

# Mulțimi. Operații cu mulțimi

## Axiomele teoriei mulțimilor

**Noțiuni primare: mulțime și relația de apartenență  $\in$ .**

- Aceste noțiuni nu se definesc și se presupun înțelese.
- Expresia " $a \in b$ " se citește  $a$  aparține lui  $b$ , sau  $b$  îl conține pe  $a$ .
- " $a \in b$ " și " $a = b$ " sunt expresii atomice în limbajul matematic al teoriei mulțimilor. Propozițiile și predicatele sunt formate din aceste expresii împreună cu conectorii logici și variabile legate prin cuantificatori.

**Observația 1.** Toate obiectele care apar în expresii sunt mulțimi. Un element  $b$  al mulțimii  $a$  este o mulțime care aparține lui  $a$ , adică  $b \in a$ .

Vom trece în revistă o principalele axiome, ce ne vor permite să definim conceptele principale cu care vom lucra în continuare.

**1. Axioma extensionalității: Două mulțimi sunt egale dacă și numai dacă au aceleași elemente.**

În limbaj formal, pentru orice două mulțimi  $A$  și  $B$ , are loc echivalența

$$A = B \leftrightarrow [(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)]$$

Este util să introducem următoarea definiție:

**Definiția 2.** Spunem că mulțimea  $A$  este inclusă în mulțimea  $B$  sau că  $A$  este o submulțime a lui  $B$  dacă orice element din  $A$  se află și în  $B$ . Notăm aceasta prin  $A \subseteq B$ . În limbaj formal,  $A \subseteq B$  dacă și numai dacă  $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ .

**Observația 3.** Această axiomă furnizează principala strategie de a arăta că două mulțimi sunt egale, și anume, prin demonstrarea "dublei incluziuni": fiecare element din una dintre mulțimi se află în cealaltă și vice-versa.

**2. Axioma părților: Pentru orice mulțime  $A$  există mulțimea submulțimilor lui  $A$ .**

Formal, pentru orice mulțime  $A$  are loc:  $(\exists P)(x \in P \leftrightarrow x \subseteq A)$

**3. Axioma reuniunii: Pentru orice mulțime  $\mathcal{F}$ , există o mulțime  $U$  ale cărei elemente sunt exact elementele elementelor lui  $\mathcal{F}$ .**

Formal, pentru orice mulțime  $\mathcal{F}$  are loc:  $(\exists U)[(x \in U) \leftrightarrow (\exists A)(x \in A \wedge A \in \mathcal{F})]$

Mulțimea  $U$  este unic determinată de  $\mathcal{F}$  (vezi Exercițiului 1) și se notează prin  $\cup \mathcal{F}$  sau  $\cup_{A \in \mathcal{F}} A$ .

**Atenție:** Această axiomă garantează existența reuniunii unei familii de mulțimi, dar încă nu știm că există reuniunea a două mulțimi (încă nu știm ce înseamnă doi, în contextul nostru).

**4. Axioma-Schemă a Substituției:** Pentru fiecare relație funcțională  $F(x, y)$  și orice mulțime  $A$ , există o mulțime  $B$  ale cărei elemente sunt exact acele mulțimi  $y$  astfel încât există un  $x \in A$  astfel încât  $F(x, y)$  este adevărată.

În limbaj formal, axioma-schemă devine: pentru orice relație funcțională  $F$ , are loc

$$(\forall A) (\exists B) (\forall y) [y \in B \leftrightarrow (\exists x) (x \in A \wedge F(x, y))]$$

## Câteva consecințe ale axiomelor

**Schema de comprehensiune:** Pentru fiecare predicat cu o singură variabilă  $P(x)$  un fiecare mulțime  $A$ , există mulțimea  $B$  a acelor elemente  $x$  din  $A$  astfel încât  $P(x)$  să fie adevărată. Mulțimea  $B$  este, de obicei, notată prin

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}$$

și se citește prin "mulțimea acelor  $x$  din  $A$  cu proprietatea  $P$ ."

**Intersecția și diferența a două mulțimi:** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi. Intersecția  $A \cap B$  și diferența  $A \setminus B$  sunt, prin definiție, mulțimile date de

$$A \cap B := \{x \in A \mid x \in B\}$$

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$$

**Mulțimea vidă:** Există și este unică o mulțime fără nici un element. Aceasta se notează de obicei prin  $\emptyset$ , și se numește mulțimea vidă. Ea este caracterizată unic de proprietatea

$$(\forall x) (x \notin \emptyset)$$

**Teorema perechii:** Pentru orice două mulțimi  $x$  și  $y$  există și este unică o mulțime  $p$  care are ca elemente exact pe  $x$  și  $y$ .

