

Teoria optimizării
(suport de curs și seminar – versiune în lucru)

Marius Durea

Teoria Optimizării – Licență, MI-anul III, semestrul I

Desfășurarea activității în anul universitar 2025–2026

Pe parcursul semestrului vor fi 2 ore de curs și 2 ore de seminar săptămânal. Cursul și seminarul vor urmări, preponderent, materialul corespunzător postat la adresa:

www.math.uaic.ro/~durea – secțiunea teaching

Evaluarea se desfășoară după procedura de mai jos.

- În timpul semestrului va avea loc evaluarea continuă (EC) care va avea ponderea de 50% din nota finală și va cuprinde trei componente:
 - un examen parțial (EP): în săptămâna 7, 8 sau 9, la seminar, studenții vor susține un examen parțial scris (cu durata de 100 de minute), iar nota obținută va avea ponderea de 50% din EC; EP nu se poate reface și nu se poate susține în sesiune; exclusiv pe baza unor motive bine întemeiate, EP se poate susține la o dată ulterioară în timpul semestrului;
 - o verificare scrisă (VS): într-una din săptămânile 11, 12 sau 13 va avea loc la seminar o verificare scrisă cu durata de 50 de minute, iar nota obținută va avea ponderea de 25% din EC; exclusiv pe baza unor motive bine întemeiate, VS se poate susține la o dată ulterioară în timpul semestrului;
 - activitatea de seminar (AS): prezența, activitatea și calitatea răspunsurilor din timpul desfășurării seminarelor vor genera o notă ce va avea o pondere de 25% din EC.
- În sesiune va avea loc evaluarea finală (EF) care va avea o pondere de 50% din nota finală și care constă dintr-o probă scrisă de 2 ore. Pentru fiecare student, nota evaluării finale va fi comunicată în cadrul unei întâlniri (care va fi programată în prealabil) și va fi determinată inclusiv de o eventuală discuție asupra modului în care au fost rezolvate subiectele probei scrise (prezența studenților este, deci, obligatorie). O condiție necesară pentru promovare este ca această notă să fie minim 4,5. Odată ce această condiție este îndeplinită se va calcula nota finală, care va fi rotunjirea la cel mai apropiat număr natural din intervalul $[1, 10]$ a valorii

$$\frac{1}{2}EF + \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}EF + \frac{1}{4}EP + \frac{1}{8}VS + \frac{1}{8}AS.$$

Prefață

Scopul lucrării de față este acela de a prezenta, pe spații normate finit dimensionale (spațiile $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), o serie de rezultate de analiză neliniară, cu accent pe studiul aspectelor clasice ale teoriei optimizării pentru probleme cu date netede (de clasă C^2). Evident, multe din rezultatele cuprinse în această prezentare au loc pe spații mult mai generale (spații metrice, spații normate infinit dimensionale), dar ideile fundamentale ce stau la baza teoriei sunt similare, indiferent de context. Cadrul spațiilor finit dimensionale oferă posibilitatea scurtării unor demonstrații și, mai ales, un suport intuitiv necesar precizării cu mai mare claritate a acestor idei de bază. De asemenea, pentru o ilustrare cât mai cuprinzătoare a prezentării teoretice, aceasta este însoțită de exerciții și probleme dintre care unele sunt rezolvate.

Marius Durea

Cuprins

Prefață	i
1 Introducere	1
1.1 Concepte de bază	1
1.2 Exerciții	6
2 Elemente de analiză neliniară	10
2.1 Mulțimi convexe	10
2.2 Funcții convexe	11
2.3 Funcția distanță	18
2.4 Conuri	19
2.5 Teorema lui Lyusternik	22
2.6 Lema lui Farkas	24
2.7 Exerciții	28
3 Studiul unor probleme de optimizare	40
3.1 Cadrul general	40
3.2 Rezultate de existență a soluțiilor	41
3.3 Condiții de optimalitate	42
3.4 Restricții funcționale	49
3.4.1 Condițiile Karush-Kuhn-Tucker	49
3.4.2 Condiții de calificare pentru sisteme generale de restricții	52
3.4.3 Condiții de calificare pentru sisteme speciale de restricții	55
3.5 Exemple și aplicații	58
3.6 Exerciții	68
4 Algoritmi pentru aproximarea soluțiilor ecuațiilor neliniare	85
4.1 Descriere generală	85
4.2 Principiul lui Banach de punct fix	87
4.3 Consecințe ale Principiului lui Banach în proiectarea unor algoritmi	91
4.4 Teorema lui Picard	94
4.5 Metoda lui Newton	97
4.6 Exerciții	100

Appendix	115
1. Spațiul $\mathbb{R}^p$	115
2. Limite de funcții și continuitate	119
3. Diferențiabilitate	123
4. Integrala Riemann	128
Modele de evaluări scrise	130
Model examen parțial	130
Model examen parțial	131
Model verificare scrisă	132
Model evaluare finală	133
Model evaluare finală	134
Bibliografie	135

Capitolul 1

Introducere

1.1 Concepte de bază

Teoria optimizării se ocupă cu studiul punctelor de extrem (de minim sau de maxim) ale funcțiilor.

Definiția 1.1.1 Fie $A \subset \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$ (respectiv, $f(a) \geq f(x)$), pentru orice $x \in A \cap V$. Punctele de maxim sau de minim local se numesc puncte de extrem local.

Dacă $f(a) \leq f(x)$ (respectiv $f(a) \geq f(x)$) pentru orice $x \in A$, spunem că a este punct de minim (respectiv, maxim) global (situații corespunzătoare cazului $V = \mathbb{R}$).

Observația 1.1.2 Remarcăm faptul că, în notațiile definiției precedente, $a \in A$ nu este punct de minim local pentru f dacă și numai dacă există un șir (a_n) de elemente din A cu limita a astfel încât $f(a_n) < f(a)$ pentru orice n . O observație similară are loc pentru maximalitate.

Două rezultate fundamentale reprezintă baza Teoriei optimizării. Acestea sunt Teorema lui Weierstrass și Teorema lui Fermat.

Teorema 1.1.3 (Weierstrass) Dacă $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă pe mulțimea compactă $K \subset \mathbb{R}$, atunci f este mărginită și își atinge marginile pe K (adică există $a, b \in K$, astfel încât $\sup_{x \in K} f(x) = f(a)$ și $\inf_{x \in K} f(x) = f(b)$).

Teorema lui Weierstrass asigură condiții suficiente de existență a punctelor de extrem (adică de minim sau de maxim) globale. Condiția de compactitate este severă.

Teorema 1.1.4 (Fermat) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $a \in \text{int } I$. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în a , iar a este punct de extrem local pentru f , atunci $f'(a) = 0$.

Teorema lui Fermat precizează condiții necesare de optimalitate. Reciproca este falsă, așa cum se poate vedea considerând funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ și $a = 0$.

De-a lungul cursului vom dezvolta instrumente de studiu care să permită generalizarea acestor două rezultate de bază.

Subliniem unele concepte-cheie.

1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\min f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Evident $\bar{x} = 0$ este minim global. Aceasta este o **problemă de optimizare fără restricții**.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in [-1, \infty)$, adică

$$\min f(x), x \in [-1, \infty).$$

Din nou, $\bar{x} = 0$ este minim global. Aceasta este o **problemă de optimizare cu restricții**, dar pentru că punctul de minim este în interiorul domeniului, **restricția este inactivă local** (nu influențează problema).

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in [1, \infty)$, adică

$$\min f(x), x \in [1, \infty).$$

Acum $\bar{x} = 1$ este minim global. Aceasta este o problemă de optimizare cu restricții, iar punctul de minim este pe frontiera domeniului, deci restricția joacă un rol important (spunem că **restricția este activă**).

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\min f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Funcția **nu admite punct de extrem**.

5. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in [-1, \infty)$, adică

$$\min f(x), x \in [-1, \infty).$$

Funcția admite punct de minim în $\bar{x} = -1$ (**restricția este activă și determină o soluție**).

6. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (e^x + x - 5)^2$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\min f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Evident, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă ar exista soluții ale ecuației $e^x + x - 5 = 0$ acestea ar fi puncte de minim global. Ecuația nu poate fi rezolvată. Considerând $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x - 5$ constatăm că $g(0) \cdot g(5) < 0$ și continuitatea lui g asigură existența unei soluții în intervalul $(0, 5)$. Putem cel mult să aproximăm această soluție. Deci vom fi interesați de **algoritmi de aproximare a rădăcinilor ecuațiilor neliniare**. În multe cazuri, rezolvarea

unei probleme de optimizare depinde de determinarea (fie și aproximativă) a soluțiilor unei ecuații neliniare.

7. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2 \sin x$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\min f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Aplicarea Teoremei lui Fermat conduce la rezolvarea ecuației $x = \cos x$, adică la problema determinării **punctelor fixe** pentru funcția $\cos$. O reprezentare grafică sau un studiu analitic arată că un astfel de punct $\bar{x}$ există. În plus, variația funcției în jurul acestui punct dovedește că $\bar{x}$ este punct de minim pentru f . Din nou, nu îl vom putea determina ci vom preciza **algoritmi de aproximare a punctelor fixe**, puncte ce vor interveni în mai multe situații. De altfel, legat de punctul precedent, rezolvarea unei ecuații de forma $f(x) = 0$ revine la rezolvarea ecuației $f(x) + x = x$, adică la determinarea punctelor fixe ale funcției $f + \text{id}$, această abordare fiind utilă uneori.

8. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 10}.$$

Din cauză că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, funcția nu admite punct de minim global. Dar, tot din cauzele menționate, pentru studiul existenței punctelor de maxim global putem să **restrângem discuția la un interval compact** pe care se aplică Teorema lui Weierstrass. Teorema lui Fermat și studiul variației funcției dovedesc că $\bar{x} = \sqrt{10}$ este punct de maxim global.

9. În unele cazuri este mai utilă **informația ce poate fi dedusă pe baza ecuației** $f'(x) = 0$ decât rezolvarea sa efectivă, rezolvare care în unele cazuri este imposibilă. Ilustrăm aceasta prin deducerea legii fizice a refracției luminii ce se obține din Teorema lui Fermat aplicată în virtutea Principiului lui Fermat: într-un mediu neomogen, lumina parcurge distanța dintre două puncte astfel încât timpul de parcurs este minim.

Astfel se obține faptul că atunci când trece dintr-un mediu în altul, direcția luminii satisface relația $\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$, unde α_1, α_2 sunt unghiurile dintre direcțiile luminii și normala la suprafața care separă cele două medii.

Să demonstrăm această lege. **Mai întâi modelăm problema.** Presupunem că raza de lumina străbate drumul dintre punctul $(0, a)$, $a > 0$, aflat în primul mediu și punctul (b, c) , $b > 0$, $c < 0$, din cel de-al doilea.

Pentru ușurința calculului, presupunem că suprafața care separă cele două medii este axa Ox . Fie v_1, v_2 vitezele luminii în cele două medii. Notăm cu $(x, 0)$ punctul în care raza trece dintr-un mediu în altul, unde x trebuie determinat conform Principiului lui Fermat. Timpii de parcurs în cele două medii sunt, respectiv,

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}$$

$$t_2 = \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_2},$$

deci timpul total care trebuie minimizat este $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}$. Considerăm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2},$$

pe care trebuie să o minimizăm pe $\mathbb{R}$. Derivata lui f este

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{x-b}{v_2\sqrt{(x-b)^2+c^2}}.$$

Cum $f'(0) = \frac{-b}{v_2\sqrt{b^2+c^2}} < 0$, $f'(b) = \frac{b}{v_1\sqrt{a^2+b^2}} > 0$ și

$$f''(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{c^2}{((x-b)^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

există un singur punct critic pentru f situat în intervalul $[0, b]$. Notăm acest punct cu $\bar{x}$. Variația lui f arată că $\bar{x}$ este punct de minim. Atunci

$$\frac{\bar{x}}{v_1\sqrt{a^2+\bar{x}^2}} = \frac{b-\bar{x}}{v_2\sqrt{(\bar{x}-b)^2+c^2}}.$$

Dar,

$$\frac{\bar{x}}{\sqrt{a^2+\bar{x}^2}} = \sin \alpha_1$$

și

$$\frac{b-\bar{x}}{\sqrt{(\bar{x}-b)^2+c^2}} = \sin \alpha_2,$$

deci

$$\frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}.$$

10. Considerăm următoarea problemă de optimizare cu restricții de **mai multe** (două) **variabile**:

$$\max(x+y)$$

cu restricțiile

$$\begin{aligned} x &\geq 0, y \geq 0, x \leq 6 \\ 4^{-1}x + y &\leq 6 \\ 3x + 2y &\leq 22. \end{aligned}$$

Problema se poate rezolva grafic pentru că toate funcțiile implicate sunt **liniare**. Atunci când se face desenul pentru mulțimea restricțiilor și se interpretează sensul **liniilor de nivel** pentru expresia de maximizat, se observă că acest maxim se atinge în punctul (4,5) care este unul dintre vârfurile poligonului ce reprezintă mulțimea restricțiilor.

11. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$. **Condițiile de optimalitate de ordin superior** ne asigură faptul că $\bar{x} = 0$ este punct de minim pentru f . Într-adevăr, ne amintim rezultatul de mai jos.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de n ori derivabilă în $a \in I$, ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), astfel încât

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0.$$

- (i) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem, și anume: punct de maxim local dacă $f^{(n)}(a) < 0$ și punct de minim local dacă $f^{(n)}(a) > 0$.
- (ii) Dacă n este impar, atunci a nu este punct de extrem.

În cazul concret al funcției de mai sus, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, iar $f^{(iv)}(0) = 4 > 0$.

1.2 Exerciții

Exercițiul 1.1 *Să se studieze existența punctelor de extrem local pentru funcțiile polinomiale de gradul al III-lea. Admit acestea puncte de extrem global? Aplicație: problema lui Tartaglia: să se scrie numărul 8 ca sumă de doi termeni pozitivi astfel încât produsul acestora înmulțit cu diferența lor să fie maxim.*

Exercițiul 1.2 *Un panou publicitar se află la înălțimea h_1 față de nivelul străzii și are înălțimea l . La ce distanță față de locul instalării panoului trebuie să se afle un privitor ce are înălțimea $h_2 < h_1$ astfel încât unghiul sub care se vede panoul să fie maxim?*

Exercițiul 1.3 *O persoană se află în următoarea situație: trebuie să meargă la un râu aflat în apropiere, să încarce o cantitate de apă și apoi să o transporte în alt loc aflat pe același mal. Să se stabilească traseul optim din punct de vedere al timpului de parcurs dacă fără încărcătură viteza de deplasare este v_1 , iar cu încărcătură viteza de deplasare este $v_2 < v_1$.*

Exercițiul 1.4 *La construcția unei clădiri, constructorul are următoarele costuri: 10.000.000 u.m (unități monetare) pentru terenul de amplasament, 250.000 u.m. costuri independente pentru fiecare etaj și $10.000x$ costuri comune specifice pentru fiecare etaj (unde x este numărul de etaje). Să se determine numărul x de etaje ce trebuie construite astfel încât costul mediu pe etaj să fie minim.*

Exercițiul 1.5 *Cum poate fi descompus numărul 100 într-o sumă de termeni pozitivi astfel încât produsul acestora să fie maxim? Dar dacă termenii sunt numere naturale?*

Exercițiul 1.6 *Un soldat are la dispoziție 74" pentru a dezamorsa o bombă aflată în largul mării la o distanță de 50m față de țărm. Soldatul se află la 100m în lungul țărmului față de poziția bombei în raport cu țărmul. Știind că soldatul aleargă cu 5m/s înotă cu 2m/s și, odată ajuns la bombă, are nevoie de 30" pentru a opri circuitul de detonare, determinați dacă poate opri explozia.*

Exercițiul 1.7 (problema butoaielor – Kepler) *Să se determine dimensiunile cilindrului de volum maxim pentru care distanța de la mijlocul generatoarei la cele două puncte "opuse" ale bazei este constantă ($d > 0$).*

Exercițiul 1.8 *Se știe că înălțimea la care se găsește centrul de greutate a unui sistem format din două corpuri este dată de relația*

$$\frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2},$$

unde m_1 și m_2 sunt masele celor două corpuri, iar h_1 și h_2 sunt înălțimile la care se găsesc centrele de greutate ale corpurilor respective. Considerăm un pahar cilindric cu înălțimea de 20 cm, masa de 100 g și aria bazei de 10 cm^2 . Se pune întrebarea până la ce înălțime trebuie turnată apă în pahar pentru ca sistemul să fie cât mai stabil (i.e., să aibă centrul de greutate cât mai jos).

Soluție Modelăm problema. Notăm cu h înălțimea până la care turnăm apă. Avem $m_1 = 100$, $h_1 = 10$ (datele corespunzătoare paharului) și $m_2 = 10h$, $h_2 = h/2$ (datele corespunzătoare apei). Conform formulei de mai sus, centrul de greutate al paharului cu apă este la înălțimea

$$g(h) = \frac{1000 + 5h^2}{100 + 10h} = \frac{200 + h^2}{20 + 2h}.$$

Studiul variației lui g conduce la punctul de minim $\bar{h} = 10(\sqrt{3} - 1)$. Se constată și că $g(\bar{h}) = \bar{h}$, adică $\bar{h}$ este punct fix pentru g , lucru care nu este înlămplător dacă ne gândim la semnificația fizică a rezultatului. $\square$

Exercițiul 1.9 *Se dorește confecționarea unui container cilindric cu volumul de un litru folosind cat mai puțin material. Aria laterală se poate tăia dintr-o bucată dreptunghiulară de material, fără pierderi. Bazele sunt tăiate din niște pătrate de latură $2r$ (deci materialul necesar are aria $2(2r)^2 = 8r^2$). Determinați dimensiunile containerului pentru care se utilizează cel mai puțin material.*

Exercițiul 1.10 *O cutie paralelipipedică cu baza pătrat, fără capac, are volumul 100 dm^3 . Determinați dimensiunile cutiei care folosește cel mai puțin material.*

Exercițiul 1.11 *Dorim să confecționăm o cutie cilindrică (cu capac) de un volum dat. Presupunem că materialul din care se confecționează bazele este de $N \geq 1$ mai scump pe unitate de arie decât cel pentru aria laterală a cilindrului. Să se determine, în funcție de N , raportul dintre raza bazei cilindrului și generatoarea acestuia astfel încât costul să fie minim.*

Exercițiul 1.12 *Să se modeleze problema maximizării ariei unui dreptunghi de perimetru cunoscut ($p > 0$) și să se rezolve.*

Exercițiul 1.13 *Să se determine aria maximă pe care o poate avea un dreptunghi înscris într-un semicerc de rază 10 având o latură pe diametrul semicercului.*

Exercițiul 1.14 *Să se determine punctele de extrem pentru funcțiile de mai jos.*

- (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^3$;
- (ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;
- (iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$;
- (iv) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$.

Soluție (i) Derivata funcției este

$$f'(x) = (x + 2)(x - 1)^2(5x + 4),$$

deci punctele critice sunt -2 ; 1 ; $-\frac{4}{5}$. Din tabelul de variație se poate imediat deduce că -2 este punct de maxim local, $-\frac{4}{5}$ este punct de minim local, iar 1 nu este punct de extrem.

(ii) Este suficient să studiem funcția pe intervalul $[0, 2\pi)$ (din periodicitate). Derivata funcției este

$$f'(x) = 3 \sin x \cos x (\sin x - \cos x),$$

având rădăcinile

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}.$$

Din analiza semnului derivatei în jurul acestor puncte avem că $0 + 2k\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sunt maxime locale, iar $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\pi + 2k\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ sunt minime locale.

O altă variantă este, ca după determinarea punctelor critice, să determinăm derivata a doua a funcției și să folosim următorul rezultat: pentru punctul critic $\bar{x}$, dacă $f''(\bar{x}) > 0$, atunci $\bar{x}$ este punct de minim local, iar dacă $f''(\bar{x}) < 0$ atunci $\bar{x}$ este punct de maxim local.

(iii) Funcția este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ și derivata este

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Punctele critice sunt $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, iar candidații pentru punctele de extrem sunt așadar

$$-1, 0, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Din analiza semnului derivatei lui f în jurul acestor puncte deducem că $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sunt puncte de maxim local, iar 0 este minim local.

(iv) Discuția este analoagă metodelor descrise mai sus. Se obține că $1 - \sqrt{2}$ este punct de maxim local, iar $1 + \sqrt{2}$ este punct de minim local. $\square$

Exercițiul 1.15 Să se arate că $x = 0$ este punct de maxim iar $x = \pi$ este punct de minim pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2 \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Implementare Matlab 1.16 Să se reprezinte grafic utilizând Matlab funcțiile de la Exercițiul 1.14. Spre exemplu, pentru a reprezenta funcția de la (iv), putem folosi codul:

```
functie=@(x) [(x^2-5*x+6)/(x^2+1)];  
fplot(functie,[-10,10]);  
set(gca, 'XAxisLocation', 'origin')  
set(gca, 'YAxisLocation', 'origin')
```

Să se studieze opțiunile oferite de Matlab pentru reprezentările grafice.

