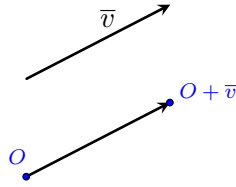


Izometriile planului

1 Spații afine euclidiene de dimensiune 2

În această secțiune E va fi un plan afin euclidian. Aceasta înseamnă că spațiul vectorial asociat $\vec{E}$ are dimensiune doi și este înzestrat cu un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Din definiție, rezultă că, date un punct O și un vector $\vec{v} \in \vec{E}$, există un unic punct P astfel încât $\vec{OP} = \vec{v}$. Spunem că P este obținut prin aplicarea vectorului $\vec{v}$ în punctul O și vom nota acest punct prin $O + \vec{v} := P$.



Rezultă că, o dată fixat un punct origine O , spațiul de puncte E poate fi identificat cu spațiul vectorial $\vec{E}$ via următoarele funcții:

$$\begin{aligned} E &\leftrightarrow \vec{E} \\ P &\mapsto \vec{OP} \\ O + \vec{v} &\leftrightarrow \vec{v} \end{aligned}$$

Cu ajutorul acestei identificări putem "transfera" în cadrul spațiului afin câteva concepte din cadrul algebrei liniare: norma (lungimea) unui vector, subspațiu liniar, bază (ortonormată), etc.

- O dreaptă în E este, prin definiție o mulțime de puncte ale lui E de forma:

$$d = A + [\vec{u}] := \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

unde A este un punct al lui E și $\vec{u}$ este un vector nenul din $\vec{E}$.

- Prin reper ortonormat în E înțelegem o pereche $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, formată dintr-un punct $O \in E$ și o bază ortonormată $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. Punctul O se numește originea reperului, iar dreptele $O + [\vec{i}]$ și $O + [\vec{j}]$ sunt axele sale.
- Pentru două puncte $P, Q \in E$, definim distanța de la P la Q prin

$$d(P, Q) := \|\vec{PQ}\|$$

Se poate arăta că funcția $d : E \times E \rightarrow [0, \infty)$ este într-adevăr o metrică pe E .

Considerăm acum un reper ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ în E . Pentru orice punct $P \in E$, notăm

$$\vec{r}(P) := \vec{OP}$$

numit vectorul de poziție al lui P .

- Orice vector $\bar{u}$ din $\vec{E}$ se poate descompune în raport cu baza $\{\bar{i}, \bar{j}\}$:

$$\bar{u} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

unde $x, y \in \mathbb{R}$. Vom numi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ coordonatele lui $\bar{u}$.

Observăm că avem $x = \langle \bar{u}, \bar{i} \rangle$ și $\langle \bar{u}, \bar{j} \rangle$, adică $x\bar{i} = \text{pr}_{[\bar{i}]} \bar{u}$ și $y\bar{j} = \text{pr}_{[\bar{j}]} \bar{u}$.

- Coordonatele unui punct P sunt, prin definiție, coordonatele vectorului de poziție $\vec{r}(P)$, în raport cu baza data. Avem astfel:

$$P \text{ are coordonatele } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \vec{OP} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

Pentru a simplifica notațiile vom identifica atât E cât și $\vec{E}$ cu spațiul vectorilor coloană $\mathbb{R}^2$.

De exemplu, vectorul $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ va fi $\bar{u} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$. Pe de altă parte, punctul $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ este punctul unic determinat de condiția $\vec{r}(P) = \vec{OP} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$.

Atragem atenția că, deși notațiile sunt similare, identificările punct-coordonate și vector-coordonate sunt conceptual diferite. Coordonatele unui vector sunt determinate relativ la baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}\}$, dar coordonatele unui punct sunt determinate relativ la reperul ortonormat $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ (depind și de origine, nu doar de bază).

O notație mai potrivită ar fi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$ (pentru vectori), respectiv $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ (pentru puncte), dar aceasta ar complica destul de mult expresiile.

Încheiem această secțiune cu o discuție despre reprezentarea unei drepte în coordonate.

Fie $d = A + [\bar{u}]$ o dreaptă în E , unde $\bar{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \in E$.

Fie $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un punct din E . Avem atunci:

$$\begin{aligned} P \in d &\iff P = A + t\bar{u}, t \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Relațiile din urmă poartă numele de ecuațiile parametrice ale dreptei d . Ele pot fi rescrise astfel:

$$\frac{x - x_A}{\alpha} = \frac{y - y_A}{\beta}$$

(ecuațiile canonice) sau

$$\beta x - \alpha y + (-\beta x_A + \alpha y_A) = 0$$

(ecuația generală).

În practică vom prefera să descriem drepte folosind ecuația generală a unei drepte. Este util însă să putem trece prin diversele tipuri de ecuații. Argumentul de mai sus ilustrează cum putem transforma ecuațiile parametrice în ecuația generală (eliminăm parametrul t din cele două ecuații parametrice).

Invers, considerăm dreapta d de ecuație $d : ax + by + c = 0$. Ecuațiile sale parametrice se obțin notând una din variabilele x sau y cu t și exprimând cealaltă în funcție de t , din ecuația dreptei.

Dreapta $d : ax + by + c = 0$ are vectorul **normal** $\bar{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ și vectorul **director** $\bar{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

2 Izometriile planului

În această secțiune E va fi un plan afin euclidian orientat și $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ un reper ortonormat pozitiv orientat.

Identificăm E cu $\mathbb{R}^2$, asociind fiecărui punct P matricea-coloană de coordonate $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$ în reperul $\mathcal{R}$.

