

Funcții

Reamintim definiția naivă a unei funcții: Date două mulțimi A și B , prin funcție de la A la B înțelegem un procedeu prin care, fiecărui element x din A , îi asociem un unic element din B , notat, de obicei, prin $f(x)$.

Cu alte cuvinte, dat un element $a \in A$, funcția f produce un element $b := f(a)$ din B , unic determinat de a . Mulțimea A se va numi domeniul lui f , iar B se va numi codomeniul lui f .

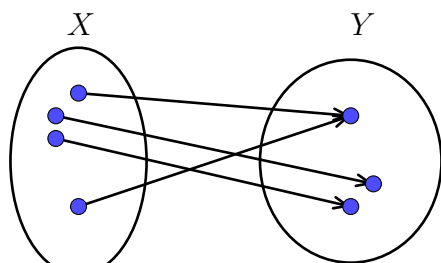


Diagrama este o funcție

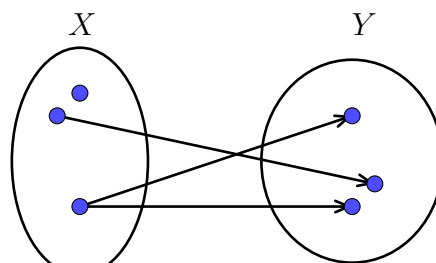


Diagrama nu reprezintă o funcție

Apare acum o problemă: noțiunea de procedeu sau asociere nu este foarte precisă, după cum se poate vedea din următoarele exemple:

Exemplul 1. Considerăm următoarea regulă de asociere:

Fiecărui om îi asociem fratele său.

Depinzând de domeniul și codomeniul ales, acest procedeu este sau nu este o funcție:

- Dacă domeniul ales este mulțimea tuturor oamenilor, procedeuul nu este o funcție: nu toți oamenii au un frate.
- Dacă restricționăm domeniul la mulțimea oamenilor care măcar au un frate, tot nu obținem o funcție: dacă o persoană are mai mulți frați, care din ei este asociat?
- Așadar, pentru o obține o funcție, trebuie să restricționăm domeniul la mulțimea tuturor oamenilor care au exact un frate.
- Pe de altă parte, codomeniul trebuie să conțină toți bărbații care au frați. Orice astfel de mulțime va corespunde unei funcții (mulțimi diferite dau funcții diferite).

Exemplul 2. Considerăm următoarea "definiție":

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}, f\left(\frac{m}{n}\right) = m, \text{ unde } m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

Aceasta nu este o definiție validă a unei funcții (vom spune că funcția f nu este bine definită).

Într-adevăr, orice număr rațional r se poate scrie în mai multe moduri sub forma unei fracții $r = \frac{m}{n}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$ (putem amplifica fracția prin diverse constante). Așadar valoarea $f(r)$ nu este unic determinată de r .

Pentru a obține o funcție bine definită, am putea proceda astfel. Orice număr $r \in \mathbb{Q}$ se poate scrie în mod unic sub forma $r = \frac{m}{n}$ cu $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ și $(m, n) = 1$. Asocierea $r \mapsto m$ va fi atunci o funcție (Justificați!).

Pentru a corecta această ambiguitate a limbajului, vom defini noțiunea de funcție prin intermediul graficului său.

Definiția 3. Prin funcție înțelegem un triplet (A, B, f) unde A și B sunt mulțimi și f este o submulțime f a produsului cartezian $A \times B$ astfel încât, pentru orice $x \in A$, există și este unic $y \in B$ astfel încât $(x, y) \in f$:

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)(x, y) \in f.$$

Mulțimea A se numește domeniul lui f , iar B codomeniul lui f și vom spune că f este o funcție de la A la B , notând aceasta prin $f : A \rightarrow B$.

Din definiție rezultă că o submulțime $f \subset A \times B$ este funcție dacă:

- pentru orice $x \in A$, există un $y \in B$ astfel încât $(x, y) \in f$;
- pentru orice $x \in A$ și orice $y, y' \in B$, din $(x, y) \in f$ și $(x, y') \in f$ rezultă $y = y'$.