Exercițiul 1.17 Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x| e^{\frac{1}{x-1}}$$

și să se determine punctele sale de extrem.

Exercițiul 1.18 Fie $a_1, \dots, a_n$ numere reale strict pozitive cu

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

Soluție Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x$. Cum $f(0) = n$, din ipoteză deducem că $x = 0$ este punct de minim pentru f , deci, din Teorema lui Fermat, $f'(0) = 0$, ceea ce conduce la concluzie. O altă soluție se poate da folosind limita fundamentală

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0.$$

□

Problema 1.19 Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue. Definim $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(t) = \sup\{f(x) + tg(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Să se arate că h este corect definită și este o funcție Lipschitz.

Soluție Fie $s, t \in \mathbb{R}$. Cum funcțiile $x \mapsto f(x) + tg(x)$ și $x \mapsto f(x) + sg(x)$ sunt continue, aplicând Teorema lui Weierstrass pe intervalul compact $[a, b]$, există $x_t, x_s \in [a, b]$ astfel încât

$$\begin{aligned} h(t) &= f(x_t) + tg(x_t) \\ h(s) &= f(x_s) + sg(x_s). \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} h(t) - h(s) &= f(x_t) + tg(x_t) - (f(x_s) + sg(x_s)) \\ &\leq f(x_t) + tg(x_t) - f(x_t) - sg(x_t) \\ &= g(x_t)(t - s). \end{aligned}$$

Similar,

$$\begin{aligned} h(t) - h(s) &= f(x_t) + tg(x_t) - (f(x_s) + sg(x_s)) \\ &\geq f(x_s) + tg(x_s) - f(x_s) - sg(x_s) \\ &= g(x_s)(t - s). \end{aligned}$$

Notând cu $M := \max_{x \in [a, b]} |g(x)| \in \mathbb{R}$ (folosind din nou Teorema lui Weierstrass) obținem

$$|h(t) - h(s)| \leq M |t - s|,$$

adică exact concluzia. □

Problema 1.20 Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $c < d$ și $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Definim $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \inf\{f(x, y) \mid y \in [c, d]\}.$$

Să se arate că φ este bine definită și continuă.

Exercițiul 1.21 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă în a . Să se arate că dacă a este punct de minim atunci $f'(a) \geq 0$.

Exercițiul 1.22 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, derivabilă în a și b cu $f'(a)f'(b) < 0$. Să se arate că f admite un punct de extrem local în (a, b) .

Capitolul 2

Elemente de analiză neliniară

2.1 Mulțimi convexe

Fie $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pe parcursul cursului lucrăm pe spațiul $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu structura uzuală de spațiu vectorial real de dimensiune p și topologizat cu produsul scalar obișnuit, deci cu norma euclidiană. Un breviar al notațiilor pe care le utilizăm și al cadrului teoretic pe care ne bazăm este prezentat în Appendix.

Definiția 2.1.1 O mulțime $D \subset \mathbb{R}^p$ se numește convexă dacă pentru orice $x, y \in D$, $[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y \mid \alpha \in [0, 1]\} \subset D$.

Cu alte cuvinte, o mulțime nevidă D este convexă dacă și numai dacă odată cu două puncte a_1, a_2 conține întreg segmentul $[a_1, a_2]$. Se mai observă că în definiția aceasta este suficient să luăm $\alpha \in (0, 1)$. Convenim să considerăm mulțimea vidă ca fiind convexă.

Prin inducție (a se vedea Exercițiul 2.1) se arată imediat că $D \neq \emptyset$ este convexă dacă și numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in D$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, are loc

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in D.$$

O sumă cum este cea de mai sus se numește combinație convexă a elementelor $(x_i)_{i \in \overline{1, n}}$.

Observația 2.1.2 (i) Este evident că orice intersecție de mulțimi convexe este convexă, iar o reuniune de mulțimi convexe nu este, în general, convexă.

(ii) În $\mathbb{R}$ mulțimile convexe sunt intervalele.

Discutăm acum conceptul de înfășurătoare convexă a unei mulțimi nevide. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Se numește înfășurătoare convexă a mulțimii A , mulțimea

$$\text{conv } A = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, (\alpha_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [0, \infty), \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, (x_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset A \right\}.$$

Este ușor de arătat că înfășurătoare convexă a lui A este mulțime convexă, conține mulțimea A și este cea mai mică mulțime (în sensul incluziunii) cu aceste proprietăți (a se vedea Exercițiul 2.2).

Prezentăm o teoremă care se referă la structura mulțimii $\text{conv } A$ și poartă numele de Teorema lui Carathéodory, după numele matematicianului grec Constantin Carathéodory care a demonstrat acest rezultat în 1911 pentru mulțimi compacte.

Teorema 2.1.3 (Teorema lui Carathéodory) *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Atunci*

$$\text{conv } A = \left\{ \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i \mid (\alpha_i)_{i \in \overline{1, p+1}} \subset [0, \infty), \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i = 1, (x_i)_{i \in \overline{1, p+1}} \subset A \right\}.$$

Demonstrație Trebuie arătat că orice element din $\text{conv } A$ se poate scrie ca o combinație de cel mult $p + 1$ elemente din A . Fie deci $x \in \text{conv } A$. Conform definiției lui $\text{conv } A$, x se poate scrie ca o combinație convexă de elemente din A . Presupunem, prin reducere la absurd, că numărul minim de elemente din A care pot da o combinație convexă cu valoarea x este $n > p + 1$. Deci există $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in (0, 1)$ cu $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ astfel încât $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = x$. Atunci elementele $(x_i - x_n)_{i \in \overline{1, n-1}}$ sunt liniar dependente (sunt mai multe decât dimensiunea p a spațiului), deci există $(\lambda_i)_{i \in \overline{1, n-1}}$, nu toate nule, cu

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x_i - x_n) = 0,$$

ceea ce înseamnă

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) x_n = 0$$

Notând $-\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) = \lambda_n$, avem $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ și $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$. Atunci pentru orice $t \in \mathbb{R}$,

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + t \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + t \lambda_i) x_i$$

și

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i + t \lambda_i) = 1.$$

Cum $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ și există măcar o valoare nenulă, va exista și cel puțin o valoare negativă printre valorile $(\lambda_i)_{i \in \overline{1, n}}$. Notăm $\bar{t} := \min\{-\alpha_i \lambda_i^{-1} \mid \lambda_i < 0\}$. Atunci toate valorile $(\alpha_i + \bar{t} \lambda_i)$ vor fi din intervalul $[0, \infty)$, iar valoarea corespunzătoare indicelui care dă minimul de mai sus este zero, deci x apare ca o combinație convexă de mai puțin de n elemente din A , contrazicându-se minimalitatea lui n . Așadar, presupunerea făcută este falsă, deci concluzia are loc. $\square$

2.2 Funcții convexe

În această secțiune prezentăm o clasă specială de funcții, numite funcții convexe. Aceste funcții sunt definite pe mulțimi convexe.

Definiția 2.2.1 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă. O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește convexă dacă

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in D, \quad \forall \lambda \in [0, 1]. \quad (2.1)$$

Este clar că în definiția de mai sus este suficient să luăm $\lambda \in (0, 1)$.

Observația 2.2.2 (i) Este ușor de văzut că suma unui număr finit de funcții convexe (definite pe aceeași mulțime) este o funcție convexă, iar produsul unei funcții convexe cu un scalar pozitiv este o funcție convexă.

(ii) De asemenea, orice funcție afină de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}$ este convexă.

Cum am mai spus, în $\mathbb{R}$ mulțimile convexe sunt intervalele. În acest cadru, convexitatea are următoarea interpretare geometrică: pentru orice două puncte $x, y \in D$, $x < y$, graficul restricției lui f la intervalul $[x, y]$ se află sub coarda ce unește punctele $(x, f(x))$ și $(y, f(y))$. Aceasta se mai scrie astfel: pentru orice $u \in [x, y]$,

$$f(u) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(u - x), \quad (2.2)$$

inegalitate care se obține din (2.1) înlocuind λ cu valoarea obținută din relația $u = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Astfel, (2.1) și (2.2) sunt echivalente (pentru funcții de variabilă reală).

Exemplul 2.2.3 Este ușor de verificat prin calcul direct că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este convexă.

Definiția 2.2.4 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă. O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește concavă dacă $-f$ este convexă.

Toate proprietățile funcțiilor concave se deduc cu ușurință din proprietățile funcțiilor convexe, astfel că vom considera în continuare doar acest ultim caz.

Mai întâi deducem unele proprietăți generale ale funcțiilor convexe. Începem cu un rezultat ajutător.

Lema 2.2.5 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă. Pentru orice $x, y \in D$ definim $I_{x,y} := \{t \in \mathbb{R} \mid tx + (1 - t)y \in D\}$. Atunci $I_{x,y}$ este un interval ce conține intervalul $[0, 1]$.

Demonstrație. Practic trebuie să arătăm că $I_{x,y}$ este mulțime convexă. Într-adevăr, dacă $u, v \in I_{x,y}$ și $\lambda \in [0, 1]$, este ușor de verificat că

$$[\lambda u + (1 - \lambda)v]x + [1 - \lambda u - (1 - \lambda)v]y = \lambda(ux + (1 - u)y) + (1 - \lambda)(vx + (1 - v)y) \in D.$$

Faptul că $0, 1 \in I_{x,y}$ este evident. □

Propoziția 2.2.6 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este convexă;

(ii) pentru orice $x, y \in D$, funcția $\varphi_{x,y} : I_{x,y} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_{x,y}(t) = f(tx + (1 - t)y)$ este convexă.

Demonstrație Arătăm că (i) implică (ii). În lema anterioară am constatat că $I_{x,y}$ este un interval (deci o mulțime convexă) care include $[0, 1]$.

Presupunem că f este convexă și luăm $u, v \in I_{x,y}$, $\lambda \in [0, 1]$. Avem

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(\lambda u + (1 - \lambda)v) &= f([\lambda u + (1 - \lambda)v]x + [1 - \lambda u - (1 - \lambda)v]y) \\ &= f(\lambda(ux + (1 - u)y) + (1 - \lambda)(vx + (1 - v)y)) \\ &\leq \lambda f(ux + (1 - u)y) + (1 - \lambda)f(vx + (1 - v)y) \\ &= \lambda \varphi_{x,y}(u) + (1 - \lambda)\varphi_{x,y}(v).\end{aligned}$$

Arătăm acum că (ii) implică (i). Luăm $x, y \in D$ și $t \in [0, 1]$. Atunci $\varphi_{x,y}$ este convexă și deci pentru orice $\lambda \in [0, 1]$, $u, v \in I_{x,y}$

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(\lambda u + (1 - \lambda)v) &\leq \lambda \varphi_{x,y}(u) + (1 - \lambda)\varphi_{x,y}(v) \\ &= \lambda f(ux + (1 - u)y) + (1 - \lambda)f(vx + (1 - v)y).\end{aligned}$$

Făcând $u = 1, v = 0, \lambda = t$ deducem

$$\varphi_{x,y}(t) \leq tf(x) + (1 - t)f(y),$$

deci f este convexă. □

Observația 2.2.7 *Deși convexitatea este o proprietate algebrică, funcțiile convexe au proprietăți topologice remarcabile: a se vedea, de exemplu, Problema 2.41.*

Dorim să punem acum în evidență caracterizări ale funcțiilor convexe diferențiabile. Pentru aceasta, avem nevoie de unele rezultate care se referă la funcții convexe definite pe un interval din $\mathbb{R}$.

Propoziția 2.2.8 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) f este convexă;
- (ii) pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in I$ în relația $x_1 < x_2 < x_3$ avem

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2};$$

- (iii) pentru orice $a \in \text{int } I$, funcția $g : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

este crescătoare.

Demonstrație Arătăm implicația (i) $\Rightarrow$ (ii). Luăm $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0, 1)$. Atunci are loc egalitatea $x_2 = \lambda x_3 + (1 - \lambda)x_1$ și inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\lambda(x_3 - x_1)} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(1 - \lambda)(x_3 - x_1)}.$$

După efectuarea calculelor, obținem

$$f(x_2) \leq \lambda f(x_3) + (1 - \lambda)f(x_1).$$

Implicația $(ii) \Rightarrow (i)$ urmează traseul invers implicației $(i) \Rightarrow (ii)$, deci (i) și (ii) sunt echivalente.

Pentru a demonstra $(ii) \Rightarrow (iii)$, fixăm $x_1, x_2 \in I \setminus \{a\}$ cu $x_1 < x_2$. Distingem trei situații. Dacă $x_1 < x_2 < a$ atunci aplicăm (ii) pentru tripleta (x_1, x_2, a) . Dacă $x_1 < a < x_2$ atunci aplicăm (ii) pentru tripleta (x_1, a, x_2) . În sfârșit, dacă $a < x_1 < x_2$ atunci aplicăm (ii) pentru tripleta (a, x_1, x_2) .

Pentru a demonstra $(iii) \Rightarrow (i)$, luăm $x, y \in I$ cu $x < y$ și $\lambda \in (0, 1)$. Atunci $x < \lambda x + (1 - \lambda)y < y$ și aplicând (iii) pentru $a = \lambda x + (1 - \lambda)y$ deducem

$$\frac{f(x) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)}{x - \lambda x - (1 - \lambda)y} \leq \frac{f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y)}{y - \lambda x - (1 - \lambda)y}.$$

Din nou efectuând calculele ajungem la relația din definiția convexității. Faptul că această relație are loc pentru orice $x, y \in I$ cu $x < y$ și orice $\lambda \in (0, 1)$ este suficient pentru a proba afirmația dorită. Demonstrația este completă. $\square$

Observația 2.2.9 *Proprietatea de la punctul (ii) din rezultatul precedent se numește inegalitatea pantelor. O interpretare geometrică elementară justifică această denumire.*

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a funcțiilor convexe derivabile (de o variabilă reală).

Teorema 2.2.10 *Fie I un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.*

(i) Presupunând că f este derivabilă pe I , atunci f este convexă dacă și numai dacă f' este crescătoare pe I .

(ii) Presupunând că f este de două ori derivabilă pe I atunci f este convexă dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$.

Demonstrație În acest caz, al funcțiilor reale de o variabilă reală, ținând cont de echivalența dintre monotonia lui f' și semnul lui f'' este suficient să arătăm că f este convexă dacă și numai dacă f' este crescătoare pe I .

Presupunem că f este convexă și demonstrăm monotonia derivatei. Fie $x, y \in I$ cu $x < y$. Considerăm $z \in (x, y)$. Conform inegalității pantelor putem scrie

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}, \quad \forall z \in (x, y),$$

adică

$$\begin{cases} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \end{cases}, \quad \forall z \in (x, y).$$

Dacă în prima inegalitate facem $z \rightarrow x$, iar în a doua $z \rightarrow y$, deducem

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y),$$

deci f' este crescătoare.

Invers, presupunem că f' este crescătoare și arătăm că f este convexă. Fie $a, b \in I$, $a < b$. Definim $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Evident, $g(a) = g(b) = 0$, iar

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Funcția f satisface condițiile Teoremei lui Lagrange pe $[a, b]$, deci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Prin urmare, $g'(x) = f'(x) - f'(c)$. Din monotonia lui f' deducem că g este descrescătoare pe intervalul (a, c) și crescătoare pe intervalul (c, b) , iar din $g(a) = g(b) = 0$ obținem că g este negativă pe tot intervalul $[a, b]$.

Fie $\lambda \in (0, 1)$. Atunci

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b \in (a, b).$$

Înlocuim în expresia lui g și ținând cont că $g(x) \leq 0$ deducem

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) - f(a) - (1 - \lambda)(b - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0,$$

relație care se reduce la definiția convexității. □

Observația 2.2.11 *De fapt, se poate arăta (a se vedea Problema 2.42) că dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă, atunci f admite derivate laterale în fiecare punct interior intervalului I și pentru orice $x, y \in \text{int } I$, cu $x < y$ avem*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y).$$

Exemplul 2.2.12 Pe baza rezultatului de mai sus, deducem convexitatea următoarelor funcții: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$; $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$; $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$; $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, $a \geq 1$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$; $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$; $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^{-1} x$.

Un alt exemplu este dat de rezultatul următor.

Caracterizăm acum funcțiile convexe diferențiabile generale.

Teorema 2.2.13 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și deschisă și fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.*

(i) *Dacă f este diferențiabilă pe D atunci f este convexă dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in D$,*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

(ii) *Dacă f este diferențiabilă de ordinul al doilea pe D , atunci f este convexă dacă și numai dacă pentru orice $x \in D$ și $y \in \mathbb{R}^p$ are loc*

$$\nabla^2 f(x)(y, y) \geq 0.$$

Demonstrație (i) Considerăm pentru început cazul $p = 1$. Fixăm $x, y \in D$ cu $y \neq x$ și luăm $\lambda \in (0, 1]$. Cum f este convexă, obținem

$$\begin{aligned} f(x + \lambda(y - x)) &= f((1 - \lambda)x + \lambda y) \\ &\leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) = f(x) + \lambda(f(y) - f(x)). \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda(y - x)} \cdot (y - x) \leq f(y) - f(x).$$

Trecând la limită cu $\lambda \rightarrow 0$, obținem $f'(x)(y - x) \leq f(y) - f(x)$.

Trecem acum la cazul general. Pentru $x, y \in D$ considerăm funcția $\varphi_{y,x}$ din Propoziția 2.2.6 despre care știm că este convexă. Mai mult, $\varphi_{y,x}$ este derivabilă pe intervalul deschis $I_{y,x}$ și

$$\varphi'_{y,x}(t) = \nabla f(ty + (1 - t)x)(y - x).$$

Conform pasului anterior,

$$\varphi_{y,x}(1) \geq \varphi_{y,x}(0) + \varphi'_{y,x}(0)$$

ceea ce înseamnă că

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

Reciproc, fixăm $x, y \in D$ și $\lambda \in [0, 1]$. Astfel, din ipoteză,

$$f(x) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + (1 - \lambda)\nabla f(\lambda x + (1 - \lambda)y)(x - y)$$

și

$$f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + \lambda \nabla f(\lambda x + (1 - \lambda)y)(y - x).$$

Înmulțind prima inegalitate cu λ și a doua inegalitate cu $(1 - \lambda)$ și adunând noile inegalități, obținem

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y),$$

ceea ce demonstrează că f este convexă.

(ii) Cazul $p = 1$ este demonstrat în Teorema 2.2.10. Acum, pentru a demonstra cazul general, fie $x \in D$, $y \in \mathbb{R}^p$. Presupunem că f este convexă. Cum D este deschisă, există $\alpha > 0$ astfel încât $u := x + \alpha y \in D$. Conform ipotezei $\varphi_{u,x}$ este convexă și din cazul discutat mai sus, $\varphi''_{u,x}(t) \geq 0$ pentru orice $t \in I_{u,x}$. Pentru $t = 0$, deducem

$$0 \leq \varphi''_{u,x}(0) = \nabla^2 f(x)(u - x, u - x),$$

de unde se obține concluzia. Invers, pentru $x, y \in D$ și $t \in I_{x,y}$, $\varphi''_{x,y}(t) \geq 0$. Din cazul $p = 1$, obținem că $\varphi_{x,y}$ este convexă, deci f este convexă. Demonstrația este completă. $\square$

Din aceste rezultate se observă că anumite proprietăți ale funcțiilor convexe au un caracter global, lucru ce se va constata și în continuare.

Observația 2.2.14 Să mai constatăm că o funcție diferențiabilă este convexă simultan cu opusa sa dacă și numai dacă este afină. Într-adevăr, este clar că o funcție afină este simultan convexă și concavă. Invers, ambele proprietăți implică egalitatea

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)(y - x), \quad \forall x, y \in D,$$

adică, fixând x ,

$$f(y) = \nabla f(x)(y) + (f(x) - \nabla f(x)(x)), \quad \forall y \in D,$$

ceea ce înseamnă că f se scrie ca suma dintre o funcție liniară și o constantă.

De fapt, această proprietate are loc și în absența diferențiabilității (a se vedea Problema 2.33).

În final, definim o proprietate mai puternică decât convexitatea.

Definiția 2.2.15 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă. O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește strict convexă dacă

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall x, y \in D, \quad x \neq y, \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Definiția 2.2.16 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă. O funcție $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ se numește strict concavă dacă $-f$ este strict convexă.

Evident, orice funcție strict convexă este convexă în timp ce reciproca este falsă: este suficient să considerăm o funcție convexă care să fie constantă pe un interval. Din nou, proprietățile funcțiilor strict concave se deduc din proprietățile funcțiilor strict convexe.

