm că T este conex; rămâne să arătăm că T nu are cicluri.

Presupunem că T are un ciclu L și fie $e = uv$ o muchie din L . Graful $T - e$ va fi în continuare conex. Dacă are cicluri, repetăm procedeul și mai eliminăm o muchie. După un număr finit de pași vom obține un graf T' , conex și aciclic, adică un arbore.

Din implicația (a) $\implies$ (e) avem $|E(T')| = |V(T')| - 1$. Pe de altă parte, $|V(T)| = |V(T')| = n$ și $|E(T')| < |E(T)|$ (în procedeul nostru, am tăiat doar muchii), deci

$$n = |V(T)| = |V(T')| = |E(T')| + 1 < |E(T)| + 1 = r + 1 = n$$

ceea ce este o contradicție. Deci T este aciclic.

(a) $\implies$ (f). Rezultă din implicația (a) $\implies$ (e).

(f) $\implies$ (a). Trebuie doar să arătăm că T este conex. Fie $T_1, \dots, T_k$ componentele conexe ale lui T . Fiindcă T este aciclic, grafurile T_i sunt arbori. Din echivalența (i) $\iff$ (v), știm că $|V(T_i)| = |E(T_i)| + 1$. Rezultă atunci:

$$n = |V| = \sum_{i=1}^k |V(T_i)| = \sum_{i=1}^k (|E(T_i)| + 1) = k + \sum_{i=1}^k |E(T_i)| = k + |E| = k + n - 1$$

deci $k = 1$, adică T este conex. ■

Corolarul 2.3. Fie G o pădure cu n vârfuri și r componente conexe. Atunci numărul de muchii ale lui G este $n - r$.

Teorema 2.4 (Cayley). Numărul de arbori cu mulțimea de vârfuri $V = [n]$ este n^{n-2} .

Demonstrație (Prüfer). Pentru $n = 1, 2$, avem un singur arbore cu $V = [n]$ și teorema este verificată. Presupunem $n > 3$.

Vom construi o bijecție explicită între mulțimea arborilor cu n vârfuri și mulțimea cuvintelor de $n - 2$ cifre construite cu un alfabet de n litere $\{1, 2, \dots, n\}$. Cuvântul asociat unui arbore se va numi codul Prüfer al arborelui.

Considerăm astfel un arbore T cu $V(T) = [n]$. Codul Prüfer asociat se obține astfel:

- Dintre toate frunzele lui T (știm că avem cel puțin două), există una care este cea mai mică ca număr natural. Fie ea l_1 și fie $x_1 \in [n]$ unicul vârf adiacent lui l_1 .
- Ștergem din T pe l_1 și l_1x_1 și obținem un arbore T_1 . În T_1 , considerăm l_2 frunza cu valoarea cea mai mică și x_2 singurul vârf din T_1 adiacent lui l_2 . Apoi ștergem l_2 și muchia l_2x_2 din T_2 și obținem arborele T_2 .
- Repetăm procedeul, eliminând câte o muchie și un vârf în fiecare pas până când rămânem cu două vârfuri legate printr-o muchie, unul dintre acestea fiind x_{n-2} , vârful legat de frunza l_{n-2} .

- Codul Prüfer al lui T este cuvântul $x_1x_2\ldots x_{n-2}$.

Invers, considerăm un șir $x_1\ldots x_{n-2}$ de numere din $[n]$. Lui îi asociem un arbore T astfel:

- Scriem pe două linii șirul dat, precum și numerele de la 1 la n în ordine crescătoare.

x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-2}		
1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n

- Trasăm o muchie între x_1 și cel mai mic număr de pe linia a doua care nu apare pe prima linie, $l_1 = \min[n] \setminus \{x_i \mid i = 1, \dots, n-2\}$.
- Eliminăm x_1 și l_1 din tabel. Trasăm o muchie între x_2 și cel mai mic număr de pe linia a doua care nu apare pe prima linie, $l_2 = \min[n] \setminus \{l_1, x_2, \dots, x_n\}$.
- Repetând procedeul pentru fiecare x_i , obținem un graf cu $n-2$ muchii și rămânem cu două elemente pe a doua linie. Aceasta dă ultima muchie a grafului.