Pentru $x \in A$, elementul $y \in B$ unic determinat de proprietatea $(x, y) \in A \times B$ se numește valoarea lui f în x și va fi notată $y := f(x)$.

Astfel, din definiția funcției rezultă:

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)(x_1 = x_2) \implies f(x_1) = f(x_2)$$

Observația 4. Prin definiția dată, o funcție este determinată de domeniu, codomeniu și o mulțime de perechi, ce corespunde procedurii de asociere, din definiția naivă. Prin aceasta am dat o definiție riguroasă a conceptului de funcție.

Pe de altă parte, prin graficul (notat adesea prin G_f sau Graf_f) unei funcții $f : A \rightarrow B$ se înțelege mulțimea $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$, văzută ca submulțime a lui $A \times B$ (adică mulțimea plus scufundarea în $A \times B$).

De exemplu, un operator liniar $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ este văzut ca o funcție care atașează unui vector $v \in \mathbb{R}^2$ un vector din $Tv \in \mathbb{R}^3$, această asociere respectând structurile liniare din domeniu și codomeniu. De obicei, un astfel de operator este descris prin intermediul matricei sale $A \in \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ în raport cu bazele canonice din domeniu și codomeniu.

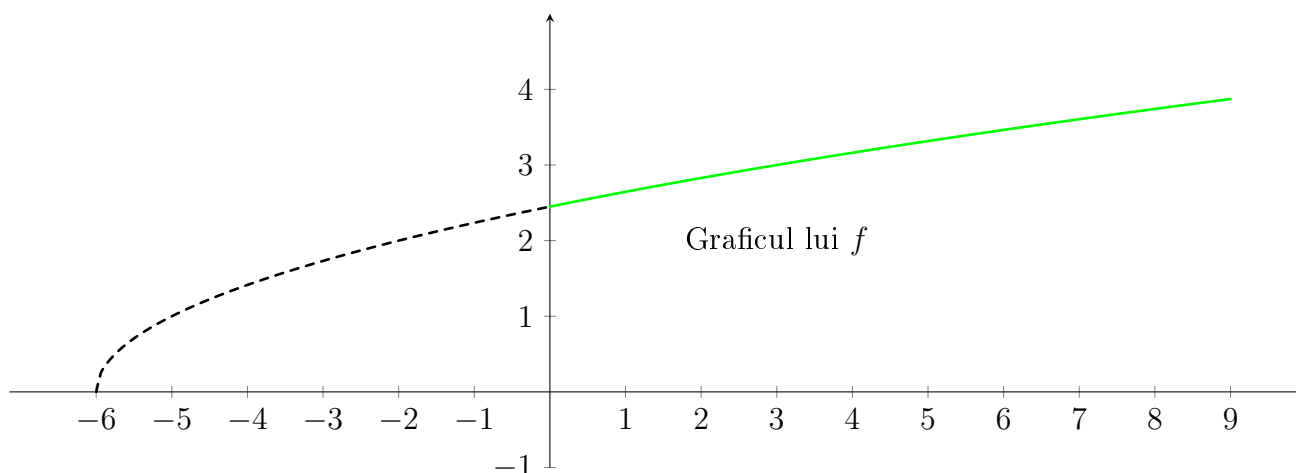
Graficul său este mulțimea $\{(v, Tv) \mid v \in \mathbb{R}^2\}$, văzută ca o submulțime din $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^5$ și este de fapt un subspațiu liniar al lui $\mathbb{R}^5$ (care este dimensiunea sa?).

Un alt exemplu relevant apare des în analiză. O funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este interpretată ca un triplet format din domeniu, codomeniu și mulțimea de perechi $\{(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\}$, sau echivalent regula de asociere $x \in [0, 1] \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$.

Graficul său, pe de altă parte, este mulțimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\}$, dar văzută în interiorul $[0, 1] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$. Cu alte cuvinte, G_f este o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.