Folosind argumente cu totul similare celor din rezultatele precedente deducem următoarele caracterizări.

Teorema 2.2.17 Fie I un interval deschis și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este strict convexă;
- (ii) $f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$, pentru orice $x, a \in I, x \neq a$;
- (iii) f' este strict crescătoare.

Dacă, în plus, f este de două ori derivabilă (pe I), atunci avem și echivalența cu

- (iv) $f''(x) \geq 0$ pentru orice $t \in I$ și $\{x \in I \mid f''(x) = 0\}$ nu conține niciun interval propriu.

Exemplul 2.2.18 Folosind acest rezultat obținem că următoarele funcții sunt strict convexe: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\ln x$; $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \ln x$; $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^a$, $a > 1$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$; $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1 + x^p)^{\frac{1}{p}}, p > 1$.

Teorema 2.2.19 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și deschisă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este strict convexă;
- (ii) $f(x) > f(a) + \nabla f(a)(x - a)$, pentru orice $x, a \in D, x \neq a$.

Dacă, în plus, f este de două ori diferențiabilă (pe D), atunci cele două afirmații de mai sus sunt implicate de relația:

- (iii) $\nabla^2 f(x)(y, y) > 0$ pentru orice $x \in D$ și $y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$.

2.3 Funcția distanță

Definiția 2.3.1 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă și fie $x \in \mathbb{R}^p$. Definim distanța de la x la A prin relația:

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Punem în evidență câteva proprietăți fundamentale ale distanței de la un punct la o mulțime (nevidă).

Teorema 2.3.2 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $A \neq \emptyset$. Atunci:

- (i) $d(x, A) = 0$ dacă și numai dacă $x \in \overline{A}$.
- (ii) Funcția $d_A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $d_A(x) = d(x, A)$ este 1-Lipschitz.
- (iii) Dacă A este închisă, atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, există $a_x \in A$ astfel încât $d(x, A) = \|x - a_x\|$. Dacă, în plus, A este convexă, atunci a_x cu proprietatea precedentă este unic și este caracterizat de proprietățile $a_x \in A$ și $\langle x - a_x, u - a_x \rangle \leq 0$ pentru orice $u \in A$.

Demonstrație (i) Au loc echivalențele

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\Leftrightarrow \inf_{a \in A} \|x - a\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists (a_n) \subset A \text{ cu } \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - a_n\| = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}. \end{aligned}$$

(ii) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ și orice $a \in A$ au loc relațiile:

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

Cum a este arbitrar în A deducem

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A)$$

adică

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|.$$

Inversând rolurile lui x și y avem:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|,$$

adică concluzia.

(iii) Dacă $x \in A$, atunci $a_x := x$ este unicul element cu proprietatea anunțată. Fie $x \notin A$. Cum $d(x, A)$ este un număr real, există $r > 0$ astfel încât $A_1 := A \cap D(x, r) \neq \emptyset$. Observăm că A_1 este mulțime compactă, deci funcția $g : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \|x - y\|$ este continuă pe o mulțime compactă. Conform teoremei lui Weierstrass, g își atinge minimumul pe A_1 , adică există $a_x \in A_1$ cu $g(a_x) = \inf_{y \in A_1} g(y) = d(x, A_1)$. Dar se observă că $d(x, A_1) = d(x, A)$ și prima concluzie urmează. Presupunem acum că, în plus, A este convexă. Din nou, dacă $x \in A$, nu avem nimic de arătat. Luăm $x \notin A$. Considerăm $a_1, a_2 \in A$ cu $d(x, A) = \|x - a_1\| = \|x - a_2\|$. Folosind egalitatea paralelogramului avem

$$\|(x - a_1) + (x - a_2)\|^2 + \|(x - a_1) - (x - a_2)\|^2 = 2\|x - a_1\|^2 + 2\|x - a_2\|^2,$$

adică

$$\|2x - a_1 - a_2\|^2 + \|a_2 - a_1\|^2 = 4d^2(x, A)$$

și împărțind prin 4 obținem

$$\left\|x - \frac{a_1 + a_2}{2}\right\|^2 + 4^{-1} \|a_2 - a_1\|^2 = d^2(x, A).$$

Cum A este convexă, $2^{-1}(a_1 + a_2) \in A$, deci $\left\|x - \frac{a_1 + a_2}{2}\right\|^2 \geq d^2(x, A)$. Această relație și egalitatea precedentă arată că $\|a_2 - a_1\| = 0$, deci $a_1 = a_2$. Demonstrația unicității este completă. Să demonstrăm acum că a_x verifică relația $\langle x - a_x, u - a_x \rangle \leq 0$ pentru orice $u \in A$. Pentru aceasta luăm $u \in A$. Atunci pentru orice $\alpha \in (0, 1]$

$$v = \alpha u + (1 - \alpha)a_x \in A.$$

Deci

$$\|x - a_x\| \leq \|x - \alpha u - (1 - \alpha)a_x\| = \|x - a_x - \alpha(u - a_x)\|,$$

de unde, prin ridicare la pătrat,

$$\|x - a_x\|^2 \leq \|x - a_x\|^2 - 2\alpha \langle x - a_x, u - a_x \rangle + \alpha^2 \|u - a_x\|^2.$$

După reducere și simplificarea cu $\alpha > 0$ obținem

$$0 \leq -2 \langle x - a_x, u - a_x \rangle + \alpha \|u - a_x\|^2.$$

Făcând $\alpha \rightarrow 0$ obținem inegalitatea anunțată. Invers, dacă un element $a \in A$ satisface $\langle x - a, u - a \rangle \leq 0$ pentru orice $u \in A$, atunci pentru orice $v \in A$

$$\|x - a\|^2 - \|x - v\|^2 = 2 \langle x - a, v - a \rangle - \|a - v\|^2 \leq 0,$$

deci a coincide cu a_x . Demonstrația este încheiată. $\square$

În cazul în care A este închisă și convexă, atunci pentru $x \in \mathbb{R}^p$ notăm elementul $a_x \in A$ cu $\text{pr}_A x$ și-l numim proiecția lui x pe A .

Observația 2.3.3 Dacă A este convexă și nevidă, atunci d_A este convexă (a se vedea Problema 2.46).

2.4 Conuri

Unul dintre obiectele fundamentale pentru studiul nostru este definit mai jos.

Definiția 2.4.1 O submulțime nevidă $C \subset \mathbb{R}^p$ se numește con dacă are loc proprietatea

$$\forall y \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty), \lambda y \in C.$$

Conform acestei definiții, orice con conține elementul 0.

Propoziția 2.4.2 *Un con C este mulțime convexă dacă și numai dacă $C + C = C$.*

Demonstrație Presupunem mai întâi că C este în același timp con și mulțime convexă. Cum $0 \in C$, este clar că $C \subset C + C$. Fie $u \in C + C$. Atunci există $c_1, c_2 \in C$ încât $c_1 + c_2 = u$. Dar, ținând cont de proprietățile lui C și de scrierea echivalentă

$$u = 2(2^{-1}c_1 + 2^{-1}c_2)$$

deducem faptul că $u \in C$. Pentru implicația inversă, presupunem că C este con și $C + C = C$. Fie $\alpha \in (0, 1)$ și $c_1, c_2 \in C$. Atunci, din proprietatea de con, $\alpha c_1, (1 - \alpha)c_2 \in C$ și deci $\alpha c_1 + (1 - \alpha)c_2 \in C + C = C$, observație care încheie demonstrația. $\square$

Înfășurătoarea conică a unei mulțimi nevide $A \subset \mathbb{R}^p$ este mulțimea

$$\text{con } A = [0, \infty)A := \{\alpha x \mid \alpha \geq 0, x \in A\}.$$

Din nou, $\text{con } A$ este cel mai mic con ce conține A (a se vedea Exercițiul 2.49).

Fie $S \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Numim polara lui S mulțimea

$$S^- := \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, x \rangle \leq 0, \forall x \in S\}.$$

Este ușor de constatat că S^- este un con convex închis și că, în general, $S \subset (S^-)^-$. De asemenea, $S^- = (\overline{\text{con } S})^-$ (a se vedea Exercițiul 2.49).

Exemplul 2.4.3 1. Fie $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$. Este ușor de observat că $S^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$. Evident, $(S^-)^- = S^-$.

2. Polara lui $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ este $\mathbb{R}_-^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \leq 0\}$. Mulțimea $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ are ca polară tot mulțimea $\mathbb{R}_-^2$. Deci, în general, $S_1^- = S_2^-$ nu implică faptul că $S_1 = S_2$.

De-a lungul acestui curs vom avea nevoie de multe ori de conceptul de vector tangent într-un punct la o mulțime. Introducem acum acest concept.

Definiția 2.4.4 *Fie $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă și $\bar{x} \in M$. Un vector $u \in \mathbb{R}^p$ se numește tangent la mulțimea M în $\bar{x}$ dacă există $(t_n) \subset (0, \infty)$, $t_n \rightarrow 0$ și $(u_n) \rightarrow u$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,*

$$\bar{x} + t_n u_n \in M.$$

Evident, este suficient ca relația de mai sus să aibă loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$ de la un loc încolo (pentru n suficient de mare).

Teorema 2.4.5 *Mulțimea, notată $T(M, \bar{x})$, a tuturor vectorilor tangenți la M în $\bar{x}$ este un con închis, numit conul tangent (în sens Bouligand) la M în $\bar{x}$.*

Demonstrație Mai întâi observăm că $0 \in T(M, \bar{x})$ pentru că este suficient să luăm (u_n) șirul constant 0.

Fie acum $u \in T(M, \bar{x})$ și $\lambda > 0$. Conform definiției, există $(t_n) \subset (0, \infty)$, $t_n \rightarrow 0$ și $(u_n) \rightarrow u$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\bar{x} + t_n u_n \in M.$$

Evident, ultima relație este echivalentă cu

$$\bar{x} + \frac{t_n}{\lambda}(\lambda u_n) \in M.$$

Cum $(\frac{t_n}{\lambda}) \rightarrow 0$ și $(\lambda u_n) \rightarrow \lambda u$, deducem că $\lambda u \in T(M, \bar{x})$, deci $T(M, \bar{x})$ este con. Arătăm acum că închiderea lui $T(M, \bar{x})$ este inclusă în $T(M, \bar{x})$. Fie $(u_n) \subset T(M, \bar{x})$ și $(u_n) \rightarrow u$. Trebuie să arătăm că $u \in T(M, \bar{x})$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, există $(t_n^k)_k \subset (0, \infty)$, $t_n^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ și $(u_n^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u_n$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$\bar{x} + t_n^k u_n^k \in M.$$

Urmând un procedeu de diagonalizare, pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, există $k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât (k_n) este strict crescător și au loc relațiile:

$$t_n^{k_n} < \frac{1}{n}$$

$$\|u_n^{k_n} - u_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Evident, șirul de numere pozitive $(t_n^{k_n})_n$ are limita 0 și din relația

$$\|u_n^{k_n} - u\| \leq \|u_n^{k_n} - u_n\| + \|u_n - u\|$$

deducem că $(u_n^{k_n}) \rightarrow u$. În plus, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\bar{x} + t_n^{k_n} u_n^{k_n} \in M,$$

deci, $u \in T(M, \bar{x})$ și demonstrația este încheiată. □

Un prim exemplu este următorul.

Exemplul 2.4.6 1. Fie discul $M \subset \mathbb{R}^2$, $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Atunci $T(M, (0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$.

2. Se poate cu ușurință observa că dacă $C \subset \mathbb{R}^p$ este un con închis, atunci $T(C, 0) = C$.

Propoziția 2.4.7 Dacă $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^p$ și $\bar{x} \in M$. Dacă $\bar{x} \in \text{int } M$, atunci $T(M, \bar{x}) = \mathbb{R}^p$.

Demonstrație Dacă $\bar{x} \in \text{int } M$, atunci pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$ și orice $(t_n) \subset (0, \infty)$, $t_n \rightarrow 0$ avem $\bar{x} + t_n u_n \in M$ pentru orice n suficient de mare. Aceasta arată, în particular, că $u \in T(M, \bar{x})$, de unde obținem concluzia. □

Observația 2.4.8 Este clar că are loc relația $T(M, \bar{x}) = T(M - \bar{x}, 0)$, deci a determina conul tangent la M în $\bar{x}$ revine la a determina conul tangent la $M - \bar{x}$ în 0.

Să remarcăm că, în general, conul tangent nu este convex și relația $T(M, \bar{x}) = \mathbb{R}^p$ poate avea loc, chiar dacă $\bar{x} \notin \text{int } M$.

Exemplul 2.4.9 1. Fie $M \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\} \cup \{(x, y) \mid x = 0, y \geq 0\}$. Atunci $T(M, (0, 0)) = M$ nu este o mulțime convexă.

2. Fie mulțimea M dată de curba (numită cardioida) având următoarele ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = -2 \cos t + \cos 2t + 1 \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

împreună cu interiorul său geometric. Atunci $T(M, (0, 0)) = \mathbb{R}^2$, dar $(0, 0) \notin \text{int } M$.

Vom nota cu $N(M, \bar{x})$ polara lui $T(M, \bar{x})$ (i.e. $N(M, \bar{x}) := T(M, \bar{x})^\perp$) și vom numi acest conul normal la M în $\bar{x}$.

Dacă mulțimea M este convexă, atunci conul tangent capătă o formă specială.

Propoziția 2.4.10 Fie $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^p$ convexă și $\bar{x} \in M$. Atunci

$$T(M, \bar{x}) = \text{cl } \mathbb{R}_+(M - \bar{x}),$$

iar

$$N(M, \bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, c - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall c \in M\}.$$

Demonstrație Fie $c \in M$ și $d := c - \bar{x}$. Fie $(t_k)_k \rightarrow 0$. Atunci

$$\bar{x} + t_k d = (1 - t_k)\bar{x} + t_k c \in M$$

și deci $M - \bar{x} \subset T(M, \bar{x})$. Cum $T(M, \bar{x})$ este con închis, obținem $\text{cl } \mathbb{R}_+(M - \bar{x}) \subset T(M, \bar{x})$. Fie $u \in T(M, \bar{x})$. Conform definiției vectorului tangent, există $(t_k) \subset (0, \infty)$, $t_k \rightarrow 0$ și $(u_k) \rightarrow u$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$x_k := \bar{x} + t_k u_k \in M.$$

Deci $u = \lim_k \frac{x_k - \bar{x}}{t_k}$. Dar $\left(\frac{x_k - \bar{x}}{t_k}\right)_k \subset \mathbb{R}_+(M - \bar{x})$. Deducem că $T(M, \bar{x}) \subset \text{cl } \mathbb{R}_+(M - \bar{x})$. Ne reamintim că, prin definiție,

$$N(M, \bar{x}) = T(M, \bar{x})^\perp = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, v \rangle \leq 0, \forall v \in T(M, \bar{x})\}.$$

Acum, ținând cont de forma particulară a conului $T(M, \bar{x})$, deducem concluzia. □

2.5 Teorema lui Lyusternik

Următorul rezultat, care ne va fi util într-un moment cheie al discuției principale legate de probleme de optimizare, a fost demonstrat în anul 1934 de Lazar Lyusternik.

Teorema 2.5.1 (Lyusternik) Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ este o mulțime deschisă, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^1$ și $\bar{x} \in D$. Fie

$$M := f^{-1}(f(\bar{x})) = \{x \in D \mid f(x) = f(\bar{x})\}.$$

Dacă diferențiala $\nabla f(\bar{x}) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este surjectivă, atunci conul tangent M în $\bar{x}$ este nucleul aplicației liniare $\nabla f(\bar{x})$, adică

$$T(M, \bar{x}) = \text{Ker } \nabla f(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^p \mid \nabla f(\bar{x})(v) = 0\}.$$

Demonstrație. Să observăm pentru început că surjectivitatea lui $\nabla f(\bar{x})$ atrage faptul că $p \geq q$. Apoi, observăm că, fără a restrânge generalitatea, putem lua $\bar{x} = 0$ și $f(\bar{x}) = 0$, considerând altfel funcția $x \mapsto f(x + \bar{x}) - f(\bar{x})$. Notăm $A := \nabla f(0)$.

Fie acum $u \in T(M, 0)$. Dacă $u = 0$ atunci este clar că $u \in \text{Ker } \nabla f(0)$. Presupunem că $u \neq 0$. Conform definiției vectorului tangent, există $(t_n) \subset (0, \infty)$, $t_n \rightarrow 0$ și $(u_n) \rightarrow u$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $t_n u_n \in M$. Așadar, $f(t_n u_n) = f(0) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, deoarece f este de clasă $\mathcal{C}^1$, obținem că

$$\lim \frac{f(0 + t_n u_n) - f(0) - A(t_n u_n)}{t_n \|u_n\|} = 0,$$

de unde deducem că $Au = 0$, adică $u \in \text{Ker } A$.

Incluziunea inversă se bazează pe scrierea ecuației $f(x) = 0$ într-o formă de tipul $f(y, z) = 0$ și pe aplicarea Teoremei Funcțiilor Implicite.

Definim $K := \text{Ker } A$ și

$$L = K^\perp = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \langle x, u \rangle = 0, \forall u \in K\},$$

complementul său ortogonal. Folosind Teorema rangului pentru aplicații liniare, vom avea că

$$\dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A = p.$$

De asemenea, cum A este surjectiv, vom avea că $\dim \text{Im } A = q$. Așadar, vom putea identifica, printr-o eventuală schimbare de baze, K și L cu $\mathbb{R}^{p-q}$ și $\mathbb{R}^q$, respectiv (de fapt, $K = \mathbb{R}^{p-q} \times \{0\}^q$, $L = \{0\}^{p-q} \times \mathbb{R}^q$). Scriem un punct oarecare $x \in \mathbb{R}^p$ sub forma $x = (y, z) \in K \times L$. Vom avea, pentru orice $(u, v) \in K \times L$, că

$$A(u, v) = \nabla_y f(0)(u) + \nabla_z f(0)(v),$$

de unde, pentru orice $(d, 0) \in \mathbb{R}^{p-q} \times \{0\}^q$ (identificat cu $K = \text{Ker } A$),

$$0 = A(d, 0) = \nabla_y f(0)(d),$$

deci $\nabla_y f(0) = 0$. Folosind această relație și ținând cont de faptul că $\text{rang } A = q$, urmează că $\text{rang } \nabla_z f(0) = q$, adică, privită ca matrice (jacobianul), $\nabla_z f(0)$ este nesingulară și deci ca aplicație este bijectivă.

Folosind Teorema funcțiilor implicite, vor exista două vecinătăți $U_1 \subset \mathbb{R}^{p-q}$ și $V_1 \subset \mathbb{R}^q$ ale originilor și o funcție $\alpha : U_1 \rightarrow V_1$ de clasă $\mathcal{C}^1$ astfel încât $\alpha(0) = 0$ și cu proprietatea că orice punct $x = (y, z) \in U_1 \times V_1$ satisface $f(x) = 0$ dacă și numai dacă $z = \alpha(y)$. Ecuația $f(x) = 0$ se va putea atunci scrie sub forma $f(y, \alpha(y)) = 0$. Diferențiind această relație și ținând cont de regula lanțului, vom obține

$$0 = \nabla_y f(y, \alpha(y)) + \nabla_z f(y, \alpha(y)) \nabla \alpha(y).$$

Ținând cont că $\alpha(0) = 0$, $\nabla_y f(0, 0) = 0$, iar $\nabla_z f(0, 0)$ este nesingulară, obținem $\nabla \alpha(0) = 0$.

Fie acum $v = (v_1, 0) \in \mathbb{R}^{p-q} \times \{0\}^q$ (ca mai sus, identificat $\text{Ker } A$). Atunci, cum α este de clasă $\mathcal{C}^1$, vom avea, ca mai sus, pentru un șir arbitrar $(t_n) \subset (0, \infty)$, $t_n \rightarrow 0$, că

$$\frac{\alpha(t_n v_1)}{t_n} \rightarrow \nabla \alpha(0)(v_1) = 0.$$

Va exista așadar

$$u_n := \left(v_1, \frac{\alpha(t_n v_1)}{t_n} \right) \rightarrow (v_1, 0) = v$$

astfel încât

$$f(t_n u_n) = f(t_n v_1, \alpha(t_n v_1)) = 0,$$

sau, echivalent, $t_n u_n \in M$, pentru orice n suficient de mare. Rezultă $v \in T(M, 0)$, deci implicația inversă este demonstrată și are loc concluzia teoremei. $\square$

Exemplul 2.5.2 Fie $a, b > 0$ și mulțimea închisă (elipsa)

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Ne interesează expresia conului tangent la M într-un punct oarecare $(\bar{x}, \bar{y}) \in M$. Pentru aceasta, considerăm funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Astfel,

$$M = f^{-1}(1) = f^{-1}(f(\bar{x}, \bar{y})).$$

Observăm de asemenea că diferențiala $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ este

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y})(u, v) = \frac{2\bar{x}}{a^2}u + \frac{2\bar{y}}{b^2}v,$$

aplicație care este surjectivă în virtutea faptului că

$$(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Astfel, conform Teoremei lui Lyusternik, conul tangent la M în $(\bar{x}, \bar{y})$ este dreapta

$$\left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\bar{x}u}{a^2} + \frac{\bar{y}v}{b^2} = 0 \right\}.$$

2.6 Lema lui Farkas

Rezultat algebric pe care îl prezentăm în finalul acestui capitol va fi foarte important în continuare. El a fost obținut de către Julius Farkas în 1902.