Justificăm că graful obținut este un arbore. Vârful l_1 apare numai în prima muchie construită. Astfel, T este obținut din construcția pașilor ulteriori adăugând muchia l_1x_1 . Dar pașii ulteriori reprezintă construcția unui graf T' cu $n-1$ vârfuri dintr-un cod Prüfer. Inductiv, acesta este un arbore. Așadar, T se obține adăugând o muchie cu o frunză lui T' , de unde rezultă că T este într-adevăr un arbore.

Am asociat astfel unui arbore un cuvânt de lungime $n-2$ și unui cuvânt un arbore. Din construcție, cele două corespondențe grafuri - coduri Prüfer sunt inverse una alteia.

În concluzie, numărul de arbori căutat este egal cu numărul de cuvinte de lungime $n-2$ în alfabetul $\{1, 2, \dots, n\}$, care este egal cu n^{n-2} . ■

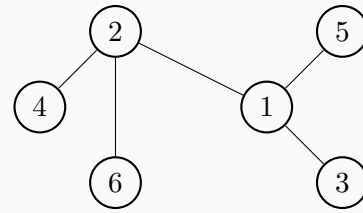
Corolarul 2.5. Numărul de arbori cu vârfurile $\{1, 2, \dots, n\}$ și gradele vârfurilor $d_1, d_2, \dots$, respectiv d_n , unde $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$ este

$$\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n (d_i - 1)!}$$

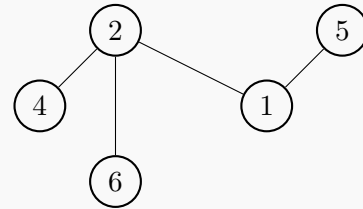
Demonstrație. Fie T un arbore și $x_1\ldots x_{n-2}$ codul său Prüfer. Din construcția acestui cuvânt, observăm că fiecare vârf $i \in [n]$ apare de $d(i) - 1$ ori.

Rezultă că numărul de arbori cu vârfurile $[n]$ și gradele $d_1, d_2, \dots, d_n$ este egal cu numărul de cuvinte de lungime $n-2$ scrise cu literele $1, 2, \dots, n$ astfel încât litera i apare de $d_i - 1$ ori. Acesta este exact numărul din concluzie. ■

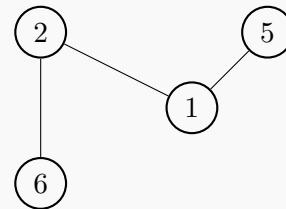
Exemplul 2.6. Considerăm arborele:



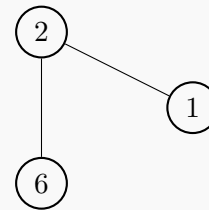
Frunza minimă este $l_1 = 3$, iar vârful adiacent este $x_1 = 1$. Eliminând l_1 din graf obținem:



Frunza minimă este $l_2 = 4$, iar vârful adiacent este $x_2 = 2$. Eliminând l_2 din graf obținem:



Frunza minimă este $l_3 = 5$, iar vârful adiacent este $x_3 = 1$. Eliminând l_3 din graf obținem:



Frunza minimă este $l_4 = 1$, iar vârful adiacent este $x_4 = 2$. Eliminând l_4 din graf obținem:



Codul Prüfer al grafului dat este 1212.

Exemplul 2.7. Vrem să construim arborele corespunzător codului Prüfer 332211. Numărul de vârfuri al arborelui este 8.

3	3	2	2	1	1		
1	2	3	4	5	6	7	8

Unim primul vârf de pe prima linie, 3 cu cel mai mic număr de pe linia a doua care nu apare pe linia a doua, adică 4.

Am obținut astfel muchia 34.

