

1 Spații vectoriale euclidiene

1.1 Produse scalare. Baze ortonormate

În continuare, V va fi un spațiu vectorial real de dimensiune $n \geq 1$.

Definiția 1. Prin produs scalar pe V înțelegem o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită pe V .

Explicit, un produs scalar pe V este o aplicație $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ce satisface:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este biliniară, adică, pentru orice $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ și orice scalari $a, b \in \mathbb{R}$, au loc:

$$\langle \bar{u}, a\bar{v} + b\bar{w} \rangle = a \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + b \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$$

$$\langle a\bar{v} + b\bar{w}, \bar{u} \rangle = a \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle + b \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle$$

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este simetrică, adică, pentru orice $\bar{u}, \bar{v} \in V$, are loc:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle.$$

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este pozitiv definită, adică, pentru orice $\bar{v} \in V$, are loc $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$, cu egalitate dacă și numai dacă $\bar{v} = \bar{0}$.

Norma unui vector $\bar{v} \in V$ este, prin definiție, numărul real pozitiv

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}$$

Pozitiva definire a produsului scalar implică:

Teorema 2. (Cauchy-Schwarz) Pentru orice $\bar{u}, \bar{v} \in V$, are loc

$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|,$$

cu egalitate dacă și numai dacă vectorii $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt coliniari.

Demonstrația 1. Dacă $\bar{v} = \bar{0}$ inegalitatea este evidentă (avem egalitate și $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt evident coliniari). Presupunem că $\bar{v} \neq \bar{0}$.

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem

$$0 \leq \|\bar{u} + t\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + 2 \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle t + \|\bar{v}\|^2 t^2$$

Membrul drept este o funcție de gradul al doilea în t cu coeficient dominant pozitiv. Ea este pozitivă pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă discriminantul său este mai mic sau egal ca 0. Așadar

$$4|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| - 4\|\bar{v}\|^2 \|\bar{u}\|^2 \leq 0$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

Avem egalitate dacă și numai dacă discriminantul trinomului are discriminantul 0, adică are o rădăcină reală dublă, sau, echivalent, există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\|\bar{u} + t\bar{v}\| = 0$, adică $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt coliniari. ■

Demonstrația 2. Dacă $\bar{u} = \bar{0}$ sau $\bar{v} = \bar{0}$, inegalitatea este adevărată (suntem în cazul de egalitate și $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt coliniari). Putem presupune astfel că $\bar{u}$ și $\bar{v}$ sunt nenuli.

Considerăm vectorii $\|\bar{u}\| \bar{v} \pm \|\bar{v}\| \bar{u}$ și obținem:

$$0 \leq \langle \|\bar{u}\| \bar{v} \pm \|\bar{v}\| \bar{u}, \|\bar{u}\| \bar{v} \pm \|\bar{v}\| \bar{u} \rangle = 2\|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 \pm 2\|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$$

de unde deducem că

$$\pm \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \leq \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|. \quad \blacksquare$$

Teorema 3. Funcția $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ este o normă pe V , adică satisface următoarele proprietăți:

- $\|\bar{v}\| \geq 0$ pentru orice $\bar{v} \in V$ cu egalitate dacă și numai dacă $\bar{v} = 0$.
- $\|a\bar{v}\| = |a| \|\bar{v}\|$, pentru orice scalar $a \in \mathbb{R}$ și orice vector $\bar{v} \in V$.
- $\|\bar{v} + \bar{w}\| \leq \|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|$, pentru orice $\bar{v}, \bar{w} \in V$, cu egalitate dacă și numai dacă există un scalar $\lambda \geq 0$ astfel încât $\bar{v} = \lambda \bar{w}$.

Demonstrație. Primele două proprietăți rezultă imediat din definiția produsului scalar. Pentru a treia, folosim inegalitatea lui Cauchy:

$$\|\bar{v} + \bar{w}\|^2 = \langle \bar{v} + \bar{w}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \|\bar{v}\|^2 + 2\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle + \|\bar{w}\|^2 \leq \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{v}\| \|\bar{w}\| + \|\bar{w}\|^2 = (\|\bar{v}\| + \|\bar{w}\|)^2$$

de unde regăsim inegalitatea cerută. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \|\bar{v}\| \|\bar{w}\|$, ceea ce este echivalent cu $\bar{v} = \lambda \bar{w}$, pentru un $\lambda \geq 0$. ■

Observația 4. Orice funcție cu cele trei proprietăți de mai sus se numește normă pe V . Teorema anterioară spune că $\bar{v} \mapsto \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}$ este o normă pe V . Reciproca nu este însă adevărată: există norme pe V care nu provin dintr-un produs scalar.

Principalele exemple de spații euclidiene sunt:

Exemplul 5. Pe $\mathbb{R}^n$ (văzut ca spațiul matricelor coloană $n \times 1$) considerăm $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

este un produs scalar (produsul scalar euclidian pe $\mathbb{R}^n$).

Exemplul 6. Fie V spațiul vectorilor liberi (în plan sau spațiu). Produsul scalar standard pe V este, prin definiție, aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \bar{u} = \bar{0} \text{ sau } \bar{v} = \bar{0}. \\ |\bar{u}| |\bar{v}| \cos \angle(\bar{u}, \bar{v}), & \text{dacă } \bar{u} \neq \bar{0} \text{ și } \bar{v} \neq \bar{0}. \end{cases}$$

Definiția 7. Spunem că doi vectori u și v sunt ortogonali sau perpendiculari (scriem $u \perp v$) dacă $\langle u, v \rangle = 0$. Mai general, spunem că un vector v este perpendicular pe un mulțime de vectori U dacă $v \perp u$ pentru orice $u \in U$.