Mulțimea  $p$  se numește perechea neordonată formată din  $x$  și  $y$ . Dacă  $x \neq y$ , aceasta se notează de obicei prin  $p = \{x, y\}$ . Dacă  $x = y$ , mulțimea  $p$  se scrie  $\{x\}$  și are ca element doar pe  $x$ .

**Definiția 4.** Fie  $x$  și  $y$  două mulțimi. Perechea ordonată formată din  $x$  și  $y$  este, prin definiție, mulțimea  $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Justificarea pentru denumirea de pereche ordonată este dată de următoarea proprietate:

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ și } y = y'.$$

**Reuniunea a două mulțimi:** Pentru orice  $A$  și  $B$  există și este unică mulțimea  $U$  dată de

$$x \in U \iff (x \in A \vee x \in B)$$

Mulțimea  $U$  se notează prin  $A \cup B$ . Ea este de fapt  $U = \cup \{A, B\}$ .

**Produsul cartezian a două mulțimi** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi. Prin produsul cartezian al lui  $A$  și  $B$  înțelegem mulțimea, notată prin  $A \times B$ , a tuturor perechilor  $(x, y)$  cu  $x \in A$  și  $y \in B$ :

$$A \times B = \{t \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \mid \exists x \in A, \exists y \in B \text{ a.î. } t = (x, y)\}$$

## Exerciții

**Exercițiul 1.** Din axiome rezultă existența unor mulțimi cu diverse proprietăți (mulțimea părților, reuniunea unei familii de mulțimi etc.). Arătați că aceste mulțimi sunt unice.

**Exercițiul 2.** Demonstrați că nu există mulțimea tuturor mulțimilor.

**Exercițiul 3.** Demonstrați existența și unicitatea mulțimii vide. Arătați că aceasta este inclusă în orice mulțime.

**Exercițiul 4.** Pentru ce mulțimi  $\mathcal{F}$  are loc  $\cup \mathcal{F} = \emptyset$ ?

**Exercițiul 5.** Fie  $A, B$  și  $C$  trei mulțimi. Arătați că:

- (a)  $A \subseteq A$ .
- (b) dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq C$  atunci  $A \subseteq C$ .
- (c) dacă  $A \subseteq B$  și  $B \subseteq A$  atunci  $A = B$ .
- (d)  $A \cup B = B \cup A$  și  $A \cap B = B \cap A$ .
- (e)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  și  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ .
- (f)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  și  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
- (g)  $A \cup A = A \cap A = A$ .
- (h)  $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ .
- (i)  $A \cup \emptyset = A$  și  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

**Exercițiul 6.** Fie  $A, B$  și  $C$  trei mulțimi. Arătați că:

- (a)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus B \cap A \setminus C$ .
- (b)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .
- (c)  $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$ .
- (d)  $(B \cap C) \setminus A = B \cap (C \setminus A) = (B \setminus A) \cap C$ .
- (e)  $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$ .

**Exercițiul 7.** Pentru două mulțimi  $A$  și  $B$ , notăm  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Arătați că, pentru orice mulțimi  $A, B, C$  au loc:

- (a)  $A \Delta B = B \Delta A$ .
- (b)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .
- (c)  $A \Delta \emptyset = A$  și  $A \Delta A = \emptyset$ .
- (d)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ .
- (e)  $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$ .

**Exercițiul 8.** Date două mulțimi  $A, B$  determinați mulțimea  $X$  astfel încât  $A \setminus X \cup X \setminus A = B$ .

**Exercițiul 9.** Fie  $A, B, C$  trei mulțimi. Dacă  $A \cap C = B \cap C$  și  $A \cup C = B \cup C$ , arătați că  $A = B$ .

**Exercițiul 10.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi. Arătați că:

- (a)  $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ .
- (b)  $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ . Când are loc egalitatea?

**Exercițiul 11.** Fie  $A, B$  două mulțimi nevide. Atunci  $A \times B = B \times A$  dacă și numai dacă  $A = B$ . Ce se întâmplă dacă  $A = \emptyset$  (sau  $B = \emptyset$ )?

**Exercițiul 12.** Fie  $X$  o mulțime nevidă. Atunci  $\{U \times V \mid U, V \in \mathcal{P}(X)\} \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ . Când are loc egalitatea?