Teorema 2.6.1 (Lema lui Farkas) Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(\varphi_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ și $\varphi \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Atunci

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1(x) \leq 0, \dots, \varphi_n(x) \leq 0] \Rightarrow \varphi(x) \leq 0 \quad (2.3)$$

dacă și numai dacă există $(\alpha_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [0, \infty)$ astfel încât $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$.

Demonstrație Implicația de la dreapta la stânga este evidentă. Demonstrăm cealaltă implicație prin inducție după $n \geq 1$. Definim propoziția $P(n)$ ce afirmă că pentru orice $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ satisfăcând (2.3) există $(\alpha_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [0, \infty)$ astfel încât $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$.

Arătăm că $P(1)$ este adevărată. Într-adevăr, fie $\varphi, \varphi_1 \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ astfel încât

$$\varphi_1(x) \leq 0 \Rightarrow \varphi(x) \leq 0.$$

Dacă $\varphi = 0$ atunci, evident, $\varphi = 0\varphi_1$. Fie $\varphi \neq 0$. Atunci, folosind ipoteza,

$$\varphi_1(x) = 0 \Leftrightarrow [\varphi_1(x) \leq 0, \varphi_1(-x) \leq 0] \Rightarrow [\varphi(x) \leq 0, \varphi(-x) \leq 0] \Leftrightarrow \varphi(x) = 0,$$

deci $\text{Ker } \varphi_1 \subset \text{Ker } \varphi$. Cum $\varphi \neq 0$, avem $\varphi_1 \neq 0$, deci există $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ cu $\varphi_1(\bar{x}) = -1$. Tot din ipoteză, $\varphi(\bar{x}) \leq 0$. Fie $x \in \mathbb{R}^p$ arbitrar. Atunci, este simplu de verificat că

$$x + \varphi_1(x)\bar{x} \in \text{Ker } \varphi_1,$$

deci

$$x + \varphi_1(x)\bar{x} \in \text{Ker } \varphi,$$

adică

$$\varphi(x + \varphi_1(x)\bar{x}) = 0,$$

ceea ce conduce la

$$\varphi(x) = -\varphi(\bar{x})\varphi_1(x).$$

Cum x este arbitrar, relația din enunț este arătată pentru $\alpha_1 := -\varphi(\bar{x}) \geq 0$.

Presupunem acum că $P(n)$ este adevărată pentru un număr fixat $n \geq 1$ și arătăm că $P(n+1)$ este adevărată.

Fie $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ astfel încât

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1(x) \leq 0, \dots, \varphi_n(x) \leq 0, \varphi_{n+1}(x) \leq 0] \Rightarrow \varphi(x) \leq 0. \quad (2.4)$$

Dacă

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1(x) \leq 0, \dots, \varphi_n(x) \leq 0] \Rightarrow \varphi(x) \leq 0, \quad (2.5)$$

atunci, din $P(n)$, există $(\alpha_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [0, \infty)$ astfel încât $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$; luăm $\alpha_{n+1} := 0$ și concluzia are loc.

Presupunem că nu are loc relația (2.5). Atunci există $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ astfel încât $\varphi(\bar{x}) > 0$ și $\varphi_i(\bar{x}) \leq 0$ pentru orice $i \in \overline{1, n}$. Cum are loc (2.4), $\varphi_{n+1}(\bar{x}) > 0$; putem presupune (după o eventuală multiplicare cu un scalar strict pozitiv) că $\varphi_{n+1}(\bar{x}) = 1$. Dar

$$\varphi_{n+1}(x - \varphi_{n+1}(x)\bar{x}) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^p,$$

iar din (2.4) deducem

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1(x - \varphi_{n+1}(x)\bar{x}) \leq 0, \dots, \varphi_n(x - \varphi_{n+1}(x)\bar{x}) \leq 0] \\ \Rightarrow \varphi(x - \varphi_{n+1}(x)\bar{x}) \leq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Luăm acum $\varphi'_i := \varphi_i - \varphi_i(\bar{x})\varphi_{n+1}$ pentru $i \in \overline{1, n}$ și $\varphi' := \varphi - \varphi(\bar{x})\varphi_{n+1}$, iar relația (2.6) devine

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi'_1(x) \leq 0, \dots, \varphi'_n(x) \leq 0] \Rightarrow \varphi'(x) \leq 0.$$

Cum $P(n)$ este adevărată, există $(\alpha_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [0, \infty)$ astfel încât $\varphi' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi'_i$. Deducem

$$\varphi - \varphi(\bar{x})\varphi_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i [\varphi_i - \varphi_i(\bar{x})\varphi_{n+1}],$$

deci $\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i$, unde $\alpha_{n+1} = \varphi(\bar{x}) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(\bar{x}) \geq 0$ din alegerea lui $\bar{x}$ și din faptul că $\alpha_i \geq 0$ pentru $i \in \overline{1, n}$. Demonstrația este completă. $\square$

Având în vedere identificarea dintre $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ și $\mathbb{R}^p$ se obține următorul corolar.

Corolarul 2.6.2 Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(a_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset \mathbb{R}^p$ și $a \in \mathbb{R}^p$. Atunci

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\langle a_1, x \rangle \leq 0, \dots, \langle a_n, x \rangle \leq 0] \Rightarrow \langle a, x \rangle \leq 0$$

dacă și numai dacă există $(\alpha_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [0, \infty)$ astfel încât $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$.

Exemplul 2.6.3 Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ dată prin

$$A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, x_1 + x_2 \geq 0, x_3 \leq 0\}.$$

Dorim să scriem polara mulțimii A .

Prin definiție, $u \in A^-$ dacă și numai dacă pentru orice $x \in A$, $\langle u, x \rangle \leq 0$.

Considerăm vectorii $a = (3, -1, 2)$, $b = (-3, 1, -2)$, $c = (-1, -1, 0)$, $d = (0, 0, 1)$ și atunci

$$x \in A \iff x \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \langle a, x \rangle \leq 0 \\ \langle b, x \rangle \leq 0 \\ \langle c, x \rangle \leq 0 \\ \langle d, x \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Prin urmare

$$u \in A^- \iff \left(x \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \langle a, x \rangle \leq 0 \\ \langle b, x \rangle \leq 0 \\ \langle c, x \rangle \leq 0 \\ \langle d, x \rangle \leq 0 \end{cases} \implies \langle u, x \rangle \leq 0 \right).$$

Conform Lemei lui Farkas, ultima implicație este echivalentă cu faptul că există $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ astfel încât

$$u = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d.$$

Deci

$$A^- = \{(3\alpha - 3\beta - \gamma, -\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha - 2\beta + \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0\}.$$

Exemplul 2.6.4 Să calculăm conurile tangente și conurile normale în diferite puncte la mulțimea $M \subset \mathbb{R}^p$,

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_i \geq 0, \forall i \in \overline{1, p}, \sum_{i=1}^p x_i = 1 \right\},$$

numită simplexul unitate. Această mulțime este, evident, convexă și închisă. Conform rezultatului precedent, pentru fiecare $\bar{x} \in M$,

$$\begin{aligned} T(M, \bar{x}) &= \text{cl } \mathbb{R}_+(M - \bar{x}) \\ &= \text{cl } \{u \in \mathbb{R}^p \mid \exists \alpha \geq 0, x \in M, u = \alpha(x - \bar{x})\}. \end{aligned}$$

Fie u din mulțimea din membrul drept. Este clar că, pe de o parte, $\sum_{i=1}^p u_i = 0$ iar, pe de altă parte, dacă $\bar{x}_i = 0$, atunci $u_i \geq 0$. Notăm cu $I(\bar{x}) := \{i \in \overline{1, p} \mid \bar{x}_i = 0\}$. Deducem că

$$T(M, \bar{x}) \subset \left\{ u \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^p u_i = 0 \text{ și } u_i \geq 0, \forall i \in I(\bar{x}) \right\}.$$

Să demonstrăm incluziunea inversă. Este simplu de verificat că mulțimea din dreapta este închisă. Fie u din această mulțime. Dacă $u = 0$, atunci, evident, $u \in T(M, \bar{x})$. Dacă $u \neq 0$ atunci trebuie să arătăm că există $\alpha > 0$ cu $\bar{x} + \alpha u \in M$. Pe de o parte, faptul că $\sum_{i=1}^p (\bar{x}_i + \alpha u_i) = 1$ este clar pentru orice α . Dacă nu există indici i cu $u_i < 0$, atunci și faptul că $\bar{x}_i + \alpha u_i \geq 0$, pentru orice $i \in \overline{1, p}$ este evident și deci $u \in T(M, \bar{x})$. Presupunem acum că mulțimea J a indicilor pentru care $u_j < 0$ este nevidă. Atunci $J \subset \overline{1, p} \setminus I(\bar{x})$, deci $\bar{x}_j > 0$ pentru orice $j \in J$. Alegem atunci α strict pozitiv cu

$$\alpha < \min\{-u_j^{-1} \bar{x}_j \mid j \in J\}$$

și avem din nou că $\bar{x}_i + \alpha u_i \geq 0$, pentru orice $i \in \overline{1, p}$. Prin urmare și în acest caz $u \in T(M, \bar{x})$, deci are loc egalitatea.

În continuare, arătăm că

$$\begin{aligned} N(M, \bar{x}) &= \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^p \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &\quad + \{v \in \mathbb{R}^p \mid v_i \leq 0, \forall i \in I(\bar{x}), v_i = 0, i \notin I(\bar{x})\}. \end{aligned}$$

Pentru aceasta considerăm elementele

$$a_0 = (1, 1, \dots, 1), a_1 = -(1, 0, \dots, 0), \dots, a_n = -(0, 0, \dots, 1)$$

și observăm următoarea scriere echivalentă a lui $T(M, \bar{x})$:

$$T(M, \bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle a_0, u \rangle \leq 0, \langle -a_0, u \rangle \leq 0, \langle a_i, u \rangle \leq 0, \forall i \in I(\bar{x})\}.$$

Polara acestei mulțimi este

$$N(M, \bar{x}) = \left\{ \alpha a_0 - \beta a_0 + \sum_{i \in I(\bar{x})} \alpha_i a_i \mid \alpha, \beta, \alpha_i \geq 0, \forall i \in I(\bar{x}) \right\}.$$

Într-adevăr, faptul că mulțimea din dreapta este inclusă în conul normal este evident, iar incluziunea inversă rezultă din Lema lui Farkas (Teorema 2.6.1) întrucât:

$$\begin{aligned} v \in N(M, \bar{x}) &\iff \langle u, v \rangle \leq 0, \forall u \in T(M, \bar{x}) \\ &\iff \forall u \in \mathbb{R}^p : [\langle a_0, u \rangle \leq 0, \langle -a_0, u \rangle \leq 0, \langle a_i, u \rangle \leq 0, \forall i \in I(\bar{x})] \Rightarrow \langle u, v \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Astfel, se ajunge la forma anunțată a conului normal.

2.7 Exerciții

Exercițiul 2.1 Să se arate că o mulțime nevidă $D \subset \mathbb{R}^p$ este convexă dacă și numai dacă D conține orice combinație convexă a elementelor sale.

Exercițiul 2.2 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Să se arate că mulțimea $\text{conv } D$ este cea mai mică mulțime convexă (în sensul incluziunii) care conține mulțimea D .

Problema 2.3 Să se arate că înfășurătoarea convexă a unei mulțimi închise nu este neaparat închisă. Să se arate că înfășurătoarea convexă a unei mulțimi compacte este compactă.

Problema 2.4 Să se arate că înfășurătoarea convexă a unei mulțimi deschise este deschisă.

Exercițiul 2.5 Fie $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mulțimi nevide convexe. Să se arate că

$$\text{conv}(A \cup B) = \{\alpha a + (1 - \alpha)b \mid a \in A, b \in B, \alpha \in [0, 1]\}.$$

Exercițiul 2.6 Fie $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mulțimi nevide. Să se arate că $\text{conv}(A + B) = \text{conv } A + \text{conv } B$.

Problema 2.7 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ nevidă. Definim

$$\tilde{A} := [0, 1]A = \{\alpha a \mid \alpha \in [0, 1], a \in A\}.$$

Să se arate că:

- (i) dacă A este compactă, atunci $\tilde{A}$ este compactă;
- (ii) dacă A este convexă, atunci $\tilde{A}$ este convexă;
- (iii) reciproca afirmației de la (i) nu este adevărată;
- (iv) reciproca afirmației de la (ii) nu este adevărată.

Problema 2.8 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Definim înfășurătoarea echilibrată a mulțimii A prin

$$\text{echi } A := [-1, 1]A = \{\alpha a \mid \alpha \in [-1, 1], a \in A\}.$$

- (i) Să se scrie înfășurătoarea echilibrată a mulțimii $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$.
- (ii) Să se arate că, în general, dacă A este compactă, atunci $\text{echi } A$ este compactă, dar reciproca nu este adevărată.
- (iii) Este înfășurătoarea echilibrată a unei mulțimi convexe mulțime convexă?
- (iv) Să se stabilească valoarea de adevăr a relației $\text{conv}(\text{echi } A) = \text{echi}(\text{conv}(\text{echi } A))$.

Exercițiul 2.9 Să se arate că simplexul unitate este mulțime compactă și convexă.

Exercițiul 2.10 Fie $A \subset \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ o mulțime compactă. Să se arate că înfășurătoarea conică a lui A este mulțime închisă. Se menține concluzia dacă $0 \in A$?

Problema 2.11 Fie $A, B, C \subset \mathbb{R}^p$ mulțimi nevide astfel încât C este mărginită. Să se arate că dacă $A + C \subset B + C$, atunci $A \subset \overline{\text{conv } B}$.

Exercițiul 2.12 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$. Considerăm un scalar $\lambda > 1$. Să se ordoneze crescător numerele $(1 - \lambda)x + \lambda y, x, y$. Să se arate că

$$(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq f((1 - \lambda)x + \lambda y).$$

Ce se poate spune în cazul $\lambda < 0$? Interpretați geometric rezultatele.

Problema 2.13 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă.

(i) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se studieze poziția graficului lui f în raport cu dreapta ce trece prin $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$.

(ii) Să se deducă faptul că dacă f este mărginită, atunci este constantă. Să se deducă faptul că dacă f este în plus crescătoare, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Soluție (i) Este clar (din interpretarea geometrică a convexității) că pentru $x \in [a, b]$, graficul lui f se află sub dreapta ce unește punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ și care are ecuația

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Pentru $x > b$, din convexitate și din $a < b < x$ deducem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

adică

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

adică graficul lui f este deasupra dreptei. Aceeași concluzie se obține în mod analog pentru $x < a$.

(ii) Presupunem că f nu ar fi constantă. Atunci ar exista $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ și $f(a) \neq f(b)$. Putem considera, fără a restrânge generalitatea, că $f(b) > f(a)$. Cum pentru $x > b$,

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

obținem că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$,adică f nu este mărginită. Ultima concluzie rezultă din considerațiile anterioare. $\square$

Problema 2.14 Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ convexă. Să se arate că f este mărginită inferior. Este în general f mărginită?

Soluție Fie $x_0 < x_1 < x_2$ trei puncte din intervalul (a, b) . Pentru $x < x_1$, avem

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ceea ce atrage

$$(x_1 - x) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + f(x_1) \leq f(x),$$

deci f este mărginită inferior pe $(a, x_1]$. Analog, pentru $x \geq x_1$,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

adică

$$(x - x_1) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f(x_0) \leq f(x).$$

Obținem că f este mărginită inferior pe $[x_1, b)$, deci, în final este mărginită inferior pe (a, b) .

În general, mărginirea superioară nu este asigurată. Ca exemplu, considerăm funcția $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |\operatorname{tg} x|$. $\square$

Problema 2.15 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă.

(i) Să se arate că dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, atunci $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Să se arate că f admite asimptotă la $+\infty$, atunci graficul său este deasupra asimptotei.

Soluție (i) Presupunem, prin reducere la absurd, că există un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) < 0$. Din ipoteză, există $x_1 > x_0$ cu $f(x_1) > f(x_0)$. Pentru $x > x_1$ are loc (pe baza convexității)

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

deci

$$f(x_1) + (x - x_1) \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f(x).$$

Obținem contradicția $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(ii) Fie $y = ax + b$ ecuația asimptotei. Funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - ax - b$ este convexă (sumă dintre o funcție convexă și o funcție afină) și, în plus, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Aplicăm punctul precedent și rezultă concluzia. $\square$

Exercițiul 2.16 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) f este convexă;

(ii) epigraful lui f , $\operatorname{epi} f := \{(x, t) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ este o submulțime convexă a lui $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$.

Exercițiul 2.17 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ mulțimea

$$N_a f = \{x \in D \mid f(x) \leq a\}$$

este convexă. Are loc reciproca? Să se arate că proprietatea de mai sus este echivalentă cu

$$\forall x, y \in D, \forall \lambda \in (0, 1), f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Exercițiul 2.18 Fie $a, b > 0$. Să se arate că mulțimea

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

este convexă.

Exercițiul 2.19 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcții convexe. Să se arate că funcția $\max\{f, g\}$ este convexă. Este $\min\{f, g\}$ convexă, în general?

Problema 2.20 (Inegalitatea lui Jensen) Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția f este convexă atunci

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_m f(x_m)$$

pentru orice $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, \dots, x_m \in D$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$. Inegalitatea este strictă dacă funcția f este strict convexă, cel puțin două din punctele (x_k) sunt distincte și scalarii (λ_k) corespunzători sunt strict pozitivi.

Problema 2.21 (i) Folosind inegalitatea lui Jensen funcția strict convexă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ deduceți: pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ cu $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ are loc

$$e^{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{x_k}$$

cu egalitate doar în cazul $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

(ii) Arătați că pentru orice $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ cu $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ are loc

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \dots a_n^{\lambda_n} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k.$$

(iii) Deduceți inegalitatea mediilor.

(iv) Deduceți că pentru orice $u, v > 0$ și $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ are loc

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}.$$

Când are loc egalitatea?

(v) Deduceți inegalitatea lui Hölder: pentru orice $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ și $y_1, y_2, \dots, y_n > 0$ are loc

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Când are loc egalitatea?

Exercițiul 2.22 Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$. Să se arate că f este convexă și că pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(x_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset (0, +\infty)$ cu $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ are loc

$$\ln \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i.$$

Exercițiul 2.23 Să se arate că $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln(\ln x)$ este convexă. Deduceți că pentru orice $a, b > 1$ are loc relația

$$\sqrt{\ln a \ln b} \leq \ln \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

Soluție Derivata a doua a lui f pe intervalul de definiție este

$$f''(x) = \frac{1}{x^2 \ln x} + \frac{1}{x^2 \ln^2 x}.$$

Cum $x > 1$ această funcție este pozitivă, deci f este convexă.

Pe baza acestei proprietăți, deducem

$$-\ln \left(\ln \frac{a+b}{2} \right) \leq -\frac{1}{2} (\ln(\ln a) + \ln(\ln b)) = -\ln(\sqrt{\ln a \ln b}),$$

de unde se obține inegalitatea căutată. □

Exercițiul 2.24 Să se arate că dacă α, β, γ sunt unghiurile unui triunghi, atunci

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 2.25 (Inegalitatea Hermite-Hadamard) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și continuă pe $[a, b]$. Atunci are loc inegalitatea

$$f \left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Problema 2.26 Să se arate că următoarele funcții sunt convexe și să se scrie inegalitatea Hermite-Hadamard în fiecare caz în parte pe diferite intervale compacte:

- (i) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{-1}$;
- (ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;
- (iii) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\sin x$.