Din proprietățile produsului scalar, putem deduce:

- Dacă $\bar{u} \perp \bar{v}$ atunci $\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$.
- Fie U un subspațiu vectorial al lui V și $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r$ o bază în V . Atunci un vector $\bar{v}$ este perpendicular pe U dacă și numai dacă $\bar{v} \perp \bar{u}_i$ pentru orice $i = \overline{1, r}$. (cu alte cuvinte este suficient să testăm ortogonalitatea lui $\bar{v}$ pe vectorii unei baze a lui U pentru ca $\bar{v}$ să fie ortogonal pe toți vectorii din U).

Definiția 8. Un sistem de vectori $(\bar{v}_i)_{i=1, r}$ se numește ortogonal dacă $\bar{v}_i \perp \bar{v}_j$ pentru orice indici $i \neq j$. Dacă, în plus, $\|\bar{v}_i\| = 1$, pentru orice indice i , spunem că $(\bar{v}_i)_{i=1, r}$ este un sistem ortonormat.

Teorema 9. Orice subspațiu U al lui V admite o bază ortonormată. În particular, V admite baze ortonormate.

Demonstrație. Demonstrația este una constructivă, folosind procedeul Gramm-Schmidt. Plecând de la o bază oarecare $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r$ a lui U , vectorii următori (construiți recursiv)

$$\begin{aligned}\bar{f}_1 &= \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|}; \\ \bar{f}_k &= \frac{\bar{v}_k}{\|\bar{v}_k\|}, \bar{v}_k = \bar{u}_k - \langle \bar{u}_k, \bar{f}_1 \rangle \bar{f}_1 - \langle \bar{u}_k, \bar{f}_2 \rangle \bar{f}_2 - \dots - \langle \bar{u}_k, \bar{f}_{k-1} \rangle \bar{f}_{k-1}, k = \overline{2, r}.\end{aligned}$$

formează o bază ortonormată a lui U . ■

Corolarul 10. Orice sistem de vectori ortonormat din V poate fi prelungit la o bază ortonormată a lui V .

Observația 11. Fie $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ o bază ortonormată a lui V . Atunci coordonatele unui vector $\bar{v} \in V$ în raport cu această bază sunt

$$\begin{pmatrix} \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \\ \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle \bar{v}, \bar{u}_n \rangle \end{pmatrix}$$

În secțiunile următoare vom studia câteva tipuri de aplicații liniare ce apar în geometrie. Pentru aceasta va fi utilă următoarea notație.

Considerăm o bază ortonormată $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ a lui V . Fiecare vector $\bar{v} \in V$ se poate scrie în mod unic $\bar{v} = x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 + \dots + x_n \bar{u}_n$, unde $x_i \in \mathbb{R}$.

Obținem astfel o corespondență bijectivă (de fapt, un izomorfism liniar)

$$\begin{aligned}V &\leftrightarrow \mathbb{R}^n \\ \bar{v} &\leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Astfel, o aplicație liniară $T : V \rightarrow V$ dă naștere la o funcție

$$\begin{aligned}T_B : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ T_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= A_B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

unde A_B este matricea lui A în raport cu baza B .

Dacă baza B este fixată, vom identifica vectorii v cu coloanele de coordonate corespunzătoare, și vom elimina din notația anterioară menționarea bazei B .

Cu alte cuvinte, vectorul "este" coloana sa de coordonate și vom aplica T unui vector coloană, subînțelegând că, de fapt, aplicăm T vectorului cu coordonatele corespunzătoare.

Mai mult, sub această identificare, produsul scalar din V este transformat în produsul scalar standard pe $\mathbb{R}^n$.

Atragem atenția totuși că identificarea $V \leftrightarrow \mathbb{R}^n$ se poate face numai după ce am fixat o bază (pe care o vom presupune de obicei ortonormată).

2 Proiecții ortogonale

Definiția 12. Fie $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spațiu euclidian de dimensiune n și U un subspațiu al lui V . Mulțimea

$$U^\perp = \{\bar{v} \in V \mid \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = 0, \forall \bar{u} \in U\}$$

se numește **complementul ortogonal** al lui U (în V).

Teorema 13. *Au loc următoarele proprietăți:*

- (a) $U^\perp$ este un subspațiu liniar al lui V .
- (b) $V = U \oplus U^\perp$, i.e. orice vector $\bar{v} \in V$ se poate descompune în mod unic ca o sumă $\bar{v} = \bar{u} + \bar{u}'$ cu $\bar{u} \in U$ și $\bar{u}' \in U^\perp$.
- (c) $\dim U^\perp = n - \dim U$.

Demonstrație. Punctul (a) rezultă din bilinearitatea produsului scalar, iar (c) rezultă din (b).

Pentru (b), observăm mai întâi că $U \cap U^\perp = \{0\}$. Într-adevăr, dacă $\bar{u} \in U \cap U^\perp$ atunci $\bar{u} \perp \bar{u}$, deci $\bar{u} = \bar{0}$.

Rămâne să arătăm că orice vector $\bar{v} \in V$ se poate descompune $\bar{v} = \bar{u} + \bar{u}'$ cu $\bar{u} \in U$ și $\bar{u}' \in U^\perp$. Pentru aceasta considerăm $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r$ o bază ortonormată a lui U .