~~3~~	3	2	2	1	1		
1	2	3	~~4~~	5	6	7	8

Eliminăm din tabel cele două vârfuri (3 de pe prima linie și 4 de pe a doua). Și repetăm procedeul: unim 3 (al doilea) cu cel mai mic număr de pe a doua linie, care nu apare pe prima, adică 5.

Am obținut astfel muchia 35.

~~3~~	~~3~~	2	2	1	1		
1	2	3	~~4~~	~~5~~	6	7	8

Eliminăm din tabel vârfurile selectate anterior și repetăm procedeul. Obținem muchia 23.

~~3~~	~~3~~	~~2~~	2	1	1		
1	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	6	7	8

Eliminăm din tabel vârfurile selectate anterior și repetăm procedeul. Obținem muchia 26.

~~3~~	~~3~~	~~2~~	~~2~~	1	1		
1	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	6	7	8

Eliminăm din tabel vârfurile selectate anterior și repetăm procedeul. Obținem muchia 12.

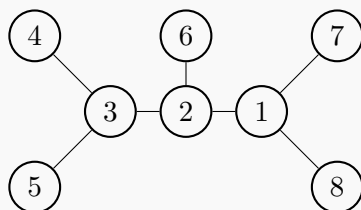
~~3~~	~~3~~	~~2~~	~~2~~	~~1~~	1		
1	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	7	8

Eliminăm din tabel vârfurile selectate anterior și repetăm procedeul. Obținem muchia 17.

~~3~~	~~3~~	~~2~~	~~2~~	~~1~~	~~1~~		
1	2	~~3~~	~~4~~	~~5~~	~~6~~	~~7~~	8

Eliminăm din tabel vârfurile selectate anterior și rămânem cu vârfurile 1 și 8, pe care le unim cu o muchie.

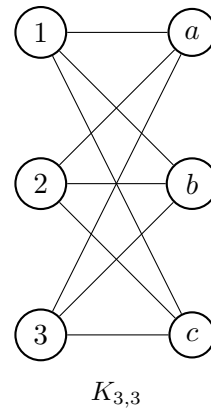
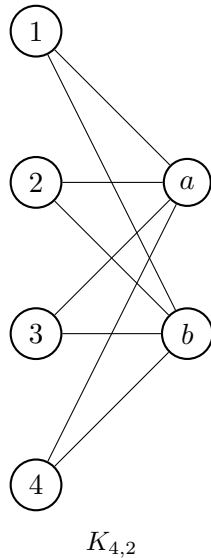
Arborele obținut este



3 Grafuri bipartite

Definiția 3.1. Un graf G se numește bipartit dacă există o partiție a vârfurilor $V(G) = X \sqcup Y$ astfel încât toate muchiile au o extremitate în X și una în Y . Vom numi mulțimile X și Y părțile grafului.

Exemplul 3.2. Fie X și Y două mulțimi cu m respectiv n elemente. Graful complet bipartit $K_{m,n}$ este graful obținut trasând câte o muchie între fiecare vârf din X și fiecare vârf din Y .



Teorema 3.3. Un graf $G = (V, E)$ este bipartit dacă și numai dacă fiecare ciclu din G are lungime pară.

Demonstrație. Presupunem mai întâi că G este bipartit cu părțile X și Y . Orice ciclu din G va începe din X și va traversa către Y și apoi înapoi către X . Lungimea sa va fi astfel un număr par.

Invers, presupunem că toți ciclurile lui G au lungime pară. Pentru a demonstra că G este bipartit, trebuie să arătăm că fiecare componentă conexă a lui G este bipartită. Putem astfel să presupunem că G este conex.