Problema 2.27 Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 astfel încât există $m, M \in \mathbb{R}$ cu $m \leq f''(x) \leq M$ pentru orice $x \in [a, b]$. Să se arate că

$$m \frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f \left(\frac{a+b}{2} \right) \leq M \frac{(b-a)^2}{24}$$

și

$$m \frac{(b-a)^2}{12} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Soluție Este ușor de observat că funcțiile

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x) - \frac{mx^2}{2} \\ x &\mapsto \frac{Mx^2}{2} - f(x) \end{aligned}$$

sunt convexe și continue. Ambele inegalități cerute se obțin aplicând inegalitatea Hermite-Hadamard acestor două funcții. □

Exercițiul 2.28 Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție L -Lipschitz ($L > 0$). Să se arate că

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] L(b-a).$$

Soluție Putem scrie succesiv

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{L}{b-a} \int_a^b |x-t| dt \\ &= \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] L(b-a), \end{aligned}$$

și inegalitatea este demonstrată. □

Problema 2.29 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât $f(a) = f(b) = 0$. Fie $M := \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ și $g, h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - M \frac{(x-a)(b-x)}{2}; \quad h(x) = -f(x) - M \frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Să se arate că g, h sunt convexe și să se deducă inegalitatea

$$|f(x)| \leq M \frac{(x-a)(b-x)}{2}, \quad \forall x \in [a, b].$$

Problema 2.30 (i) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $M > 0$ și $(f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un șir de funcții M -Lipschitz pe $[a, b]$. Să se arate că dacă (f_n) este convergent punctual pe $[a, b]$, atunci (f_n) este uniform convergent pe $[a, b]$.

(ii) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, și $(f_n) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ un șir de funcții convexe convergent punctual pe (a, b) . Să se arate că șirul (f_n) este uniform convergent pe orice subinterval închis al lui (a, b) .

Soluție (i) Este clar că dacă f este limita punctuală a lui (f_n) , atunci f este ea însăși M -Lipschitz. Fie $\varepsilon > 0$. Fixăm o divizare a intervalului (a, b) de forma

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p = b$$

de normă mai mică decât $\frac{\varepsilon}{M}$. Din convergența punctuală există un rang n_0 suficient de mare încât pentru orice $i \in \overline{0, p}$,

$$|f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon.$$

Fie $x \in [a, b]$. Există $i \in \overline{0, p-1}$ cu $x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Avem

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(\alpha_i)| + |f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| + |f(\alpha_i) - f(x)| \\ &< M|x - \alpha_i| + \varepsilon + M|x - \alpha_i| \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Deci (f_n) este uniform convergent către f .

(ii) Vom reduce problema la cazul precedent. Fie $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ și $\alpha' \in (a, \alpha), \beta' \in (\beta, b)$. Cum f_n este convexă, pentru orice $x, y \in [\alpha, \beta]$ cu $x \neq y$,

$$\frac{f_n(\alpha) - f_n(\alpha')}{\alpha - \alpha'} \leq \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \leq \frac{f_n(\beta) - f_n(\beta')}{\beta - \beta'}.$$

Membrii extremi ai acestei inegalități sunt mărginiți (din convergența punctuală), deci există $M > 0$ cu

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \right| \leq M, \quad \forall x, y \in [\alpha, \beta], \quad x \neq y, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Așadar, funcțiile (f_n) sunt echi-Lipschitz pe $[\alpha, \beta]$, deci se aplică punctul (i). $\square$

Exercițiul 2.31 Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Să se arate că dacă f este convexă iar g este afină atunci $f \circ g$ este convexă.

Exercițiul 2.32 Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ convexă. Să se arate că $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$\varphi(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

este convexă.

Problema 2.33 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Să se arate că f este simultan convexă și concavă dacă și numai dacă f este afină.

Exercițiul 2.34 Să se arate că $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ este convexă. Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Deduceți inegalitățile:

(i) pentru orice numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + n^2} \leq \sqrt{a_1^2 + 1} + \sqrt{a_2^2 + 1} + \dots + \sqrt{a_n^2 + 1};$$

(ii)

$$\frac{n}{2} \sqrt{n^2 + 2n + 5} < \sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \dots + \sqrt{n^2 + 1}.$$

Exercițiul 2.35 Fie $g : [-2 + \sqrt{2}, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 e^x$. Să se arate că g este strict convexă și apoi să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(x_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [-2 + \sqrt{2}, +\infty)$ cu $\sum_1^n x_i = 2$ are loc

$$\frac{4 \sqrt[n]{e^2}}{n} \leq \sum_1^n x_i^2 e^{x_i}.$$

Exercițiul 2.36 (i) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \ln(1 + e^x)$ este convexă.

(ii) Să se arate că pentru orice $x_1, \dots, x_n > 0$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) are loc inegalitatea

$$(1 + x_1) \dots (1 + x_n) \geq (1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n})^n.$$

Problema 2.37 (i) Să se arate că $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\mu$ unde $\mu > 1$ este convexă.

(ii) Arătați că pentru orice $\mu > 1$, numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$ și pentru orice $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) are loc inegalitatea

$$(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n)^\mu \leq \lambda_1 a_1^\mu + \dots + \lambda_n a_n^\mu.$$

(iii) Arătați că pentru orice $p, q > 0$, $p < q$, pentru orice numere reale strict pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$ și pentru orice $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ cu $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) are loc inegalitatea

$$(\lambda_1 a_1^p + \dots + \lambda_n a_n^p)^{1/p} \leq (\lambda_1 a_1^q + \dots + \lambda_n a_n^q)^{1/q}.$$

Exercițiul 2.38 Să se arate că funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$$

este convexă. Să se deducă faptul că pentru orice $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$ are loc inegalitatea:

$$\frac{10^{10}}{3^9} \leq \left(a + \frac{1}{a}\right)^{10} + \left(b + \frac{1}{b}\right)^{10} + \left(c + \frac{1}{c}\right)^{10}.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 2.39 (i) Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Să se arate că dacă f este o funcție convexă crescătoare și g este convexă atunci $f \circ g$ este convexă.

(ii) Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. Să se arate că funcția $\ln f$ este convexă dacă și numai dacă pentru orice $\alpha > 0$, funcția f^α este convexă.

Exercițiul 2.40 Să se arate că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ este strict convexă. Deduceți inegalitatea:

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}} \leq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0.$$

Să se scrie inegalitatea Hermite-Hadamard pentru f pe un interval de forma $[1, a]$ cu $a > 1$. Deduceți inegalitatea

$$2a \ln a < a^2 - 1, \quad \forall a > 1.$$

Problema 2.41 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă. Să se arate că f este continuă în orice punct interior mulțimii D .

Soluție Fie $\bar{x} \in \text{int } D$. Făcând eventual o translație, putem considera cazul $\bar{x} = 0$. Arătăm mai întâi că f este mărginită pe o vecinătate a punctului 0. Dacă notăm cu $(e_i)_{i \in \overline{1, p}}$ baza canonică a spațiului $\mathbb{R}^p$, atunci există $a > 0$ astfel încât ae_i și $-ae_i$ sunt în D pentru orice $i \in \overline{1, p}$. În aceste condiții, mulțimea

$$V := \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid x = \sum_{i=1}^p x_i e_i, \quad |x_i| < \frac{a}{p}, \quad \forall i \in \overline{1, p} \right\}$$

este o vecinătate a lui 0 inclusă în D . Pentru $x \in V$, există $(x_i)_{i \in \overline{1,p}}$ cu $|x_i| < \frac{a}{p}$, $i \in \overline{1,p}$ și $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$. Presupunem mai întâi că $x_i \neq 0$ pentru orice $i \in \overline{1,p}$. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^p x_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^p \frac{|x_i|}{a} a \frac{x_i}{|x_i|} e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^p \frac{|x_i|}{a}\right) 0\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^p \frac{|x_i|}{a} f\left(a \frac{x_i}{|x_i|} e_i\right) + \left(1 - \sum_{i=1}^p \frac{|x_i|}{a}\right) f(0) \\ &\leq \max\{f(ae_i), f(-ae_i) \mid i \in \overline{1,p}\} + |f(0)|. \end{aligned}$$

Acum se observă că dacă avem indici i pentru care $x_i = 0$, atunci putem să excludem din calculele de mai sus respectivii indici, iar estimarea se păstrează.

Cum membrul drept este o constantă (pe care o notăm cu M), afirmația făcută anterior este demonstrată. Fie $\varepsilon \in (0, 1)$ și U o vecinătate simetrică a lui 0 cu proprietatea că $\varepsilon^{-1}U \subset V$. Atunci, pentru orice $x \in U$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + (1 - \varepsilon)0) \leq \varepsilon f(\varepsilon^{-1}x) + (1 - \varepsilon)f(0) \\ &\leq \varepsilon M + (1 - \varepsilon)f(0), \end{aligned}$$

adică

$$f(x) - f(0) \leq \varepsilon M - \varepsilon f(0).$$

Din faptul că U este simetrică, deducem că pentru orice $x \in U$

$$f(-x) \leq \varepsilon M + (1 - \varepsilon)f(0).$$

Mai mult,

$$\begin{aligned} f(0) &= f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}(\varepsilon M + (1 - \varepsilon)f(0)), \end{aligned}$$

deci

$$f(0) - f(x) \leq \varepsilon M - \varepsilon f(0),$$

relație care, în combinație cu cea de mai sus, conduce la

$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon M - \varepsilon f(0).$$

Această inegalitate probează continuitatea lui f în 0. □

Problema 2.42 Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă, atunci f admite derivate laterale în fiecare punct interior intervalului I și pentru orice $x, y \in \text{int } I$, cu $x < y$ au loc inegalitățile:

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y).$$

Exercițiul 2.43 Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că g este convexă dacă și numai dacă pentru orice funcție $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilă Riemann are loc inegalitatea

$$g\left(\int_0^1 f(u)du\right) \leq \int_0^1 g(f(u))du.$$

Soluție Dacă g este convexă atunci pentru orice diviziune a intervalului $[0, 1]$ și pentru orice sistem de puncte intermediare (cu notațiile din Definiția 4.6.73) are loc

$$g\left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right) \leq \sum_{i=1}^n g(f(\xi_i))(x_i - x_{i-1}).$$

Trecând la limită cu norma diviziunii tinzând la 0 obținem inegalitatea dorită.

Pentru reciprocă, fixăm $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1)$ și considerăm funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(u) = \begin{cases} x, & \text{dacă } u \in [0, \alpha] \\ y, & \text{dacă } u \in (\alpha, 1]. \end{cases}$$

Atunci f este integrabilă Riemann pe $[0, 1]$ (a se vedea Teoremele 4.6.81, 4.6.82). Aplicând inegalitatea din ipoteză găsim

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y),$$

ceea ce probează convexitatea lui g . □

Exercițiul 2.44 Să se arate că următoarele funcții sunt convexe:

- (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1$;
- (ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_1$;
- (iii) $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1 + x_2}.$$

Exercițiul 2.45 Studiați stricta convexitate a funcțiilor $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ date prin:

- (i) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$;
- (ii) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$.

Problema 2.46 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă.

- (i) Să se arate că dacă A este convexă atunci d_A este convexă.
- (ii) Să se arate că dacă A este închisă și d_A este convexă atunci A este convexă.
- (iii) Să se dea un exemplu de mulțime neconvexă pentru care d_A este convexă.

Exercițiul 2.47 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Să se arate că are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$

$$d(x, A) = d(x, \text{cl } A).$$

Exercițiul 2.48 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Să se arate că $\varphi_A : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_A(x) = \|x\|^2 - d_A^2(x)$ este convexă.

Exercițiul 2.49 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ nevidă. Definim $\text{con } A := [0, \infty)A$. Să se arate că

- (i) $\text{con } A$ este cel mai mic con ce conține A ;
- (ii) $\text{con}(\text{conv } A) = \text{conv}(\text{con } A)$;
- (iii) A^- este un con convex închis și $A \subset (A^-)^-$;
- (iv) Egalitatea $A = (A^-)^-$ are loc dacă și numai dacă A este con convex închis;
- (v) dacă $A \subset B$, atunci $B^- \subset A^-$;
- (vi) $A^- = (\overline{\text{con } A})^-$.

Exercițiul 2.50 Fie mulțimea $M := [1, 2] \times [1, 2]$. Să se deseneze conurile tangente și normale la această mulțime punctele sale. Aceeași problemă pentru $M \setminus \text{int } M$.

Exercițiul 2.51 Să se scrie conul tangent la mulțimea

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x = y^2\}$$

într-un punct al său.

Exercițiul 2.52 Să se arate că dacă $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^p$ și $\bar{x} \in M$, atunci are loc relația $T(M, \bar{x}) = T(\overline{M}, \bar{x})$.

Exercițiul 2.53 Fie $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$A = \{(x, y) \mid x - 2y \leq 0, 2x - y \geq 0\}.$$

Să se determine polara lui A și să se reprezinte grafic ambele mulțimi.

Exercițiul 2.54 Să se determine polarele următoarelor mulțimi:

- (i) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 \geq 0\}$;
- (ii) $A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_2 + x_4 \leq 0\}$.

Exercițiul 2.55 Fie $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mulțimi închise. Să se arate că au loc relațiile:

- (i) dacă $\bar{x} \in A \cap B$ atunci $T(A \cup B, \bar{x}) = T(A, \bar{x}) \cup T(B, \bar{x})$;
- (ii) dacă $\bar{x} \in A \cap B$ atunci $T(A \cap B, \bar{x}) \subset T(A, \bar{x}) \cap T(B, \bar{x})$;
- (iii) dacă $\bar{x} \in \text{Fr } A$ atunci $T(\text{Fr } A, \bar{x}) = T(\text{cl } A, \bar{x}) \cap T(\overline{\mathbb{R}^p \setminus A}, \bar{x})$.

Să se dea un exemplu în care incluziunea de la (ii) să fie strictă.

Problema 2.56 Să se demonstreze următoarea variantă afină a Lemei lui Farkas. Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(a_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^p$ și $(\alpha_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Presupunem că sistemul de inegalități $\langle a_i, x \rangle \leq \alpha_i$, $i \in \overline{1, n}$ are soluție. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^p : \langle a_i, x \rangle \leq \alpha_i, i \in \overline{1, n} \Rightarrow \langle b, x \rangle \leq \beta$;
- (ii) $\exists (\gamma_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [0, \infty)$ astfel încât $b = \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i$, $\sum_{i=1}^n \gamma_i \alpha_i \leq \beta$.

Soluție Pentru orice $i \in \overline{1, n}$, inegalitatea $\langle a_i, x \rangle \leq \alpha_i$ este echivalentă cu

$$\langle (a_i, \alpha_i), (x, -1) \rangle \leq 0,$$

deci și cu

$$\langle (a_i, \alpha_i), (tx, -t) \rangle \leq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

adică poate fi scrisă

$$\begin{cases} \langle (a_i, \alpha_i), (tx, -t) \rangle \leq 0 \\ \langle (0, 1), (tx, -t) \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Așadar sistemul în $(y, s) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$,

$$\langle (a_i, \alpha_i), (y, s) \rangle \leq 0, \quad i \in \overline{1, n}, \quad \langle (0, 1), (y, s) \rangle \leq 0$$

implică $\langle (b, \beta), (y, s) \rangle \leq 0$. Conform Lemei lui Farkas, aceasta este echivalent cu faptul că există $(\gamma_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset [0, \infty)$ și $\gamma \geq 0$ astfel încât

$$(b, \beta) = \sum_{i=1}^n \gamma_i (a_i, \alpha_i) + \gamma (0, 1).$$

Se obține concluzia. □

Capitolul 3

Studiul unor probleme de optimizare

3.1 Cadrul general

Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Suntem interesați să studiem problema minimizării funcției f atunci când argumentul acesteia parcurge mulțimea M . Mulțimea M se va numi mulțimea punctelor fezabile ale problemei (P) sau mulțimea constrângerilor sau, încă, mulțimea restricțiilor. Conceptul central este definit mai jos.

Definiția 3.1.1 *Spunem că $\bar{x} \in M$ este punct de minim pentru funcția f pe mulțimea M dacă există o vecinătate V a punctului $\bar{x}$ astfel încât $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in M \cap V$. Dacă $V = \mathbb{R}^p$, spunem că $\bar{x}$ este punct de minim global pentru f pe M .*

Evident, definiția de mai sus are sens și dacă f este definită doar pe mulțimea M . Noțiunea de punct de minim este întâlnită și sub denumirea de punct de minim local, însă în această lucrare omitem cuvântul "local". Să spunem de la început că ne vom ocupa de minimizarea funcției f , dar rezultate referitoare la maximizarea sa pot fi obținute aplicând rezultatele de minimizare funcției $-f$ în baza relației $\max f = -\min(-f)$. Să remarcăm și că $\bar{x} \in M$ nu este punct minim pentru funcția f pe mulțimea M dacă și numai dacă există un șir $(x_n) \subset M$, $x_n \rightarrow \bar{x}$ astfel încât $f(x_n) < f(\bar{x})$ pentru orice n . Similar, $\bar{x} \in M$ nu este punct minim global pentru funcția f pe mulțimea M dacă și numai dacă există un șir $x \in M$ astfel încât $f(x) < f(\bar{x})$.

Formal, vom scrie problema de mai sus în forma următoare:

$$(P) \quad \min f(x), \quad x \in M,$$

iar prin soluție locală (sau, simplu, soluție) pentru problema (P) înțelegem un punct de minim pentru funcția f pe mulțimea M în sensul definiției de mai sus. Atunci când avem de-a face cu un punct de minim global pentru f pe M , spunem că acesta este soluție globală a problemei (P) .

Atunci când ne vom referi la problema (P) vom subînțelege mereu că M este o mulțime închisă.

Observația 3.1.2 *În general, cu excepția cazului $M = \mathbb{R}^p$, problema (P) este o problemă cu restricții (constrângeri) întrucât domeniul argumentului x este restrâns la mulțimea M (a se*

vedea exemplele ilustrative ale conceptelor-cheie de la începutul lucrării). În absența mulțimii M , adică atunci când ne referim la problema minimizării lui f pe $\mathbb{R}^p$, spunem că avem o problemă fără restricții. Totuși, să observăm că în Definiția 3.1.1, dacă $\bar{x} \in \text{int } M$, atunci $\bar{x}$ este soluție locală neinfluențată de restricția M (este suficient să micșorăm vecinătatea V astfel încât $V \subset M$). Deci în cazul problemelor cu restricții cazul interesant (care nu se reduce la cazul unei probleme fără restricții) este cazul în care $\bar{x} \in \text{Fr } M$. Dacă $\bar{x} \in \text{int } M$ mai spunem și că restricția este inactivă, iar dacă $\bar{x} \in M \setminus \text{int } M$ spunem că restricția este activă.

Observația 3.1.3 O restricție de tip $x \in M$ se numește restricție geometrică.

Un rol important îl vor juca mulțimile de nivel ale unei funcții. Având o funcție $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, dacă $\nu \in \mathbb{R}$,

$$N_\nu f := \{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \leq \nu\} = f^{-1}((-\infty, \nu]).$$

Să observăm că dacă $\nu > \inf_{x \in \mathbb{R}^p} f(x)$ atunci $N_\nu f \neq \emptyset$ iar dacă f este continuă atunci $N_\nu f$ este închisă.

3.2 Rezultate de existență a soluțiilor

Teorema 3.2.1 (Teorema lui Weierstrass) Dacă $M \subset \mathbb{R}^p$ este o mulțime compactă și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci problema minimizării lui f pe M și problema maximizării lui f pe M au soluții globale.

Demonstrație Demonstrăm concluzia doar pentru problema minimizării lui f pe M . Fie $(x_n) \subset M$ astfel încât $f(x_n) \rightarrow \inf\{f(x) \mid x \in M\}$. Din compactitatea lui M , șirul (x_n) are un subșir convergent la un element $\bar{x} \in M$. Din faptul că mulțimile de tip $M \cap N_\nu f$ sunt închise pentru orice $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu > \inf\{f(x) \mid x \in M\}$, deducem că $\bar{x}$ se află în toate aceste mulțimi (pentru că pentru fiecare ν în parte, termenii x_n sunt, de la un loc încolo, în $M \cap N_\nu f$). Atunci deducem că $f(\bar{x}) \leq \nu$ pentru orice $\nu > \inf\{f(x) \mid x \in M\}$. Prin urmare, $f(\bar{x}) \leq \inf\{f(x) \mid x \in M\}$. Pe de o parte, aceasta înseamnă că $\inf\{f(x) \mid x \in M\} \in \mathbb{R}$, deci f este mărginită inferior pe M , iar, pe de altă parte, că $\bar{x}$ este punctul căutat care realizează minimul global al lui f pe M . Demonstrația este încheiată. $\square$

Teorema 3.2.2 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă și închisă. Dacă există $\nu > \inf_{x \in M} f(x)$ astfel încât mulțimea de nivel a lui f relativ la M , adică $M \cap N_\nu f = \{x \in M \mid f(x) \leq \nu\}$, este mărginită, atunci f își atinge minimul global pe M .