Vectorul $\bar{u}$ căutat se poate scrie în baza considerată

$$\bar{u} = a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_r \bar{u}_r$$

Impunem condiția ca $\bar{v} - \bar{u} = \bar{v} - (a_1 \bar{u}_1 + a_2 \bar{u}_2 + \dots + a_r \bar{u}_r)$ să fie perpendicular pe vectorii $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r$ și obținem

$$a_i = \langle \bar{v}, \bar{u}_i \rangle, i = \overline{1, r}$$

Așadar putem scrie

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{u}'$$

cu

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \bar{u}_2 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{u}_r \rangle \bar{u}_r \in U \\ \bar{u}' &= \bar{v} - \bar{u} \in U^\perp \end{aligned}$$

■

Definiția 14. Fie U un subspațiu al lui V și $\bar{v} \in V$. Deoarece $V = U \oplus U^\perp$, vectorul $\bar{v}$ se descompune în mod unic sub forma $\bar{v} = \bar{u} + \bar{u}'$, cu $\bar{u} \in U$ și $\bar{u}' \in U^\perp$. Vectorul $\bar{u}$ poartă numele de proiecția ortogonală a lui $\bar{v}$ pe U și vom nota $\bar{u} := \text{pr}_U(\bar{v})$.

Observația 15. Demonstrația teoremei indică și o formulă explicită pentru proiecția ortogonală. Dacă $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r\}$ este o bază ortonormată a lui U , atunci

$$\text{pr}_U(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \bar{u}_2 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{u}_r \rangle \bar{u}_r, \forall \bar{v} \in V$$

Dacă $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_r\}$ este doar o baza ortogonală (adică $\bar{u}_i$ sunt perpendiculari doi câte doi, dar nu au neapărat lungimea 1), un argument similar arată că

$$\text{pr}_U(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle}{\|\bar{u}_1\|^2} \bar{u}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle}{\|\bar{u}_2\|^2} \bar{u}_2 + \dots + \frac{\langle \bar{v}, \bar{u}_r \rangle}{\|\bar{u}_r\|^2} \bar{u}_r, \forall \bar{v} \in V$$

În particular, dacă $U = [\bar{a}]$ este o dreaptă vectorială, atunci

$$\text{pr}_{[\bar{a}]}(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{a}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{a}\|^2} \bar{a}, \forall \bar{v} \in V$$

3 Endomorfisme ortogonale ale lui spațiu liniar euclidian

3.1 Definiție și proprietăți

Definiția 16. Endomorfismul liniar $T : V \rightarrow V$ se numește **ortogonal** dacă păstrează produsul scalar, adică

$$\langle T(\bar{u}), T(\bar{v}) \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle, \forall \bar{u}, \bar{v} \in V.$$

Teorema 17. Fie $T : V \rightarrow V$ o funcție.

- (a) Dacă T este ortogonală atunci T păstrează lungimea vectorilor: $\|T(\bar{v})\| = \|\bar{v}\|$, pentru orice $\bar{v} \in V$.
- (b) Dacă T este ortogonală atunci T este liniară.
- (c) Dacă T este liniară și păstrează lungimea vectorilor atunci T este ortogonală.

Demonstrație. (a) Luăm în definiție $\bar{u} = \bar{v}$.

(b) Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\begin{aligned} \|T(a\bar{u} + b\bar{v}) - aT(\bar{u}) - bT(\bar{v})\|^2 &= \|T(a\bar{u} + b\bar{v})\|^2 + a^2 \|T(\bar{u})\|^2 + b^2 \|T(\bar{v})\|^2 + 2ab \langle T(\bar{u}), T(\bar{v}) \rangle \\ &\quad - 2a \langle T(a\bar{u} + b\bar{v}), T(\bar{u}) \rangle - 2b \langle T(a\bar{u} + b\bar{v}), T(\bar{v}) \rangle \\ &= \|a\bar{u} + b\bar{v}\|^2 + a^2 \|\bar{u}\|^2 + b^2 \|\bar{v}\|^2 + 2ab \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \\ &\quad - 2a \langle a\bar{u} + b\bar{v}, \bar{u} \rangle - 2b \langle a\bar{u} + b\bar{v}, \bar{v} \rangle \\ &= \|(a\bar{u} + b\bar{v}) - a\bar{u} - b\bar{v}\|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Așadar $T(a\bar{u} + b\bar{v}) = aT(\bar{u}) + bT(\bar{v})$, ceea ce arată că T este liniară.

(c) Fie $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Atunci:

$$\begin{aligned} \langle T(\bar{u}), \overline{T(\bar{v})} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\|T(\bar{u} + \bar{v})\|^2 - \|T(\bar{u})\|^2 - \|T(\bar{v})\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 - \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2 \right) \\ &= \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \end{aligned}$$

■

Teorema 18. Fie $T : V \rightarrow V$ un operator liniar și B o bază ortonormată a lui V .

- (a) Dacă T este ortogonal atunci matricea A a lui T în raport cu B satisface $AA^t = A^tA = I_n$.
- (b) Reciproc, dacă matricea lui T în raport cu B este ortogonală, atunci T este ortogonal.

Teorema precedentă stă la baza următoarei definiții:

Definiția 19. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește ortogonală dacă $AA^t = I_n$. Mulțimea matricelor ortogonale va fi notată prin $O(n)$ (grupul ortogonal).

Un exercițiu simplu arată că $O(n)$ este un grup multiplicativ, subgrup al lui $GL(n, \mathbb{R})$, ceea ce justifică denumirea de grup ortogonal.

