

1 Cuadrice pe ecuații reduse

Exercițiul 1. Pentru fiecare dintre quadricile următoare precizați natura lor, elementele lor de simetrie și determinați intersecțiile cu plane paralele cu cele de coordonate. Pentru cele riglate, determinați sistemele de generatoare rectilinii.

(i) $\Gamma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Soluție. Această quadrică este sfera cu centrul în origine $O(0, 0, 0)$ și rază $r = 2$.

Centrul de simetrie al sferei este centrul său, O , și orice plan care trece prin O este plan de simetrie.

Intersecția sa cu un plan (orice plan) poate fi un cerc, un punct, sau mulțimea vidă.

Spre exemplu să determinăm intersecția acestei sfere cu un plan de ecuație $\pi_k : z = k$ (unde k este un parametru real).

Avem:

$$P(x, y, z) \in \Gamma_1 \cap \pi_k \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = k \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 - k^2 \\ z = k \end{cases}$$

Cazul 1. $4 - k^2 < 0$, sau, echivalent, $k \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

În acest caz, intersecția este vidă (membrul stâng al primei ecuației din sistem este pozitiv, iar membrul drept este negativ).

Cazul 2. $4 - k^2 = 0$, sau, echivalent, $k \in \{-2, +2\}$.

În acest caz, intersecția $\Gamma_1 \cap \pi_k$ este formată doar din punctul de coordonate $(0, 0, k)$ (astfel planul π_k este tangent sferei),

Cazul 3. $4 - k^2 > 0$, sau echivalent, $k \in (-2, 2)$.

În acest caz, $\Gamma_1 \cap \pi_k$ este un cerc (în planul π_k), cu centrul în $(0, 0, k)$, și rază $\sqrt{4 - k^2}$.

Analog se determină și intersecțiile cu celelalte plane paralele cu planele de coordonate: $x = k$, respectiv $y = k$.

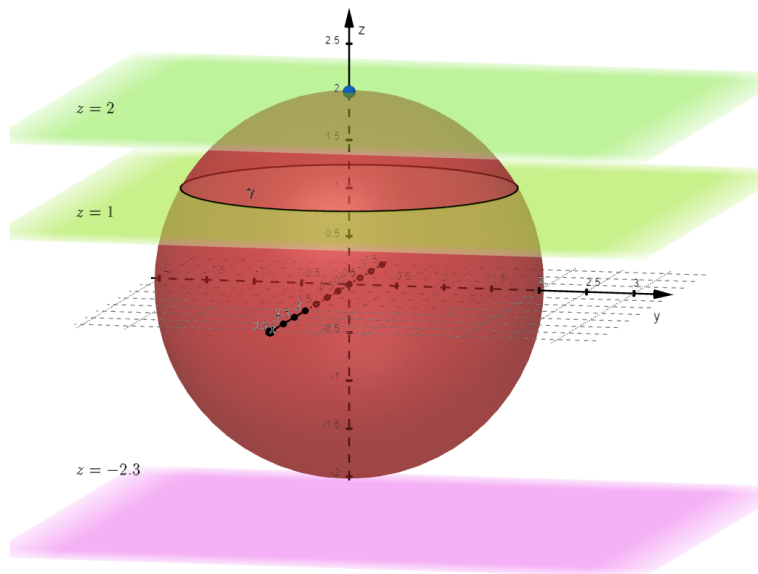


Fig. 1: (i) $\Gamma_1 \cap (\pi_{-2.3} : z = -2.3) = \emptyset$; (ii) $\Gamma_1 \cap (\pi_2 : z = 2)$ este punctul de coordonate $(0, 0, 2)$; (iii) $\Gamma_1 \cap (\pi_1 : z = 1)$ este cercul γ cu centrul $(0, 1, 0)$ și rază $r = \sqrt{3}$.

■

$$(ii) \Gamma_2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{25} = 1;$$

Soluție. Cuadricele Γ_2 este un elipsoid cu semiaxele $a = 2, b = \sqrt{3}, c = 5$. Centrul său de simetrie se obține rezolvând sistemul (unde $H(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{25} - 1$):

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x}{2} = 0 \\ \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{z}{25} = 0 \end{cases}$$

Obținem soluția $x = 0, y = 0, z = 0$, deci O este centrul de simetrie al elipsoidului.

Planele de simetrie sunt planele care trec prin centrul O și au direcțiile normale date de vectorii proprii asociați valorilor proprii nenule ale matricei formei pătratice din ecuația cuadrice:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

Cum matricea este diagonală valorile proprii sunt exact elementele de pe diagonala principală (care sunt toate nenule) iar vectorii proprii asociați vor fi (coliniari cu) $\vec{i}, \vec{j}$, respectiv $\vec{k}$. Astfel planele de simetrie ale elipsoidului vor fi planele de coordonate $x = 0, y = 0$, respectiv $z = 0$.

Secțiunile plane paralele cu planele de coordonate sunt sau o elipsă, sau un punct (dublu) sau mulțimea vidă.

Într-adevăr, fie $\alpha_k : x = k, \beta_k : y = k, \gamma_k : z = k$, unde k este un parametru real. Determinăm în continuare intersecțiile lui Γ_2 cu γ_k . Avem:

$$\Gamma \cap \gamma_k : \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{25} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 - \frac{k^2}{25} \end{cases}$$

Obținem astfel trei cazuri:

Cazul 1. $1 - \frac{k^2}{25} < 0$, sau, echivalent, $k \in (-\infty, -5) \cup (5, \infty)$.

În acest caz, intersecția este vidă (conica este o elipsă imaginară).

Cazul 2. $1 - \frac{k^2}{25} = 0$, sau, echivalent, $k \in \{-5, +5\}$.

În acest caz, intersecția $\Gamma_2 \cap \gamma_k$ este formată doar din punctul de coordonate $(0, 0, k)$, deci planul γ_k este tangent elipsoidului.

Cazul 3. $1 - \frac{k^2}{25} > 0$, sau, echivalent, $k \in (-5, 5)$.

În acest caz, $\Gamma_1 \cap \gamma_k$ este o elipsă (în planul $\gamma_k : z = k$), de ecuație:

$$\frac{x^2}{4 \left(1 - \frac{k^2}{25}\right)} + \frac{y^2}{3 \left(1 - \frac{k^2}{25}\right)} = 1$$

Centrul său de simetrie este $C(0, 0, k)$, semiaxele sunt:

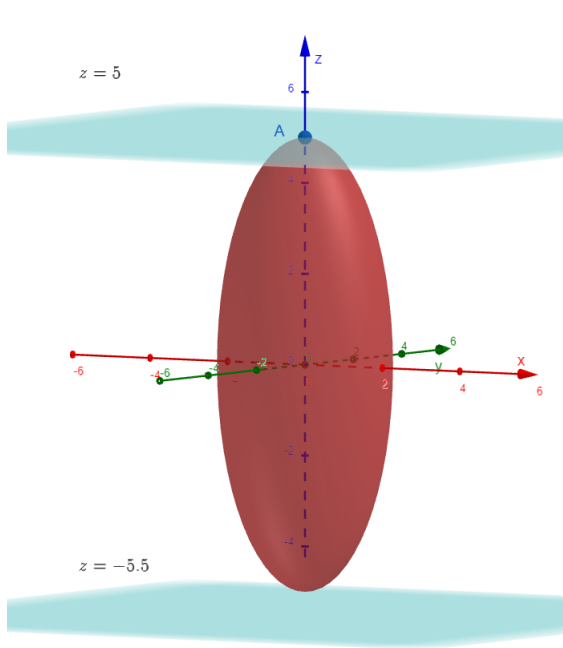
$$a = 2\sqrt{1 - \frac{k^2}{25}}, \quad b = \sqrt{3 \left(1 - \frac{k^2}{25}\right)}$$

iar axe de simetrie sunt:

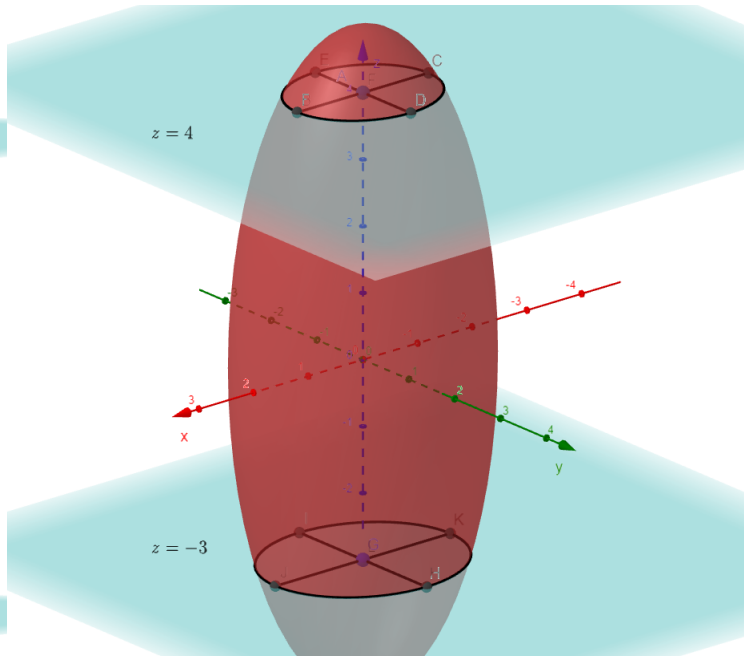
$$\begin{aligned} s_1 : (x, y, z) &= (0, 0, k) + t(1, 0, 0) \\ s_2 : (x, y, z) &= (0, 0, k) + t(0, 1, 0). \end{aligned}$$

(acestea sunt paralele la axele Ox , respectiv Oy prin centrul C).

În mod analog se determină și intersecțiile cu planele α_k , respectiv β_k . Aceste intersecții vor fi tot elipse, eventual degenerate (punct dublu) sau imaginare (conică vidă). ■



(a) $\Gamma_2 \cap (\gamma_{5.5} : z = 5.5)$
 $\Gamma_2 \cap (\gamma_5 : z = 5)$



(b) $\Gamma_2 \cap (\gamma_{-3} : z = -3)$
 $\Gamma_2 \cap (\gamma_{45} : z = 4)$

(iii) $\Gamma_3 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1.$

Soluție. Această cuadrică este un hiperboloid cu o pânză.

Centrul de simetrie se determină la fel ca la punctul precedent; obținem că originea $O(0, 0, 0)$ este centru de simetrie. Deoarece matricea formei pătratice este tot diagonală, planele de simetrie sunt tot cele de coordonate.

Determinăm acum intersecția lui Γ_3 cu planele $\gamma_k : z = k$ (unde k este un parametru real):

$$\Gamma_3 \cap \gamma_k : \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1 - \frac{k^2}{2} \end{cases}$$

Obținem astfel trei cazuri:

Cazul 1. $1 - \frac{k^2}{2} < 0$, sau, echivalent, $k \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

În acest caz, intersecția este hiperbola (conținută în γ_k):

$$-\frac{x^2}{16\left(\frac{k^2}{2} - 1\right)} + \frac{y^2}{8\left(\frac{k^2}{2} - 1\right)} = 1$$

cu elementele:

- semiaxele: $a = 4\sqrt{\frac{k^2}{2} - 1}, b = \sqrt{8\left(\frac{k^2}{2} - 1\right)}$;
- centrul de simetrie: $C(0, 0, k)$.
- vârfurile: $(0, \sqrt{8\left(\frac{k^2}{2} - 1\right)}, k), (0, -\sqrt{8\left(\frac{k^2}{2} - 1\right)}, k)$

- axele de simetrie sunt paralele prin C la Ox , respectiv Oy , de ecuații: $s_1 : \bar{r} = C(0, 0, k) + t\bar{i}$ și $s_2 : \bar{r} = C(0, 0, k) + t\bar{j}$ (axa focală este s_2).
- asimptotele:

$$a_{1,2} : \begin{cases} z = k \\ \frac{x}{4} = \pm \frac{y}{\sqrt{8}} \end{cases}$$

Cazul 2. $1 - \frac{k^2}{2} = 0 \iff k \in \{\pm\sqrt{2}\}$.

În acest caz intersecția este perechea de drepte:

$$a_{1,2} : \begin{cases} z = k \\ \frac{x}{4} = \pm \frac{y}{\sqrt{8}} \end{cases}$$

ce sunt concurente în punctul $(0, 0, k)$. Observăm că aceste drepte sunt paralele cu asimptotele hiperbolelor de la cazul 1 și cazul 3.