Demonstrație Este clar că eventualul minim global al lui f pe M este totuna cu minimul global al lui f pe $M \cap N_\nu f$. Cum această mulțime este compactă iar f este continuă, din Teorema lui Weierstrass, deducem că f își atinge minimul global pe $M \cap N_\nu f$, deci pe M . $\square$

Rezultatele de mai sus asigură existența punctelor de minim în condiții de compactitate a mulțimilor de nivel. Evident, mărginirea inferioară a funcției este condiție necesară pentru existența minimului, dar este clar că mărginirea mulțimilor de nivel nu este o astfel de condiție. De exemplu funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ își atinge minimul în $\bar{x} = 1$, valoarea minimă este 0, dar $N_\nu f$ nu este mărginită pentru nicio valoare $\nu > 0 = \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Evident, în teorema de mai sus, dacă M este mărginită, atunci ipoteza este automat verificată. Cazul interesant este acela în care M este nemărginită, situație în care ipoteza este verificată dacă impunem funcției f o condiție de coercivitate.

Propoziția 3.2.3 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă, închisă și nemărginită. Dacă $\lim_{x \in M, \|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (i.e., pentru orice $(x_n) \subset M, \|x_n\| \rightarrow \infty$ are loc $f(x_n) \rightarrow \infty$) atunci mulțimea $N_\nu f \cap M$ este mărginită pentru orice $\nu > \inf_{x \in M} f(x)$.

Demonstrație Fie $\nu > \inf_{x \in M} f$. Dacă mulțimea $N_\nu f \cap M$ ar fi nemărginită, ar exista $(x_n) \subset N_\nu f \cap M$ cu $\|x_n\| \rightarrow \infty$. Atunci, pe de o parte, din ipoteză, $\lim f(x_n) = \infty$ iar, pe de altă parte, $f(x_n) \leq \nu$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce este absurd. $\square$

3.3 Condiții de optimalitate

Trecem acum la a doua parte a acestei secțiuni în care ne propunem să prezentăm condiții necesare și condiții suficiente de optimalitate. Pentru început, deducem condiții necesare de optimalitate pentru care utilizăm ideile dezvoltate în legătură cu studiul conului tangent (în sens Bouligand).

Teorema 3.3.1 (Condiția necesară de ordinul I - probleme cu restricții) Dacă $\bar{x}$ este soluție locală pentru problema (P) și f este diferențiabilă în $\bar{x}$, atunci $\nabla f(\bar{x})(u) \geq 0$ pentru orice $u \in T(M, \bar{x})$.

Demonstrație Fie V o vecinătate a lui $\bar{x}$ pentru care $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap M$. Fie $u \in T(M, \bar{x})$. Atunci există și $(t_n) \subset (0, \infty)$ cu $t_n \rightarrow 0$ și $(u_n) \rightarrow u$ astfel încât pentru orice n ,

$$\bar{x} + t_n u_n \in M.$$

Evident șirul $(t_n u_n)$ converge la 0 în $\mathbb{R}^p$ și, de la un loc încolo, $\bar{x} + t_n u_n$ este în V . Ținând cont de diferențiabilitatea lui f în $\bar{x}$, există $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}, \alpha_n \rightarrow 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$f(\bar{x} + t_n u_n) = f(\bar{x}) + t_n \nabla f(\bar{x})(u_n) + t_n \|u_n\| \alpha_n,$$

de unde,

$$\nabla f(\bar{x})(u_n) + \|u_n\| \alpha_n \geq 0,$$

pentru orice n suficient de mare. Trecând la limită cu $n \rightarrow \infty$, obținem concluzia. $\square$

Observația 3.3.2 Condiția se mai scrie, echivalent,

$$-\nabla f(\bar{x}) \in N(M, \bar{x}).$$

Observația 3.3.3 Ținând cont de Propoziția 2.4.7, dacă în teorema de mai sus $\bar{x} \in \text{int } M$ (restricție inactivă), obținem $\nabla f(\bar{x})(u) \geq 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$. Din liniaritatea lui $\nabla f(\bar{x})$, deducem $\nabla f(\bar{x}) = 0$, adică Teorema lui Fermat.

O primă întrebare este dacă reciprocele acestor rezultate sunt adevărate. Răspunsul este negativ: este suficient să considerăm exemplul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ pentru $\bar{x} = 0$. Se pot însă impune condiții suplimentare așa încât să avem unele echivalențe și cel mai important caz este cel al funcțiilor convexe pe care îl vom studia separat ceva mai jos.

Revenind la Teorema 3.3.1, întărind condițiile din concluziile acestui rezultat, obținem condiții suficiente de optimalitate.

Teorema 3.3.4 (Condiția suficientă de ordinul I - probleme cu restricții) *Considerăm problema (P). Dacă f este diferențiabilă în $\bar{x} \in M$ și*

$$\nabla f(\bar{x})(u) > 0, \quad \forall u \in T(M, \bar{x}) \setminus \{0\},$$

atunci $\bar{x}$ este soluție locală pentru problema (P).

Demonstrație Presupunem, prin reducere la absurd, că $\bar{x}$ nu este soluție. Atunci, negând definiția, deducem că există un șir $(x_n) \rightarrow \bar{x}$, $(x_n) \subset M$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$f(x_n) < f(\bar{x}).$$

În virtutea acestei inegalități,

$$x_n \neq \bar{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cum f este diferențiabilă, există un șir de numere reale $(\gamma_n) \rightarrow 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \gamma_n \|x_n - \bar{x}\|.$$

Combinând cele două relații, avem

$$0 > \nabla f(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \gamma_n \|x_n - \bar{x}\|,$$

de unde, prin împărțire la numărul nenul $\|x_n - \bar{x}\|$ deducem

$$0 > \nabla f(\bar{x}) \left(\frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \right) + \gamma_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \quad (3.1)$$

Cum șirul $\left(\frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \right)$ este mărginit, există un subșir convergent al acestuia. Limita, notată u , a respectivului subșir este nenulă (chiar de normă 1) și, în plus, din faptul că $\|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0$, deducem că $u \in T(M, \bar{x})$. Prin urmare $u \in T(M, \bar{x}) \setminus \{0\}$ și trecând la limită în relația (3.1) avem

$$0 \geq \nabla f(\bar{x})(u),$$

ceea ce contrazice ipoteza. □

Exemplul 3.3.5 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

și mulțimea restricțiilor

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Să considerăm, ca în discuția teoretică, problema (P) a minimizării lui f pe M .

Dacă ar exista un punct de minim $\bar{x}$ în interiorul lui M atunci acel punct ar fi un minim fără restricții (conform Observației 3.1.2), deci, din Teorema lui Fermat $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Dar

$$\nabla f(\bar{x}) = (-1 + \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2, -2 - 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$

și rezolvând sistemul găsim soluția $\bar{x} = (-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$ care nu aparține lui M . Deci problema nu are soluții în int M . Totuși f este continuă, iar M este compactă, deci problema (P) admite cel puțin o soluție globală.

Datorită faptului că inegalitățile ce definesc mulțimea M sunt liniare, avem o imagine geometrică clară a mulțimii (un triunghi dreptunghic cu vârfurile în punctele $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$). Atunci putem calcula relativ simplu conurile tangent și normal la M în punctele de pe frontieră și apoi să verificăm îndeplinirea condiției necesare de optimalitate: $-\nabla f(\bar{x}) \in N(M, \bar{x})$ (Teorema 3.3.1).

Astfel, dacă punctul $\bar{x}$ este

– pe segmentul deschis de capete $(0,1)$, $(1,0)$:

$$T(M, \bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 + u_2 \leq 0\}; \quad N(M, \bar{x}) = \mathbb{R}_+ \{(1,1)\};$$

– pe segmentul deschis de capete $(0,0)$, $(0,1)$:

$$T(M, \bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geq 0\}; \quad N(M, \bar{x}) = \mathbb{R}_+ \{(-1,0)\};$$

– pe segmentul deschis de capete $(0,0)$, $(1,0)$:

$$T(M, \bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 \geq 0\}; \quad N(M, \bar{x}) = \mathbb{R}_+ \{(0,-1)\};$$

– punctul $(0,1)$:

$$\begin{aligned} T(M, \bar{x}) &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 + u_2 \leq 0, u_1 \geq 0\} \\ N(M, \bar{x}) &= \{a(1,1) + b(-1,0) \mid a, b \geq 0\}; \end{aligned}$$

– punctul $(1,0)$:

$$\begin{aligned} T(M, \bar{x}) &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 + u_2 \leq 0, u_2 \geq 0\} \\ N(M, \bar{x}) &= \{a(1,1) + b(0,-1) \mid a, b \geq 0\}; \end{aligned}$$

– punctul $(0,0)$:

$$\begin{aligned} T(M, \bar{x}) &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}; \\ N(M, \bar{x}) &= \{a(-1,0) + b(0,-1) \mid a, b \geq 0\}. \end{aligned}$$

Prin calcul direct, se verifică faptul că un singur punct satisface condiția necesară de optimalitate: $\bar{x} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Prin urmare, conform discuției precedente, acesta este singurul punct de minim al problemei.

Putem, de asemenea, să ne punem problema maximului global al lui f pe M (a cărui existență este asigurată de Teorema lui Weierstrass), problemă echivalentă cu găsirea minimului lui $-f$ pe M . Repetând discuția precedentă, găsim două puncte ce verifică condiția necesară de optimalitate (i.e. $\nabla f(\bar{x}) \in N(M, \bar{x})$): $\bar{x} = (0, 0)$ și $\bar{x} = (1, 0)$. Dar $f(0, 0) = 0$, iar $f(1, 0) = -2^{-1}$, deci $(0, 0)$ este punctul de maxim.

Prezentăm acum o condiții de optimalitate de ordinul al doilea pentru problema fără restricții. Începem cu condiția necesară.

Teorema 3.3.6 (Condiția necesară de ordinul al II-lea - probleme fără restricții) *Dacă $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ este de clasă C^2 pe o vecinătate a lui $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$, iar $\bar{x}$ este punct de minim local pentru f , atunci $\nabla f(\bar{x}) = 0$ și $\nabla^2 f(\bar{x})$ este pozitiv semidefinită (adică $\nabla^2 f(\bar{x})(u, u) \geq 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$).*

Demonstrație Fie $V \subset \mathbb{R}^p$ o vecinătate a lui $\bar{x}$ pentru care $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V$ și pe care f este de clasă C^2 . Faptul că $\nabla f(\bar{x}) = 0$ rezultă din teorema precedentă. Ca mai sus, fie $u \in \mathbb{R}^p$ și $(t_n) \subset (0, \infty)$ cu $t_n \rightarrow 0$. Din Teorema lui Taylor (Teorema 4.6.62), pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $c_n \in (\bar{x}, \bar{x} + t_n u)$ astfel încât

$$\begin{aligned} f(\bar{x} + t_n u) - f(\bar{x}) &= t_n \nabla f(\bar{x})(u) + \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 f(c_n)(u, u) \\ &= \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 f(c_n)(u, u). \end{aligned}$$

Cum pentru n suficient de mare, $f(\bar{x} + t_n u) - f(\bar{x}) \geq 0$, deducem că

$$\nabla^2 f(c_n)(u, u) \geq 0,$$

de unde prin trecere la limită cu $n \rightarrow \infty$, obținem că $c_n \rightarrow \bar{x}$ și cum f este de clasă C^2 , obținem

$$\nabla^2 f(\bar{x})(u, u) \geq 0,$$

deci $\nabla^2 f(\bar{x})$ este pozitiv semidefinită. □

Evident, cu o demonstrație similară, se constată că dacă $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ este punct de maxim local pentru f , atunci $\nabla f(\bar{x}) = 0$ și $\nabla^2 f(\bar{x})$ este negativ semidefinită (adică $\nabla^2 f(\bar{x})(u, u) \leq 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$). Se poate cu ușurință observa, din rezultatul de mai sus și din demonstrația sa, că dacă $\nabla^2 f(\bar{x})$ nu este nici pozitiv semidefinită nici negativ semidefinită (caz în care spunem că este nedefinită) atunci $\bar{x}$ nu este punct de extrem.

În privința condițiilor suficiente de ordinul al doilea, are loc următorul rezultat.

Teorema 3.3.7 (Condiția suficientă de ordinul al II-lea - probleme fără restricții) *Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 . Dacă $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ este punct critic pentru f și $\nabla^2 f(\bar{x})$ este pozitiv definită (i.e. $\nabla^2 f(\bar{x})(u, u) > 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$), atunci $\bar{x}$ este minim local pentru f .*

Demonstrație Ca mai sus, presupunem prin reducere la absurd că nu are loc concluzia. Atunci, există $(x_n) \rightarrow \bar{x}$, $(x_n) \subset M \setminus \{\bar{x}\}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$f(x_n) < f(\bar{x}).$$

Din Teorema lui Taylor 4.6.62, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există c_n pe segmentul ce unește $\bar{x}$ cu x_n astfel încât

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(\bar{x}) &= \nabla f(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(c_n)(x_n - \bar{x}, x_n - \bar{x}) \\ &= \frac{1}{2} \nabla^2 f(c_n)(x_n - \bar{x}, x_n - \bar{x}). \end{aligned}$$

Obținem

$$0 > \frac{1}{2} \nabla^2 f(c_n)(x_n - \bar{x}, x_n - \bar{x}),$$

de unde, pentru finalizarea demonstrației, împărțim la $\|x_n - \bar{x}\|^2$ și repetăm, cu simplificările evidente, argumentele de mai sus. $\square$

Așa cum am spus, $\nabla^2 f(\bar{x})$ se identifică cu matricea hessiană a lui f în $\bar{x}$: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\bar{x})\right)_{i,j \in \overline{1,p}}$, iar o condiție suficientă ca această matrice simetrică să fie pozitiv definită este dată de următorul criteriu: toți determinanții matricilor $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\bar{x})\right)_{i,j \in \overline{1,k}}$, $k \in \overline{1,p}$ sunt strict pozitivi. Analog, raționând eventual pentru $-f$ avem condiția: dacă determinanții matricilor $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\bar{x})\right)_{i,j \in \overline{1,k}}$, $k \in \overline{1,p}$ sunt nenuli și își alternează semnul începând cu semnul minus, atunci $\bar{x}$ este punct de maxim (conform Criteriului lui Sylvester). De asemenea, dacă acești determinanți sunt nenuli, atunci orice altă configurație a semnelor decât cele descrise mai sus conduce la concluzia că punctul nu este de extrem local.

Așadar metoda generală de rezolvare a problemelor de optimizare fără restricții este următoarea și se bazează pe condițiile de optimalitate de ordinul I și al II-lea și pe Criteriul lui Sylvester. Se determină punctele critice rezolvând ecuația $\nabla f(x) = 0$. În fiecare din aceste puncte, calculăm $\nabla^2 f(\bar{x})$ ce se identifică cu matricea hessiană.

- Dacă $\nabla^2 f(\bar{x})$ este pozitiv definită, atunci $\bar{x}$ este punct de minim local;
- dacă $\nabla^2 f(\bar{x})$ este negativ definită, atunci $\bar{x}$ este punct de maxim local;
- dacă $\nabla^2 f(\bar{x})$ este nedefinită atunci $\bar{x}$ nu este punct de extrem local.

Pentru a verifica aceste aspecte, în unele cazuri, se poate utiliza metoda descrisă mai jos:

- dacă toți determinanții matricilor $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\bar{x})\right)_{i,j \in \overline{1,k}}$, $k \in \overline{1,p}$ sunt strict pozitivi atunci $\bar{x}$ este punct de minim local;
- dacă determinanții matricilor $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\bar{x})\right)_{i,j \in \overline{1,k}}$, $k \in \overline{1,p}$ sunt nenuli și își alternează semnul începând cu semnul minus, atunci $\bar{x}$ este punct de maxim;
- dacă acești determinanți sunt nenuli, atunci orice altă configurație a semnelor decât cele descrise mai sus conduce la concluzia că punctul nu este de extrem local.

Dacă nu se poate aplica nici una dintre concluziile precedente, atunci se procedează de la caz la caz pentru a stabili natura punctului critic.

Ilustrăm teoria de mai sus prin două exemple.

Exemplul 3.3.8 Dorim să găsim punctele de minim pentru $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$. Avem așadar o problemă fără restricții.

Pentru a găsi punctele critice rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

care este echivalent cu

$$\begin{cases} -2(1 - x_1) - 400x_1(x_2 - x_1^2) = 0 \\ 200(x_2 - x_1^2) = 0 \end{cases}$$

și are soluția unică $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Calculăm matricea hessiană în punctul respectiv,

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$$

care este pozitiv definită, de unde putem deduce că $(1, 1)$ este minim local pentru f . De altfel, se poate observa că $f(1, 1) = 0$, iar $f(x_1, x_2) \geq 0$ pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, deci $(1, 1)$ este minim global pentru f .

Exemplul 3.3.9 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2$. Să găsim punctele de minim ale lui f .

Calculăm punctele critice: sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

are ca unică soluție punctul $\bar{x} = (0, 0)$. Totuși, condiția necesară de ordinul al doilea nu este satisfăcută pentru că hessiana lui f în $\bar{x}$ este matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Așadar, nu putem decide din

Corolarul ?? dacă punctul $\bar{x}$ este punct de minim. În astfel de cazuri, ne folosim de structura problemei pentru a concluziona. Se observă că $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)(3x_1^2 - x_2)$, iar pentru șirul $x_k = (\sqrt{k^{-1}}, -k^{-1}) \rightarrow \bar{x}$

$$f(x_k) = \frac{8}{k^2} > f(\bar{x})$$

în timp ce pentru șirul $x_k = (\sqrt{(2k)^{-1}}, k^{-1}) \rightarrow \bar{x}$,

$$f(x_k) = -\frac{1}{4k^2} < f(\bar{x}).$$

Deci, $\bar{x}$ nu este punct de extrem local pentru f .

Studiem acum, cum am spus mai sus, cazul funcțiilor convexe.

Teorema 3.3.10 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și diferențiabilă. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\bar{x}$ este un minim global al lui f ;
- (ii) $\bar{x}$ este un minim local al lui f ;
- (iii) $\bar{x}$ este punct critic al lui f (i.e. $\nabla f(\bar{x}) = 0$).

Demonstrație Implicația (i) $\Rightarrow$ (ii) este evidentă și nu are nevoie de condiții suplimentare, iar (ii) $\Rightarrow$ (iii) rezultă din Teorema lui Fermat. În sfârșit, implicația (iii) $\Rightarrow$ (i) rezultă din Teorema 2.2.13. $\square$

Așa cum se observă, în cazul funcțiilor convexe, condiția de ordinul I (în cazul fără constrângeri) este necesară și suficientă pentru optimalitate. În această situație, condiția necesară de ordinul al II-lea nu aduce nimic nou, ea fiind automat satisfăcută de funcțiile convexe (conform Teoremei 2.2.13).

Privitor la natura punctelor de extrem pentru o funcție convexă, dăm rezultatele de mai jos.

Propoziția 3.3.11 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă. Dacă $\bar{x} \in M$ este punct de minim local pentru f pe M , atunci $\bar{x}$ este punct de minim global pentru f pe M .

Demonstrație Fie $\bar{x}$ un punct de minim local pentru f pe M . Atunci există V o vecinătate convexă a lui $\bar{x}$ astfel încât pentru orice $x \in V \cap M$, $f(\bar{x}) \leq f(x)$. Fie $x \in M$. Există $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât $y := (1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x \in M \cap V$. Deci,

$$f(\bar{x}) \leq f(y) = f((1 - \lambda)\bar{x} + \lambda x) \leq (1 - \lambda)f(\bar{x}) + \lambda f(x),$$

adică,

$$\lambda f(\bar{x}) \leq \lambda f(x),$$

de unde se obține concluzia. $\square$

Propoziția 3.3.12 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă. Atunci mulțimea punctelor de minim ale lui f pe M este convexă. Dacă, în plus, f este strict convexă, atunci această mulțime are cel mult un element.

Demonstrație Din rezultatul precedent, dacă $x_1, x_2 \in M$ sunt puncte de minim (global) pentru f pe M , atunci $f(x_1) = f(x_2)$. Convexitatea implică $f(x) = f(x_1)$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$. Astfel, prima parte este demonstrată. Dacă f este strict convexă și presupunem că avem două minime globale distincte, atunci obținem că $f(x) < f(x_1)$ pentru orice $x \in (x_1, x_2)$, ceea ce este imposibil. $\square$

În cazul cu restricții, pentru funcțiile convexe condiția necesară de optimalitate de ordinul I este și condiție suficientă.