De asemenea, dacă $AA^t = I_n$, atunci $(\det A)^2 = 1$, deci $\det A = \pm 1$. Se verifică imediat că mulțimea matricelor ortogonale cu determinant egal cu 1 formează un subgrup al lui $O(n)$, numit grupul special ortogonal și notat $SO(n)$.

De fapt, putem obține un rezultat mai bun. Pentru că determinantul este multiplicativ, restricția sa $\det : O(n) \rightarrow \{\pm 1\}$ este un morfism surjectiv de grupuri. Rezultă atunci că $SO(n) = \ker \det$ este un subgrup normal al lui $O(n)$.

Mai mult, grupul factor $O(n)/SO(n)$ este izomorf cu grupul cu două elemente $\{\pm 1\}$. Aceasta arată că $SO(n)$ are index 2 în $O(n)$, deci $O(n)$ este împărțit în două clase $SO(n)$ și $SO(n) \cdot A$ unde A este o matrice din $O(n)$ cu $\det A = -1$ (orice astfel de matrice va avea această proprietate).

Teorema 20. *Mulțimea endomorfismelor ortogonale ale lui V formează un grup în raport cu compunerea, notat $O(V)$ și numit grupul ortogonal al lui V .*

Demonstrație. Deși teorema se poate demonstra direct, folosind definiția transformărilor ortogonale, putem da o demonstrație alternativă. Fixăm o bază ortonormată B a lui V . Rezultă atunci că aplicația $\Phi : O(V) \rightarrow O(n)$ care asociază unei transformări $T \in O(V)$ matricea sa în baza B este o bijecție cu proprietatea $\Phi(T \circ S) = \phi(T) \cdot \phi(S)$, pentru orice $T, S \in O(V)$. Cum $O(n)$ este grup, rezultă imediat și că $O(V)$ este grup (izomorf cu $O(n)$). ■

Definiția 21. Un endomorfism ortogonal se numește de **specia I** (sau rotație geometrică) dacă determinantul matricei asociate în raport cu o bază ortonormată este $+1$. În caz contrar, când determinantul este -1 , transformarea se numește de **specia a II-a**.

Încheiem această secțiune cu un rezultat legat de valorile proprii complexe ale unui operator ortogonal:

Propoziția 22. Fie $A \in O(n)$. Atunci valorile proprii complexe ale lui A au toate modulul 1. În particular, valorile proprii reale ale lui A pot fi doar 1 sau -1.

3.2 Transformări ortogonale într-un plan vectorial

În această secțiune, V va fi un spațiu vectorial euclidian *orientat* de dimensiune 2. Pentru a putea descrie transformările ortogonale ale lui V , vom avea nevoie de conceptul de unghi orientat:

Definiția 23. Considerăm $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ o bază ortonormată orientată pozitiv în V . Fie $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$. Unghiul orientat între $\bar{u}$ și $\bar{v}$ este prin definiție numărul $\angle_o(\bar{u}, \bar{v}) \in (-\pi, \pi]$ dat de

$$\begin{aligned} \cos \angle_o(\bar{u}, \bar{v}) &= \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \\ \sin \angle_o(\bar{u}, \bar{v}) &= \frac{1}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

unde $\bar{u} = u_1 \bar{i} + u_2 \bar{j}$ și $\bar{v} = v_1 \bar{i} + v_2 \bar{j}$.

Propoziția 24. Pentru orice vectori nenuli $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, are loc

$$\begin{aligned} \angle_o(\bar{u}, \bar{w}) &= \angle_o(\bar{u}, \bar{v}) + \angle_o(\bar{v}, \bar{w}) \mod 2\pi \\ \angle_o(\bar{u}, \bar{v}) &= -\angle_o(\bar{v}, \bar{u}) \mod 2\pi \end{aligned}$$

Observația 25. Fie $\bar{x} \neq \bar{0}$ și $\varphi = \angle_o(\bar{i}, \bar{j})$. Atunci putem scrie:

$$\bar{x} = \|\bar{x}\| (\cos \varphi \bar{i} + \sin \varphi \bar{j}) = \begin{pmatrix} \|\bar{x}\| \cos \varphi \\ \|\bar{x}\| \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Definiția 26. Se numește rotație geometrică în planul vectorial V de unghi orientat α , o aplicație $R_\alpha : V \rightarrow V$ cu proprietățile:

$$\begin{cases} \|R_\alpha(\bar{v})\| = \|\bar{v}\|, & \forall \bar{v} \in V \\ \angle_o(\bar{v}, R_\alpha(\bar{v})) = \alpha, & \forall \bar{v} \in V, \bar{v} \neq \bar{0}. \end{cases}$$

Teorema 27. Rotația geometrică de unghi α este o transformare ortogonală de specia I. Mai mult, matricea lui R_α în raport cu orice bază ortonormată pozitivă este

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Observația 28. Fie $\bar{a}$ un vector nenul. Atunci:

$$R_\varphi(\bar{a}) = \cos \varphi \bar{a} + \sin \varphi \frac{\|\bar{a}\|}{\|\bar{b}\|} \bar{b}$$

unde $\bar{b}$ este un vector nenul perpendicular pe $\bar{a}$.