Rezultă de aici că o funcție $f : E \rightarrow E$ induce o funcție $f_{\mathcal{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (care depinde evident de reperul ales):

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & E \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\quad} & f(P) \\ \parallel & & \parallel \\ \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} & \xrightarrow{\quad} & f_{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{f(P)} \\ y_{f(P)} \end{pmatrix} \end{array}$$

Vom numi funcția $f_{\mathcal{R}}$ reprezentarea lui f în coordonatele reperului $\mathcal{R}$. Este evident astfel că $f_{\mathcal{R}}$ depinde de acest reper.

Deoarece vom lucra adesea doar cu un singur reper, pentru a nu complica notațiile, vom nota funcția $f_{\mathcal{R}}$ tot prin f . Este important însă de reținut că o egalitate de forma

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

trebuie văzută ca o egalitate de **puncte** din E și nu doar o egalitate numerică, având în spate identificarea lui E cu $\mathbb{R}^2$.

Definiția 1. Prin izometrie a lui E înțelegem o aplicație $f : E \rightarrow E$ care păstrează distanțele în plan, adică

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q), \forall P, Q \in E$$

În continuare, vom studia izometriile planului, folosind reprezentările lor în reperul ales. Primul rezultat este:

Teorema 2. O aplicație $f : E \rightarrow E$ este izometrie dacă și numai dacă într-un reper ortonormat $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, f are reprezentarea:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

unde A este o matrice ortogonală 2×2 (adică $AA^t = I_2$) și $B \in \mathbb{R}^2$. Mai mult, dacă f are o astfel de reprezentare într-un reper, va avea una în orice reper ortonormat (însă matricea A și vectorul B se pot modifica).

Soluție. Fixând un reper ortonormat, putem identifica E cu $\mathbb{R}^2$, deci putem vedea f ca o aplicație $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cu proprietatea:

$$\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|, \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

Tratăm mai întâi cazul când $f(0) = 0$.

Pasul 1 Demonstrăm mai întâi că pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^2$, are loc $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$. Într-adevăr:

$$\begin{aligned}\langle f(u), f(v) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|f(u)\|^2 + \|f(v)\|^2 - \|f(u) - f(v)\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2 \right) \\ &= \langle u, v \rangle.\end{aligned}$$

Pasul 2 Arătăm că f este liniară: pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$ au loc: $f(u + v) = f(u) + f(v)$ și $f(\alpha u) = \alpha f(u)$. Într-adevăr:

$$\begin{aligned}\|f(u + v) - f(u) - f(v)\|^2 &= \|f(u + v)\|^2 + \|f(u)\|^2 + \|f(v)\|^2 \\ &\quad - 2\langle f(u + v), f(u) \rangle - 2\langle f(u + v), f(v) \rangle + 2\langle f(u), f(v) \rangle \\ &= \|u + v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u + v, u \rangle - 2\langle u + v, v \rangle + 2\langle u, v \rangle \\ &= \|u + v - u - v\|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\|f(\alpha u) - \alpha f(u)\|^2 &= \|f(\alpha u)\|^2 + \alpha^2 \|f(u)\|^2 - 2\alpha \langle f(\alpha u), f(u) \rangle \\ &= \|\alpha u\|^2 + \alpha^2 \|u\|^2 - 2\alpha \langle \alpha u, u \rangle = 0\end{aligned}$$

Pasul 3 Fiindcă f este operator liniar, are forma $f(u) = Au$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^2$ (vector coloană), unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^2)$. Trebuie să demonstrăm că A este matrice ortogonală, i.e. $AA^t = I_2$. Pentru aceasta, folosim egalitatea:

$$\langle u, v \rangle = (u^t) v, \forall u, v \in \mathbb{R}^2$$

(în membrul drept, avem înmulțirea unei matrice linie u^t cu matricea coloană v). Obținem atunci, pentru $u, v \in \mathbb{R}^2$, că:

$$(u^t) v = \langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = \langle Au, Av \rangle = (Au)^t Au = (u^t A^t) Av = u^t (A^t A) v$$

deci $u^t v = u^t (A^t A) v$. Dând pe rând lui u, v valorile $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ găsim că $A^t A = I_2$.

În concluzie, am obținut că orice izometrie f cu $f(0) = 0$ are forma $f(v) = Av$ cu $A \in O_2(\mathbb{R})$. Rămâne să tratăm cazul general.

Fie $b = f(0)$ și $\tilde{f} = f - b$. Rezultă imediat că $\tilde{f}$ este o izometrie ce satisface $\tilde{f}(0) = 0$. Din cazul tratat anterior, găsim că $\tilde{f}(v) = Av$ unde A este o matrice ortogonală, de unde găsim că $f(v) = Av + b, v \in \mathbb{R}$, ceea ce trebuia să arătăm.

Reciproc, să arătăm că toate aplicațiile găsite sunt într-adevăr izometrii. Fie astfel $A \in O(2)$ și $b \in \mathbb{R}^2$ și aplicația $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dată prin $f(v) = Av + b$.

Atunci, pentru $u, v \in \mathbb{R}^2$, avem:

$$\begin{aligned}\|f(u) - f(v)\|^2 &= \|Au + b - Av - b\|^2 = \|A(u - v)\|^2 = \langle A(u - v), A(u - v) \rangle \\ &= (A(u - v))^t A(u - v) = (u - v)^t A^t A(u - v) = (u - v)^t (u - v) \\ &= \langle u - v, u - v \rangle = \|u - v\|^2\end{aligned}$$

deci f este o izometrie. ■

Dacă f este o izometrie, putem reprezenta f în reperul $\mathcal{R}$:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

Aplicația liniară

$$\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}, \vec{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

se va numi aplicația liniară asociată lui f sau urma lui f (mai precis reprezentarea în baza $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ a lui f).