Cazul 3. $1 - \frac{k^2}{2} > 0 \iff k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

În acest caz, intersecția este hiperbola (conținută în γ_k):

$$\frac{x^2}{16\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)} - \frac{y^2}{8\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)} = 1$$

cu elementele:

- semiaxele: $a = 4\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}, b = \sqrt{8\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)}$;
- centrul de simetrie: $C(0, 0, k)$.
- vârfurile: $(4\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}, 0, k), (-4\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}}, 0, k)$
- axele de simetrie sunt paralele prin C la Ox , respectiv Oy , de ecuații: $s_1 : \bar{r} = C(0, 0, k) + t\bar{i}$ și $s_2 : \bar{r} = C(0, 0, k) + t\bar{j}$ (axa focală este de data aceasta s_1).
- asimptotele:

$$a_{1,2} : \begin{cases} z = k \\ \frac{x}{4} = \pm \frac{y}{\sqrt{8}} \end{cases}$$

Intersecția cu planul de ecuație $\alpha_k : x = k$ este conica de ecuație:

$$\Gamma_3 \cap \alpha_k : \begin{cases} x = k \\ -\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1 - \frac{k^2}{16} \end{cases}$$

Similar cu cazul precedent, această secțiune va fi hiperbolă (pentru $x \neq \pm 4$) sau drepte concurente (pentru $x = \pm 4$).

Intersecția cu planul $\beta_k : y = k$ este conica de ecuație:

$$\Gamma_3 \cap \beta_k : \begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{2} = 1 + \frac{k^2}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{16\left(1 + \frac{k^2}{8}\right)} + \frac{z^2}{2\left(1 + \frac{k^2}{8}\right)} = 1 \end{cases}$$

Această secțiune este astfel o elipsă cu:

- semiaxele $a = 4\sqrt{1 + \frac{k^2}{8}}$, respectiv $b = \sqrt{2\left(1 + \frac{k^2}{8}\right)}$.
- centrul $C(0, k, 0)$.

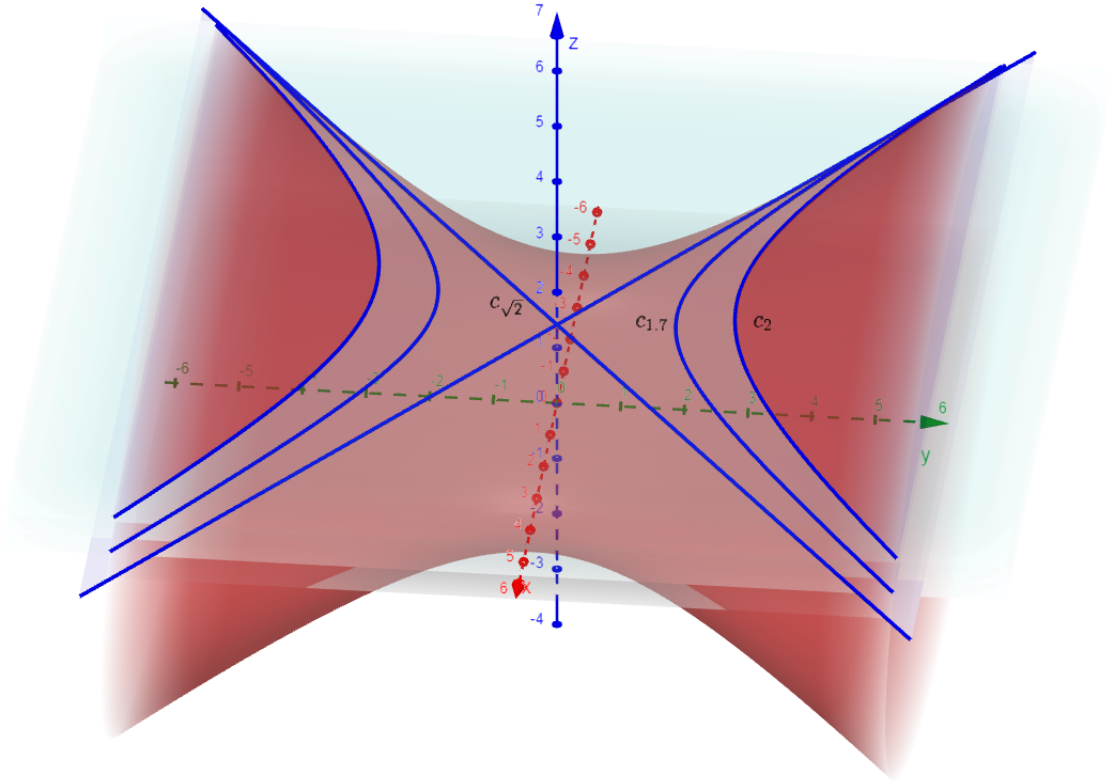


Fig. 3: $c_k = \Gamma_3 \cap (\gamma_k : z = k)$, pentru $k \in \{2, 1.7, \sqrt{2}\}$

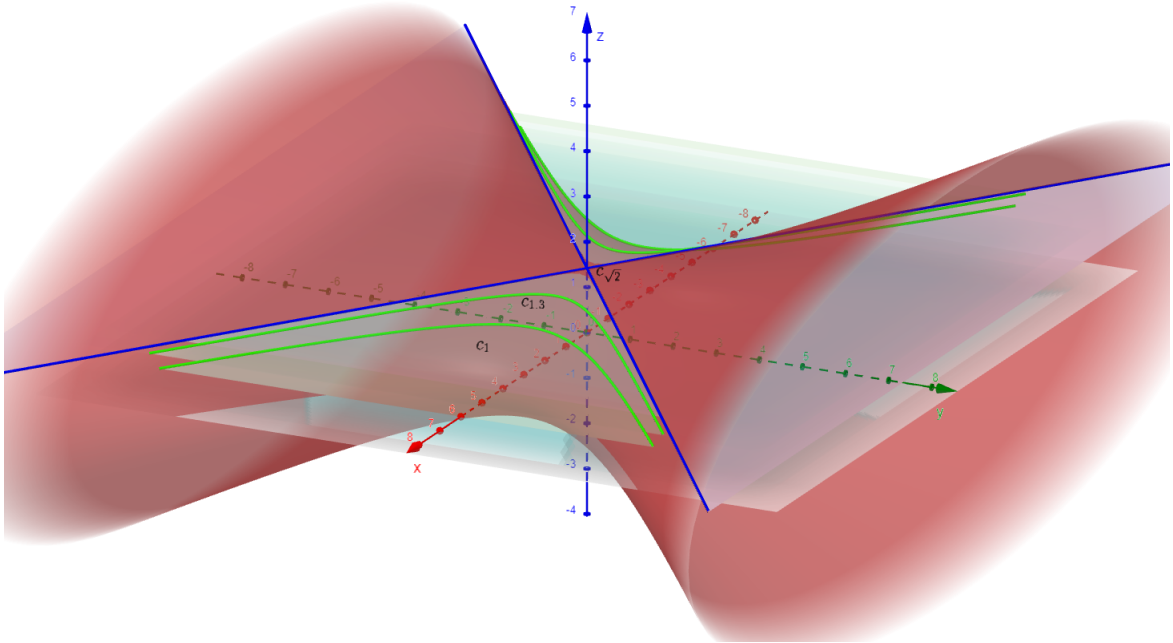


Fig. 4: $c_k = \Gamma_3 \cap (\gamma_k : z = k)$, pentru $k \in \{\sqrt{2}, 1.3, \sqrt{2}\}$

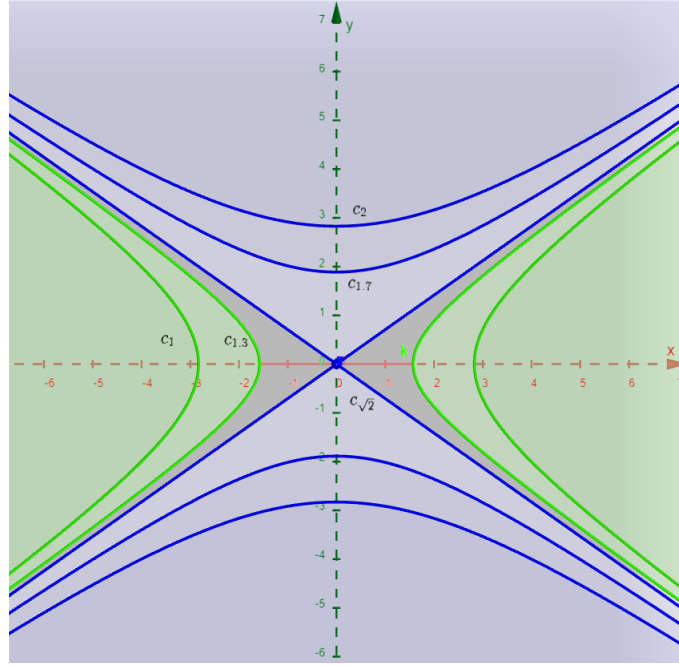


Fig. 5: proiecțiile curbilor c_k pe planul xOy sunt hiperbolele cu asimptotele $\frac{x}{4} = \pm \frac{y}{\sqrt{8}}$

- axele de simetrie $s_1 = C + [(1, 0, 0)]$, $s_2 = C + [(0, 0, 1)]$ (paralele prin C la Ox și Oz).

Cuadricea Γ_3 este riglată, admitând două sisteme de generatoare, pe care le determinăm în continuare. Putem transforma ecuația cuadricei astfel:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1 \iff \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2\sqrt{2}}\right) = \left(1 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

Obținem astfel o familie de generatoare:

$$\delta_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2\sqrt{2}} = \lambda \left(1 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Pentru $\lambda = 0, \infty$ obținem dreptele

$$\delta_0 : \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2\sqrt{2}} = 0 \\ 1 + \frac{z}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}, \quad \delta_\infty : \begin{cases} 1 - \frac{z}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

Pe de altă parte din ecuația cuadricei putem găsi încă o familie de generatoare:

$$\delta'_\mu : \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2\sqrt{2}} = \mu \left(1 + \frac{z}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Pentru $\mu = 0, \infty$ găsim dreptele

$$\delta'_0 : \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2\sqrt{2}} = 0 \\ 1 - \frac{z}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}, \quad \delta'_\infty : \begin{cases} 1 + \frac{z}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

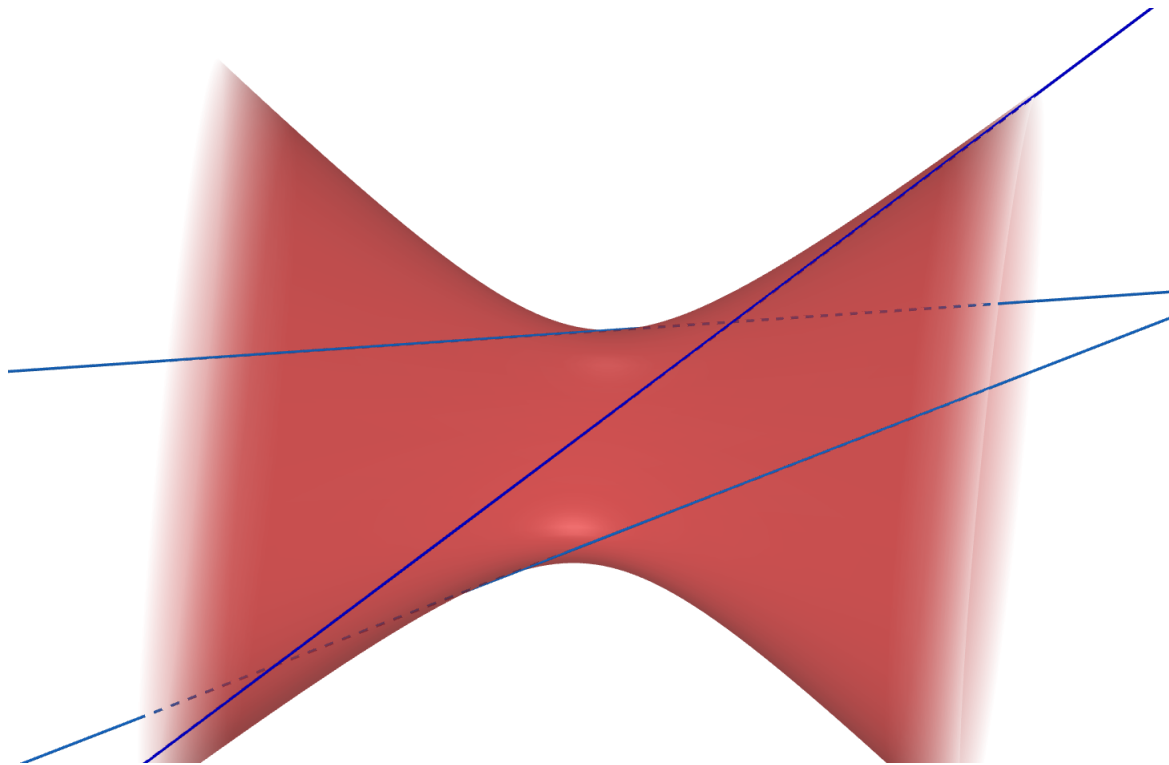


Fig. 6: Generatoare ale hiperboloidului

■

$$(iv) \quad \Gamma_4 : \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{8} = 1.$$

Soluție. Această cuadrică este un hiperboloid cu două pânze. Elementele de simetrie sunt similare cu cele de la punctele precedente: centrul este $O(0, 0, 0)$, iar planele de coordonate sunt planele de simetrie.