Definiția 29. Fie $\bar{a} \neq \bar{0}$. Simetria ortogonală față de spațiul $[\bar{a}]$ este prin definiție aplicația $s_{[\bar{a}]} : V \rightarrow V$ dată prin

$$s_{[\bar{a}]} = 2 \operatorname{pr}_{[\bar{a}]} - \operatorname{id}_V$$

unde $\operatorname{pr}_{\bar{a}} : V \rightarrow V$ este proiecția ortogonală pe subspațiul $[\bar{a}]$.

Teorema 30. Simetria ortogonală $s_{[\bar{a}]} : V \rightarrow V$ este un endomorfism ortogonal de specia a II-a a lui V și este dată de expresia:

$$s_{[\bar{a}]}(\bar{v}) = 2 \frac{\langle \bar{v}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|^2} \bar{a} - \bar{v}, \forall \bar{v} \in V.$$

Considerăm acum o bază $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ ortonormată pozitivă. Putem identifica astfel V cu spațiul vectorilor coloană $\mathbb{R}^2$ (identificând un vector cu coloana coordonatelor sale în baza B).

Sub această identificare, o aplicație liniară $T : V \rightarrow V$ va putea fi văzută ca o funcție $T_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de forma

$$T_B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

unde A este matricea lui T în raport cu baza B . Dacă baza B este fixată, vom elimina mențiunea bazei din notație (cu alte cuvinte vom aplica T unui vector coloană, subînțelegând că, de fapt, aplicăm T vectorului cu coordonatele corespunzătoare).

În raport cu baza B , expresia rotației de unghi α este

$$R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

iar expresia simetriei ortogonale față de $\bar{a} = \alpha \bar{i} + \beta \bar{j}$ este

$$s_{[\bar{a}]} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha\beta \\ 2\alpha\beta & \beta^2 - \alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Teorema 31. Orice transformare ortogonală T a lui V este sau o rotație geometrică sau simetrie ortogonală față de un subspațiu 1-dimensional. Mai precis:

- Dacă T este de specia I, atunci $T = R_\varphi$ unde $\varphi = \angle_o(\bar{u}, T(\bar{u}))$, pentru orice $\bar{u} \in V \setminus \{\bar{0}\}$.
- Dacă T este de specia a II-a, atunci $T = s_{[\bar{a}]}$ unde $\bar{a} \neq \bar{0}$ satisface $T(\bar{a}) = \bar{a}$.

Exercițiul 1. Scrieți ecuațiile rotațiilor R_ϕ cu $\phi \in \left\{ \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right\}$.

Soluție. Folosind formula din Teorema 27 găsim

$$R_\pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

(deci R_π este simetria față de $\bar{0}$). Similar, avem:

$$\begin{aligned} R_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ R_{-\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \\ R_{-\frac{2\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Exercițiul 2. Determinați simetricile vectorului $\bar{i}$ față de vectorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{i} + \bar{j}$, respectiv $\bar{i} - \bar{j}$.

Soluție. Avem:

- $s_{[\bar{i}]}(\bar{i}) = \bar{i}$ (simetricul unui vector față de direcția determinată de el este vectorul însuși).
- $s_{[\bar{j}]}(\bar{i}) = -\bar{j}$ ($\bar{j}$ este perpendicular pe $\bar{i}$, deci este vector propriu asociat lui -1).
- $s_{[\bar{i}+\bar{j}]}(\bar{i}) = 2 \frac{\langle \bar{i}, \bar{i} + \bar{j} \rangle}{\|\bar{i} + \bar{j}\|^2} (\bar{i} + \bar{j}) - \bar{i} = 2 \frac{1}{2} (\bar{i} + \bar{j}) - \bar{i} = \bar{j}$.
- $s_{[\bar{i}-\bar{j}]}(\bar{i}) = 2 \frac{\langle \bar{i}, \bar{i} - \bar{j} \rangle}{\|\bar{i} - \bar{j}\|^2} (\bar{i} - \bar{j}) - \bar{i} = 2 \cdot \frac{1}{2} (\bar{i} - \bar{j}) - \bar{i} = -\bar{j}$.

■

Exercițiul 3. Determinați ecuațiile simetriilor față de vectorii $\bar{i}, \bar{j}, \bar{i} + \bar{j}, \bar{i} + 3\bar{j}$.

Soluție. În fiecare dintre cazurile date vom scrie matriceal formula:

$$s_{[\bar{a}]}(\bar{v}) = 2 \frac{\langle \bar{v}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|^2} \bar{a} - \bar{v}, \forall \bar{v} \in V.$$

Pentru $\bar{a} = \bar{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avem:

$$\begin{aligned} s_{\bar{i}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 2 \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2 \frac{x}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pentru $\bar{a} = \bar{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, avem

$$\begin{aligned} s_{\bar{j}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 2 \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pentru $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, avem:

$$\begin{aligned} s_{\bar{a}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 2 \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pentru $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, avem:

$$\begin{aligned} s_{\bar{a}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 2 \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot \frac{x+3y}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+9y \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4x+3y \\ 3x+4y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Exercițiul 4. Arătați că $R_{\alpha+\beta} = R_{\alpha} \circ R_{\beta}$ pentru orice unghiuri α, β .

Soluție. Alegem $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ o bază ortonormată. Cele două rotații au atunci expresiile:

$$\begin{aligned} R_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ R_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned} R_\alpha \circ R_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Exercițiul 5. Fie $\vec{u} \neq \vec{v}$ doi vectori cu aceeași lungime. Atunci există o unică simetrie ortogonală s astfel încât $s(\vec{u}) = s(\vec{v})$.