Pentru două vârfuri $u, v \in V(G)$, notăm $d(u, v)$ lungimea minimă a drumurilor de la u la v . Fixăm un vârf u_0 al lui G și considerăm

$$X = \{v \in V \mid d(u_0, v) \text{ este par}\}$$

$$Y = \{v \in V \mid d(u_0, v) \text{ este impar}\}$$

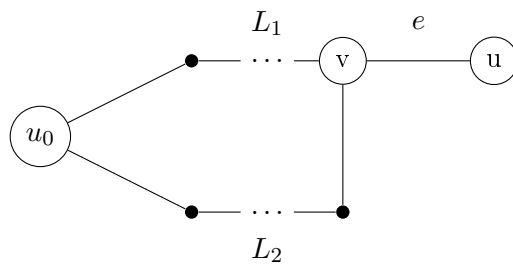
Este clar atunci că $X \cap Y = \emptyset$ și că $X \cup Y = V$. Vrem să arătăm că G este bipartit cu părțile X și Y , adică toate lui G muchiile au o extremitate în X și una în Y .

Fie $u \neq v$ două vârfuri din X . Presupunem că $e = uv$ este o muchie în G . Fie $L_1 = (u_0, \dots, u)$ și $L_2 = (u_0, \dots, v)$ drumurile de lungime minimă de la u_0 la u , respectiv v . Din definiția lui X , lungimile lui L_1 și L_2 , notate l_1 , respectiv l_2 , sunt ambele pare.

Considerăm mai întâi cazul când muchia e face parte din drumul L_1 . Deoarece vârfurile dintr-un drum nu se repetă și ultimul vârf din L_1 este u , rezultă că e este ultima muchie a lui L_1 .

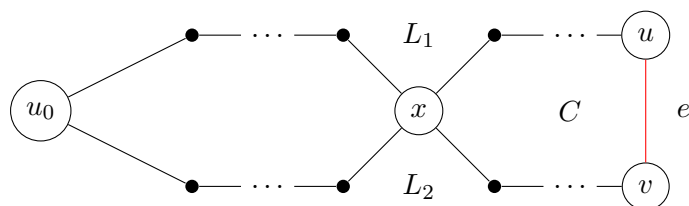
$L_1 - e$ este un drum de la u_0 la u , de lungime $l_1 - 1$. Din minimalitatea lui L_2 , rezultă $l_1 - 1 \geq l_2$.

Pe de altă parte, $L_2 + e$ este un drum de la u_0 la u de lungime $l_2 + 1$, deci $l_2 + 1 \geq l_1$, din minimalitatea lui L_1 .



Din cele două inegalități obținem că $l_1 \geq l_2 + 1 \geq l_1$, deci $l_1 = l_2 + 1$. Dar această egalitate nu poate avea loc, deoarece l_1 și l_2 sunt ambele pare. Așadar e nu este o muchie a lui L_1 și analog se arată că nu este muchie nici a lui L_2 .

Drumurile L_1 și L_2 pot avea vârfuri comune. Fie x ultimul vârf comun (măsurat dinspre u_0)



Din construcția lui x rezultă că în cele două drumuri de la x la u , respectiv v nu avem vârfuri comune. Așadar, drumurile $x - u$ și $x - v$ împreună cu muchia e formează un ciclu C .

Pe de altă parte, porțiunile din L_1 și L_2 de la u_0 la x au aceeași lungime l (dacă una dintre lungimi ar fi mai mică am putea scurta unul din drumurile către u sau v , contrazicând minimalitatea lor). Rezultă că drumurile $x - u$ și $x - v$ au lungimile $l_1 - l$, respectiv $l_2 - l$.

Cum l_1 și l_2 sunt ambele pare, numerele $l_1 - l$ și $l_2 - l$ au aceeași paritate. Rezultă atunci că lungimea lui C , egală cu $l_1 - l + l_2 - l + 1$, este număr impar. Deci C este un ciclu de lungime impară, contradicție.

Așadar, G nu conține muchii între vârfuri din X . Analog se arată că G nu conține muchii cu ambele extremități în Y . Deci G este bipartit cu părțile X și Y . ■

Corolarul 3.4. *Orice arbore este graf bipartit.*

Demonstrație. Arborii sunt aciclici, deci toate ciclurile au lungime 0, care este număr par. ■

4 Exerciții și probleme

Exercițiul 4.1. Fie $G = (V, E)$ un graf. Atunci:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

În particular, în orice graf există un număr par de vârfuri impare (i.e. cu gradul par).