Independent de coordonate, $\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ este caracterizată de proprietatea

$$\vec{f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

Atenție. Aplicația liniară asociată acționează asupra **vectorilor** din $\vec{E}$, pe când f se aplică **punctelor** din E .

Următorul pas este clasificarea izometriilor. Înainte de aceasta vom defini tipurile de izometrii care apar în această clasificare. Vom da pentru fiecare definiția (sintetică) precum și reprezentarea lor în reperul ortonormat dat.

Definiția 3. Prin translația de vector $\bar{u}$ înțelegem aplicația

$$\begin{aligned} t_{\bar{u}} : E &\rightarrow E \\ t_{\bar{u}}(P) &= P + \bar{u}. \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, avem

$$t_{\bar{u}}(P) = Q \iff \overrightarrow{PQ} = \bar{u}.$$

Dacă $\bar{u} = (u_1, u_2)$ (în reperul dat $\mathcal{R}$), atunci $t_{\bar{u}}$ are reprezentarea:

$$\begin{aligned} t_{\bar{u}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rezultă imediat că aplicația liniară $\vec{t}_{\bar{u}}$, asociată translației $t_{\bar{u}}$ este identitatea.

Definiția 4. Fie Ω un punct și $\alpha \in (-\pi, \pi]$ un unghi. Rotația de centru Ω și unghi α este, prin definiție aplicația

$$R_{\Omega, \alpha}(P) = \begin{cases} \Omega, & P = \Omega \\ P', & P \neq \Omega \end{cases}$$

unde P' este punctul (unic) determinat de condițiile:

- (a) $\|\overrightarrow{\Omega P'}\| = \|\overrightarrow{\Omega P}\|$
- (b) $\angle_o(\overrightarrow{\Omega P}, \overrightarrow{\Omega P'}) = \alpha$.

Dacă $\Omega = (x_\Omega, y_\Omega)$ atunci rotația $R_{\Omega, \alpha}$ are reprezentarea

$$R_{\Omega, \alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \end{pmatrix}$$

Aplicația liniară asociată rotației $R_{\Omega, \alpha}$ este rotația geometrică R_α . Ea are matricea $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ în raport cu baza dată (de fapt, are aceeași matrice în orice bază ortonormată pozitiv orientată).

Observație. Rotația de unghi 0 este id_{E^2} , iar rotația de unghi π este, de fapt, simetria față de punctul Ω și are reprezentarea

$$s_\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{\Omega, \pi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}$$

Definiția 5. Simetria ortogonală față de dreapta d din E este, prin definiție, aplicația

$$s_d : E \rightarrow E, s_d(P) = P'$$

unde P' este simetricul lui P față de d . Rezultă că

$$s_d(P) = A + \vec{s}_d(\overrightarrow{AP})$$

unde $A \in d$ este un punct fixat, iar $\vec{s}_d$ este simetria vectorială față de $\vec{d}$, spațiul director al lui d .

Dacă dreapta d este determinată de punctul A și spațiul director $[\vec{u}]$, atunci simetria ortogonală față de d are formula:

$$s_d(P) = A + 2 \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} - \overrightarrow{AP}$$

Dacă dreapta d are ecuația $ax + by + c = 0$, atunci simetria ortogonală față de d are reprezentarea

$$s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \frac{ax + by + c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Aplicația liniară asociată lui s_d este simetria vectorială față de direcția $(b, -a)$ și are matricea $\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ în raport cu baza dată.

Cazuri particulare

Dacă $d : x = c$ este o dreaptă paralelă cu Oy atunci

$$s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c - x \\ y \end{pmatrix}$$

iar dacă $d' : y = c$ este o dreaptă paralelă cu Ox , atunci

$$s_{d'} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2c - y \end{pmatrix}$$

3 Clasificarea izometriilor planului

Folosim notațiile din secțiunea precedentă. Fie $A \in O(2)$ și $B \in \mathbb{R}^2$ și $f : E \rightarrow E$ o izometrie dată în reperul ortonormat $\mathcal{R}$ prin

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

Clasificarea deplasărilor

Dacă $\det A = 1$ (spunem în acest caz că f este o deplasare sau mișcare rigidă) deosebim două subcazuri:

(A) $A = I_2$. În acest caz, f este translația de vector $\bar{u} = B^t$.

(B) $A \neq I_2$. În acest caz, f este rotația de centru Ω și unghi α unde

- Ω este unicul punct fix al lui f , adică soluția ecuației $f(\Omega) = \Omega$. Explicit, Ω are coordonatele $X_\Omega = -(A - I_2)^{-1}B$.
- $\alpha \in (-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ este unic determinat de relația $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Caz particular: $A = -I_2$ (ce corespunde lui $\alpha = \pi$).

În acest caz, $X_\Omega = -\frac{1}{2}B$, iar f este simetria față de punctul Ω , cu reprezentarea

$$f(X) = -X + B$$

Clasificarea antideplasărilor

Dacă $\det A = -1$ (spunem în acest caz că f este antideplasare) deosebim două cazuri:

(A) f are puncte fixe.

În acest caz, mulțimea punctelor fixe (adică soluțiile ecuației $f(P) = P$) este o dreaptă d și f este simetria ortogonală s_d față de d .

(B) f nu are puncte fixe.

În acest caz, f este o simetrie alunecată. Mai precis, $f = t_{\bar{u}} \circ s_d$ unde

- d este dreapta ce conține mijloacele segmentelor $[Pf(P)]$, $P \in E$.
- $\bar{u} = \overrightarrow{Mf(M)}$, unde M este un punct arbitrar al lui d .

4 Exerciții

În exercițiile următoare presupunem fixat un reper $\mathcal{R} = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ în planul euclidian orientat E .