Secțiunile cu planele $\alpha_k : x = k$ sunt conicele de ecuații:

$$\Gamma_4 \cap \alpha_k : \begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = \frac{k^2}{2} - 1 \end{cases}$$

- Pentru $\frac{k^2}{2} > 1$, obținem elipse cu centrul $C(k, 0, 0)$ și axe de simetrie paralele cu Oy , respectiv Oz (paralela la Oz este axa focală).
- Pentru $\frac{k^2}{2} = 1$, intersecția este un punct dublu (adică α_k este tangent quadricii).
- Pentru $\frac{k^2}{2} < 1$, obținem conice vide (elipse imaginare).

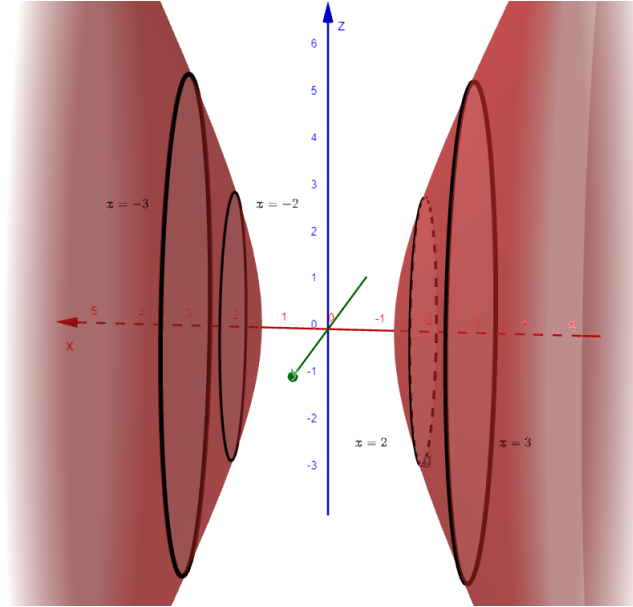


Fig. 7: Elipsele $\Gamma_4 \cap \alpha_k : x = k$, pentru $k \in \{-3, -2, 2, 2\}$

Intersecțiile cu plane de forma $\beta_k : y = k$ sunt:

$$\Gamma_4 \cap \beta_k : \begin{cases} y = k \\ x^2 - \frac{z^2}{8} = 1 + \frac{k^2}{4} \end{cases}$$

Aceste ecuații descriu hiperbole cu centrul $C(0, k, 0)$ și axele paralele cu Ox , respectiv Oz (paralela la Ox este axa focală) și asimptotele

$$a_{1,2} : \begin{cases} y = k \\ x = \pm \frac{z}{\sqrt{8}} \end{cases}$$

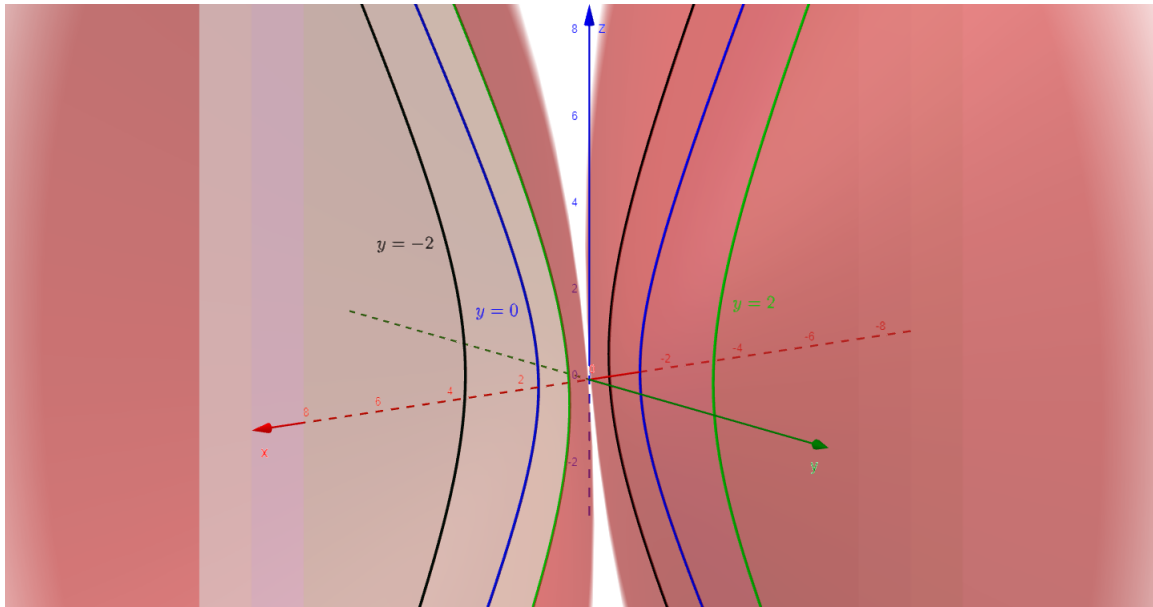


Fig. 8: Hiperbolele $\Gamma_4 \cap \beta_k : y = k$, pentru $k \in \{-2, 0, 2\}$

Similar, intersecțiile cu planele $\gamma_k : z = k$ au ecuațiile

$$\Gamma_4 \cap \gamma_k : \begin{cases} z = k \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{k^2}{8} \end{cases}$$

ce descriu hiperbole cu centrul $C(0, 0, k)$ și axele paralele cu Ox și Oz (axa focală este paralela la Ox) și asimptote

$$a_{1,2} : \begin{cases} z = k \\ x = \pm \frac{y}{2} \end{cases}$$

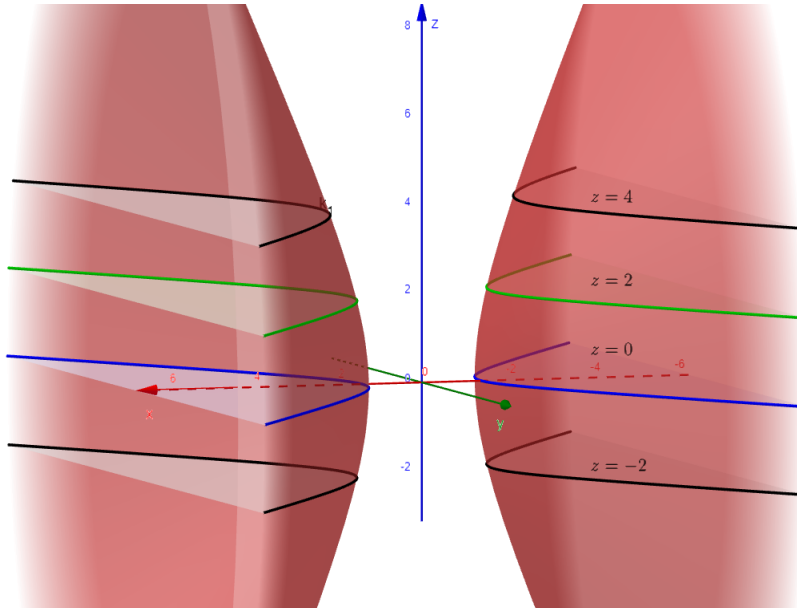


Fig. 9: Hiperbolele $\Gamma_4 \cap \gamma_k : z = k$, pentru $k \in \{-2, 0, 2, 4\}$

■

$$(v) \Gamma_5 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 2z;$$

Soluție. Cuadricele este un paraboloid eliptic.

Intersecția lui Γ_5 cu planul $\alpha_k : x = k$ este conica

$$\Gamma_5 \cap \alpha_k : \begin{cases} x = k \\ y^2 = 6 \left(z - \frac{k^2}{8} \right) \end{cases}$$

Aceasta este o parabolă cu parametrul $p = 3$, vârful $V \left(k, 0, \frac{k^2}{8} \right)$. Axa de simetrie este paralela prin vârf la Oz , i.e. $s : x = k, y = 0$.

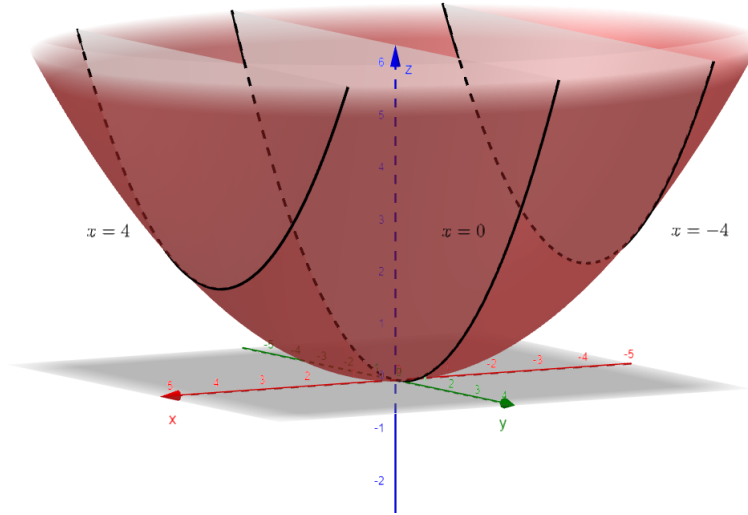


Fig. 10: Parabolele $\Gamma_5 \cap \alpha_k : x = k$, pentru $k \in \{-4, 0, 4\}$

Similar se determină și intersecțiile cu planele $\beta_k : y = k$ (se obțin tot parabole).

Intersecția cu planul $\gamma_k : z = k$ este conica:

$$\Gamma_5 \cap \gamma_k : \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 2k \end{cases}$$

Avem următoarele cazuri:

Cazul 1 $k < 0$. Intersecția este o conică vidă (elipsă imaginară).

Cazul 2 $k = 0$. Intersecția este punctul dublu (elipsă degenerată) $(0, 0, 0)$.

Cazul 3 $k > 0$. Intersecția este elipsă cu:

- semiaxele $a = 2\sqrt{2k}$, $b = \sqrt{6k}$.
- centrul $(0, 0, k)$.
- axele de simetrie $C + [\bar{i}]$ (axa focală), respectiv $C + [\bar{j}]$.

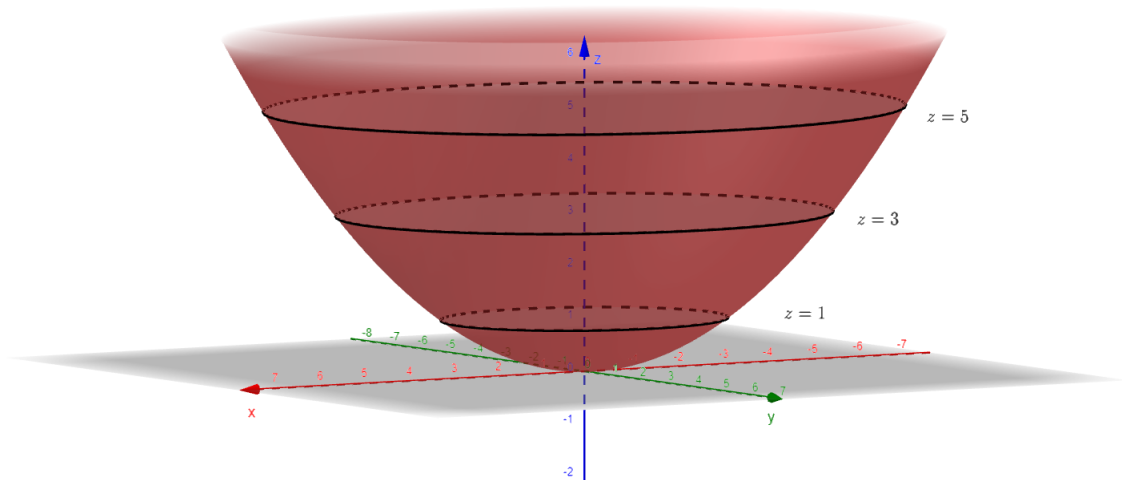


Fig. 11: Elipsele $\Gamma_5 \cap \gamma_k : z = k$, pentru $k \in \{1, 3, 5\}$

Notăm $H(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 2z$. Rezultă imediat că Γ_5 nu are centru de simetrie (ecuația $\frac{\partial H}{\partial z} = 0$ devine $-2 = 0$). Cuadricea are însă două plane de simetrie: $x = 0$ și $y = 0$. ■

$$(vi) \Gamma_6 : \frac{x^2}{9} - y^2 = 2z;$$

Soluție. Cuadrice este un paraboloid hiperbolic. Similar cu paraboloidul eliptic, aceasta nu are centru de simetrie, dar are două plane de simetrie $x = 0$ și $y = 0$.

Intersecția cu planul $\alpha_k : x = k$ este conica:

$$\Gamma_6 \cap \alpha_k : \begin{cases} x = k \\ y^2 = -2 \left(z - \frac{k^2}{18} \right) \end{cases}$$

Aceasta este o parabolă cu parametrul $p = 1$, vârful $V \left(k, 0, \frac{k^2}{18} \right)$. Axa de simetrie este $V + [\bar{k}]$, paralela prin V la Oz . Observăm că aceste parabole sunt orientate în sensul negativ de parcurgere al axei Oz (ele sunt situate sub cota $z = \frac{k^2}{18}$).