Observația 5. Atragem atenția că domeniul și codomeniul unei funcții fac parte din definiția sa. De exemplu, o formulă de tipul $f(x) = \sqrt{x+6}$ nu definește o funcție, pentru că nu am precizat domeniul și codomeniul. O definiție corectă ar fi:

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+6}, \forall x \in [0, \infty)$$



Dar și $g : [-6, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = \sqrt{x+6}$, $\forall x \in [-6, \infty)$ este tot o funcție cu aceeași expresie analitică. Însă, cele două funcții f și g sunt distincte deoarece nu au același domeniu și codomeniu.

În anumite contexte, este acceptată definirea unei funcții doar prin formula analitică. De exemplu, în cazul funcțiilor de o variabilă reală, adesea, se presupune că domeniul este cel maximal, iar codomeniul este $\mathbb{R}$ sau eventual imaginea funcției. De exemplu, pentru $\sqrt{x+6}$, domeniul maximal este $[-6, \infty)$ iar codomeniul este luat $\mathbb{R}$ sau $[0, \infty)$, depinzând de context.

Pentru claritate, însă, este indicat totuși ca domeniul și codomeniul să fie precizate explicit.

Din definiția funcției rezultă și:

Două funcții $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ sunt egale (notând $f = g$) dacă și numai dacă:

- f și g au același domeniu și codomeniu: $A = C$ și $B = D$.
- cele două relații funcționale coincid: pentru orice $x \in A = C$, are loc $f(x) = g(x)$.

Aceasta înseamnă că dacă păstrăm domeniul și extindem codomeniul unei funcții, vom obține o altă funcție (de exemplu, funcțiile f și g de mai sus).

Similar, două funcții $f, g : A \rightarrow B$ (cu același domeniu și codomeniu) sunt egale dacă și numai dacă valorile lor coincid *în fiecare punct al domeniului*. Dacă relația $f(x) = g(x)$ are loc doar pentru niște valori ale lui x din A și nu pentru toate, atunci funcțiile nu sunt egale.

Exemplul 6. Fie X, Y mulțimi și $Z \subseteq X$.

- O funcție $f : A \rightarrow B$ se numește constantă dacă există un element $b \in B$ astfel încât $f(x) = b$, pentru orice $x \in A$.
- Funcția identitate a lui A este $\text{id}_X = \mathbf{1}_X : X \rightarrow X$, definită prin $\text{id}_X(x) = x$, $\forall x \in X$.
- Funcția de incluziune a lui Z în X este $j : Z \rightarrow X$, definită prin $j(x) = x$, $\forall x \in Z$.

Va fi utilă și următoarea:

Definiția 7. Fie X, Y mulțimi și $Z \subseteq X$.

- (i) Prin restricția unei funcții $f : X \rightarrow Y$ la submulțimea Z înțelegem funcția $f|_Z : Z \rightarrow Y$, definită prin $f|_Z(x) = f(x), \forall x \in Z$.
- (ii) Dacă $g : Z \rightarrow Y$ este o funcție, o extensie a lui g la X este o funcție $G : X \rightarrow Y$ astfel încât $G|_Z = g$.

Astfel, prin restricție, permitem doar calculul valorilor lui f doar în punctele din Z , ignorând alte valori (pentru $x \in X \setminus Z$). De aceea, unele proprietăți suplimentare ale lui f se pot modifica.

Injectivitatea, de exemplu, nu se păstrează prin restricție, după cum se poate vedea considerând $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Această funcție nu este injectivă, dar restricția sa la $[0, \infty)$ este injectivă. Pe de altă parte, continuitatea unei funcții reale se păstrează prin restricție.