Exercițiul 1. Fie $f : E \rightarrow E$ o izometrie. Arătați că imaginea unei drepte prin f este tot o dreaptă.

Soluție. În raport cu reperul $\mathcal{R}$ dat, f are expresia

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

unde A este o matrice ortogonală și B este o matrice coloană. Fie dreapta d , determinată de punctul $Q(x_Q, y_Q)$ și vectorul director $\bar{a} = (\alpha, \beta)$.

Ecuatiile parametrice ale dreptei d sunt atunci:

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Imaginea punctului $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_Q + t\alpha \\ y_Q + t\beta \end{pmatrix}$ prin izometria f este:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \\ &= A \left(\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right) + B \\ &= A \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} + B + tA \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Când P parcurge dreapta d , parametrul t parcurge $\mathbb{R}$, iar punctul $f(P)$ va parcurge dreapta care trece prin punctul $Q' = f(Q)$ de coordonate

$$\begin{pmatrix} x_{Q'} \\ y_{Q'} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} + B$$

și are vectorul director $\bar{u}' = \overrightarrow{f}(\bar{u})$ de coordonate

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

■

Din exercițiul anterior putem deduce câteva metode alternative de a determina ecuația imaginii unei drepte printr-o izometrie. Considerăm astfel $f : E \rightarrow E$ o izometrie și d o dreaptă. Pentru a determina $f(d)$ putem proceda prin una din următoarele metode.

Metoda 1 Scriem ecuațiile parametrice ale lui d și le înlocuim în formula izometriei, cum am procedat în exercițiul precedent. Avantajul acestei metode este că poate fi extinsă pentru a determina imaginea oricărei curbe parametrizate $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, nu doar drepte.

Metoda 2 Alegem un punct Q de pe dreapta d și un vector director $\bar{a}$, astfel încât $d = Q + [\bar{a}]$. Atunci $f(d)$ este dreapta care trece prin $f(Q)$ și are vectorul director $\vec{f}(\bar{a})$ (vezi exercițiul precedent).

Metoda 3 Deoarece știm că imaginea lui d este o dreaptă, rezultă că, dacă alegem două puncte distincte A și B de pe dreapta d , imaginea $f(d)$ va fi dreapta determinată de punctele $f(A)$ și $f(B)$.

Metoda 4 Presupunem dreapta dată prin ecuația generală $ax + by + c = 0$. Scriem reprezentarea lui f în reperul dat astfel:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

Putem exprima atunci x, y în funcție de x', y' :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - A^{-1}B$$

Înlocuind x, y în ecuația dreptei obținem o expresie de forma $a'x' + b'y' + c' = 0$. Dar $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sunt coordonatele imaginii unui punct arbitrar al lui d , de unde rezultă că $f(d)$ este dreapta de ecuație sunt $a'x' + b'y' + c' = 0$. Avantajul acestei metode este că poate fi folosită pentru a determina imaginea oricărei curbe dată printr-o ecuație implicită $F(x, y) = 0$.

Metoda 5 Folosim faptul că aplicația liniară $\vec{f}$ păstrează unghiurile. Rezultă astfel că dacă d este determinată de un punct Q și vectorul normal $\bar{N}$ atunci $f(d)$ este dreapta determinată de punctul $f(Q)$ și vectorul normal $\vec{f}(\bar{N})$.

Exercițiul 2. Fie $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}$. Scrieți ecuațiile translației $t_{\bar{u}}$ și determinați imaginea dreptei $d : x + y - 2 = 0$ prin $t_{\bar{u}}$.

Soluție. Ecuațiile lui $t_{\bar{u}}$ sunt:

$$t_{\bar{u}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}$$

Vom ilustra metodele de mai sus pentru a determina imaginea lui d prin $t_{\bar{u}}$.

Metoda 1. Ecuațiile parametrice ale lui d sunt

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

Pentru un punct $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d$ calculăm

$$t_{\bar{u}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2-t+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t+1 \\ 4-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Așadar, $t_{\bar{u}}(d)$ este dreapta care de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

sau echivalent, prin eliminarea lui t ,

$$t_{\bar{u}}(d) : x + y - 5 = 0$$

Metoda 2 Avem $d = P + [\bar{a}]$, cu $P \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ și $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, de unde obținem:

$$t_{\bar{u}}(P) = t_{\bar{u}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =: P'$$

$$\vec{t}_{\bar{u}}(\bar{a}) = \text{id}_{\vec{E}}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

deci

$$t_{\bar{u}}(d) = t_{\bar{u}}(P) + [\vec{t}_{\bar{u}}(\bar{a})] = P' + [\bar{a}] = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Așadar $t_{\bar{u}}(d)$ este dreapta de ecuație

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-1} \iff x + y - 5 = 0$$

Metoda 3. Fie punctele $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ și $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ale lui d . Avem atunci

$$t_{\bar{u}}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} =: P'$$

$$t_{\bar{u}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} =: Q'$$

Dreapta $t_{\bar{u}}$ este determinată de punctele P' și Q' deci va avea ecuația

$$t_{\bar{u}}(d) : \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-4}{2-4} \iff x + y - 5 = 0$$

Metoda 4. Scriem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = t_{\bar{u}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

de unde găsim

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$$

Rezultă că:

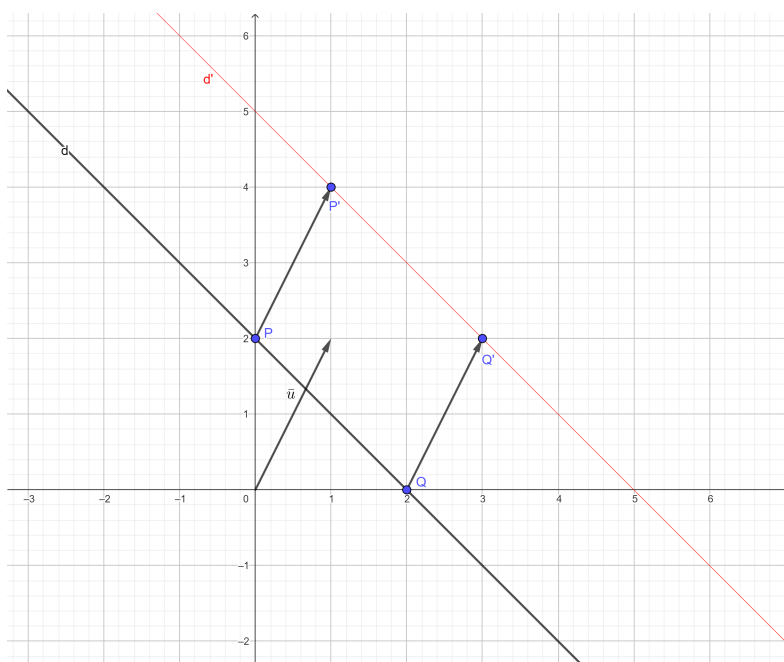
$$x + y - 2 = 0 \iff x' - 1 + y' - 2 - 2 = 0 \iff x' + y' - 5 = 0$$

deci $d' := t_{\bar{u}}(d)$ este dreapta de ecuație $x + y - 5 = 0$.

Metoda 5. Avem $d = P + [\bar{N}]^\perp$, unde $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ și $\bar{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Obținem

$$t_{\bar{u}}(P) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t}_{\bar{u}}(\bar{N}) = \text{id}_{\vec{E}}(\bar{N}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



deci $t_{\vec{u}}(d)$ este dreapta care trece prin punctul $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ și are vectorul normal $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ecuația sa este

$$t_{\vec{u}}(d) : 1 \cdot (x - 3) + 1 \cdot (y - 2) = 0 \iff x + y - 5 = 0.$$

■

Exercițiul 3. Fie $\Omega(-1, 2)$ și $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Scrieți ecuațiile rotației $R_{\Omega, \varphi}$ și determinați imaginea dreptei $d : x + y - 2 = 0$ prin $R_{\Omega, \varphi}$.

Soluție. Expresia lui $R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}$ este:

$$\begin{aligned} R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

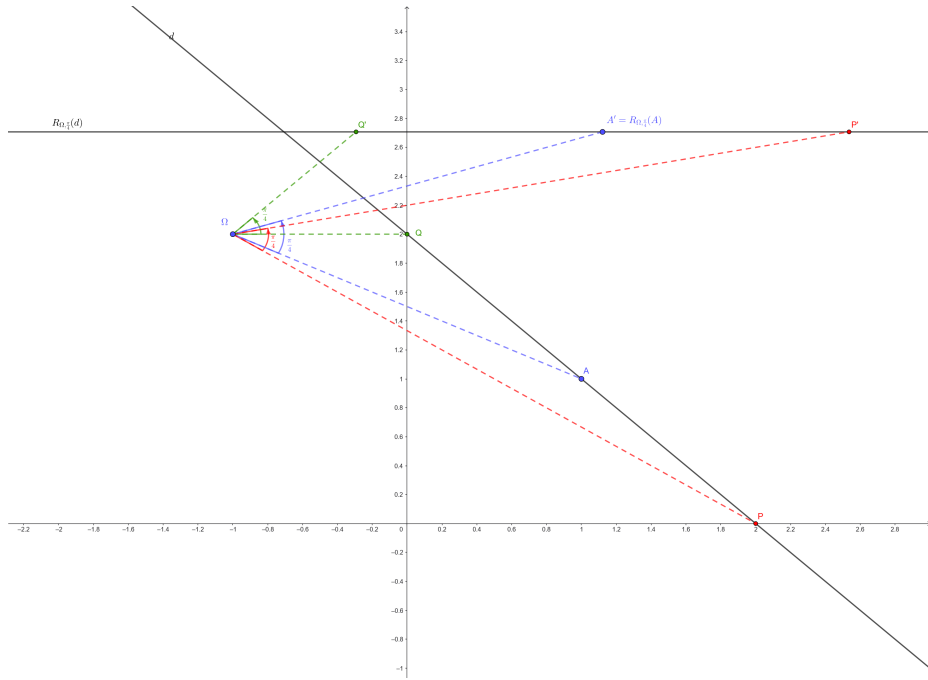
Să determinăm imaginea dreptei d .

Metoda 1. d este dreapta care trece prin $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și are vectorul normal $\overline{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Avem:

$$\begin{aligned} R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}(A) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} \\ \vec{R}_{\Omega, \frac{\pi}{4}}(\overline{N}) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rezultă că $R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}(d)$ este dreapta care trece prin $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix}$ și are vectorul normal $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ecuația sa este

$$y - \frac{1}{2}\sqrt{2} - 2 = 0$$



Metoda 2. Fie $P \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ două puncte ale lui d . Atunci

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}(P) =: P' = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix}; R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}(Q) =: Q' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix}$$

de unde găsim ecuația dreptei $R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}(d) = P'Q'$:

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}(d) : y = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2.$$

Metoda 3. Un vector director al lui d este $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Avem atunci

$$\vec{R}_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

deci $R_{\Omega, \frac{\pi}{4}}(d)$ are ecuația

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= X_{P'} + t \vec{R}_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff y = \frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

■

Exercițiul 4. Scrieți ecuația simetriei ortogonale s_d față de dreapta $d : 2x + y - 1 = 0$ și determinați imaginile dreptelor $\delta_1 : x + y = 0$, $\delta_2 : 4x + 2y - 1 = 0$ și $\delta_3 : x - 2y + 1 = 0$ prin s_d .