Propoziția 3.3.13 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție convexă și diferențiabilă și $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime convexă și închisă. Elementul $\bar{x} \in M$ este punct de minim pentru f pe M dacă și numai dacă

$$-\nabla f(\bar{x}) \in N(M, \bar{x}).$$

Demonstrație Fie $\bar{x} \in M$, punct de minim local pentru f pe M . Atunci, conform Teoremei 3.3.1, $\nabla f(\bar{x})(u) \geq 0$ pentru orice $u \in T(M, \bar{x})$, adică

$$-\nabla f(\bar{x}) \in T(M, \bar{x})^- = N(M, \bar{x}).$$

Invers, știm, din convexitatea lui f (Teorema 2.2.13), că

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}), \quad \forall x \in U.$$

Dar, folosind ipoteza și convexitatea lui M (Propoziția 2.4.10),

$$-\nabla f(\bar{x}) \in N(M, \bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in M\},$$

deci $\nabla f(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0$ pentru orice $x \in M$. Din aceste relații, avem $f(x) \geq f(\bar{x})$ pentru orice $x \in M$. $\square$

3.4 Restricții funcționale

Considerăm problema (P) din secțiunea precedentă care are restricția geometrică $x \in M$. De cele mai multe ori în practică această mulțime M a punctelor fezabile este definită prin intermediul unor funcții. Fie așadar $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ funcții de clasă C^1 . Evident, g și h pot fi gândite ca fiind de forma $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, respectiv $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ unde unde $g_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \overline{1, n}$) și $h_j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ($j \in \overline{1, m}$) sunt de clasă C^1 .

Considerăm că mulțimea punctelor fezabile este

$$M := \{x \in \mathbb{R}^p \mid g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^p.$$

Se observă că avem două tipuri de restricții: restricții cu inegalități și restricții cu egalități. Acestea se numesc restricții funcționale. Fie $x \in M$. Dacă pentru un indice $i \in \overline{1, n}$, $g_i(x) < 0$, atunci, din continuitatea lui g , există o întreagă vecinătate V a lui x astfel încât $g_i(y) < 0$ pentru orice $y \in V$. Aceasta face ca, în cazul în care cercetăm dacă x este soluție locală a problemei (P) , restricția $g_i \leq 0$ să nu influențeze efectiv mulțimea punctelor u pentru care trebuie să comparăm $f(x)$ cu $f(u)$. De aceea, în acest caz, spunem că restricția $g_i \leq 0$ este inactivă în x . Din acest motiv, ne interesează ca astfel de restricții să fie eliminate din discuție. Pentru $\bar{x} \in M$, notăm mulțimea indicilor restricțiilor inegalități active prin

$$A(\bar{x}) = \{i \in \overline{1, n} \mid g_i(\bar{x}) = 0\}.$$

3.4.1 Condițiile Karush-Kuhn-Tucker

Fie mulțimile

$$G(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i \in A(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) \mid \lambda_i \geq 0, \forall i \in A(\bar{x}), \mu_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \overline{1, m} \right\} \subset \mathbb{R}^p$$

(unde s-a identificat $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ cu $\mathbb{R}^p$) și

$$D(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \nabla g_i(\bar{x})(u) \leq 0, \quad \forall i \in A(\bar{x}) \text{ și } \nabla h_j(\bar{x})(u) = 0, \quad \forall j \in \overline{1, m}\}.$$

Înainte de a da rezultatul principal avem nevoie de o propoziție ajutătoare.

Propoziția 3.4.1 Pentru orice $\bar{x} \in M$ avem:

- (i) $G(\bar{x}) = D(\bar{x})^-$;
- (ii) $T(M, \bar{x}) \subset D(\bar{x})$.

Demonstrație (i) Incluziunea $G(\bar{x}) \subset D(\bar{x})^-$ este evidentă, iar incluziunea reciprocă este o consecință directă a Lemei lui Farkas.

(ii) Evident, $0 \in D(\bar{x})$. Fie $u \in T(M, \bar{x}) \setminus \{0\}$. Din definiția conului tangent, există $(t_k) \subset (0, \infty)$ cu $t_k \rightarrow 0$ și $(u_k) \rightarrow u$ astfel încât pentru orice k ,

$$\bar{x} + t_k u_k \in M.$$

Evident, șirul $(t_k u_k)$ converge la 0 în $\mathbb{R}^p$. Ținând cont de diferențiabilitatea lui h în $\bar{x}$, există $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}^m$, $\alpha_k \rightarrow 0$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$h(\bar{x} + t_k u_k) = h(\bar{x}) + t_k \nabla h(\bar{x})(u_k) + t_k \|u_k\| \alpha_k.$$

Cum $h(\bar{x} + t_k u_k) = h(\bar{x}) = 0$, împărțind prin t_k și trecând la limită pentru $k \rightarrow \infty$ obținem $\nabla h(\bar{x})(u) = 0$. Acum pentru fiecare $i \in A(\bar{x})$ există $(\alpha_k^i) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_k^i \rightarrow 0$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$g_i(\bar{x} + t_k u_k) = g_i(\bar{x}) + t_k \nabla g_i(\bar{x})(u_k) + t_k \|u_k\| \alpha_k^i.$$

Ca mai sus, ținând cont că $g_i(\bar{x} + t_k u_k) \leq 0$ și $g_i(\bar{x}) = 0$ avem $\nabla g_i(\bar{x})(u) \leq 0$ și propoziția este demonstrată. $\square$

Următorul exemplu arată că incluziunea de la punctul (ii) de mai sus este, în general, strictă.

Exemplul 3.4.2 Fie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$ și $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$ și punctul fezabil $\bar{x} = (0, 0)$. Atunci:

$$\begin{aligned} D(\bar{x}) &= \{(u_1, u_2) \mid -u_1 - u_2 \leq 0\}, \\ T(M, \bar{x}) &= \{(u_1, u_2) \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 u_2 = 0\}. \end{aligned}$$

Stabilim acum o formă generalizată a unui rezultat clasic cunoscut sub denumirea de Teorema Karush-Kuhn-Tucker întrucât a fost obținut (sub o ipoteză ceva mai tare) de către W. Karush, H. W. Kuhn și A. W. Tucker. De precizat că W. Karush a obținut teorema în 1939, dar comunitatea matematică a devenit conștientă de importanța acesteia după ce H. W. Kuhn și A. W. Tucker au regăsit rezultatul pe o cale independentă în 1950.

Teorema 3.4.3 (Teorema Karush-Kuhn-Tucker) Fie $\bar{x} \in M$ soluție a problemei (P). Presupunem că $T(M, \bar{x})^- = D(\bar{x})^-$. Atunci există $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$, astfel încât

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0 \quad (3.2)$$

și

$$\lambda_i \geq 0, \quad \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad \text{pentru orice } i \in \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

Demonstrație Din Teorema 3.3.1, $\nabla f(\bar{x})(u) \geq 0$ pentru orice $u \in T(M, \bar{x})$, deci $-\nabla f(\bar{x}) \in T(M, \bar{x})^-$. Conform ipotezei, deducem $-\nabla f(\bar{x}) \in D(\bar{x})^-$. Aplicăm primul punct al propoziției precedente și obținem $-\nabla f(\bar{x}) \in G(\bar{x})$. Prin urmare, există $\lambda_i \geq 0, i \in A(\bar{x}), \mu_j \in \mathbb{R}, j \in \overline{1, m}$ încât

$$-\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i \in A(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(\bar{x}).$$

Dacă pentru indicii $i \in \overline{1, n} \setminus A(\bar{x})$ considerăm $\lambda_i = 0$, obținem concluzia. $\square$

Funcția $L : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x, (\lambda, \mu)) := f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x)$$

se numește lagrangianul problemei (P) . Astfel, concluzia din relația (3.2) se poate scrie

$$\nabla_x L(\bar{x}, (\lambda, \mu)) = 0,$$

iar elementele $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m$ se numesc multiplicatori Lagrange. Denumirea se datorează faptului că pentru prima dată o astfel de metodă de a converti o problemă de optimizare cu restricții într-o problemă fără restricții prin intermediul unor noi nedeterminate a apărut în unele dintre lucrările lui Lagrange legate de probleme de calculul variațiilor. Este clar că teorema precedentă nu asigură unicitatea acestor multiplicatori. Pe de altă parte, $L(x, (\lambda, \mu))$ este o funcție afină în variabilele (λ, μ) .

Teorema 3.4.3 asigură condiții necesare de optimalitate pentru problema (P) . Dacă în loc de minimizare dorim să maximizăm funcția obiectiv sub aceleași restricții, atunci, din faptul că $\max f = -\min(-f)$, condiția necesară (3.2) se scrie

$$-\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0.$$

Să mai observăm că în lipsa constrângerilor inegalități, ținând seama de faptul că $h(x) = 0$ este totuna cu $-h(x) = 0$, condiția necesară se poate scrie, atât pentru minime cât și pentru maxime, în forma

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0.$$

Revenind la rezultatul principal, să observăm două lucruri. Mai întâi, dacă problema nu are restricții (de exemplu, $M = \mathbb{R}^p$), atunci relația (3.2) se reduce la condiția necesară de optimalitate de ordinul I (Teorema lui Fermat): $\nabla f(\bar{x}) = 0$. A doua observație este că relația (3.2) nu are loc în general fără ipoteze suplimentare, numite condiții de calificare.

Exemplul 3.4.4 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definite prin $f(x_1, x_2) = x_1$ și $g(x_1, x_2) = (-x_2 + (1 - x_1)^3, x_2)$. Se verifică faptul că $\bar{x} = (1, 0)$ este punct de minim pentru problema asociată, dar condiția (3.2) nu are loc. Se poate arăta că în acest caz condiția $T(M, \bar{x})^- = D(\bar{x})^-$ nu este îndeplinită (a se vedea Exercițiul 3.16).

Această observație ne îndeamnă să discutăm mai în amănunt diverse condiții de calificare în secțiunea următoare.

Înainte, să observăm că în anumite ipoteze, condiția Karush-Kuhn-Tucker este și suficientă.

Definiția 3.4.5 Spunem că problema (P) este convexă dacă f este convexă, funcțiile $g_i, i \in \overline{1, n}$ sunt convexe, iar funcția h este afină.

Teorema 3.4.6 Presupunem că problema (P) este convexă. Fie $\bar{x} \in M$. Dacă există $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ astfel încât au loc relațiile (3.2) și (3.3) atunci $\bar{x}$ este soluție pentru (P) (sau minim al lui f pe M).

Demonstrație Condiția (3.2) exprimă faptul că

$$\nabla_x L(\bar{x}, (\lambda, \mu)) = 0.$$

În ipotezele date, L este o funcție convexă în x , deci conform Teoremei 3.3.10, $\bar{x}$ este un punct de minim pentru $x \mapsto L(x, (\lambda, \mu))$. Deci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} L(x, (\lambda, \mu)) &= f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \\ &\geq L(\bar{x}, (\lambda, \mu)) = f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Dar, pentru $x \in M$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x) \leq 0,$$

deci $f(x) \geq f(\bar{x})$. Demonstrația este completă. $\square$

3.4.2 Condiții de calificare pentru sisteme generale de restricții

Orice condiție impusă sistemului de restricții care asigură validitatea concluziilor Teoremei Karush-Kuhn-Tucker se numește condiție de calificare. Discutăm în această secțiune astfel de condiții pentru sisteme generale de restricții. Astfel, condiția de calificare $T(M, \bar{x})^- = D(\bar{x})^-$ impusă în Teorema 3.4.3 se numește condiția Guignard în punctul $\bar{x}$ (după numele lui Monique Guignard care a introdus-o în 1969) și este una dintre cele mai slabe condiții de acest tip pe care le putem întâlni în literatură. Dorim acum să considerăm și alte condiții de calificare și să le comparăm între ele. Evident, relația $T(M, \bar{x}) = D(\bar{x})$ este la rândul său o condiție de calificare, numită condiția de cvasi-regularitate sau condiția Abadie în $\bar{x}$ (după numele lui Jean Abadie care a utilizat-o în 1967), întrucât implică condiția utilizată mai sus. Cele două condiții nu sunt însă echivalente, așa cum se poate observa din exemplul următor (a se vedea și Exemplul 2.4.3).

Exemplul 3.4.7 Fie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ și $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Să considerăm punctul fezabil $\bar{x} = (0, 0)$. Atunci:

$$\begin{aligned} D(\bar{x}) &= \{(u_1, u_2) \mid u_1 \geq 0, u_2 \leq 0\}, \\ T(M, \bar{x}) &= \{(u_1, u_2) \mid u_1 \geq 0, u_2 \leq 0, u_1 u_2 = 0\} \end{aligned}$$

și

$$T(M, \bar{x})^- = D(\bar{x})^- = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \leq 0, u_2 \geq 0\}.$$

Evident, condițiile de calificare sunt legate de punctul de referință ($\bar{x}$ în cazul nostru). De fiecare dată când nu vor fi dubii cu privire la punctul de referință vom evita precizarea acestuia, pentru ușurarea expunerii. Două dintre cele mai importante condiții de calificare sunt prezentate mai jos.

Prima dintre acestea se numește condiția de liniară independentă (în $\bar{x}$) și se formulează astfel: mulțimea $\{\nabla g_i(\bar{x}) \mid i \in A(\bar{x})\} \cup \{\nabla h_j(\bar{x}) \mid j \in \overline{1, m}\}$ este liniar independentă.

A doua se numește condiția de calificare Mangasarian-Fromovitz (în $\bar{x}$): mulțimea $\{\nabla h_j(\bar{x}) \mid j \in \overline{1, m}\}$ este liniar independentă și există $u \in \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$\nabla h(\bar{x})(u) = 0 \text{ și } \nabla g_i(\bar{x})(u) < 0, \forall i \in A(\bar{x}).$$

(Matematicienii Olvi Mangasarian și Stanley Fromovitz au publicat această condiție în 1967.)

Mai întâi vom stabili relațiile dintre aceste condiții și apoi vom dovedi că sunt condiții de calificare.

Teorema 3.4.8 *Dacă are loc condiția de liniară independentă în $\bar{x} \in M$, atunci are loc condiția Mangasarian-Fromovitz în $\bar{x}$.*

Demonstrație Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $A(\bar{x}) = \{1, \dots, q\}$. Fie T matricea $(q + m) \times p$ având drept linii $\nabla g_i(\bar{x}), i \in \overline{1, q}, \nabla h_j(\bar{x}), j \in \overline{1, m}$ și fie b vectorul coloană cu $b_i = -1, i \in \overline{1, q}, b_j = 0, j \in \overline{q+1, q+m}$. Cum liniile lui T sunt liniar independente, sistemul $Td = b$ are soluție. Dacă u este o astfel de soluție, atunci

$$\nabla g_i(\bar{x})(u^t) = -1, \forall i \in \overline{1, q} \text{ și } \nabla h_j(\bar{x})(u^t) = 0, \forall j \in \overline{1, m},$$

deci condiția Mangasarian-Fromovitz în $\bar{x}$ este satisfăcută. □

Totuși, cele două condiții nu sunt echivalente.

Exemplul 3.4.9 Fie $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, i \in \overline{1, 3}$ definite prin:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2 \\ g_2(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 2 \\ g_3(x) &= -x_1 \end{aligned}$$

și punctul fezabil $\bar{x} = (0, 0)$. Este ușor de verificat că mulțimea

$$\{\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x}), \nabla g_3(\bar{x}), i \in \overline{1, 3}\}$$

este liniar dependentă. Pe de altă parte, pentru $u = (1, 0)$, $\nabla g_i(\bar{x})(u) < 0$ pentru orice $i \in \overline{1, 3}$.

Pentru a clasifica mai precis condițiile impuse până acum, vom arăta că din condiția Mangasarian-Fromovitz se obține condiția Abadie.

Teorema 3.4.10 Dacă are loc condiția Mangasarian-Fromovitz în $\bar{x} \in M$, atunci $T(M, \bar{x}) = D(\bar{x})$, adică are loc condiția Abadie în $\bar{x}$.

Demonstrație Așa cum am văzut mai sus, o incluziune este adevărată întotdeauna. Invers, fie $u \in D(\bar{x})$ și fie $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$ vectorul dat de condiția Mangasarian-Fromovitz. Fie $\lambda \in (0, 1)$ și $d_\lambda := (1 - \lambda)u + \lambda\bar{u}$. Vom arăta că $d_\lambda \in T(M, \bar{x})$ pentru orice $\lambda \in (0, 1)$, apoi făcând $\lambda \rightarrow 0$ și ținând cont de închiderea lui $T(M, \bar{x})$ va rezulta concluzia. Fixăm deci $\lambda \in (0, 1)$.

Este evident că pentru orice indice $i \in A(\bar{x})$, $\nabla g_i(\bar{x})(d_\lambda) < 0$ (deci, în particular, $d_\lambda \neq 0$) și pentru orice indice $j \in \overline{1, m}$, $\nabla h_j(\bar{x})(d_\lambda) = 0$.

Aplicația $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ are funcțiile coordonate $(h_j)_{j \in \overline{1, m}}$. Evident, $h(\bar{x}) = 0$. Faptul că mulțimea $\{\nabla h_j(\bar{x})\}_{j \in \overline{1, m}}$ este liniar independentă înseamnă că $\nabla h(\bar{x})$ este surjectivă. Putem aplica Teorema lui Lyusternik (adică Teorema 2.5.1):

$$T(\{x \in \mathbb{R}^p \mid h(x) = 0\}, \bar{x}) = \text{Ker } \nabla h(\bar{x}).$$

Cum $d_\lambda \in \text{Ker } \nabla h(\bar{x})$, deducem că

$$d_\lambda \in T(\{x \in \mathbb{R}^p \mid h(x) = 0\}, \bar{x}),$$

adică există $(t_k) \subset (0, \infty)$, $t_k \rightarrow 0$ și $(u_k) \rightarrow d_\lambda$ astfel încât pentru orice k

$$h(\bar{x} + t_k u_k) = 0.$$

Așadar,

$$h_j(\bar{x} + t_k u_k) = 0, \quad \forall j \in \overline{1, m}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pentru a obține că $d_\lambda \in T(M, \bar{x})$ este suficient să mai arătăm că pentru k suficient de mare $g_i(\bar{x} + t_k u_k) \leq 0$ pentru orice i .

Dacă $i \notin A(\bar{x})$, atunci $g_i(\bar{x}) < 0$ și din continuitatea lui g_i , $g_i(\bar{x} + t_k u_k) < 0$ pentru k suficient de mare, pentru că $\bar{x} + t_k u_k \rightarrow \bar{x}$.

Dacă $i \in A(\bar{x})$, cum g_i este de clasă C^1 , există un șir $(\alpha_k) \rightarrow 0$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g_i(\bar{x} + t_k u_k) &= g_i(\bar{x}) + t_k \nabla g_i(\bar{x})(u_k) + t_k \|u_k\| \alpha_k \\ &= t_k \nabla g_i(\bar{x})(u_k) + t_k \|u_k\| \alpha_k. \end{aligned}$$

Putem scrie

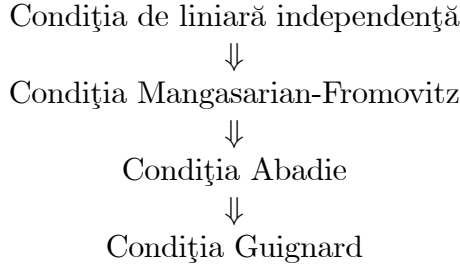
$$\frac{g_i(\bar{x} + t_k u_k)}{t_k} = \nabla g_i(\bar{x})(u_k) + \|u_k\| \alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \nabla g_i(\bar{x})(d_\lambda) < 0.$$

Prin urmare, $g_i(\bar{x} + t_k u_k) < 0$ pentru k suficient de mare. Cum există un număr finit de indici i , recompunând raționamentele făcute, obținem concluzia. $\square$

Pentru a arăta că toate cele patru condiții de calificare introduse până acum sunt diferite, mai trebuie să verificăm că cvasi-regularitatea nu implică condiția Mangasarian-Fromovitz.

Exemplul 3.4.11 Fie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (-x_1^2 + x_2, -x_1^2 - x_2)$ și punctul fezabil $\bar{x} = (0, 0)$. Atunci, $D(\bar{x}) = \{(u_1, 0) \mid u_1 \in \mathbb{R}\}$. Pe de altă parte, se verifică simplu că $T(M, \bar{x}) \supset D(\bar{x})$ (deci are loc egalitatea), dar nu există $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ cu $\nabla g(\bar{x})(\bar{u}) < 0$.

Sistematizând, am arătat că au loc următoarele implicații:



și niciuna dintre reciproce nu este adevărată.

3.4.3 Condiții de calificare pentru sisteme speciale de restricții

Condițiile de calificare de mai sus se referă la sisteme generale de restricții. Să discutăm acum condiții speciale referitoare la cazuri particulare ale datelor problemei.

Definiția 3.4.12 *Spunem că sistemul de restricții asociat problemei (P) este de tip convex dacă restricțiile cu inegalități sunt exprimate prin funcții convexe, în timp ce restricțiile cu egalități sunt date cu funcții afine, adică $(g_i)_{i \in \overline{1, n}}$ sunt convexe și h este afină. În acest context, spunem că are loc condiția Slater dacă există $u \in \mathbb{R}^p$ astfel încât $h(u) = 0$ și $g(u) < 0$.*

Această condiție a fost introdusă în 1950 de către Morton Slater.