Soluție. Fie $\vec{a} \neq \vec{0}$. Atunci:

$$s_{[\vec{a}]}(\vec{u}) = 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} - \vec{u}$$

Impunând condiția ca $s_{[\vec{a}]} \vec{u} = \vec{v}$ găsim imediat că $\vec{a}$ și $\vec{u} + \vec{v}$ sunt coliniari, deci $[\vec{a}] = [\vec{u} + \vec{v}]$.

Deci, dacă există o simetrie care duce $\vec{u}$ în $\vec{v}$ atunci ea trebuie să fie simetria față de subspațiul $[\vec{u} + \vec{v}]$

Rămâne să arătăm că această simetrie verifică într-adevăr proprietatea dată:

$$\begin{aligned} s_{[\vec{u}+\vec{v}]}(\vec{u}) &= 2 \frac{\langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle}{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2} (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} \\ &= \frac{2\vec{u}^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle} (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} \\ &= \frac{2\vec{u}^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{2\vec{u}^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle} (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} \\ &= \vec{v} \end{aligned}$$

■

Exercițiul 6. Fie $\vec{a} \in V$ un vector nenul și $\theta = \angle_o(\vec{i}, \vec{a})$. Arătați că în raport cu baza $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ matricea simetriei $s_{[\vec{a}]}$ este

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Soluție. Din $\theta = \angle_o(\vec{i}, \vec{a})$, găsim

$$\vec{a} = \|\vec{a}\| \cos \theta \vec{i} + \|\vec{a}\| \sin \theta \vec{j}$$

Ecuația simetriei va fi atunci:

$$\begin{aligned} s_{[\vec{a}]} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Exercițiul 7. Fie $\bar{a}, \bar{b}$ doi vectori nenuli. Arătați că $s_{[\bar{a}]} \circ s_{[\bar{b}]} = R_{2\varphi}$ unde $\varphi = \angle_o(\bar{b}, \bar{a})$. În ce condiții vor comuta cele două simetrii?

Soluția 1. Fixăm o bază ortonormată $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ și notăm $\alpha = \angle_o(\bar{i}, \bar{a})$ și $\beta = \angle_o(\bar{i}, \bar{b})$. Din exercițiul precedent, va rezulta că matricea $s_{[\bar{a}]} \circ s_{[\bar{b}]}$ în raport cu baza B va fi:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha - \beta) & -\sin 2(\alpha - \beta) \\ \sin 2(\alpha - \beta) & \cos 2(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

Matricea din dreapta este matricea unei rotații de unghi $2(\alpha - \beta) \pmod{2\pi}$. Pe de altă parte avem:

$$\alpha - \beta = \angle_o(\bar{i}, \bar{a}) - \angle_o(\bar{i}, \bar{b}) = \angle_o(\bar{i}, \bar{a}) + \angle_o(\bar{b}, \bar{i}) = \angle_o(\bar{b}, \bar{a})$$

Cele două simetrii vor comuta numai când

$$\begin{aligned} 2\angle_o(\bar{b}, \bar{a}) &= 2\angle_o(\bar{a}, \bar{b}) \pmod{2\pi} &\iff 2\angle_o(\bar{b}, \bar{a}) &= -2\angle_o(\bar{b}, \bar{a}) \pmod{2\pi} \\ &&\iff 4\angle_o(\bar{b}, \bar{a}) &= 0 \pmod{2\pi} \\ &&\iff \angle_o(\bar{b}, \bar{a}) &= \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}. \\ &&\iff \angle_o(\bar{b}, \bar{a}) &\in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\} \\ &&\iff \bar{a} \parallel \bar{b} \text{ sau } \bar{a} \perp \bar{b}. \end{aligned}$$

■

Soluția 2. Matricele celor două simetrii au determinantul -1 , deci compunerea lor va furniza o matrice cu determinantul 1 , de unde rezultă că $s_{[\bar{a}]} \circ s_{[\bar{b}]}$ este o rotație R_α .

Pentru a determina pe α , observăm că

$$\alpha = \angle_o(\bar{b}, R_\alpha(\bar{b})) = \angle_o(\bar{b}, s_{[\bar{a}]} \circ s_{[\bar{b}]}(\bar{b})) = \angle_o(\bar{b}, s_{[\bar{a}]}(\bar{b}))$$

ceea ce înseamnă că α este unghiul dintre $\bar{b}$ și simetricul lui $\bar{b}$ față de $\bar{a}$. Folosind exercițiul anterior (sau făcând o figură), acest unghi este $\alpha = 2\angle(\bar{b}, \bar{a})_o$. ■

Exercițiul 8. Demonstrați că orice rotație geometrică R_φ poate scrisă ca o compunere de simetrii ortogonale față de vectori.

Soluție. Alegem $\bar{a} \neq \bar{0}$ un vector arbitrar. Atunci compunerea $R_\varphi \circ s_{[\bar{a}]}$ va avea determinantul -1 , deci va fi o simetrie $s_{[\bar{b}]}$. Obținem atunci:

$$R_\varphi \circ s_{[\bar{a}]} = s_{[\bar{b}]} \iff R_\varphi = s_{[\bar{b}]} \circ s_{[\bar{a}]}$$

(deoarece simetriile sunt involuții). ■

Exercițiul 9. Fie $T : V \rightarrow V$ o transformare ortogonală.

- (a) Arătați că dacă valorile proprii ale lui T sunt 1 și -1 atunci T este simetria ortogonală față de subspațiul propriu corespunzător valorii proprii 1 .
- (b) Dacă 1 nu este valoare proprie pentru T , arătați că T este o rotație.