Soluție. Ecuația simetriei s_d este:

$$\begin{aligned} s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{2x + y - 1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Să determinăm imaginea lui δ_1 .

Metoda 1. Avem:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' + \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

(simetria s_d este o involuție, deci $s_d^{-1} = s_d$) deci

$$\begin{aligned} x + y &= -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + \frac{4}{5} - \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' + \frac{2}{5} \\ &= -\frac{7}{5}x' - \frac{1}{5}y' + \frac{6}{5} \end{aligned}$$

deci ecuația lui $s_d(\delta_1)$ este $-7x - y + 6 = 0$.

Metoda 2. Deoarece simetria este o izometrie, va duce direcția normală lui δ_1 în direcția normală lui $s_d(\delta_1)$.

Cum direcția normală lui δ_1 este $\overline{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, rezultă că direcția normală lui $s_d(\delta_1)$ este

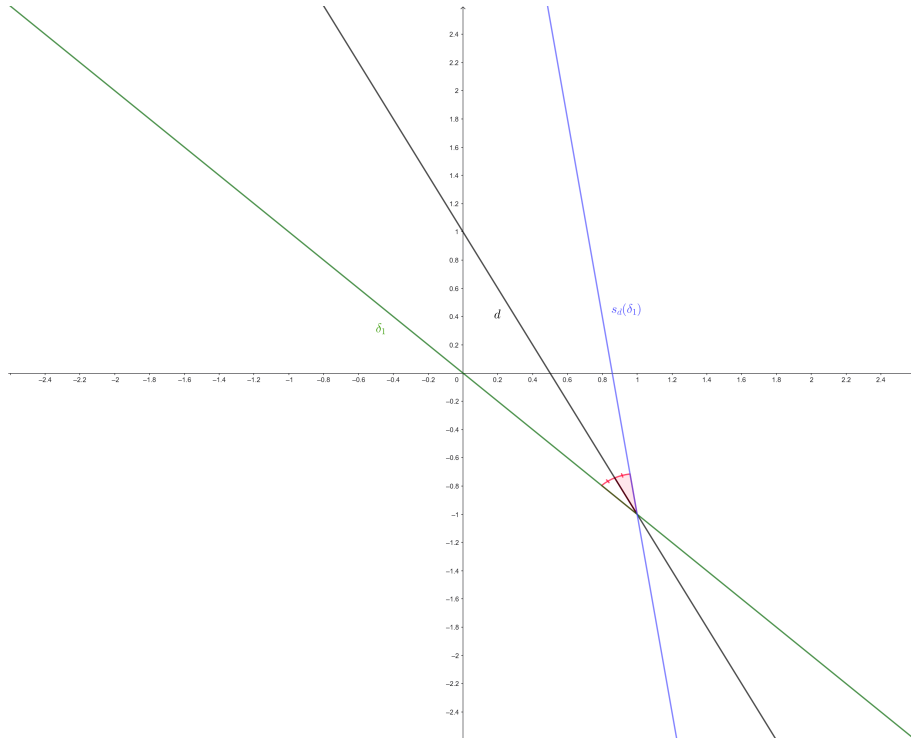
$$\overline{N}' = \overrightarrow{s}_d(\overline{N}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Considerăm $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \delta_1$. Atunci

$$O' = s_d(O) = s_d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dreapta $s_d(\delta_1)$ este dreapta care trece prin $O' = s_d(O)$ și are direcția normală $\overline{N}'$. Ecuația acesteia va fi:

$$s_d(\delta_1) : -\frac{7}{5}(x - \frac{4}{5}) - \frac{1}{5}(y - \frac{2}{5}) = 0 \iff -7x - y + 6 = 0.$$



Să determinăm imaginea lui δ_2 prin s_d . Putem proceda similar ca pentru δ_1 , însă putem deduce rezultatul mai repede.

Observăm că $\delta_2 \parallel d$, deci $s_d(\delta_2)$ are aceeași direcție ca d . Rezultă că $s_d(\delta_2)$ are vectorul normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ deci are o ecuație de forma $2x + y + \alpha = 0$.

Parametrul α se determină din condiția $s_d(P) \in s_d(\delta_2)$ unde P este un punct al lui δ_2 .