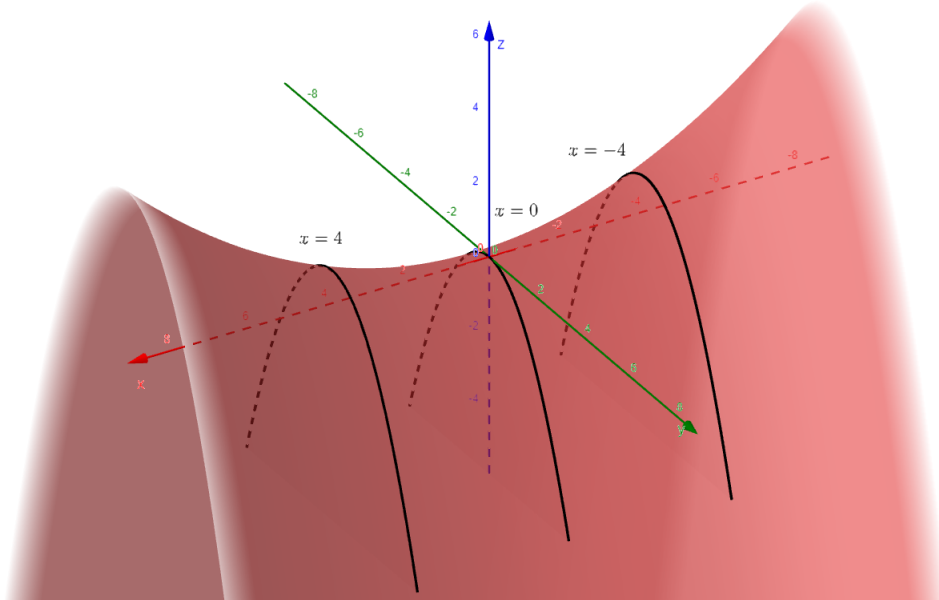


Fig. 12: Parabolele $\Gamma_6 \cap \alpha_k : x = k$, pentru $k \in \{-4, 0, 4\}$

Intersecția cu planul $\beta_k : y = k$ este conica

$$\Gamma_6 \cap \beta_k : \begin{cases} y = k \\ x^2 = 18 \left(z + \frac{k^2}{2} \right) \end{cases}$$

Aceasta este o parabolă cu parametrul $p = 9$, vârful $V \left(0, k, -\frac{k^2}{2} \right)$. Axa de simetrie este $V + [\bar{k}]$, paralela prin V la Oz . Observăm că aceste parabole sunt orientate în sensul pozitiv parcurgere al axei Oz (ele sunt deasupra cotei $z = \frac{k^2}{18}$).

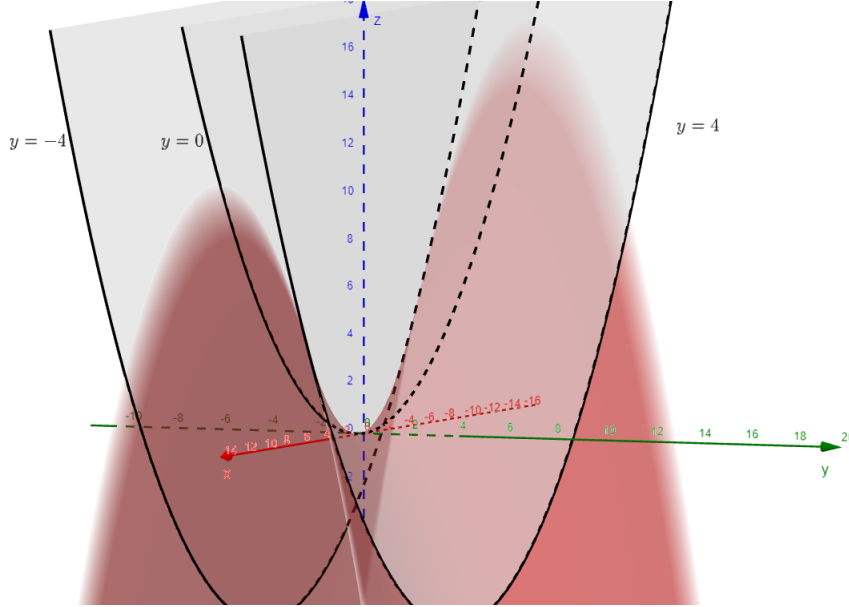


Fig. 13: Parabolele $\Gamma_6 \cap \beta_k : y = k$, pentru $k \in \{-4, 0, 4\}$

Intersecția cuadricei cu planul $\gamma_k : z = k$ este conica

$$\Gamma_6 \cap \alpha_k : \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{9} - y^2 = 2k \end{cases}$$

ce este o hiperbolă (eventual degenerată). Mai precis avem:

Cazul 1. $k < 0$.

Ecuatiile conice sunt:

$$\begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{-18k} - \frac{y^2}{-2k} + 1 = 0 \end{cases}$$

Intersecția este o hiperbolă cu următoarele elemente.

- semiaxele sunt $a = 3\sqrt{-2k}$, $b = \sqrt{-2k}$.
- centrul este $C(0, 0, k)$ și vârfurile sunt $(0, \pm\sqrt{-2k}, k)$.
- axele de simetrie sunt $s_1 = C + [i]$ și $s_2 = C + [j]$, paralele prin C la Ox și Oy . Axa focală este s_2 (cea care conține vârfurile).
- asimptotele sunt

$$a_{1,2} : \begin{cases} z = k \\ \frac{x}{3} = \pm y \end{cases}$$

Cazul 2. $k = 0$.

În acest caz, intersecția este perechea de drepte concurente

$$a_{1,2} : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{3} = \pm y \end{cases}$$

Cazul 3. $k > 0$.

Ecuatiile conice sunt:

$$\begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{18k} - \frac{y^2}{2k} - 1 = 0 \end{cases}$$

Intersecția este o hiperbolă cu următoarele elemente.

- semiaxe sunt $a = 3\sqrt{2k}, b = \sqrt{2k}$.
- centrul este $C(0, 0, k)$ și vârfurile sunt $(\pm 3\sqrt{2k}, 0, k)$.
- axe de simetrie sunt $s_1 = C + [i]$ și $s_2 = C + [j]$, paralele prin C la Ox și Oy . Axa focală este s_1 (cea care conține vârfurile).
- asimptotele sunt

$$a_{1,2} : \begin{cases} z = k \\ \frac{x}{3} = \pm y \end{cases}$$

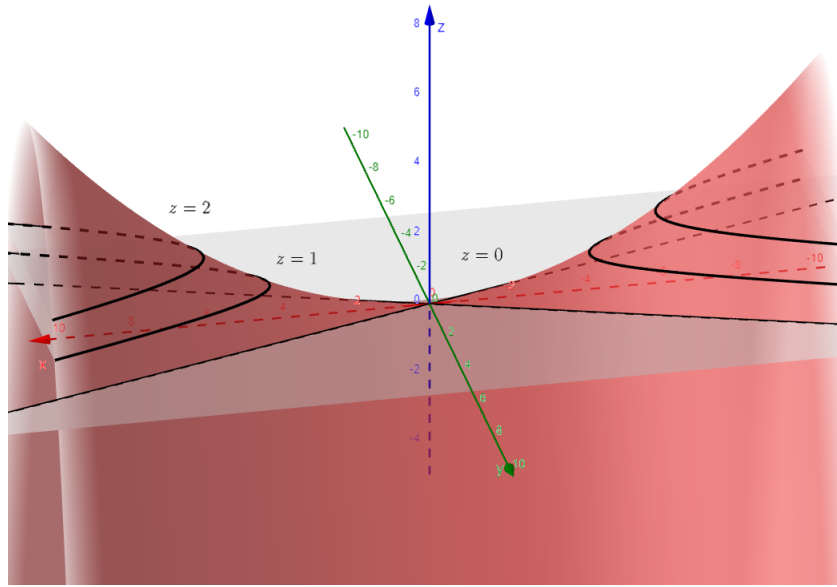


Fig. 14: Hiperbolele $\Gamma_6 \cap \gamma_k : z = k$, pentru $k \in \{0, 1, 2\}$

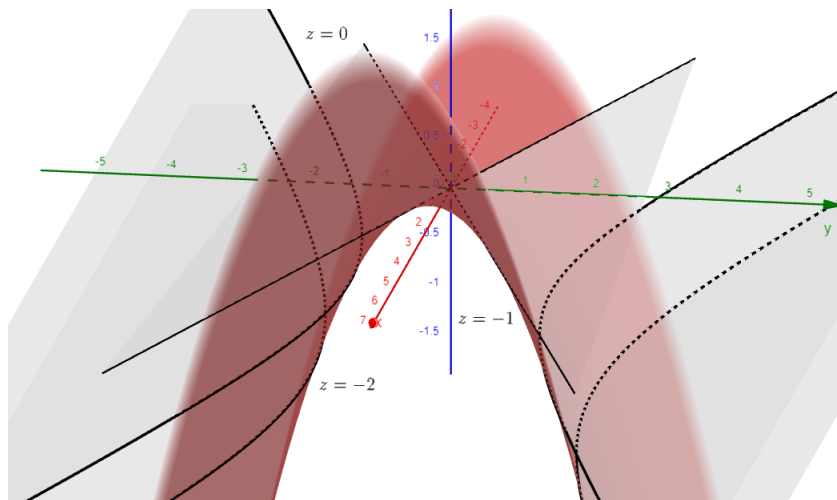


Fig. 15: Hiperbolele $\Gamma_6 \cap \gamma_k : z = k$, pentru $k \in \{-2, 0, 1\}$

Cuadricele Γ_6 este riglată și admite două sisteme de generatoare. Pentru a le determina rescriem ecuația cuadrice astfel

$$\left(\frac{x}{3} - y\right) \left(\frac{x}{3} + y\right) = 2z$$

Obținem astfel o familie de generatoare

$$\delta_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{3} - y = 2\lambda \\ \frac{x}{3} + y = \frac{z}{\lambda} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Pentru $\lambda = 0$ obținem dreapta

$$\delta_0 : \begin{cases} \frac{x}{3} - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Pentru $\lambda = \infty$, sistemul de ecuații este incompatibil:

$$\begin{cases} 0 = 2 \\ \frac{x}{3} + y = 0 \end{cases}$$

Cealaltă familie de generatoare este

$$\delta'_\mu : \begin{cases} \frac{x}{3} - y = \mu z \\ \frac{x}{3} + y = \frac{2}{\mu} \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}^* \cup \{\infty\}$$

Pentru $\mu = \infty$, găsim dreapta

$$\delta'_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{3} + y = 0 \end{cases}$$

Observăm de asemenea că pentru $\mu = 0$, sistemul care definește dreapta δ'_μ este incompatibil:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - y = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

■

(vii) $\Gamma_7 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0;$

Soluție. Cuadrice este un con pătratic. Originea $O(0, 0, 0)$ este centru de simetrie, iar planele de coordonate sunt plane de simetrie.

Intersecția cu planul $\alpha_k : x = k$ este conica

$$\Gamma_7 \cap \alpha_k : \begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} + \frac{k^2}{4} = 0 \end{cases}$$

Pentru $k \neq 0$, obținem o hiperbolă cu:

- semiaxe $a = 2|k|, b = \frac{3}{2}|k|$.
- centrul de simetrie $C(k, 0, 0)$ și vârfurile $\left(k, 0, \pm \frac{3}{2}k\right)$
- axele de simetrie $s_1 = C + [\vec{j}]$ și $s_2 = C + [\vec{k}]$. Axa focală este s_2 .
- asimptotele

$$a_{1,2} : \begin{cases} x = k \\ \frac{y}{4} = \pm \frac{z}{3} \end{cases}$$

Pentru $k = 0$, intersecția este perechea de drepte concurente:

$$a_{1,2} : \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y}{4} = \pm \frac{z}{3} \end{cases}$$