Soluție. Fie A matricea lui T într-o bază ortonormată. Deoarece T este un operator ortogonal, valorile proprii λ_1, λ_2 (complexe) ale lui A sunt numere complexe de modul 1 .

Dar valorile proprii sunt rădăcinile polinomului caracteristic al lui A , ce are gradul al doilea. După semnul discriminantului, avem trei posibilități:

- λ_1, λ_2 sunt reale distincte.
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- λ_1, λ_2 sunt complexe nereale și conjugate.

Combinând aceste cazuri cu faptul că $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, găsim următoarele cazuri:

- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
- $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
- $\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$ și $\lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi$, unde $\varphi \in (-\pi, \pi) - \{0\}$.

(a) Acesta este primul caz din discuția precedentă. Fie $\bar{a}, \bar{b} \neq 0$ vectori proprii corespunzători valorilor proprii 1, respectiv -1 , deci $T(\bar{a}) = \bar{a}$ și $T(\bar{b}) = -\bar{b}$.

Deoarece T este o transformare ortogonală vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt perpendiculari:

$$\begin{aligned} \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle &= \langle T(\bar{a}), T(\bar{b}) \rangle \quad (\text{din definiția operatorilor ortogonali}) \\ &= \langle \bar{a}, -\bar{b} \rangle \quad (\bar{a}, \bar{b} \text{ sunt vectori proprii}) \\ &= -\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \end{aligned}$$

deci $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 0$.

Rezultă că $\bar{a}$ și $\bar{b}$ formează o bază în V . Pentru a arăta că T coincide cu simetria față de $\bar{a}$ este suficient să demonstrăm că valorile lui T și $s_{[\bar{a}]}$ coincid în vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

Avem:

$$s_{[\bar{a}]}(\bar{a}) = \bar{a} = T(\bar{a})$$

(simetria față de $[\bar{a}]$ lasă $\bar{a}$ pe loc) și:

$$s_{[\bar{a}]}(\bar{b}) = 2 \frac{\langle \bar{b}, \bar{a} \rangle}{\|\bar{a}\|^2} \bar{a} - \bar{b} = -\bar{b} = T(\bar{b})$$

Așadar $T = s_{[\bar{a}]}$.

(b) Deoarece T nu are valoarea proprie 1, rezultă că suntem într-unul dintre ultimele două cazuri din clasificare de mai sus. Deoarece $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$, rezultă că valorile proprii (complexe) ale lui T sunt

$$\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi, \lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi, \varphi \in (-\pi, \pi] - \{0\}$$

Rezultă că

$$\det T = \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

Notăm $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matricea lui T într-o bază ortonormată. Cum A este matrice ortogonală cu $\det A = 1$, obținem:

$$A^t = A^{-1} \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Cum $\det A = 1$, găsim

$$1 = ad - bc = a^2 + c^2.$$

Există astfel un unghi $\varphi \in (-\pi, \pi]$ astfel încât $a = \cos \varphi$ și $b = \sin \varphi$.

Am obținut astfel că:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ceea ce arată că T este o rotație geometrică de unghi φ . ■

Exercițiul 10. Demonstrați că orice subgrup finit de transformări ortogonale ale lui V este sau ciclic sau diedral. Subgrupurile ciclice este grupul generat de rotația de unghi $\frac{2\pi}{n}$, cu $k = \overline{0, n-1}$, iar subgrupurile diedrale este generat de rotația de unghi $\frac{2\pi}{n}$ și simetria ortogonală față de o dreaptă vectorială (unde $n \geq 1$).

3.3 Transformări ortogonale într-un spațiu euclidian de dimensiune 3

În această secțiune, V va fi un spațiu vectorial euclidian *orientat* de dimensiune 3.

Definiția 32. Fie $\bar{a} \in V$ nenul și $U = [\bar{a}]^\perp$ complementul ortogonal al lui $[\bar{a}]$ în V . Rotația în jurul lui a , de unghi orientat $\alpha \in (-\pi, \pi]$ este aplicația $R_{\bar{a}, \alpha} : V \rightarrow V$ definită prin

$$R_{\bar{a}, \alpha}(\bar{v}) = \text{pr}_{\bar{a}}(\bar{v}) + R_{U, \alpha}(\text{pr}_U(\bar{v})), \quad \forall \bar{v} \in V,$$

orientarea lui U fiind aleasă astfel încât baza ortonormată $\left\{ \frac{\text{pr}_U(\bar{v})}{\|\text{pr}_U(\bar{v})\|}, \frac{\bar{a} \times \text{pr}_U(\bar{v})}{\|\bar{a}\| \|\text{pr}_U(\bar{v})\|} \right\}$.

Teorema 33. Rotația $R_{\bar{a}, \alpha}$ este endomorfism ortogonal de specia I. Pentru orice $\bar{v} \in V$ are loc

$$R_{\bar{a}, \alpha}(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{a}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{a}\|^2} (1 - \cos \alpha) \bar{a} + \cos \alpha \bar{v} + \frac{\sin \alpha}{\|\bar{a}\|} \bar{a} \times \bar{v}.$$

Definiția 34. Fie π un plan vectorial în V . Simetria ortogonală față de V este, prin definiție, aplicația $s_\pi : V \rightarrow V$, dată prin

$$s_\pi = 2 \text{pr}_\pi - \text{id}_V.$$

Dacă $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ este o bază ortonormată a lui U atunci

$$s_\pi(\bar{v}) = 2 \langle \bar{v}, \bar{u}_1 \rangle \bar{u}_1 + 2 \langle \bar{v}, \bar{u}_2 \rangle \bar{u}_2 - \bar{v}.$$

Dacă $\bar{N}$ este un vector nenul perpendicular pe π atunci:

$$s_\pi(\bar{v}) = \bar{v} - 2 \frac{\langle \bar{v}, \bar{N} \rangle}{\|\bar{N}\|^2} \bar{N}.$$

Teorema 35. Simetria ortogonală față de π este o transformare ortogonală de speța a II-a.