Soluție. În suma din membrul stâng, fiecare muchie $e = uv$ este numărată de două ori: o dată în $\deg(v)$, o dată în $\deg(u)$. De aici, rezultă formula.

Mai riguros, considerăm $M = \{(v, e) \in V \times E \mid v \in e\}$. Calculăm cardinalul lui M în două moduri. Mai întâi numărăm elementele după vârfuri:

$$|M| = \sum_{v \in V} |\{(v, e) \in V \times E \mid v \in e\}| = \sum_{v \in V} |\{e \in E \mid v \in e\}| = \sum_{v \in V} \deg v$$

Apoi numărăm elementele după muchii:

$$|M| = \sum_{e \in E} |\{(v, e) \in V \times E \mid v \in e\}| = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|.$$

Pentru a doua afirmație, observăm că membrul drept al egalității este un număr par. Rezultă atunci că suma din dreapta trebuie să conțină un număr par de termeni impari, adică $d(v)$ este impar, pentru un număr par de vârfuri v . ■

Exercițiul 4.2. Fie $x \neq y$ două vârfuri într-un graf G . Dacă există un lanț de la x la y , atunci există un drum de la x la y .

Indicație. Fie L un lanț între x și y . Putem elimina porțiunea din L între două vârfuri repetate și rămânem în continuare cu un lanț. Repetând procedeul, rămânem cu un drum. ■

Exercițiul 4.3. Fie $V = [n]$. Arătați că există $2^{\binom{n-1}{2}}$ grafuri având mulțimea de vârfuri V astfel încât fiecare vârf are grad par.

Soluție (Schiță). $2^{\binom{n-1}{2}}$ este numărul de grafuri (fără restricții) ce pot fi construite cu pe vârfurile $[n-1]$. Unui graf G cu vârfurile $[n]$, cu toate gradele pare, îi asociem graful $G - n$, obținut prin eliminarea vârfului n (și toate muchiile incidente lui), ce are, evident vârfurile în $[n-1]$.

Invers, la un graf arbitrar G' cu vârfuri $[n-1]$ adăugăm vârful n și muchii de la n la toate vârfurile din G' cu gradul impar. Graful obținut astfel are toate gradele pare.

Cele două corespondențe sunt inverse una alteia, de unde rezultă concluzia. ■

Exercițiul 4.4. Fie $G = (V, E)$ un graf. Arătați că dacă fiecare vârf al lui G are gradul cel puțin 2, atunci G admite cicluri.

Soluție. Fie L un drum maximal al lui G și v o extremitate a acestui drum. Deoarece $d(v) \geq 2$, există cel puțin două vârfuri adiacente lui v . Fie v' vârful adiacent lui v din L și u unul dintre celelalte vârfuri adiacente lui v . Dacă u nu este un vârf al lui L , putem adăuga muchia uv la L și obținem un drum care conține strict L , contrazicând maximalitatea lui L . Rezultă astfel că u este un vârf al lui L (diferit de v și v'). Adăugând la porțiunea din drumul L dintre v și u muchia uv , obținem un ciclu din graful G . ■

Exercițiul 4.5 (Circuite euleriene). Prin circuit eulerian înțelegem un circuit care conține toate muchiile grafului. Arătați următoarea teoremă a lui Euler:

Un graf conex cu cel puțin două vârfuri admite un circuit eulerian dacă și numai dacă toate vârfurile sunt pare.

Soluție. Presupunem mai întâi că graful G admite un circuit eulerian L . În parcurgerea circuitului, fiecare muchie care "intră" într-un vârf este urmată de o muchie care "pleacă" din acel vârf. Deoarece L conține toate muchiile o singură dată, numărul de muchii din L (și deci din G) care intră într-un vârf va fi egal cu numărul de muchii care pleacă. Astfel, gradul fiecărui vârf este par.