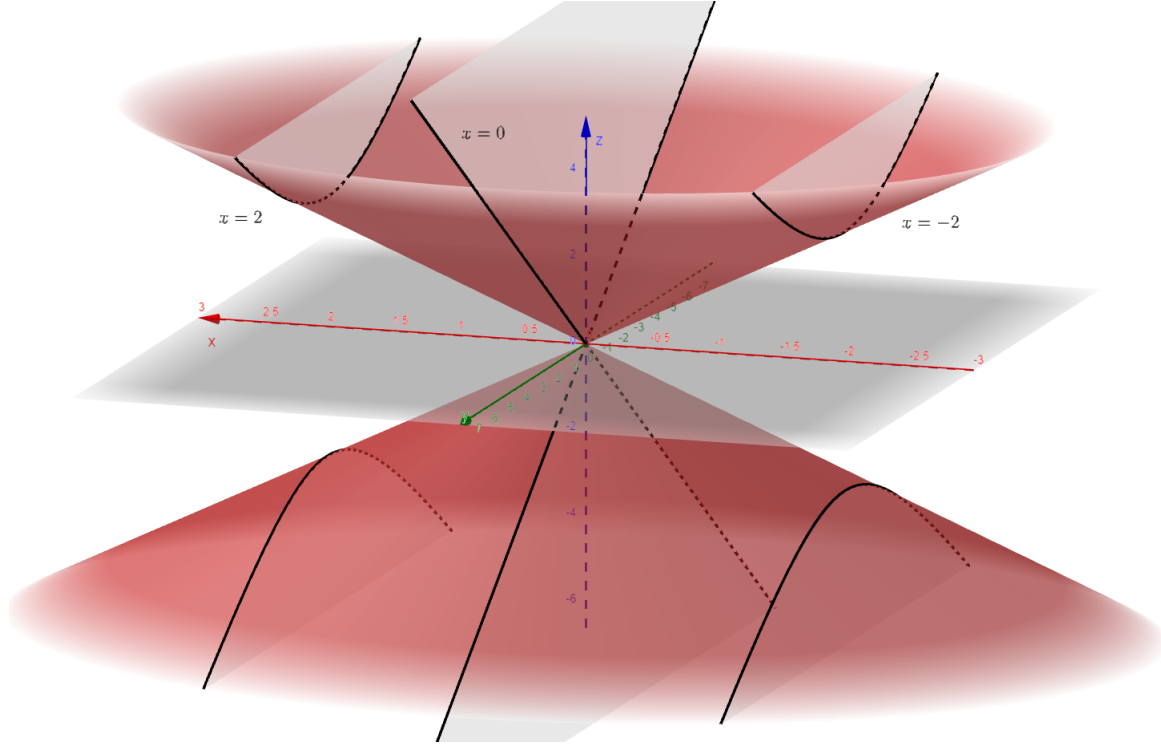


Fig. 16: Intersecțiile $\Gamma_7 \cap \gamma_k : x = k$, pentru $k \in \{-2, 1, 2\}$

Intersecția cu planul $\beta_k : y = k$ este conica

$$\Gamma_7 \cap \beta_k : \begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} + \frac{k^2}{16} = 0 \end{cases}$$

Pentru $k \neq 0$, obținem o hiperbolă cu:

- semiaxele $a = \frac{|k|}{2}, b = \frac{3|k|}{4}$.
- centrul de simetrie $C(0, k, 0)$ și vârfurile $\left(0, k, \pm \frac{3}{4}k\right)$
- axele de simetrie $s_1 = C + [\vec{i}]$ și $s_2 = C + [\vec{k}]$. Axa focală este s_2 .
- asimptotele

$$a_{1,2} : \begin{cases} y = k \\ \frac{x}{2} = \pm \frac{z}{3} \end{cases}$$

Pentru $k = 0$, intersecția este perechea de drepte concurente:

$$a_{1,2} : \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{2} = \pm \frac{z}{3} \end{cases}$$

Intersecția cu planul $\gamma_k : z = k$ este conica:

$$\Gamma_7 \cap \gamma_k : \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{k^2}{9} = 0 \end{cases}$$

Pentru $k \neq 0$ obținem o elipsă, iar pentru $k = 0$ obținem un punct dublu, vârful conului $O(0, 0, 0)$.

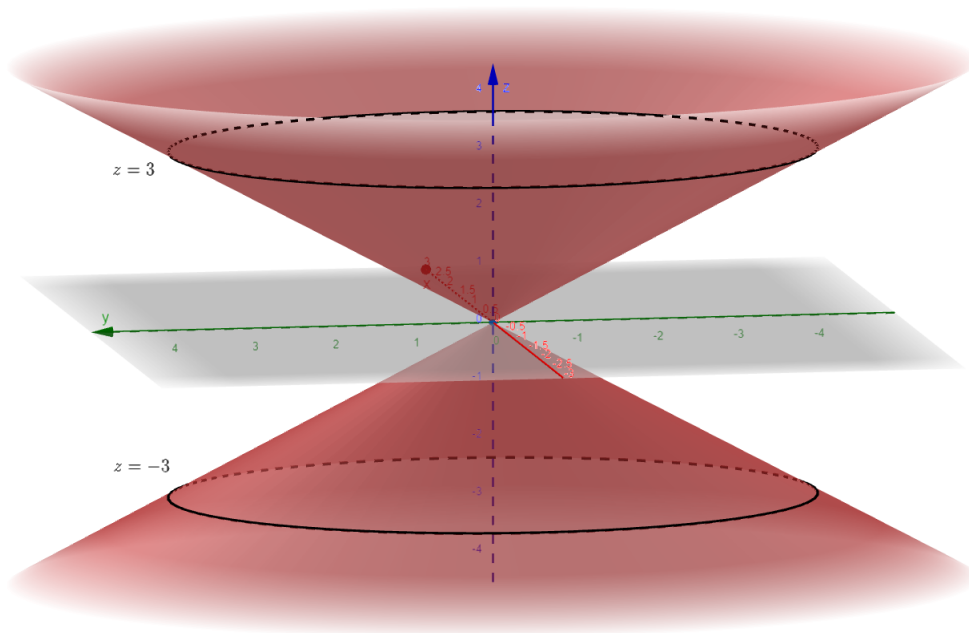


Fig. 17: Intersecțiile $\Gamma_7 \cap \gamma_k : z = k$, pentru $k \in \{-3, 3\}$

Conul este o cuadrică riglată, generată de o singură familie de generatoare. Acestea sunt dreptele care trec prin origine și intersectează elipsa

$$\begin{cases} z = 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{1}{9} = 0 \end{cases}$$

Acestea au ecuațiile:

$$\begin{cases} \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{1} \end{cases}$$

unde $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{16} = \frac{1}{9}$.

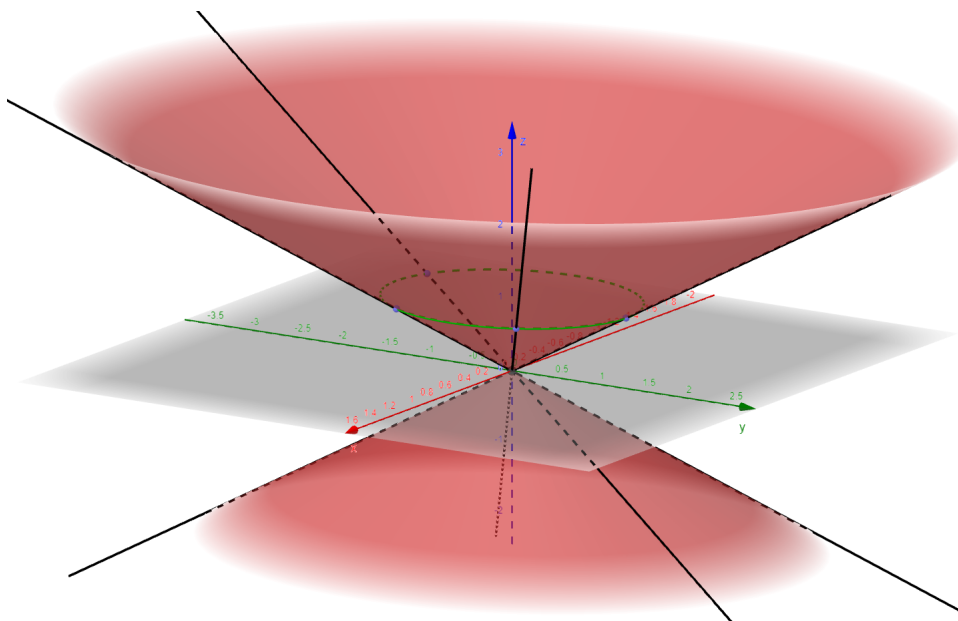


Fig. 18: Generatoare ale conului Γ_7

(viii) $\Gamma_8 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1;$

Soluție. Cuadricele este un cilindru eliptic. Toate punctele de pe axa Oz sunt centre de simetrie. Orice plan paralel cu Oxy este plan de simetrie. De asemenea, $x = 0$ și $y = 0$ sunt plane de simetrie.

Intersecția cu planul $\alpha_k : x = k$ este

$$\Gamma_8 \cap \alpha_k : \begin{cases} x = k \\ \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{k^2}{2} \end{cases}$$

Avem următoarele cazuri:

Cazul 1. $1 - \frac{k^2}{2} > 0 \iff k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$

Intersecția este atunci reuniunea dreptelor paralele (cu Oz):

$$\begin{cases} x = k \\ y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{k^2}{2}} \end{cases}$$

Cazul 2. $1 - \frac{k^2}{2} = 0 \iff k = \pm\sqrt{2}.$

Intersecția este dreapta dublă:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 0 \end{cases}$$

Cazul 3. $1 - \frac{k^2}{2} < 0 \iff |k| > \sqrt{2}.$

Intersecția este vidă (o pereche de drepte paralele imaginare).

Intersecția cu planul $\beta_k : y = k$ se determină similar. Ea va fi tot o pereche de drepte paralele cu Oz , sau o dreaptă dublă sau o pereche de drepte imaginare.

Intersecția cu planul $\gamma_k : z = k$ este elipsa

$$\Gamma_8 \cap \gamma_k : \begin{cases} z = k \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Cilindrul Γ_8 este o cuadrice riglată, generată de o familie de drepte paralele cu Oz care trec prin punctele elipsei

$$\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Exercițiul 2. Studiați intersecțiile dintre următoarele quadrice și plane:

(A) $(\Gamma) : \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 3z; (\pi) y = 2;$

(B) $(\Gamma) : \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0; (\pi) z = 4;$

Soluție. (i) Avem:

$$\begin{cases} y = 2 \\ \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ x^2 = 18 \left(z + \frac{1}{3} \right) \end{cases}$$

Astfel, intersecția este o parabolă cu parametrul $p = 9$, vârful $V \left(0, 2, -\frac{1}{3} \right)$ și axa de simetrie $x = 0, y = 2$.

(ii) Avem:

$$\begin{cases} z = 4 \\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 \\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{49} - \frac{9}{25} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 \\ \frac{x^2}{64 \cdot \frac{9}{25}} + \frac{y^2}{49 \cdot \frac{9}{25}} - 1 = 0 \end{cases}$$

Intersecția este o elipsă cu

- semiaxele $a = \frac{24}{5}, b = \frac{21}{5}$.
- centrul $C(0, 0, 4)$ și vârfurile $\left(\pm \frac{24}{5}, \pm \frac{21}{5}, 4 \right)$.
- axele de simetrie $C + [\vec{i}]$ (axa focală), $C + [\vec{j}]$.

■

Exercițiul 3. Demonstrați că dreapta AB este tangentă elipsoidului $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$, unde $A(2, 3, 6), B(2, \frac{1}{2}, 1)$.

Soluție. Vom demonstra că dreapta AB intersectează elipsoidul într-un singur punct. Ecuațiile dreptei AB sunt

$$\begin{cases} x = 2 + t(2 - 2) \\ y = 3 + t \left(3 - \frac{1}{2} \right) \\ z = 6 + t(6 - 1) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Intersectând elipsoidul cu această dreaptă obținem sistemul:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + \frac{5}{2}t \\ z = 6 + 5t \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0 \end{cases}$$

Înlocuind x, y, z în ultima ecuație, găsim:

$$\frac{1}{9} \left(3 + \frac{5}{2}t \right)^2 + \frac{1}{16} (6 + 5t)^2 = 0$$

Deoarece pătratele sunt pozitive, această ecuație este echivalentă cu:

$$\begin{cases} 5t + 6 = 0 \\ \frac{5}{2}t + 3 = 0 \end{cases} \iff t = -\frac{6}{5}.$$

Înlocuind în sistemul original găsim $x = 2, y = 0, z = 0$. Rezultă că AB este tangentă elipsoidului în punctul $P(2, 0, 0)$. ■

Exercițiul 4. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât planul $(\pi) : x + 2y + 4z - m = 0$ să fie tangent elipsoidului $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0$.

Soluție. Considerăm un punct arbitrar $P(x_0, y_0, z_0)$ al elipsoidului. Ecuația planului tangent în P la elipsoidului are ecuația obținută prin dedublare:

$$\text{tg}_P : \frac{1}{48}x_0x + \frac{1}{12}y_0y + \frac{1}{3}z_0z - 1 = 0$$

Amintim că două plane coincid dacă și numai dacă ecuațiile care le definesc sunt proporționale. Astfel, impunând condiția ca tg_P să coincidă cu π , obținem relațiile:

$$\frac{\frac{1}{48}x_0}{1} = \frac{\frac{1}{12}y_0}{2} = \frac{\frac{1}{3}z_0}{4} = \frac{-1}{-m} \iff \begin{cases} x_0 = \frac{48}{m} \\ y_0 = \frac{24}{m} \\ z_0 = \frac{12}{m} \end{cases}$$

Dar punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ se află pe elipsoid, deci

$$\frac{1}{48} \frac{48^2}{m^2} + \frac{1}{12} \frac{24^2}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{12^2}{m^2} - 1 = 0 \iff \frac{144}{m^2} = 1 \iff m = \pm 12$$

Așadar, planele $x + 2y + 4z \pm 12 = 0$ sunt tangente elipsoidului. ■

Exercițiul 5. Scrieți ecuația normalei în punctul $M(1, 2, -1)$ al cuadricei $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 - 10 = 0$.