**Exercițiul 13.** Fie  $\mathcal{F}$ . Când are loc întotdeauna  $\cup \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$ ? Dar  $\mathcal{F} \subseteq \cup \mathcal{F}$ ?

**Exercițiul 14.** Determinați mulțimile  $A, B$  astfel încât:

- (i)  $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ;    (ii)  $B \setminus A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$   
(iii)  $\{3, 9\} \cap B = \emptyset$ ;    (iv)  $A \cap B = \{1\}$ .

**Exercițiul 15.** Fie  $A, B, C, D$  mulțimi. Demonstrați că:

- (a)  $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$ .  
(b)  $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ .  
(c)  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ .  
(d)  $(A \cup B) \times (C \cup D) \supseteq (A \times C) \cup (B \times D)$ . Când are loc egalitatea?

**Exercițiul 16 (\*).** Fie mulțimile  $A, B, C$  astfel încât  $A \cup B = C$ ,  $(A \cup C) \cap B = C$  și  $(A \cap C) \cup B = A$ . Arătați că  $A = B = C$ .

**Exercițiul 17 (\*).** Fie  $A, B, C$  trei mulțimi fixate. Determinați mulțimea  $X$  astfel încât  $A \cap X = B$  și  $A \cup X = C$ .

**Exercițiul 18 (\*).** Fie  $A, B, C$  trei mulțimi fixate. Determinați mulțimea  $X$  astfel încât  $A \setminus X = B$  și  $X \setminus A = C$ .

**Exercițiul 19.** Fie  $I = \{1, 2, 3\}$  și  $A_i = \{i, i + 1, i + 2, i + 3\}$ . Determinați  $\bigcap_{i \in I} A_i$  și  $\bigcup_{i \in I} A_i$ .

**Exercițiul 20.** Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}, x = 2n + 1\},$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists m \in \mathbb{Z}, x = 5m + 2\}.$$

Arătați că  $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists l \in \mathbb{Z}, x = 10l + 7\}$ .

**Exercițiul 21.** Determinați intersecțiile a două câte două din mulțimile:

- (a)  $P = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ este prim}\}$ .    (d)  $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{există } k \in \mathbb{Z}, n = k^8\}$ .  
(b)  $E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ este par}\}$ .  
(c)  $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{există } k \in \mathbb{Z}, n = k^4\}$ .    (e)  $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{există } k \in \mathbb{Z}, n = k - 5\}$ .

**Exercițiul 22.** Determinați intersecția și reuniunea tuturor mulțimilor  $B_n$ , unde:

(i)  $B_n = \{n-1, n, n+1\}, n \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $B_n = \left[ \frac{3}{n+1}, \frac{5n+2}{n} \right], n \in \mathbb{N}^*$

**Exercițiul 23.** Determinați mulțimile:

(i)  $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z}, x = \frac{6n-7}{2n+1} \right\}$ .

(ii)  $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R}, x = \frac{a^2 - a + 1}{a + 1} \right\}$ .

(iii)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2, |x| - 2|y| = -1\}$ .

**Exercițiul 24.** Considerăm mulțimea

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid \text{ecuația } \frac{7x+3}{3x-1} = a \text{ are o soluție întreagă} \right\}$$

(a) Demonstrați că  $A \subseteq \mathbb{Q}$ .

(b) Determinați  $A \cap \mathbb{Z}$ .

**Exercițiul 25.** Pentru  $m \in \mathbb{R}$ , notăm

$$A_m = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + mx + 1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 8x + 4m^2 = 0\}$$

Demonstrați că, pentru orice  $m \in \mathbb{R}$ , mulțimea  $A_m$  are cel mult două elemente.

**Exercițiul 26 (\*)**. Determinați perechile  $(A, B)$  de mulțimi de numere naturale nenule astfel încât

- $A$  și  $B$  au fiecare trei elemente.
- $6 \in A$  și  $12 \in B$ .
- $A \cap B$  are un element.
- dacă  $x, y \in A$  și  $x \neq y$  atunci  $xy \in B$ .

**Exercițiul 27 (\*)**. Pentru  $k \in \mathbb{N}^*$ , notăm  $I_k = \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$  și  $J_k = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ . Determinați  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} I_k$ ,  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} J_k$ ,  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} (J_k \setminus I_k)$ ,  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} I_k \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} J_k$ .

**Exercițiul 28 (\*)**. Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $(A_i)_{i=1,n}$  o familie de  $n$  mulțimi. Considerăm mulțimile

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \dots, B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

Demonstrați că:

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

și că  $(B_i)_{i=1,n}$  sunt disjuncte două câte două.