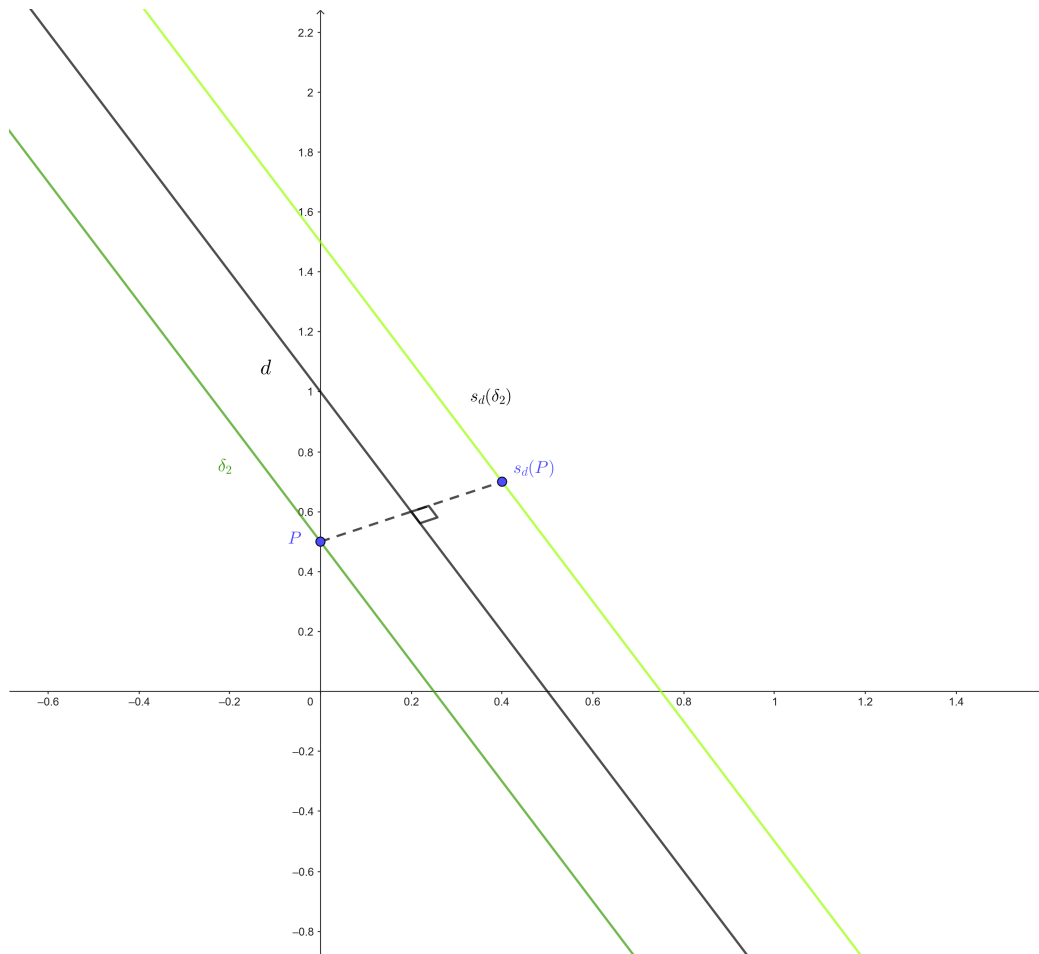
Luăm, de exemplu, $P \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Avem atunci

$$s_d(P) = \left(\frac{2}{5}, \frac{7}{10} \right)$$

de unde găsim

$$\frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \alpha = 0 \iff \alpha = -\frac{3}{2}$$

deci $s_d(\delta_2) : 2x + y - \frac{3}{2} = 0$.



Pentru ultima dreaptă, observăm că $\delta_3 \perp d$, deci $s_d(\delta_3) = \delta_3$. ■

Exercițiul 5. Fie $\Omega(-1, 2)$ și $d : 2x + y - 1 = 0$. Determinați ecuațiile $R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \circ s_d$ și precizați tipul acestei izometрии.

Soluție. Formula rotației date este:

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix}$$

iar simetria este dată de:

$$s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(vezi exercițiile precedente). Compunerea $f = R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \circ s_d$ va avea expresia:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= R_{\Omega, \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} - 1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

deci

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{10}\sqrt{2} - 1 \\ \frac{1}{10}\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix}$$

Să determinăm tipul izometriei f . Matricea lui f este

$$A = \frac{\sqrt{2}}{10} \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

care este ortogonală și are determinantul -1 . Aceasta înseamnă că f este o antideplasare. Pentru a determina tipul său, determinăm punctele fixe:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} x - 7y \\ -7x - y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 - 5\sqrt{2} \\ 1 + 10\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2}x \\ 5\sqrt{2}y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} (1 - 5\sqrt{2})x - 7y + 17 - 5\sqrt{2} = 0 / \cdot (-7) \\ -7x - (1 + 5\sqrt{2})y + 1 + 10\sqrt{2} = 0 / \cdot (1 - 5\sqrt{2}) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -7(1 - 5\sqrt{2})x + 49y - 7(17 - 5\sqrt{2}) = 0 \\ -7(1 - 5\sqrt{2})x + 49y + 101 - 15\sqrt{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Acest ultim sistem este evident incompatibil, deci f este o simetrie alunecată. ■

Observația 6. Funcția care asociază unei izometrii $f(X) = AX + B$ matricea 3×3

$$\widetilde{M}_f = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este un morfism de grupuri multiplicative $\text{Izom}(E) \rightarrow GL_3(\mathbb{R})$. Într-adevăr, dacă $g(X) = A'X + B'$ este o altă izometrie avem:

$$g \circ f(X) = A'(AX + B) + B' = A'AX + A'B + B'$$

Avem atunci

$$\widetilde{M}_g \cdot \widetilde{M}_f = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'A & A'B + B' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{M}_{g \circ f}$$

Așadar pentru a determina compunerea, putem înmulți matricele bloc corespunzătoare.

În cazul exercițiului precedent obținem:

$$\widetilde{M}_f = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{10} & -7\frac{\sqrt{2}}{10} & 17\frac{\sqrt{2}}{10} - 1 \\ -7\frac{\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} & \frac{\sqrt{2}}{10} + 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de unde regăsim expresia lui f :

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{10} & -7\frac{\sqrt{2}}{10} \\ -7\frac{\sqrt{2}}{10} & -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17\frac{\sqrt{2}}{10} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{10} + 2 \end{pmatrix}$$

Exercițiul 6. Fie $\Omega'(0, 1)$ și $d : 2x + y - 1 = 0$. Determinați ecuațiile $R_{\Omega', \frac{\pi}{2}} \circ s_d$ și precizați tipul acestei izometрии.