Invers, să presupunem fiecare vârf al lui G este par. Plecând de la un vârf v și adăugând succesiv muchii putem forma un circuit (acest lucru este posibil deoarece numărul de muchii incident fiecărui vârf este par și pozitiv).

Graful G admite astfel circuite. Fie L un circuit maximal și să presupunem că L nu conține toate muchiile. Fie H graful format prin ștergerea muchiilor din L (păstrând astfel doar muchiile neutilizate și vârfurile lor).

Rezultă atunci că fiecare vârf din H are gradul pozitiv și par (deoarece în L apar un număr par de muchii prin fiecare vârf). ■

Exercițiul 4.6. Fie $T = (V, E)$ un arbore cu $|V| \geq 2$.

- (a) T are cel puțin două frunze (adică vârfuri de grad 1).
- (b) Dacă v este o frunză a lui T atunci $T - v$ este un arbore.

Soluție. (a) Considerăm $L = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ un drum de lungime maximală din T . Deoarece T are cel puțin două vârfuri, avem $r \geq 1$. Vom arăta că v_0 și v_r sunt frunze.

Să presupunem că $\deg v_0 \geq 2$. Există atunci două vârfuri legate prin muchii de v_0 . Unul dintre acestea fiind v_1 , rezultă că există $v \neq v_1$ astfel încât $vv_0 \in E$.

Dacă $v \neq v_2, \dots, v_r$, atunci $L' = (v, v_0, v_1, \dots, v_r)$ este un lanț de lungime $r + 1$, ceea ce contrazice maximalitatea lui L .

Deci v trebuie să fie unul dintre vârfurile v_j cu $j \in \{2, \dots, r\}$. Atunci $L' = (v_0, v_1, \dots, v_j, v_0)$ este un ciclu în T , contradicție. Deci $\deg v_0 \geq 2$. Analog se arată și că $\deg v_r \geq 2$.

(b) Eliminând vârful v din T (împreună cu unica muchie incidentă lui) obținem tot un graf aciclic. Rămâne să arătăm că este conex. Fie $u, u' \in T - v$. Deoarece T este conex, există un drum L de la u la u' în T .

Dacă L ar conține vârful v atunci prin v ar trece două muchii (dinspre u și dinspre u'), ceea ce contrazice ipoteza că v este frunză. Deci L nu conține v , adică este un drum din $T - v$. Așadar T este conex. ■

Exercițiul 4.7. Fie G un graf conex. Pentru două vârfuri x, y definim $d(x, y) \in \mathbb{N}$ lungimea minimă a drumurilor de la x la y .

- (a) Justificați că $d(x, y)$ este bine definit. Ce se întâmplă dacă G nu este conex.
- (b) Arătați că d este o metrică pe $V(G)$ adică:
 - (a) $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$.
 - (b) $d(x, y) = d(y, x)$, pentru orice $x, y \in V(G)$.
 - (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, pentru orice $x, y, z \in V(G)$.

Exercițiul 4.8. Fie G un graf cu n vârfuri, numerotate de la 1 la n . Din construcție, matricea de adiacență A a lui G depinde de numerotarea vârfurilor. Arătați că polinomul său caracteristic nu depinde de numerotare. În particular, $\text{tr}(A)$, $\det(A)$ și valorile proprii ale lui A (ca multiset) nu depind de numerotare.

- (a) Putem vedea matricea de adiacență ca matricea unui operator liniar $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (relativ la baza canonică). Renumerotarea vârfurilor revine la permutarea vectorilor din această bază, iar noua matrice de adiacență este matricea aceluiași operator dar relativ la baza canonică permutată. Cum polinomul caracteristic este invariant la schimbări de bază rezultă concluzia.