Soluție. Normala în M este dreapta care trece prin M și este perpendiculară pe planul tangent în M la cuadrică. Ecuația acestuia din urmă se obține prin dedublarea ecuației cuadricei în punctul M și este

$$\text{tg}_M : 2 \cdot 1 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot y - 4(-1)z - 10 = 0 \iff 2x + 6y + 4z - 10 = 0 \iff x + 3y + 2z - 5 = 0.$$

Astfel, ecuația normalei în M este

$$\text{norm}_M : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}.$$

■

Exercițiul 6. Determinați ecuația unui plan tangent la paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 2z$, paralel cu planul $(\pi) : 2x + 3y - 6z + 5 = 0$.

Soluție. Considerăm un punct arbitrar $P(x_0, y_0, z_0)$ al paraboloidului. Ecuația planului tangent este

$$\text{tg}_P : \frac{x_0}{9}x + \frac{y_0}{4}y = 2\frac{z+z_0}{2} \iff \frac{x_0}{9}x + \frac{y_0}{4}y - z - z_0 = 0$$

Amintim că două plane sunt paralele dacă și numai dacă normalele la plane sunt coliniare (adică coeficienții lui x, y, z sunt proporționali). Astfel, tg_M este paralel cu planul dat π numai când:

$$\frac{\frac{x_0}{9}}{2} = \frac{\frac{y_0}{4}}{3} = \frac{-1}{-6}$$

Obținem astfel:

$$\begin{aligned} x_0 &= 3 \\ y_0 &= 2 \\ z_0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} \right) = 1 \end{aligned}$$

Punctul de tangență este astfel $P(3, 2, 1)$, iar planul căutat este

$$\text{tg}_P : \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - z - 1 = 0$$

■

Exercițiul 7. Scrieți ecuațiile planelor tangente la hiperboloidul cu o pânză $2x^2 - y^2 - 3z^2 + 1 = 0$, paralele cu planul $2x - y - 6z - 1 = 0$.

Soluție. Procedăm similar cu exercițiul anterior. Ecuația planului tangent într-un punct arbitrar $P(x_0, y_0, z_0)$ este

$$\text{tg}_P : 2x_0x - y_0y - 3z_0z + 1 = 0$$

Impunem condiția ca tg_P să fie paralel cu planul dat:

$$\frac{2x_0}{2} = \frac{-y_0}{-1} = \frac{-3z_0}{-6}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} x_0 = y_0 \\ z_0 = 2y_0 \end{cases}$$

Înlocuind valorile obținute (x_0, y_0, z_0) în ecuația hiperboloidului găsim

$$2y_0^2 - y_0^2 - 3 \cdot 4y_0^2 + 1 = 0 \iff y_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}.$$

Astfel punctele de tangență ale planelor căutate sunt $(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}})$ și $(-\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$, iar planele căutate vor avea ecuațiile

$$2x - y - 6z \pm \sqrt{11} = 0$$

■

Exercițiul 8. Determinați ecuația planului tangent la paraboloidul hiperbolic $x^2 - y^2 = z$, paralel cu planul $2x - y + 3z - 5 = 0$.

Soluție. Fie $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct arbitrar al paraboloidului. Planul tangent în P la cuadrică are ecuația:

$$x_0x - y_0y - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z_0 = 0$$

Acest plan este paralel cu planul dat dacă și numai dacă

$$\frac{x_0}{2} = \frac{-y_0}{-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$$

ceea ce implică $x_0 = -\frac{1}{3}, y_0 = -\frac{1}{6}, z_0 = \frac{1}{12}$, iar planul tangent căutat va avea ecuația

$$2x - y + 3z + \frac{1}{4} = 0$$

■

Exercițiul 9. Fie cuadrica $(\Gamma) : z = xy$.

(A) Justificați că Γ este un paraboloid hiperbolic.

(B) Determinați ecuațiile generatoarelor rectilinii ale lui Γ .

(C) Scrieți ecuația planului π tangent la cuadrică în $A(2, 3, 6)$. Demonstrați că intersecția dintre Γ și π e formată din două drepte concurente.

Soluție. (i) Ecuația quadrică se poate rescrie

$$2xy - 2z = 0$$

cu matricea asociată

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic al lui A este

$$\det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \lambda$$

ce are rădăcinile $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$.

Determinăm spațiul propriu pentru λ_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = x \\ x = y \\ 0 = z \end{cases} \iff (x, y, z) = x(1, 1, 0), x \in \mathbb{R}.$$

Astfel un versor propriu corespunzător lui $\lambda_1 = 1$ este $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$.

Similar găsim un versor propriu pentru $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = -x \\ x = -y \\ 0 = z \end{cases} \iff (x, y, z) = x(-1, 1, 0), x \in \mathbb{R}$$

deci $\vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ este un versor propriu pentru $\lambda_2 = -1$.

Analog, pentru $\lambda_3 = 0$ găsim $\vec{k}' = \vec{k} = (0, 0, 1)$.

Efectuăm schimbarea de reper $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \rightarrow \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$, cu schimbarea de coordonate:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Ecuația quadrică devine atunci

$$x'^2 - y'^2 - 2z' = 0$$

ceea ce arată că quadrica dată este un paraboloid hiperbolic.

(ii) Determinăm generatoarele în raport cu reperul $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$, obținând familiile de generatoare

$$\delta_\lambda : \begin{cases} x' - y' = 2\lambda \\ x' + y' = z'/\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \delta'_\mu : \begin{cases} x' - y' = \mu z' \\ x' + y' = 2/\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}^* \cup \{\infty\}$$

În coordonatele originale (x, y, z) , aceste drepte au ecuațiile:

$$\delta_\lambda : \begin{cases} \sqrt{2}x = 2\lambda \\ \sqrt{2}y = z/\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \delta'_\mu : \begin{cases} \sqrt{2}x = \mu z \\ \sqrt{2}y = 2/\mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}^* \cup \{\infty\}$$

Notând $\bar{\lambda} = \lambda\sqrt{2}$ și $\bar{\mu} = \mu/\sqrt{2}$, generatoarele se pot scrie

$$\delta_{\bar{\lambda}} : \begin{cases} x = \bar{\lambda} \\ y = z/\bar{\lambda} \end{cases}, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}, \quad \delta'_{\bar{\mu}} : \begin{cases} x = \bar{\mu}z \\ y = 1/\bar{\mu} \end{cases}, \bar{\mu} \in \mathbb{R}^* \cup \{\infty\}$$

(iii) Ecuația planului tangent la quadrică în A se poate scrie prin dedublarea ecuației $2xy - 2z = 0$ în raport cu $A(2, 3, 6)$:

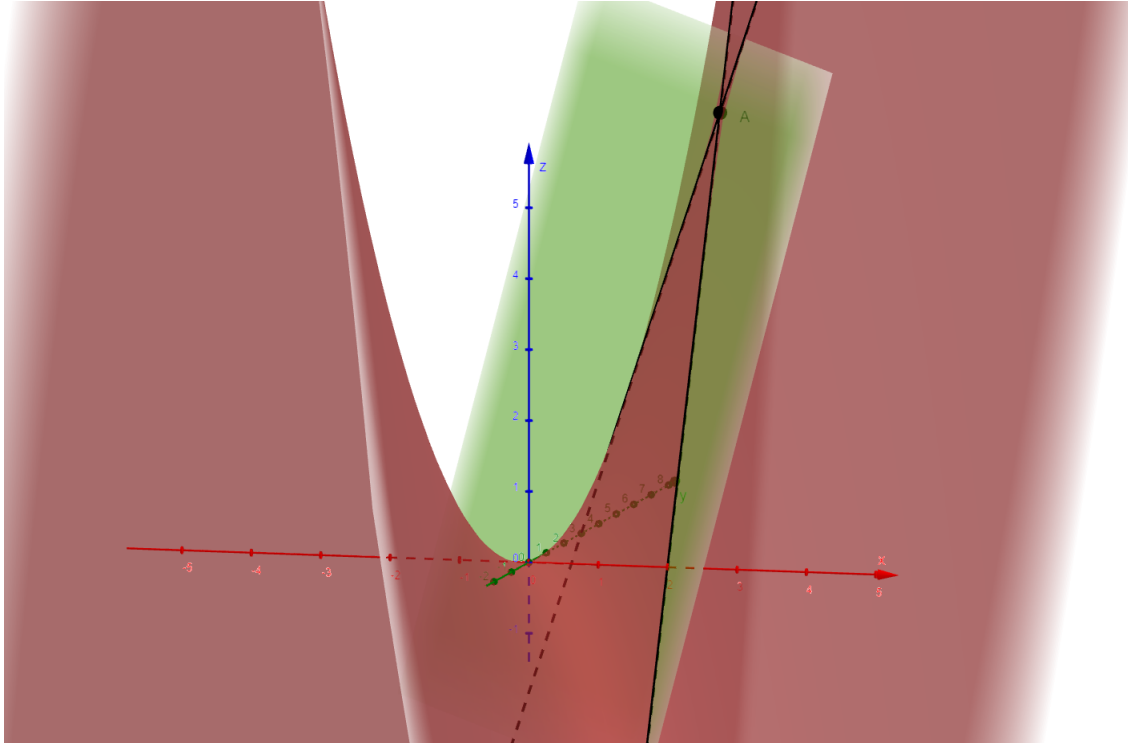
$$3x + 2y - z - 6 = 0$$

(dedublarea produsului $2xy$ în (x_0, y_0) este $xy_0 + yx_0$). Să determinăm intersecția acestui plan cu paraboloidul dat:

$$\begin{cases} xy - z = 0 \\ 3x + 2y - z - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3x + 2y - 6 \\ xy - 3x - 2y + 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3x + 2y - 6 \\ (x - 2)(y - 3) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2 \\ z = 2y \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y = 3 \\ z = 3x \end{cases}$$

Deci intersecția între planul tangent în A și cuadrică este reuniunea a două drepte concurente în A . Observăm că aceste drepte sunt generatoarele paraboloidului care trec prin A .



■

Exercițiul 10. Fie paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{4} - y^2 - 4z = 0$.

(A) Determinați punctele de intersecție ale acestuia cu dreapta $\frac{x}{8} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$.

(B) Scrieți ecuațiile celor două generatoare rectilinii ale quadricii care trec prin punctele găsite.

Soluție. (i) Intersecția dreptei date cu paraboloidul se obține rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 2t \\ z = t \\ \frac{x^2}{4} - y^2 - 4z = 0 \end{cases}$$

Înlocuind x, y, z în ultima ecuație găsim $12t^2 - 4t = 0$, ce are două soluții $t = 0$ și $t = \frac{1}{3}$. Determinând x, y, z , găsim că punctele de intersecție ale dreptei cu quadrica sunt $O(0, 0, 0)$ și $A\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(ii) Generatoarele rectilinii ale paraboloidului sunt

$$\delta_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{2} - y = 4\lambda \\ \frac{x}{2} + y = \frac{z}{\lambda} \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \delta'_\mu : \begin{cases} \frac{x}{2} - y = \mu z \\ \frac{x}{2} + y = \frac{4}{\mu} \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}^* \cup \{\infty\},$$

Impunem condiția ca O să se afle pe δ_λ și pe δ'_μ :

$$O \in \delta_\lambda \iff \begin{cases} \frac{0}{2} - 0 = 4\lambda \\ \frac{0}{2} + 0 = \frac{0}{\lambda} \end{cases} \iff \lambda = 0$$

$$O \in \delta'_\mu \iff \begin{cases} \frac{0}{2} - 0 = \mu \cdot 0 \\ \frac{0}{2} + 0 = \frac{4}{\mu} \end{cases} \iff \mu = \infty$$

Cele două generatoare sunt:

$$\delta_0 : \begin{cases} \frac{x}{2} - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \delta'_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ \frac{x}{2} + y = 0 \end{cases}$$