Soluție. Expresia rotației $R_{\Omega', \frac{\pi}{2}}$ este

$$R_{\Omega', \frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ x+1 \end{pmatrix}$$

iar a simetriei s_d este:

$$s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \frac{2x+y-1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Compunerea $f = R_{\Omega', \frac{\pi}{2}} \circ s_d$ va avea expresia:

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= R_{\Omega', \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3x-4y+4 \\ -4x+3y+2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{5}(-4x+3y+2) \\ 1 + \frac{1}{5}(-3x-4y+4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{9}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ, puteam folosi matricele extinse ale izometriilor și avem:

$$\widetilde{M}_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de unde regăsim expresia lui f .

Să determinăm tipul acestei izometрии. Determinantul matricei aplicației este

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{vmatrix} = -1$$

ceea ce arată că f este antideplasare. Să determinăm punctele fixe ale lui f :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x+3y=3 \\ 3x+9y=9 \end{cases} \\ &\iff x+3y=3 \end{aligned}$$

ceea că mulțimea punctelor fixe ale lui f este dreapta $d' : x+3y=3$. Așadar, $f = s_{d'}$. ■

Exercițiul 7. Fie $\Omega(1, 1)$ și $\bar{u} = \bar{j} - \bar{i}$. Determinați ecuațiile $R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{6}}$ și $t_{\bar{u}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{2}}$ și precizați tipul acestei izometрии.

Soluție. Scriem ecuațiile celor două rotații:

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y \\ x \end{pmatrix}$$

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{6}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Determinăm matricea extinsă a compunerii $f = R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{6}}$:

$$\widetilde{M}_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci f are expresia:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Determinăm tipul izometriei f . Matricea sa este $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ și are determinantul 1 și f are punctul fix $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (deoarece este punct fix pentru ambele rotații). Așadar f este o rotație de centru Ω . Unghiul φ al acestei rotații este determinat de

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

Deci $f = R_{\Omega, \frac{2\pi}{3}}$ (observăm că $\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$).

Izometria $g = t_{\bar{u}} \circ R_{\Omega, \frac{\pi}{2}}$ va avea ecuațiile

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y \\ x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$ și $\Omega' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ este unicul punct fix al lui g , obținem că $g = R_{\Omega', \frac{\pi}{2}}$. ■

Exercițiul 8. Fie $\Omega(1, 1), \Omega'(2, 3)$. Determinați ecuațiile $R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ R_{\Omega', \frac{\pi}{3}}, R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ R_{\Omega', -\frac{\pi}{2}}$ și precizați tipul acestor izometrii.

Soluție. Scriem ecuațiile rotațiilor date:

$$R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y \\ x \end{pmatrix}$$

$$R_{\Omega', \frac{\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \\ -\sqrt{3} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_{\Omega', -\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ 5-x \end{pmatrix}$$

Determinăm compunerea $R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ R_{\Omega', -\frac{\pi}{3}}$ folosind matricele extinse:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deci ecuațiile lui $f = R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ R_{\Omega', -\frac{\pi}{3}}$ sunt

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}$$

Deoarece

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{vmatrix} = 1$$

f este o rotație de unghi φ determinat de condițiile:

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \varphi = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Să determinăm punctul fix al lui f :

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x - \frac{1}{2}y + \sqrt{3} + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}x + \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)y + \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Deci f este rotația de centru $\Omega'' \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ și unghi $\frac{5\pi}{6}$.

Să determinăm și tipul izometriei $g = R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \circ R_{\Omega', -\frac{\pi}{2}}$. Avem:

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \left(R_{\Omega', -\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = R_{\Omega, \frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} y-1 \\ 5-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(5-x) \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

deci

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Matricea asociată acestei izometrie este I_2 , deci $g = t_{\bar{u}}$ unde $\bar{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. ■

Exercițiul 9. Fie $d : x + y - 2 = 0$, $d' : x + y + 1 = 0$. Determinați ecuațiile $s_{d'} \circ s_d$ și precizați tipul acestei izometrie.

Soluție. Scriem ecuațiile simetriei s_d :

$$s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2}{1^2 + 1^2} (x + y - 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y \\ 2-x \end{pmatrix}$$

și ale simetriei $s_{d'}$:

$$s_{d'} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2}{1^2 + 1^2} (x + y + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-1 \\ -x-1 \end{pmatrix}$$

și obținem

$$s_{d'} \circ s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_{d'} \begin{pmatrix} 2-y \\ 2-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2-x)-1 \\ -(2-y)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

deci $s_{d'} \circ s_d = t_{\bar{u}}$ unde $\bar{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$. Observăm $d \parallel d'$ și $\bar{u} \perp d$. ■

Exercițiul 10. Fie $d : x + y = 0$, $d' : x - y = 0$. Determinați ecuațiile $s_{d'} \circ s_d$ și precizați tipul acestei izometрии.

Soluție. Scriem ecuațiile simetriei s_d :

$$s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2}{1^2 + 1^2} (x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

și ale simetriei $s_{d'}$:

$$s_{d'} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{2}{1^2 + (-1)^2} (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

deci:

$$s_{d'} \circ s_d \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s_{d'} \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Determinăm tipul izometрии $f = s_{d'} \circ s_d$. Matricea asociată este $-I_2$ care are determinantul 1, deci f este o rotație.

Unghiul φ al acestei rotații este determinat de condițiile

$$\begin{cases} \cos \varphi = -1 \\ \sin \varphi = 0 \end{cases} \iff \varphi = \pi$$

Punctul fix al lui f este evident originea, deci f este rotația de unghi π în jurul originii, adică simetria centrală față de O . Observăm că $\angle(d, d') = \frac{\pi}{2}$ (unghiul rotației este dublul unghiului dintre drepte). ■