Extensia unei funcții implică "mărirea" domeniului și adăugarea unor valori noi pentru funcție. La fel, proprietățile nu se păstrează. Mai mult decât atât, în general, vor exista mai multe extensii. De exemplu, funcțiile

$$g_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, g_1(z) = |z|^2, \forall z \in \mathbb{C}.$$

$$g_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, g_2(z) = (\operatorname{Re} z)^2, \forall z \in \mathbb{C}.$$

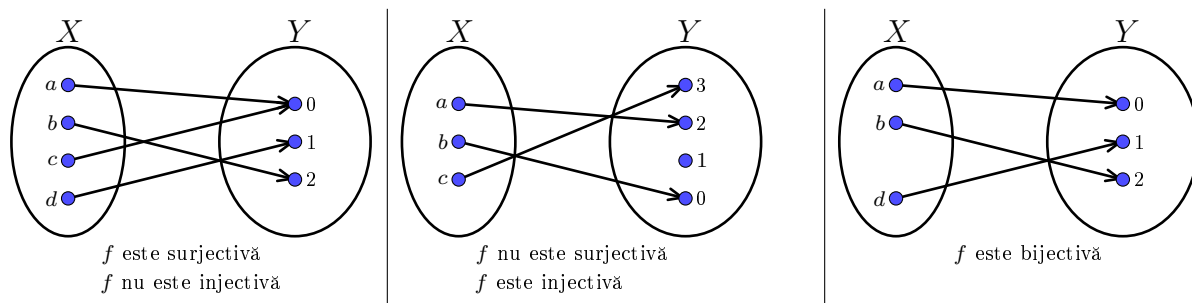
sunt extensii ale funcției f de mai sus: pentru orice $z \in \mathbb{R}$, are loc $g_1(z) = g_2(z) = z^2$, dar ele sunt diferite ca funcții pe $\mathbb{C}$ (prima reprezintă pătratul distanței de la un punct la origine, iar a doua pătratul distanței până la axa Ox).

Definiția 8. Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție.

- (i) Spunem că f este injectivă dacă, pentru orice $x, x' \in X$, are loc implicația:

$$f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

- (ii) Spunem că f este surjectivă dacă, pentru orice $y \in Y$, există $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$.
- (iii) Spunem că f este bijectivă dacă este injectivă și surjectivă. Cu alte cuvinte, f este bijectivă dacă, pentru orice $y \in Y$, există și este unic $x \in X$ astfel încât $f(x) = y$.



Exemplul 9. Vrem să demonstrăm următoarele afirmații:

- (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ nu este injectivă, nici surjectivă.
- (ii) $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2, \forall x \in [0, \infty)$ este injectivă, dar nu este surjectivă.
- (iii) $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ nu este injectivă, dar este surjectivă.
- (iv) $j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2, \forall x \in [0, \infty)$ este bijectivă.

Definiția 10. Fie $f : X \rightarrow Y$ și $g : Y \rightarrow Z$ funcții. Prin **compunerea** funcțiilor g și f înțelegem funcția $h : X \rightarrow Z$, dată prin

$$h(x) = g(f(x)), \forall x \in X.$$

Vom nota $h = g \circ f$ (ordinea este importantă).

Propoziția 11. (i) Compunerea funcțiilor este asociativă: pentru orice trei funcții $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, h : Z \rightarrow W$ are loc: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(ii) Funcția identitate este element neutru la compunere. Mai precis, pentru orice funcție $f : X \rightarrow Y$, are loc: $f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f$.

Analog se arată și a doua afirmație.

Definiția 12. Spunem că o funcție $f : X \rightarrow Y$ este inversabilă dacă există o funcție $g : Y \rightarrow X$ astfel încât $f \circ g = \text{id}_Y$ și $g \circ f = \text{id}_X$.

Funcția g (dacă există) se numește inversa lui f și se notează cu f^{-1} .

Teorema 13. (i) Inversa unei funcții, dacă există, este unică.

(ii) O funcție este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

Demonstrație. (i) Fie $f : X \rightarrow Y$ o funcție și $g, h : Y \rightarrow X$ două inverse. Atunci:

$$g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_X = h$$

(ii) Să presupunem mai întâi că f este inversabilă, cu inversa g și să arătăm că este bijectivă. Din definiția lui g știm că $f(g(y)) = y$, pentru orice $y \in Y$ și $g(f(x)) = x$, pentru orice $x \in X$.

Pentru a arăta injectivitatea, considerăm $x, x' \in X$ astfel încât $f(x) = f(x')$. Avem atunci:

$$f(x) = f(x') \implies g(f(x)) = g(f(x')) \implies x = x'$$

deci f este injectivă.

