

Subiectul 1. Considerăm alfabetul $\mathcal{A} = \{X, Y, Z, W, U, V\}$. Determinați numărul următoarelor obiecte:

- (a) cuvinte de 4 litere se pot forma cu literele din $\mathcal{A}$.
- (b) cuvinte de 3 litere din $\mathcal{A}$, astfel încât fiecare literă să apară cel mult o dată.
- (c) cuvinte de 7 litere, care conțin 2 litere 'X', 1 literă 'Y' și restul literelor arbitrare din $\mathcal{A}$.
- (d) permutări ale cuvântului $UUUVVWWXYZ$.
- (e) cuvinte de 7 litere X, Y, Z astfel încât fiecare să apară cel puțin o dată.

Subiectul 2. Determinați numărul următoarelor configurații:

- (a) distribuții de 9 portocale (identice) la 4 copii astfel încât fiecare să primească cel puțin una.
- (b) distribuții de 12 fructe, 6 mere și 6 pere, la 3 copii astfel încât fiecare să primească cel puțin un fruct de fiecare tip.
- (c) distribuții ale 7 cadouri distincte la 4 persoane, astfel încât fiecare să primească cel puțin una.
- (d) aranjări de 25 farfurii identice pe 3 rafturi astfel încât pe fiecare raft să fie plasate să fie plasate cel mult 10 farfurii.

Subiectul 3. Calculați:

- (a) $\left\{ \begin{smallmatrix} 7 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\}$.
- (b) $p_5(11)$.

Subiectul 4. Arătați că din 52 de numere naturale, există două a căror sumă sau diferență se divide cu 100. Este concluzia adevărată pentru 51 de numere?

Subiectul 5. Calculați suma:

$$1^2 \binom{n}{1} + 2^2 \binom{n}{2} + \dots + k^2 \binom{n}{k} + \dots + n^2 \binom{n}{n}$$

Subiectul 6. (a) Determinați termenul general al șirului $(u_n)_{n \geq 0}$ dat prin $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n, n \geq 0$, cu termenii inițiali $u_0 = 2$ și $u_1 = 6$.

(b) Determinați o soluție particulară a recurenței $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 8v_n + 6n + 1, n \geq 0$.

(c) Determinați termenul general al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ dat prin $x_{n+2} = 9x_{n+1} - 8x_n + 6n + 1, n \geq 0$, cu termenii inițiali $x_0 = 5, x_1 = 11$.

Subiectul 7. Găsiți (și demonstrați) o formulă de calcul pentru $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\}$ (cu $n \geq 3$).