Exercițiul 4.9. Determinați polinoamele caracteristice ale matricei de adiacență asociate grafului complet K_n , respectiv, grafului complet bipartit $K_{n,m}$. Care sunt valorile proprii corespunzătoare?

Soluție. Matricea de adiacență A a lui K_n are 0 pe diagonala principală și 1 în rest, adică

$$A_{K_n} = B - I_n$$

unde B este matricea cu toate elementele egale cu 1.

Matricea B are rangul 1, de unde rezultă că 0 este valoare proprie pentru B cu multiplicitate $n - 1$. Valoarea proprie rămasă este n (suma valorilor proprii este $\text{tr}(B) = n$), deci polinomul caracteristic al lui B este

$$P_B(X) = \det(XI_n - B) = X^{n-1}(X - n)$$

Polinomul caracteristic al lui A_{K_n} va fi atunci

$$(X + 1)^{n-1}(X - n + 1)$$

Pentru graful complet bipartit $K_{n,m}$, numerotăm vârfurile părților $X = \{1, \dots, n\}, Y = \{n + 1, \dots, m\}$. Matricea de adiacență va avea forma:

$$A_{K_{n,m}} = \begin{pmatrix} O_n & B_{n,m} \\ B_{m,n} & O_m \end{pmatrix}$$

unde $B_{n,m}$ și $B_{m,n}$ sunt matrice de ordin $n \times m$, respectiv $m \times n$, cu toate elementele egale cu 1.

Matricea $A_{K_{n,m}}$ are rangul 2, deci 0 este o valoare proprie cu multiplicitate $m + n - 2$. Fie $\alpha \geq \beta$ celelalte două valori proprii.

Deoarece $\text{tr}(A_{K_{n,m}}) = 0$, avem $\alpha + \beta = 0$. Avem, de asemenea, $\text{tr}(A_{K_{n,m}}^2) = \alpha^2 + \beta^2$.

Pe de altă parte $\text{tr}(A_{K_{n,m}}^2)$ coincide cu numărul lanțurilor închise de lungime 2 din $K_{n,m}$. Dar acesta este dublul numărului de muchii, adică $2mn$.

Așadar $\alpha + \beta = 0$ și $\alpha^2 + \beta^2 = 2mn$, de unde rezultă că $\alpha = \sqrt{mn}, \beta = -\sqrt{mn}$. Polinomul caracteristic este atunci:

$$P_{A_{K_{n,m}}}(X) = X^{m+n-2}(X^2 - mn)$$

■

Exercițiul 4.10. Fie C_n graful ce constă dintr-un ciclu de lungime n și P_n graful ce constă doar dintr-un drum de lungime n (cu $n + 1$ vârfuri). Determinați polinoamele caracteristice ale matricelor de adiacență ale acestor grafuri.

Exercițiul 4.11. Fie G un graf cu n vârfuri și A matricea de adiacență asociată. Considerăm $k \geq 1$ și x, y două vârfuri ale lui G . Atunci elementul de pe poziția (x, y) din A^k este egal cu numărul de lanțuri de lungime k dintre x și y . În particular, $\text{tr}(A^k)$ este numărul de lanțuri închise de lungime k din graful G .

Exercițiul 4.12. Fie G un graf cu n vârfuri și A matricea sa de adiacență. Exprimați numărul de triunghiuri (cicluri de lungime 3) în funcție $\text{tr}(A^3)$.

Exercițiul 4.13. Fie G un graf cu n vârfuri și A matricea sa de adiacență. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) G este bipartit.
 - (b) Mulțimea valorilor proprii ale lui A este simetrică față de zero, adică dacă λ este o valoare proprie cu multiplicitatea m în polinomul caracteristic atunci și $-\lambda$ este valoare proprie cu aceeași multiplicitate.
- Care este forma polinomului caracteristic în această situație?