Pe de altă parte, pentru orice $y \in Y$, există $x = g(y) \in X$ astfel încât $f(x) = f(g(y)) = y$, ceea ce arată că f este surjectivă.

Invers, să presupunem că f este bijectivă. Din definiție, rezultă că pentru orice $y \in Y$, există și este unic $x \in X$ astfel încât $y = f(x)$. Asocierea $y \in Y \mapsto x \in X$ este astfel o funcție $g : Y \rightarrow X$.

Fie $x \in X$. Din construcție, elementul $y = f(x)$ are proprietatea $g(y) = x$, de unde rezultă

$$g(f(x)) = g(y) = x$$

Cum x a fost ales arbitrar în X , obținem $g \circ f = \text{id}_X$.

Considerăm acum $y \in Y$. Elementul $x = g(y) \in X$ satisface $f(x) = y$, de unde găsim

$$f(g(y)) = f(x) = y$$

Cum y a fost ales arbitrar în Y , am obținut $f \circ g = \text{id}_Y$, ceea ce arată că g este inversa lui f . ■

Definiția 14. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție și $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

(i) Imaginea (directă) a lui X prin f este, prin definiție, mulțimea:

$$f[X] = f(X) := \{y \in B \mid \exists x \in X \text{ a.î. } f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

(ii) Imaginea lui f este, prin definiție mulțimea

$$\text{Im} f = f(X) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

(iii) Imaginea inversă (sau contraimagea sau preimagea) a lui Y prin f este, prin definiție, mulțimea:

$$f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid \exists y \in Y \text{ a.î. } y = f(x)\} = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Observația 15. Când $Y = \{b\}$, se folosește, pentru simplitate, notația $f^{-1}(\{b\}) = f^{-1}(b)$. Atragem atenția că $f^{-1}(b)$ este o submulțime a lui X , nu un element al lui X .

Observația 16. Notația f^{-1} (pentru contraimage și pentru funcția inversă) nu ar trebui să cauzeze confuzie.

Pentru o funcție generală, despre care nu știm că este bijectivă, notația f^{-1} este folosită exclusiv pentru contraimage.

Considerăm $f : A \rightarrow B$ o funcție bijectivă și $B' \subseteq B$. Ar părea acum că avem două mulțimi notate la fel:

- $M_1 = f^{-1}(B')$ - contraimagea lui B' prin f .
- $M_2 = f^{-1}(B')$ - imaginea lui B' prin funcția f^{-1} .

Nu există riscul de confuzie pentru că aceste mulțimi coincid. Într-adevăr, dacă notăm, pentru claritate, $g = f^{-1}$, avem:

$$x \in M_1 \implies f(x) \in B' \implies g(f(x)) \in g(B') \implies x \in g(B') \implies x \in M_2$$

și, invers

$$\begin{aligned} x \in M_2 &\implies (\exists y \in B') \ x = g(y) \implies (\exists y \in B') \ f(x) = f(g(y)) \\ &\implies (\exists y \in B') \ f(x) = y \implies f(x) \in B' \implies x \in M_1 \end{aligned}$$

Exerciții

Exercițiul 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - 5$ și $A = [-4, 2]$, $B = (-10, 20)$.

- (i) Determinați $f(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A) \cap \mathbb{Z}$.
- (ii) Arătați că $\text{card } f^{-1}(y) = 2$ pentru orice $y \in \mathbb{R}$ cu excepția unui singur $y_0 \in \mathbb{R}$.
- (iii) Există vreun interval I închis astfel încât $f(I)$ să fie interval deschis? Dar semideschis?
- (iv) Dați exemple de intervale deschise I astfel încât $f(I)$ să fie interval deschis, respectiv semiînchis.
- (v) Este f injectivă? Dar surjectivă?
- (vi) Este $f|_{\mathbb{N}^*}$ injectivă? Dar surjectivă?