Soluție. Alegem o bază ortonormată $\bar{u}, \bar{v}$ în π și $\bar{N}$ un vector normal lui π , de lungime 1. Rezultă că $\bar{u}, \bar{v}, \bar{N}$ formează o bază ortonormată în V .

Din formula simetriei, rezultă că:

$$s_\pi(\bar{u}) = \bar{u}, s_\pi(\bar{v}) = \bar{v}, s_\pi(\bar{N}) = -\bar{N}$$

ceea ce arată că matricea lui s_π în raport cu $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{N}\}$ este

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Această matrice este ortogonală, cu determinantul -1 , ceea ce arată că s_π este o transformare ortogonală de speța a II-a. ■

Exercițiul 11. Scrieți ecuațiile simetriilor ortogonale față de planele vectoriale de direcții normale $\bar{N} = \bar{i}, \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$.

Soluție. Simetria față de planul $\pi_1 : x = 0$, ortogonal lui $\bar{i}$ are ecuația:

$$\begin{aligned} s_{\pi_1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Simetria față de planul $\pi_2 : x + 2y - z = 0$ ortogonal lui $\bar{N} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ are ecuația:

$$\begin{aligned} s_{\pi_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix} - \frac{2x + 4y - 2z}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6x - 2x - 4y + 2z \\ 6y - 4x - 8y + 4z \\ 6z + 2x + 4y - 2z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4x - 4y + 2z \\ -4x - 2y + 4z \\ 2x + 4y + 4z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Exercițiul 12. Determinați ecuațiile rotației de unghi $\frac{2\pi}{3}$ în jurul axei $\bar{a} = (1, 1, 1)$.

Soluție. Formula rotației este dată de:

$$\begin{aligned}
 R_{\bar{a}, \frac{2\pi}{3}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} (1 - \cos \frac{2\pi}{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos \frac{2\pi}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \frac{x+y+z}{3} (1 + \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

■

Exercițiul 13. Arătați că $R_{\bar{a}, \phi} = R_{-\bar{a}, -\phi}$.

Soluție. Folosiți formula rotației și $\cos(-\phi) = \cos \phi$, $\sin(-\phi) = -\sin \phi$

■

Exercițiul 14. Arătați că simetria ortogonală față de un subspațiu 1-dimensional $\bar{a}$ coincide cu rotația de unghi π în jurul lui $\bar{a}$.

Soluție. Folosiți formula rotației și $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$.

■

Exercițiul 15. Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori nenuli. Arătați că $s_{[\bar{a}]} \circ s_{[\bar{b}]}$ este o rotație. Care este axa de rotație?

Soluție. Dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt coliniari, cele două simetrii coincid, deci compunerea lor va fi identitatea (simetriile sunt involuții).

Putem presupune astfel că cei doi vectori nu sunt coliniari.

Matricele simetriilor au ambele determinantul 1, deci și compunerea lor va avea tot determinantul

1. Astfel compunerea va fi tot o rotație (toate matricele ortogonale cu determinantul 1 corespund rotațiilor geometrice).

Axa unei rotații este spațiul propriu corespunzător valorii proprii 1. Pentru a determina axa rotației obținute prin compunere, este necesar astfel să găsim un vector lăsat pe loc de compunere.

Deoarece simetria ortogonală față de o axă este o rotație de unghi π în jurul axei, valorile proprii ale sale 1 (cu spațiul propriu axa de simetrie) și -1 cu multiplicitate 2 (cu spațiul propriu planul ortogonal pe axa de simetrie).

Astfel, planele $\pi_1 = [\bar{a}]^\perp$ și $\pi_2 = [\bar{b}]^\perp$ sunt spațiile proprii corespunzătoare valorii proprii -1 pentru simetriile $s_{[\bar{a}]}$, respectiv $s_{[\bar{b}]}$.

Deoarece $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt necoliniari, planele π_1 și π_2 se vor intersecta după dreapta vectorială generată de $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$.

Vectorul $\bar{c}$ va fi astfel vector propriu atât pentru $s_{[\bar{a}]}$ cât și pentru $s_{[\bar{b}]}$ (pentru valoarea proprie -1). Rezultă atunci că

$$s_{[\bar{a}]} \circ s_{[\bar{b}]}(\bar{c}) = s_{[\bar{a}]}(-\bar{c}) = -(-\bar{c}) = \bar{c}$$

deci $\bar{c}$ este vector propriu pentru valoarea proprie 1 a rotației $s_{[\bar{a}]} \circ s_{[\bar{b}]}(\bar{c})$. În concluzie, compunerea $s_{[\bar{a}]} \circ s_{[\bar{b}]}(\bar{c})$ este o rotație în jurul axei $[\bar{a} \times \bar{b}]$. ■

Exercițiul 16. Fie π_1 și π_2 două plane vectoriale în V . Arătați că $s_{\pi_1} \circ s_{\pi_2}$ este o rotație. Care sunt axa și unghiul de rotație?