Exercițiul 4.14. Considerăm un graf cu vârfurile $V = [15]$ dat prin liste de vecini:

Varf	Vecini	Varf	Vecini	Varf	Vecini	Varf	Vecini
1	2,3	5	2,10,11	9	4	13	6
2	1,4,5	6	3,12,13	10	5	14	7
3	1,6,7	7	3,14,15	11	5	15	7
4	2,8,9	8	4	12	6		

Desenați graful, verificați că este un arbore și determinați codul Prüfer corespunzător.

Exercițiul 4.15. Considerăm un arbore cu codul Prüfer 25121989. Desenați acest arbore.

Exercițiul 4.16. Fie $n > 3$ și $1 \leq d \leq n - 1$. Câți arbori cu vârfuri în $[n]$ se pot construi astfel încât gradul vârfului 1 să fie d ?

Soluție. Un arbore cu vârful 1 având gradul d are codul Prüfer un cuvânt de $n - 2$ litere din $[n]$, în care 1 apare de exact $d - 1$ ori, iar restul literelor sunt arbitrare. Obținem astfel că numărul de arbori căutat este

$$\binom{n-2}{d-1}(n-1)^{n-d-1}$$

(alegem $d - 1$ dintre poziții în cuvânt pe care le completăm cu valoarea 1, iar restul de $(n - 2) - (d - 1) = n - d - 1$ poziții sunt completate cu oricare din celelalte litere, de la 2 la n). ■

Exercițiul 4.17. Fie G un arbore în care toate vârfurile au gradul cel mult 2. Determinați șirul gradelor corespunzător și desenați graful. Dacă vârfurile sunt numerotate de la 1 la n , câte astfel de grafuri există?

Exercițiul 4.18. Fie G un arbore cu n vârfuri și $\ell \geq 2$ frunze astfel încât gradul maxim al vârfurilor este 3. Arătați că G are exact $\ell - 2$ vârfuri de grad 3.

Exercițiul 4.19. Fie G un arbore cu vârfurile $[n]$, în care $1, 2, \dots, \ell$ sunt frunze, $\ell + 1, \dots, 2\ell - 2$ sunt vârfuri cu gradul 3, iar restul au gradul 2. Câți astfel de arbori există?

Exercițiul 4.20. Fie numerele naturale $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_7 \geq 1$ astfel încât $d_1 + \dots + d_7 = 12$. Arătați că există un arbore cu 7 vârfuri cu șirul gradelor $(d_1, \dots, d_7)$.

Exercițiul 4.21. Dacă un graf are n vârfuri și $n - 1$ muchii, rezultă că este conex sau aciclic?

Exercițiul 4.22. Arătați că un graf cu n vârfuri și n muchii admite măcar un ciclu.

Exercițiul 4.23. Fie G un graf bipartit cu părțile X și Y . Arătați că, dacă G este k -regulat (adică toate vârfurile au gradul k) atunci X și Y au același număr de vârfuri.

Exercițiul 4.24. Arătați că părțile unui graf conex bipartit sunt unic determinate. Rămâne adevărat rezultatul dacă fără ipoteza de conectivitate?

Exercițiul 4.25. Fie G un graf cu n vârfuri. Dacă G nu admite triunghiuri, arătați că G are cel mult $n^2/4$ muchii. Determinați graful în cazul de egalitate.

Exercițiul 4.26. Considerăm $\mathcal{P}([n])$, mulțimea submulțimilor lui $[n]$, ordonată prin incluziune. Diagrama Hasse asociată este graful H următor. Mulțimea vârfurilor este $V = \mathcal{P}([n])$, și trasăm o muchie de la A la B dacă $A \subsetneq B$ și nu există nicio submulțime C astfel încât $A \subsetneq C \subsetneq B$ (nu există C 'între' A și B).

- (a) Câte vârfuri și câte muchii are H ?
- (b) Admite H triunghiuri? Dar cicluri de lungime 4?
- (c) Este H bipartit?

Exercițiul 4.27. Fie $n \geq 3$. Atunci K_n nu este bipartit. Care este numărul minim de muchii care trebuie tăiate din K_n astfel încât să devină bipartit?