Exercițiul 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

- (i) Arătați că f nu este injectivă și nici surjectivă.
- (ii) Care este imaginea funcției f ?
- (iii) Găsiți un interval maximal I al lui $\mathbb{R}$ astfel încât $f|_I$ să fie injectivă.
- (iv) Determinați $f((0, 1))$, $f^{-1}(\frac{1}{2})$ și $f^{-1}((-\frac{1}{2}, 0))$.

Exercițiul 3. Fie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$.

- (i) Este f injectivă? Dar surjectivă?
- (ii) Determinați $f^{-1}([0, 3]) \cap \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- (iii) Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ și $a \in \mathbb{R}$. Arătați că $f^{-1}(a) \cap D$ are cel mult două puncte. Determinați a astfel încât $f^{-1}(a) \cap D$ să aibă exact un punct.

Exercițiul 4. Fie $f : [-6\pi, 6\pi] \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Dați exemple de intervale deschise, semideschise, respectiv închise I astfel încât $f(I)$ să fie interval deschis, semideschis, respectiv închis (dacă există) (toate cele nouă posibilități de grupare).

Exercițiul 5. Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Este f injectivă? Care este imaginea funcției f ?

Exercițiul 6. (*) Fie $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{z}{z+1}$. Fie $L = \{-1 + ti \mid t \in \mathbb{R}^\times\}$ și $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| = 1\}$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, z \neq -1\}$.

- (i) Determinați $f(L)$, $f(C_1)$, $f(C_2)$.
- (ii) Determinați $f^{-1}(L)$, $f^{-1}(C_2)$.

Exercițiul 7. Fie E un plan, d o dreaptă din plan. Fie $p : E \rightarrow d$ proiecția ortogonală pe d : pentru $A \in E$, $p(A)$ =piciorul perpendicularei din A pe d .

- (i) Arătați că p este surjectivă, dar nu este injectivă.
- (ii) Fie Δ un triunghi. Atunci $p(\Delta)$ este un segment pe d .
- (iii) Descrieți $p^{-1}(A)$ unde A este un punct oarecare.
- (iv) Arătați că $p \circ p = p$.

Exercițiul 8. (*) Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este injectivă.
- (ii) pentru orice mulțime C , și orice funcții $u, v : C \rightarrow A$ are loc implicația

$$f \circ u = f \circ v \implies u = v$$

(spunem că f este monomorfism de mulțimi).

- (iii) f admite o inversă la stânga, adică există $r : B \rightarrow A$ astfel încât $r \circ f = \text{id}_A$ (un astfel de r se numește retractă a lui f).

Exercițiul 9. (*) Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este surjectivă.
- (ii) pentru orice mulțime C , și orice funcții $u, v : B \rightarrow C$ are loc: $u \circ f = v \circ f \implies u = v$ (spunem că f este epimorfism de mulțimi).
- (iii) există $s : B \rightarrow A$ astfel încât $f \circ s = \text{id}_B$ (numim s o secțiune a lui f).

Exercițiul 10. Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$ două funcții.

- (i) Dacă f și g sunt injective (surjective, respectiv bijective) atunci $g \circ f$ este injectivă (surjectivă, respectiv bijectivă).
- (ii) Dacă $g \circ f$ este injectivă atunci f este injectivă.
- (iii) Dacă $g \circ f$ este surjectivă atunci g este surjectivă.
- (iv) Dați exemple de funcții f și g astfel încât $g \circ f$ să fie injectivă, dar g să nu fie injectivă.
- (v) Dați exemple de funcții f și g astfel încât $g \circ f$ să fie surjectivă, dar f să nu fie surjectivă.

Exercițiul 11. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este injectivă.
- (ii) Pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $f^{-1}(f(X)) = X$.
- (iii) Pentru orice $X, X' \in \mathcal{P}(A)$, avem $f(X \cap X') = f(X) \cap f(X')$.

Exercițiul 12. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente.

- (i) f este surjectivă.
- (ii) Pentru orice $Y \subseteq B$, $f(f^{-1}(Y)) = Y$.
- (iii) Pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, avem $f(X)^c \subseteq f(X^c)$.