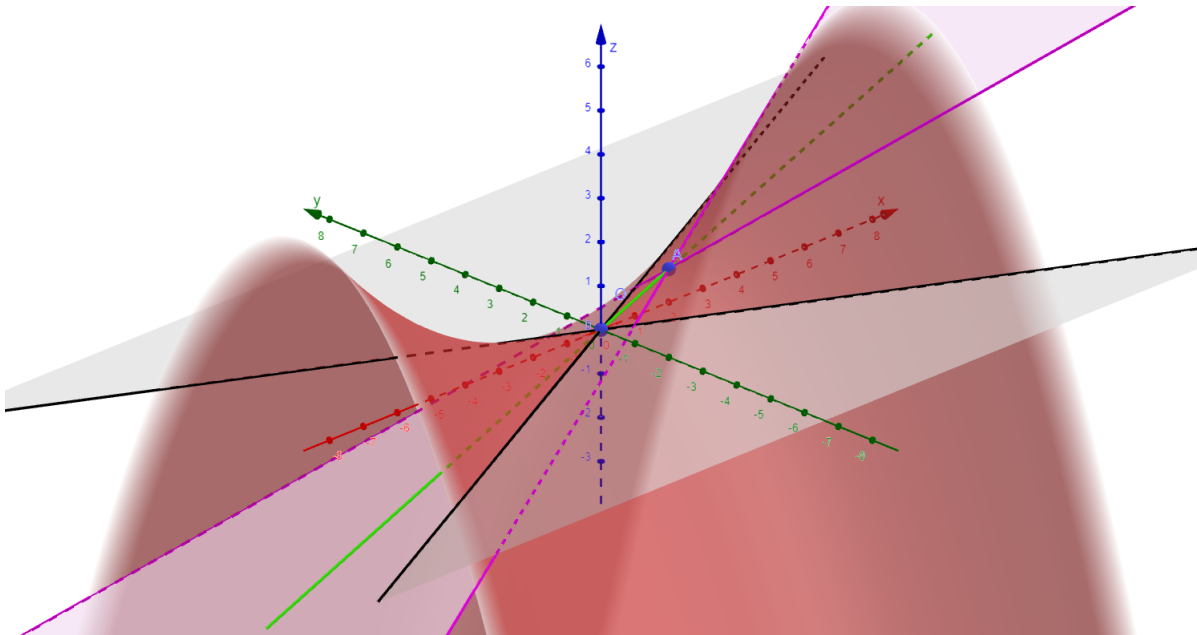
Impunem condiția ca A să se afle pe δ_λ și pe δ'_μ :

$$A \in \delta_\lambda \iff \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = 4\lambda \\ \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3\lambda} \end{cases} \iff \lambda = \frac{1}{6}$$

$$A \in \delta'_\mu \iff \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \mu \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{\mu} \end{cases} \iff \mu = 2$$

Cele două generatoare căutate sunt:

$$\delta_{\frac{1}{6}} : \begin{cases} \frac{x}{2} - y = \frac{2}{3} \\ \frac{x}{2} + y = 6z \end{cases}, \delta'_2 : \begin{cases} \frac{x}{2} - y = 2z \\ \frac{x}{2} + y = 2 \end{cases}$$



Exercițiul 11. Se consideră hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1$. Determinați ecuațiile generatoarelor ce trec prin $P(1, 1, \frac{3}{2})$.

Soluție. Cele două familii de generatoare ale hiperboloidului sunt

$$\delta_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = \lambda(1-y) \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = \frac{1}{\lambda}(1+y) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

$$\delta'_\mu : \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = \mu(1+y) \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = \frac{1}{\mu}(1-y) \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Impunem condițiile ca P să se afle pe generatoarele δ_λ , respectiv δ'_μ :

$$P\left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \in \delta_\lambda \iff \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{3}{3 \cdot 2} = \lambda(1-1) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{\lambda}(1+1) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 \\ 1 = \frac{2}{\lambda} \end{cases} \iff \lambda = 2$$

$$P\left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \in \delta'_\mu \iff \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{3}{3 \cdot 2} = \mu(1+1) \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{3 \cdot 2} = \frac{1}{\mu}(1-1) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 2\mu \\ 1 = \frac{1}{\mu} \cdot 0 \end{cases} \iff \mu = 0$$

Cele două generatoare sunt:

$$\delta_2 : \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = 2 - 2y \\ \frac{x}{2} + \frac{z}{3} = \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\delta'_0 : \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases}$$

Alternativ, putem determina ecuațiile celor două generatoare folosind faptul că intersecția planului tangent în P la Γ cu quadrica Γ este reuniunea celor două generatoare care trec prin P .

Planul tangent în P are ecuația obținută prin dedublare:

$$\text{tg}_P : \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot x + 1 \cdot y - \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot z = 1 \iff \frac{1}{4}x + y - \frac{1}{6}z = 1$$

Determinăm intersecția planului tangent cu quadrica:

$$\begin{aligned} \text{tg}_P \cap \Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = 1 \\ \frac{x}{4} + y - \frac{z}{6} = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{z}{6} + 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{36} + 1 - \frac{xz}{12} - \frac{x}{2} + \frac{z}{3} - \frac{z^2}{9} = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{z}{6} + 1 \\ 15x^2 - 4z^2 - 4xz - 24x + 16z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{z}{6} + 1 \\ -((2z)^2 + 2 \cdot 2z \cdot x - 2 \cdot 2z \cdot 4 + x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4) + x^2 + 4^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 15x^2 - 24x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{z}{6} + 1 \\ -(2z + x - 4)^2 + 16x^2 - 32x + 16 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{z}{6} + 1 \\ -(2z + x - 4)^2 + (4x - 4)^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{z}{6} + 1 \\ 2z = 3x \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y = -\frac{x}{4} + \frac{z}{6} + 1 \\ 2z = -3x + 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Așadar $\text{tg}_P \cap \Gamma$ este reuniunea a două drepte, ce sunt, de fapt, generatoarele care trec prin P . ■

Exercițiul 12. Care e unghiul făcut de generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ ce trec prin $P(-2, 0, 1)$?

Soluție. Planul tangent la paraboloid prin P este:

$$\text{tg}_P : \frac{z+1}{2} = \frac{x(-2)}{4} - \frac{y \cdot 0}{9} \iff z = -x - 1$$

deci intersecția acestui plan cu quadrica va fi dată de:

$$\begin{aligned} \begin{cases} z = -x - 1 \\ -x - 1 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \end{cases} &\iff \begin{cases} z = -x - 1 \\ \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - \frac{y^2}{9} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -x - 1 \\ \frac{x}{2} + 1 = \frac{y}{3} \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} z = -x - 1 \\ \frac{x}{2} + 1 = -\frac{y}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -t - 1 \\ y = \frac{3t}{2} + 3 \\ x = t \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} z = -t - 1 \\ y = -\frac{3t}{2} - 3 \\ x = t \end{cases} \end{aligned}$$

Cele două drepte obținute sunt generatoarele care trec prin P și au vectorii directori $\bar{u}_1 = (2, 3, -2)$, respectiv $\bar{u}_2 = (2, -3, -2)$, iar unghiul dintre ei este dat de

$$\cos \varphi = \frac{\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle}{\|\bar{u}_1\| \|\bar{u}_2\|} = \frac{4 - 9 + 4}{4 + 9 + 4} = -\frac{1}{17}$$

■

Exercițiul 13. Determinați generatoarele paraboloidului hiperbolic $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}$ care sunt paralele cu planul $\pi : 3x + 2y - 4z + 6 = 0$.

Soluție. Determinăm mai întâi cele două familii de generatoare. Avem

$$z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} \iff z = \left(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\right) \left(\frac{x}{4} + \frac{y}{2}\right)$$

Obținem astfel cele două familii de generatoare:

$$\begin{aligned} d_\lambda : \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = \lambda z \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{\lambda} \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{2}{\lambda} + 2\lambda t \\ y = \frac{1}{\lambda} - \lambda t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \\ d'_\mu : \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = \mu \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = \frac{z}{\mu} \end{cases} &\iff \begin{cases} x = 2\mu + \frac{2s}{\mu} \\ y = -\mu + \frac{s}{\mu} \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

unde $\lambda \in \mathbb{R}^* \cup \{\infty\}$ și $\mu \in \mathbb{R}$. Rezultă că dreptele d_λ și d'_μ au vectorii directori $u_\lambda = (2, -1, \frac{1}{\lambda})$, respectiv $v_\mu = (2, 1, \mu)$ (inclusiv pentru cazul $\lambda = \infty, \mu = 0$).

Pentru ca o dreaptă să fie paralelă cu planul dat trebuie ca vectorii directori ai dreptei să fie perpendiculari pe direcția normală planului. Avem atunci:

$$\begin{aligned} d_\lambda \perp \pi &\implies \left\langle \left(2, -1, \frac{1}{\lambda}\right), (3, 2, -4) \right\rangle = 0 \iff 6 - 2 - \frac{4}{\lambda} = 0 \iff \lambda = 1 \\ d'_\mu \perp \pi &\implies \langle (2, 1, \mu), (3, 2, -4) \rangle = 0 \iff 6 + 2 - 4\mu = 0 \iff \mu = 2 \end{aligned}$$

Am obținut astfel două generatoare cu direcțiile paralele cu planul:

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda t \\ y = 1 - \lambda t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad d'_2 : \begin{cases} x = 4 + s \\ y = -2 + \frac{s}{2} \\ z = s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

Observăm că cele două drepte nu sunt incluse în planul π (punctele $(2, 1, 0) \in d_1, (4, -2, 0) \in d'_2$ nu se află în π), deci ele sunt paralele cu planul π .

Observație. Dreptele d_1 și d'_2 se intersectează în punctul $P(6, -1, 2)$. Rezultă că planul generat de cele două generatoare este planul tangent în P la cuadrică. Acesta are ecuația $3x + 2y - 4z - 8 = 0$ și este unicul plan paralel cu π și tangent paraboloidului. ■

Exercițiul 14. Scrieți ecuația conului cu vârful $V(0, 0, 1)$ și curba directoare

$$\begin{cases} x^2 = 2y \\ z = 0 \end{cases}$$

Aduceți la forma canonică această cuadrică.

Soluție. Prin definiție, conul cerut este reuniunea dreptelor VP când $P(x_0, y_0, z_0)$ parcurge parabola directoare dată. Acesta este dat de:

$$\begin{cases} x_0^2 = 2y_0 \\ z_0 = 0 \\ x = 0 + x_0 t \\ y = 0 + y_0 t \\ z = 1 + z_0 t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ecuația conului se obține eliminând t, x_0, y_0, z_0 din sistemul anterior și obținând o relație (doar) între x, y, z . Sistemul anterior implică

$$\begin{cases} t = z - 1 \\ x = x_0(z - 1) \\ y = y_0(z - 1)t \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = \frac{x}{z - 1} \\ y_0 = \frac{y}{z - 1} \end{cases}$$

Înlocuind x_0, y_0 în ecuația conice directoare găsim

$$\left(\frac{x}{z-1}\right)^2 = 2\frac{y}{z-1} \iff x^2 = 2y(z-1)$$

Așadar, ecuația conului dat este $x^2 - 2yz + 2y = 0$.

Pentru a obține ecuația canonică a conului, determinăm valorile și vectorii proprii asociați matricei cuadricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic al lui A este

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și $\lambda_3 = -1$. Determinăm acum versori proprii pentru valorile proprii. Pentru $\lambda_3 = -1$, obținem sistemul

$$\begin{cases} x = -x \\ -z = -y \\ -y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

Luăm ca versor propriu $\bar{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

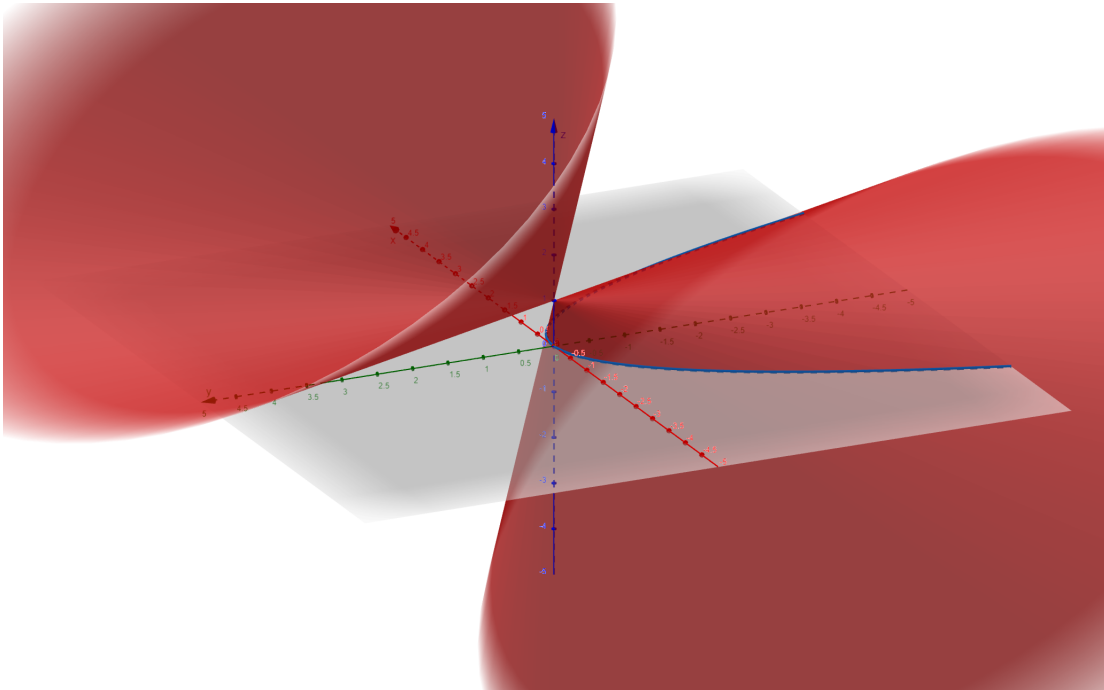
Spațiul propriu corespunzător valorii proprii 1 este dat de

$$\begin{cases} x = x \\ -z = y \\ -y = z \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$

Alegem versorul propriu $\bar{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Al treilea versor (corespunzător tot valorii proprii $\lambda = 1$) este

$$\bar{j}' = \bar{k}' \times \bar{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \bar{i} & 0 & 1 \\ \bar{j} & 1 & 0 \\ \bar{k} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \bar{j} - \bar{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Centrul de simetrie al conului este vârful $V(0, 0, 1)$, deci ecuația canonică a conului este $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$, obținută în raport cu reperul $\mathcal{R}' = \{V; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$.