Exercițiul 13. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Notăm prin $f_* : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ funcția

$$X \in \mathcal{P}(A) \mapsto f_*(X) = f(X) \in \mathcal{P}(B)$$

și prin $f^* : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, funcția

$$Y \in \mathcal{P}(B) \mapsto f^*(Y) = f^{-1}(Y) \in \mathcal{P}(A)$$

(i) Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) f este surjectivă;
- (b) f_* este surjectivă;
- (c) f^* este injectivă;
- (d) $f_* \circ f^* = \text{id}_{\mathcal{P}(B)}$.

(ii) Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) f este injectivă;
- (b) f^* este surjectivă;
- (c) f_* este injectivă;
- (d) $f^* \circ f_* = \text{id}_{\mathcal{P}(A)}$.

Exercițiul 14. (*) Pentru $m, n \in \mathbb{R}$, fie funcția $f_{m,n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dată prin:

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} x - m & , x \leq 0 \\ nx + m & , x > 0 \end{cases}$$

Determinați valorile parametrilor m, n astfel încât $f_{m,n}$ este: (i) injectivă; (ii) surjectivă; (iii) bijectivă.

Exercițiul 15. Fie A, B două mulțimi.

- (i) Arătați că există o mulțime C împreună cu două funcții injective $i : A \rightarrow C$ și $j : B \rightarrow C$ astfel încât $C = i(A) \cup j(B)$ și $i(A) \cap j(B) = \emptyset$.
- (ii) Mulțimea C are următoarea proprietate. Fie X o mulțime și $f : A \rightarrow X, g : B \rightarrow X$ două funcții. Atunci există și este unică o funcție $\varphi : C \rightarrow X$ astfel încât $\varphi \circ i = f$ și $\varphi \circ j = g$.

Observație. Mulțimea C se numește reuniunea disjunctă a mulțimilor A și B (sau suma directă a lui A și B) și se notează cu $A \sqcup B$.

Exercițiul 16. Fie X o mulțime, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ și funcția

$$f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), f(C) = (A \cap C, B \cap C)$$

Demonstrați că:

- (i) f este injectivă dacă și numai dacă $A \cup B = X$.
- (ii) f este surjectivă dacă și numai dacă $A \cap B = \emptyset$.
- (iii) f este bijectivă dacă și numai dacă $B = X \setminus A$. Descrieți, în acest caz, inversa f^{-1} .

Exercițiul 17. (*) Fie A și B două mulțimi și $\varphi : \mathcal{P}(A \times B) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathcal{P}(B))$, dată prin:

$$\varphi(R)(a) = \{b \in B \mid aRb\}$$

(imaginea lui a prin relația R). Arătați că φ este bijectivă. (Am notat prin $\mathcal{F}(X, Y)$ mulțimea funcțiilor de la X la Y). Așadar putem "vedea" orice relație de la A la B ca fiind o funcție de la A cu valori în $\mathcal{P}(B)$.

Exercițiul 18. (*) Pentru $x \in \mathbb{R}$, fie $f(x) = x - k$ unde $k \in \mathbb{Z}$ este singurul număr verifică $2k - 1 < x \leq 2k + 1$.

- (i) Justificați că f este într-adevăr o funcție (adică valoarea $f(x)$ este unic determinată de x).
- (ii) Arătați că f este surjectivă.
- (iii) Arătați că contraimagea oricărui $y \in \mathbb{R}$ este formată din exact două puncte. (Cu alte cuvinte, f ia toate valorile reale de exact două ori).

Exercițiul 19. (*) Fie A o mulțime cu cel puțin 3 elemente și $\mathcal{S}$ mulțimea bijecțiilor $f : A \rightarrow A$. Fie $f \in \mathcal{S}$ astfel încât $g \circ f = f \circ g$ pentru orice $g \in \mathcal{S}$. Arătați că $f = \text{id}_A$ (Cu alte cuvinte, grupul permutărilor unei mulțimi cu ≥ 3 elemente, are centrul trivial).

Exercițiul 20. (*) Pentru orice două funcții bijective $f, g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, funcția $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(x) = f(x)g(x)$, $x \in \mathbb{Z}$ nu este bijectivă.