Exercițiul 15. Într-un reper ortonormat $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ considerăm quadrica

$$\Gamma : x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$$

- (A) Precizați tipul quadricii Γ .
- (B) Determinați intersecția quadricii Γ cu planele $\alpha : x = 4$, respectiv $\beta : y = 1$, precizând tipul conice de intersecție și, în cazul unei conice nedegenerate, axele sale de simetrie.
- (C) Fie $P(-2, 1, 2) \in \Gamma$. Determinați ecuația planului tangent în P la Γ .
- (D) Determinați ecuațiile generatoarelor rectilinii ale lui Γ care trec prin $P(-2, 1, 2) \in \Gamma$.
- (E) Determinați toate punctele $A \in \Gamma$ astfel încât normala prin A să fie perpendiculară pe vectorul $\bar{u} = (1, 0, 1)$. Câte astfel de puncte există?

Exercițiul 16. Într-un reper ortonormat $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ considerăm cuadrica

$$\Gamma : x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$$

- (A) Precizați tipul quadricii Γ .
- (B) Determinați intersecția quadricii Γ cu planele $\alpha : x = 1$, respectiv $\beta : y = 2$, precizând tipul conicei de intersecție și, în cazul unei conice nedegenerate, axele sale de simetrie.
- (C) Fie $P(-1, 2, 1) \in \Gamma$. Determinați ecuația planului tangent în P la Γ .
- (D) Determinați ecuațiile generatoarelor rectilinii ale lui Γ care trec prin $P(-1, 2, 1) \in \Gamma$.
- (E) Fie $A \in \Gamma$ un punct fixat. Determinați toate punctele $B \in \Gamma$ astfel încât normalele în A și B la Γ sunt paralele.

A Ecuatii de drepte și plane în spațiu - Recapitulare

Considerăm $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper ortonormat (pozitiv orientat) în spațiu.

(A) Coordonate ale punctelor și ale vectorilor

- Prin coordonatele unui vector $\vec{v}$ în reperul $\mathcal{R}$ înțelegem tripletul (v_1, v_2, v_3) de numere reale ce satisface

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

Prin abuz de limbaj vom scrie

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

Această identificare vector-coordonate poate fi făcută ca urmare a următoarei observații. Corespondența $\vec{v} \mapsto (v_1, v_2, v_3)$ definește o funcție între spațiul vectorilor liberi $\vec{E}$ și $\mathbb{R}^3$ care este, de fapt, un izomorfism liniar (adică este bijectivă și este compatibilă cu suma și înmulțirea cu scalari ale vectorilor) ceea ce ne permite să identificăm cele două spații vectoriale.

- coordonatele unui punct P sunt, prin definiție, coordonatele vectorului (de poziție) $\vec{r}_P = \vec{OP}$.

Dacă $\vec{OP}$ are coordonatele (a, b, c) vom scrie, prin abuz de limbaj, $P = (a, b, c)$ (cu alte cuvinte identificăm punctul P cu vectorul său de poziție).

- Fie A un punct și $\vec{v}$ un vector liber în spațiu. Prin definiție, $A + \vec{v}$ este punctul B ce satisface $\vec{AB} = \vec{v}$ (adică B se obține aplicând vectorul $\vec{v}$ în punctul A).

Dacă $A = (x_A, y_A, z_A)$ și $\vec{v} = (a, b, c)$, atunci punctul $A + \vec{v}$ are coordonatele $(x_A + a, y_A + b, z_A + c)$. Așadar, operația de adunare a punctelor cu vectori este compatibilă cu identificările anterioare vector-coordonate și punct-coordonate.

- (B) Dreapta d determinată de punctul $A = (x_A, y_A, z_A)$ și vectorul director $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ este mulțimea punctelor P cu proprietatea că $\vec{AP}$ este coliniar cu $\vec{a}$. Vom nota această dreaptă prin

$$d = A + [\vec{a}] := \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \parallel \vec{a}\} = \{A + t\vec{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

În coordonate, putem descrie dreapta d prin:

- (a) ecuația vectorială:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t\vec{a}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

($\vec{r} = (x, y, z)$ este vectorul de poziție al unui punct arbitrar de pe dreaptă, $\vec{r}_A$ este vectorul de poziție al lui A).

- (b) parametrică:

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- (c) ecuații canonice:

$$\frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{y - y_A}{\beta} = \frac{z - z_A}{\gamma}$$

- (C) Planul π determinat de punctul A și planul vectorial $V \subseteq \vec{E}$ este mulțimea punctelor P din spațiu cu proprietatea $\vec{AP} \in V$:

$$\pi = A + V := \{A + \vec{v} \mid \vec{v} \in V\}$$

Dacă $A = (x_A, y_A, z_A)$ și $V = [\vec{a}, \vec{b}]$, cu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ și $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, putem descrie planul π prin:

(a) ecuația vectorială

$$\bar{r} = \bar{r}_A + t\bar{a} + s\bar{b}, s, t \in \mathbb{R} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbb{R}.$$

(b) ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = x_A + ta_1 + sb_1 \\ y = y_A + ta_2 + sb_2 \\ z = z_A + ta_3 + sb_3 \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

Cel mai des, însă, planul vectorial V va fi descris prin intermediul complementului ortogonal:

$$V = [\bar{N}]^\perp = \{\bar{v} \mid \bar{v} \perp \bar{N}\}$$

unde $\bar{N} = (a, b, c)$ este un vector **perpendicular** pe plan. În acest caz, planul $\pi = A + [\bar{N}]^\perp$ poate fi descris de

(c) ecuația generală

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \iff ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$$

B Conice pe ecuații reduse

Considerăm în plan un reper ortonormat (pozitiv orientat) $\mathcal{R} = \{\bar{O}\bar{i}; \bar{j}\}$. Ecuațiile reduse ale conicelor sunt:

(A) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ (elipsa)

(B) $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \pm 1 = 0$ (hiperbola)

(C) $Y^2 = \pm 2pX$ (parabola)

(D) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0$ (conica vidă; elipsă imaginară)

(E) $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ (punct dublu)

(F) $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \iff \frac{X}{a} = \pm \frac{Y}{b}$ (drepte concurente; punctul de intersecție este $(0, 0)$)

(G) $X^2 = a^2 \iff X = \pm a$ (drepte paralele)

(H) $X^2 = 0$ (dreaptă dublă)

(I) $X^2 = -a$ (conică vidă; drepte paralele imaginare)

Pentru conicele nedegenerate nevide amintim elementele lor:

(A) Fie $a \neq b$ două numere reale strict pozitive. Elipsa de ecuație

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

are următoarele elemente:

- semiaxele sunt a și b .
- Centrul de simetrie este $O(X = 0, Y = 0)$.
- Vârfurile sunt $A(a, 0), A'(-a, 0), B(0, b), C(0, -b)$.

- Axelele de simetrie sunt dreptele de direcții $\bar{i}$ și $\bar{j}$ care trec prin centru:

$$C + [\bar{i}] : y = 0$$

$$C + [\bar{j}] : x = 0$$

- axa focală este $C + [\bar{i}]$, dacă $a > b$ și $C + [\bar{j}]$, dacă $a < b$.

(A') Ecuația

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$$

descrie un cerc centrul în $(0, 0)$ și raza egală cu a .

(B) Hiperbola de ecuație

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$$

are următoarele elemente:

- semiaxele sunt a și b .
- Centrul de simetrie este $O(X = 0, Y = 0)$.
- Vârfurile sunt $A(a, 0), A'(-a, 0)$.
- Axele de simetrie sunt dreptele de direcții $\bar{i}$ și $\bar{j}$ care trec prin centru:

$$C + [\bar{i}] : Y = 0$$

$$C + [\bar{j}] : X = 0$$

- axa focală este axa care conține vârfurile, $C + [\bar{i}] : y = 0$.
- asimptotele sunt dreptele concurente în $(0, 0)$ (centrul hiperbolei) date prin:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0 \iff \frac{X}{a} = \pm \frac{Y}{b}$$

(B') Hiperbola de ecuație

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0$$

are următoarele elemente:

Observăm că putem rescrie ecuația acestei hiperbole

$$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} - 1 = 0$$

Putem vedea această ecuație ca o hiperbolă similară cu cazul (B), dar în raport cu reperul $\{O; \bar{j}, \bar{i}\}$, cu coordonatele X și Y permutate. Astfel, elementele acestei conice sunt:

- semiaxele sunt b și a .
- Centrul de simetrie este $O(Y = 0, X = 0)$.
- Vârfurile sunt $B(0, b), A'(0, -b)$.
- Axelele de simetrie sunt dreptele de direcții $\bar{j}$ și $\bar{i}$ care trec prin centru:

$$C + [\bar{j}] : X = 0$$

$$C + [\bar{i}] : Y = 0$$

- axa focală este axa care conține vârfurile, $C + [\bar{j}] : x = 0$.
- asimptotele sunt dreptele concurente în $(0, 0)$ (centrul hiperbolei) date prin:

$$\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 0 \iff \frac{X}{a} = \pm \frac{Y}{b}$$

(C) Parabola de ecuație

$$Y^2 = \pm 2p(X + c)$$

are următoarele elemente:

- parametrul este p .
- Vârful este $V(X = -c, Y = 0)$.
- Axa de simetrie trece prin vârf și are direcția $\vec{i}$, adică $V + [\vec{j}] : y = 0$.
- Semnul din membrul drept arată orientarea parabolei. Dacă semnul este pozitiv, parabola este orientată în sensul pozitiv al axei Ox (ramurile sunt orientate înspre dreapta). Dacă semnul este negativ, parabola este orientată în sensul negativ al axei Ox (ramurile sunt orientate spre stânga).

C Intersecția unei cuadrice cu un plan

Toate tipurile de conice apar ca intersecție a unei cuadrice cu un plan.

Exemplul 1. (A) Intersecția unui hiperboloid cu două pânze $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ cu un plan orizontal $z = k$, cu $|k| > c$, este elipsa:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(\frac{k^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{k^2}{c^2} - 1 \right)} - 1 = 0 \\ z = k \end{cases}$$

(B) Intersecția unui paraboloid hiperbolic $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ cu un plan orizontal $z = k$, cu $k > 0$, este hiperbola

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2ka^2} - \frac{y^2}{2kb^2} = 1 \\ z = k \end{cases}$$

Centrul de simetrie al acestei hiperbole este $C(0, 0, k)$, iar axele de simetrie sunt paralele prin C la axele Ox și Oy . Axa focală este paralela la Ox (cea care conține vârfurile hiperbolei $(\pm a\sqrt{2k}, 0)$).

(B') Intersecția unui paraboloid hiperbolic $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ cu un plan orizontal $z = k$, cu $k < 0$, este hiperbola

$$\begin{cases} \frac{x^2}{-2ka^2} - \frac{y^2}{-2kb^2} = -1 \\ z = k \end{cases}$$

Centrul de simetrie al acestei hiperbole este $C(0, 0, k)$, iar axele de simetrie sunt paralele prin C la axele Ox și Oy . Axa focală este paralela la Oy (cea care conține vârfurile hiperbolei $(0, \pm b\sqrt{-2k})$).

(C) Intersecția unui paraboloid eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ cu un plan lateral $y = k$ este parabola

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left(z - \frac{k^2}{2b^2} \right) \\ y = k \end{cases}$$

Parametrul acestei parabole este $p = a^2$ (nu depinde de k), vârful este $V(0, 0, \frac{k^2}{2b^2})$, iar axa este paralela prin V la Oz , adică $\begin{cases} y = k \\ x = 0 \end{cases}$.

Exemplul 2. (D) Intersecția elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ cu planul $z = k$ cu $|k| > c$ este conica vidă

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(\frac{k^2}{c^2} - 1 \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(\frac{k^2}{c^2} - 1 \right)} + 1 = 0 \\ z = k \end{cases}$$

(E) Intersecția elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ cu planul $z = c$ este un punct dublu:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = k \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$$

(F) Intersecția conului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ cu planul $yOz : x = 0$ este perechea de drepte concurente (în vârful conului)

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y}{b} = \pm \frac{z}{c} \end{cases}$$

(G) Intersecția cilindrului eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cu planul $y = k$, cu $|k| < b$ este o pereche de drepte paralele

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x}{a} = \pm \sqrt{1 - \frac{k^2}{b^2}} \\ y = k \end{cases}$$

(H) Intersecția cilindrului parabolic $y^2 = 2pz$ cu planul $z = 0$ este o dreaptă dublă:

$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(I) Intersecția cilindrului eliptic $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ cu planul $y = k$, cu $|k| > b$ este o conică vidă (drepte paralele imaginare)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k \end{cases}$$