Teorema 3.4.13 *Dacă sistemul de restricții asociat problemei (P) este de tip convex și este îndeplinită condiția Slater, atunci condiția Abadie este satisfăcută în orice punct fezabil. În particular, condiția Slater este o condiție de calificare.*

Demonstrație Fie $\bar{x} \in M$. Incluziunea $T(M, \bar{x}) \subset D(\bar{x})$ este deja arătată în cazul general. Fie $v \in D(\bar{x})$. Din condiția Slater și convexitatea funcțiilor g_i deducem (Teorema 2.2.13)

$$0 > g_i(u) \geq g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})(u - \bar{x}),$$

deci pentru $i \in A(\bar{x})$, $\nabla g_i(\bar{x})(u - \bar{x}) < 0$. Notăm $w = u - \bar{x}$, iar pentru $\lambda \in (0, 1)$, definim

$$w_\lambda = (1 - \lambda)v + \lambda w.$$

Vom arăta că $w_\lambda \in T(M, \bar{x})$ pentru orice $\lambda \in (0, 1)$. Pentru $i \in A(\bar{x})$,

$$\nabla g_i(\bar{x})(v) \leq 0, \quad \nabla g_i(\bar{x})(w) < 0,$$

deci $\nabla g_i(\bar{x})(w_\lambda) < 0$. Din formula lui Taylor, pentru orice $i \in A(\bar{x})$, există $\theta_i : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}\theta_i(t) = 0$ și pentru orice t pozitiv suficient de mic,

$$g_i(\bar{x} + tw_\lambda) = g_i(\bar{x}) + t\nabla g_i(\bar{x})(w_\lambda) + \theta_i(t) = t \left(\nabla g_i(\bar{x})(w_\lambda) + \frac{\theta_i(t)}{t} \right).$$

Deducem că există $t > 0$ astfel încât $g_i(\bar{x} + tw_\lambda) < 0$ pentru orice $i \in A(\bar{x})$.

Fie $(t_k) \subset (0, \infty)$, $t_k \rightarrow 0$. Atunci

$$x_k := (1 - t_k)\bar{x} + t_k(\bar{x} + tw_\lambda) = \bar{x} + t_k tw_\lambda \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x}.$$

Pentru a finaliza, trebuie să arătăm că de la un loc încolo, toți termenii șirului (x_k) sunt în M . Pentru $i \notin A(\bar{x})$, din continuitatea lui g , pentru k suficient de mare, $g_i(x_k) < 0$, iar pentru $i \in A(\bar{x})$,

$$g_i(x_k) \leq (1 - t_k)g_i(\bar{x}) + t_k g_i(\bar{x} + tw_\lambda) < 0.$$

Din faptul că h este afină, iar $h(\bar{x}) = 0$, obținem

$$h(x_k) = h(\bar{x} + t_k tw_\lambda) = t_k t \nabla h(\bar{x})(w_\lambda).$$

Cum $v \in D(\bar{x})$, $\nabla h(\bar{x})(v) = 0$, deci

$$\nabla h(\bar{x})(w_\lambda) = \lambda \nabla h(\bar{x})(w) = \lambda \nabla h(\bar{x})(u - \bar{x}) = \lambda h(u) = 0.$$

Obținem că $h(x_k) = 0$ pentru orice k , deci, în final, $(x_k)_{k \geq k_0} \subset M$, ceea ce înseamnă că $w_\lambda \in T(M, \bar{x})$. Facem acum $\lambda \rightarrow 0$ și din faptul că $T(M, \bar{x})$ este închis deducem că $v \in T(M, \bar{x})$, ceea ce încheie demonstrația. $\square$

Definiția 3.4.14 *Spunem că sistemul de restricții asociat problemei (P) este de tip afin dacă atât restricțiile cu inegalități, cât și cele restricțiile cu egalități sunt date prin funcții affine.*

Să considerăm acum cazul unui sistem de restricții de tip afin. Astfel, vom considera o matrice A de tip $n \times p$, o matrice B de tip $m \times p$ și $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^m$. Astfel mulțimea M devine $M = \{x \in \mathbb{R}^p \mid Ax \leq b, Bx = c\}$, unde relația " $\leq$ " este înțeleasă ca având loc pe componente. Deci $g(x) = Ax - b$, $h(x) = Bx - c$.

Teorema 3.4.15 *Dacă sistemul de restricții este de tip afin, atunci condiția Abadie este satisfăcută în orice punct fezabil.*

Demonstrație Fie $\bar{x} \in M$. Ca și mai sus, este suficient să arătăm că $D(\bar{x}) \subset T(M, \bar{x})$. Fie $v \in D(\bar{x})$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că toți indicii sunt activi. Atunci $Av \leq 0$, $Bv = 0$. Dacă $v = 0$ nu este nimic de arătat. În caz contrar, definim

$$x_k := \bar{x} + \frac{1}{k}v, \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Relațiile

$$Ax_k \leq b, \quad Bx_k = c, \quad x_k \rightarrow \bar{x}$$

dovedesc faptul că $v \in T(M, \bar{x})$. $\square$

Așadar, în cazul restricțiilor affine nu trebuie verificată nicio condiție de calificare.

Dăm acum un exemplu concret de rezolvare a unei probleme de optimizare prin folosirea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, punctând etapele esențiale ale raționamentului.

Exemplul 3.4.16 Să determinăm pentru funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ punctele de minim cu restricțiile $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 \leq -\frac{5}{2}$ și $x_1 + x_2 + x_3 = -2$.

Evident, notăm, pentru a fi în cadrul deja discutat, $g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + \frac{5}{2}$, $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 2$. Atunci avem problema minimizării lui f cu restricțiile $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$.

I. Existența soluției

Mai întâi, verificăm faptul că problema are într-adevăr soluție. Pentru aceasta verificăm că mulțimea punctelor fezabile M este compactă sau că f este coercivă pe această mulțime (dacă este nemărginită). În cazul concret discutat, M este evident închisă. De asemenea este mărginită pentru că $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$ înseamnă $x_3 = -2 - x_1 - x_2$ și $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 - 6 + \frac{5}{2} \leq 0$, adică $(x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 - \frac{3}{2})^2 - 8 \leq 0$. Deci coordonatele x_1, x_2 sunt mărginite și din relația anterioară același lucru poate fi spus despre x_3 . Deducem că M este compactă. (Pe de altă parte chiar dacă M ar fi fost nemărginită, putem observa că f este coercivă pentru că este pătratul normei.) Deci, problema admite soluție (Teorema lui Weierstrass).

II. Convexitatea sistemului de restricții, Convexitatea problemei

Este ușor de verificat g este convexă, iar h este afină, deci sistemul de restricții este convex. În plus, f este convexă, deci problema este convexă. Prin urmare condițiile din Teorema Karush-Kuhn-Tucker sunt necesare și suficiente.

III. Verificarea unei condiții de calificare

Pentru a determina soluțiile vrem să aplicăm teorema Karush-Kuhn-Tucker, motiv pentru care trebuie să verificăm o condiție de calificare.

Varianta 1. Verificăm condiția de liniară independentă. Fie $x \in M$. Dacă $g(x) \leq 0$ este inactivă în x , cum $\nabla h(x) = (1, 1, 1) \neq 0$, mulțimea $\{\nabla h(x)\}$ este liniar independentă. Presupunem că g este activă în x . Presupunem că $\{\nabla g(x), \nabla h(x)\}$ nu este liniar independentă. Atunci există $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ astfel încât $\alpha \nabla g(x) + \beta \nabla h(x) = 0$. Aceasta conduce la

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 + \beta = 0 \\ 2\alpha x_2 + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} \beta = -3\alpha \\ x_1 = x_2 = \frac{3}{2} \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observăm însă că un punct de forma $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, u)$ nu este fezabil cu restricția g activă: $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + u = -2$ implică $u = -5$ iar $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -5)$ nu verifică $g(x) = 0$. Deducem că este îndeplinită condiția de liniară independentă în toate punctele lui M .

Varianta 2. O altă variantă este să observăm, din faptul că sistemul de restricții este convex, că este suficient să verificăm condiția Slater: aceasta este îndeplinită pentru $u = (0, 0, -2)$.

IV. Aplicarea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker

Cum am spus, datorită faptului că problema este convexă, condițiile Karush-Kuhn-Tucker sunt necesare și suficiente pentru minimalitate (globală). Deci x este soluție a problemei noastre

dacă și numai dacă există $\lambda \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda x_1 + \mu = 0 \\ 2x_2 + 2\lambda x_2 + \mu = 0 \\ 2x_3 + 3\lambda + \mu = 0 \\ \lambda(x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + \frac{5}{2}) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ \lambda \geq 0, x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + \frac{5}{2} \leq 0. \end{cases}$$

Plecăm de la a patra ecuație. Dacă $\lambda = 0$ atunci din primele trei ecuații deducem

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{2}{3},$$

punct pentru care ultima inegalitate este falsă.

Deci $\lambda > 0$, ceea ce înseamnă $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + \frac{5}{2} = 0$. Din primele două ecuații avem $x_1 = x_2$ iar din a cincea $x_3 = -2 - 2x_1$, adică

$$2x_1^2 - 6x_1 - 6 + \frac{5}{2} = 0.$$

Obținem tripletele

$$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -9\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right).$$

Trebuie însă să determinăm λ pentru a verifica condiția $\lambda \geq 0$. În cazul primului triplet primele trei ecuații conduc la $4\lambda = -25$, ceea ce înseamnă că acest triplet nu este soluție. Pentru al doilea, găsim $\lambda = \frac{1}{4}$, deci singura soluție a sistemului este elementul

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \in \mathbb{R}^3.$$

V. Concluzia

Putem concluziona că, într-adevăr, acest punct este soluție a problemei în două feluri: pe de o parte problema admite soluție și punctul găsit este singurul care satisface condițiile necesare; pe de altă parte, problema fiind convexă, punctele ce satisfac condiția necesară sunt soluții (condițiile necesare sunt și suficiente). Unicitatea soluției se putea deduce și înainte de rezolvarea efectivă pentru că funcția obiectiv este strict convexă.

3.5 Exemple și aplicații

Ne propunem să ilustrăm rezultatele teoretice discutate mai sus prin intermediul a diverse exemple, fiecare dintre ele subliniind un aspect teoretic specific. De asemenea, prezentăm unele aplicații ale metodelor studiate până în acest punct.

Exemplul 3.5.1 (extrem local - extrem global) Primul exemplu marchează o diferență importantă între extremele globale ale unei funcții reale de o variabilă reală și cele ale funcțiilor de mai multe variabile.

Dacă o funcție derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are un singur punct critic $\bar{x}$ care este punct de extrem local, atunci acesta este în mod necesar punct de extrem global. Într-adevăr, dacă $\bar{x}$ nu ar fi punct de minim global, atunci ar exista $u \in \mathbb{R}$ cu $f(u) < f(\bar{x})$. Putem presupune că $u < \bar{x}$. Dar, din condiția de minim local pentru $\bar{x}$, există $v \in \mathbb{R}$, $u < v < \bar{x}$ astfel încât $f(\bar{x}) < f(v)$ (în caz contrar, f ar fi constantă pe un interval de forma $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x})$ și $\bar{x}$ nu ar mai fi unicul punct critic care este și extrem local). Prin urmare, $f(u) < f(\bar{x}) < f(v)$, deci valoarea $f(\bar{x})$ se atinge în intervalul (u, v) , într-un punct notat w . Aplicând Teorema lui Rolle funcției f pe $[w, \bar{x}]$, există $t \in (w, \bar{x})$ cu $f'(t) = 0$, ceea ce reprezintă o contradicție. Exemplul de mai jos demonstrează că în mai multe dimensiuni, această observație nu mai este adevărată.

Fie acum $p \geq 2$ și $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = (1 + x_p)^3 \sum_{k=1}^{p-1} x_k^2 + x_p^2.$$

Atunci $0 \in \mathbb{R}^p$ este singurul punct critic al lui f , este punct de minim local strict (de ordinul $\alpha = 2$), dar nu este punct de minim global (o ilustrare grafică pentru cazul $p = 2$ poate fi făcută cu ușurință în Matlab).

Avem o problemă de optimizare fără restricții. Să calculăm

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2x_k(1 + x_p)^3, \quad \forall k \in \overline{1, p-1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(x) = 3(1 + x_p)^2 \sum_{k=1}^{p-1} x_k^2 + 2x_p.$$

Singurul punct critic (i.e. $\nabla f(\bar{x}) = 0$, deci $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) = 0$ pentru $k \in \overline{1, p}$) este $\bar{x} = 0$. Un calcul simplu arată că matricea hessiană asociată lui f în $\bar{x}$ este matricea pătratică de tip $p \times p$ care are numărul 2 pe diagonală principală și 0 în rest, deci este pozitiv definită. Conform Corolarului ??, deducem că $\bar{x}$ este soluție locală strictă de ordinul al doilea. Să observăm că $f(1, 1, \dots, x_p) = (p-1)(1 + x_p)^3 + x_p^2$, expresie care fiind un polinom de gradul al treilea, ia, atunci când x_p variază în $\mathbb{R}$, toate valorile dintre $-\infty$ și $+\infty$. Deci f nu poate avea minim global. $\square$

Exemplul 3.5.2 (metoda celor mai mici pătrate) Discutăm acum un caz special de problemă de optimizare fără restricții, numită metoda celor mai mici pătrate, care apare foarte des în practica măsurătorilor și experimentelor din științele naturii: fizică, chimie, astronomie, biologie. De altfel, din punct de vedere istoric, acest tip de problemă a apărut în legătură cu studiul mișcării planetelor și în chestiuni legate de tehnici de navigație. Matematicianul care a pus bazele acestei tehnici de studiu se consideră a fi Gauss, dar metoda a fost publicată pentru prima dată de către Legendre. În puține cuvinte, este vorba de următoarea situație: avem la dispoziție un număr de date $v_1, v_2, \dots, v_N$ provenite în urma unor măsurători făcute la momentele $t_1, t_2, \dots, t_N$. Obiectivul este acela de a determina cea mai bună funcție model de forma $t \mapsto \varphi(t, x)$ (unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ sunt parametri ajustabili) care se potrivește cu datele măsurate. Astfel, pentru fiecare $i \in \overline{1, N}$ se definește abaterea (reziduul) dintre o dată măsurată la momentul t_i și data descrisă de model la același moment ca fiind

$$r_i := v_i - \varphi(t_i, x),$$

iar problema este de a minimiza funcția $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^N r_i^2 = \sum_{i=1}^N [v_i - \varphi(t_i, x)]^2.$$

Ca o paranteză, să spunem că o altă posibilă funcție obiectiv (poate mai firească) ar fi

$$\sum_{i=1}^N |v_i - \varphi(t_i, x)|$$

însă această construcție nu conservă diferențiabilitatea. Acesta este motivul pentru care se preferă suma pătratelor reziduurilor, de unde și numele metodei.

Considerăm aici cazul unei dependențe liniare. Presupunem că s-au făcut N măsurători la momentele diferite $t_1, t_2, \dots, t_N > 0$ și, corespunzător, s-au obținut valorile $v_1, v_2, \dots, v_N$. Știind că dependența dintre cele două seturi de valori este liniară ne interesează să determinăm o dreaptă care "se potrivește" cel mai bine acestei colecții de date observate. Fie deci o dreaptă oarecare $v = at + b$. Ca mai sus, abaterea la momentul t_i dintre valoarea măsurată v_i și valoarea corespunzătoare a dependenței liniare este $v_i - (at_i + b)$. Pentru a "măsura" suma abaterilor, considerăm funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^N [v_i - (at_i + b)]^2.$$

Dreapta față de care abaterea măsurătorilor va fi cea mai mică va fi dreapta căutată. Astfel ajungem la problema minimizării (fără restricții) a funcției f . Să observăm și faptul funcția f este coercivă, adică $\lim_{\|(a,b)\| \rightarrow \infty} f(a, b) = \infty$, deci, conform Teoremei 3.2.2, admite punct de minim global.

Calculăm derivatele parțiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a}(a, b) &= \sum_{i=1}^N 2(-t_i) [v_i - (at_i + b)] \\ \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) &= \sum_{i=1}^N -2 [v_i - (at_i + b)] \end{aligned}$$

și determinarea punctelor critice revine la rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N t_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^N t_i \right) b = \sum_{i=1}^N t_i v_i \\ \left(\sum_{i=1}^N t_i \right) a + Nb = \sum_{i=1}^N v_i. \end{cases}$$

Determinantul matricei sistemului de mai sus este

$$\Delta := N \left(\sum_{i=1}^N t_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^N 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N t_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^N 1 \cdot t_i \right)^2.$$

Din inegalitatea lui Hölder, acest număr este pozitiv (egalitatea s-ar obține dacă și numai dacă toate valorile t_i sunt egale, lucru exclus de la bun început). Așadar, sistemul de mai sus admite soluție unică:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i^2 & \sum_{i=1}^N t_i \\ \sum_{i=1}^N t_i & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i v_i \\ \sum_{i=1}^N v_i \end{pmatrix}.$$

Cum f admite punct de minim global aceasta care nu poate fi decât punctul critic determinat mai sus. Așadar perechea (a, b) de mai sus reprezintă soluția problemei.

Pentru exemplul general de mai sus, o parte din calcule s-ar păstra dacă am avea o dependență de tipul $v = a \cdot p(t) + b \cdot q(t)$, unde $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, obținându-se sistemul

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N p^2(t_i) & \sum_{i=1}^N p(t_i)q(t_i) \\ \sum_{i=1}^N p(t_i)q(t_i) & \sum_{i=1}^N q^2(t_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N p(t_i)v_i \\ \sum_{i=1}^N q(t_i)v_i \end{pmatrix}.$$

Din nou folosind inegalitatea lui Hölder, matricea este inversabilă dacă și numai dacă $(p^2(t_i))_{i=\overline{1,N}}$ și $(q^2(t_i))_{i=\overline{1,N}}$ nu sunt proporționale.

În general, pentru dependențe mai complicate (neliniare în parametrul x) metoda celor mai mici pătrate nu are o soluție care să poată fi atât de ușor dedusă, așa încât, în astfel de situații sunt folosiți diverși algoritmi care să furnizeze aproximări ale soluției (a se vedea secțiunea următoare).

Exemplul 3.5.3 (restricții geometrice - restricții funcționale) Problema din Exemplul 3.3.5 adică problema minimizării lui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

pe mulțimea restricțiilor

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

poate fi abordată acum și prin considerarea funcției

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x) = (x_1 + x_2 - 1, -x_1, -x_2).$$

Astfel, reinterprețăm problema ca având constrângerea $g(x) \leq 0$. Cum g_i sunt liniare nu e nevoie să verificăm condiții de calificare (conform Teoremei 3.4.15). Atunci, dacă $\bar{x} \notin \text{int } M$ este soluție a problemei, există $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}_+^3$ astfel încât

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}) + \lambda_3 \nabla g_3(\bar{x}) = 0 \\ \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in \overline{1,3}. \end{cases}$$

Discuția se împarte acum din nou pe cele șase cazuri de mai sus. De exemplu dacă punctul $\bar{x}$ este pe segmentul deschis de capete $(0, 1)$, $(1, 0)$, atunci $g_2(\bar{x}) < 0$, $g_3(\bar{x}) < 0$, deci $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, iar sistemul de mai sus se reduce la

$$\begin{cases} -1 - 2\bar{x}_2 + \bar{x}_1 + \lambda_1 = 0 \\ -2 - 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

care are soluția $\lambda_1 = 2$, $\bar{x} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. La fel, se arată că în celelalte situații sistemul provenit din condițiile Karush-Kuhn-Tucker nu are soluție, astfel încât atât cazurile considerate cât și concluzia sunt practic ca în Exemplul 3.3.5.

Exemplul 3.5.4 (optimizare pe simplexul unitate) Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ convexă și diferențiabilă. Dacă dorim să minimizăm această funcție pe simplexul unitate (a se vedea Exemplul 2.6.4), atunci, conform Propoziției 3.3.13, $\bar{x} \in M$ este punct de minim pentru f pe M dacă și numai dacă $-\nabla f(\bar{x}) \in N(M, \bar{x})$. Din forma particulară a lui $N(M, \bar{x})$, deducem că această condiție se scrie

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) &= c, \text{ (constantă), } \forall i \notin I(\bar{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) &\geq c, \forall i \in I(\bar{x}). \end{aligned}$$

Fie $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\sum_{i=1}^p n_i = N > 0$ și fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$. Să minimizăm această funcție pe simplexul unitate din $\mathbb{R}^p$. Evident că problema are soluție, f fiind continuă, iar M compactă. Cum f este nulă dacă măcar una dintre componentele argumentului este zero, soluțiile se vor găsi în mulțimea

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid x_i > 0, \forall i \in \overline{1, p}, \sum_{i=1}^p x_i = 1 \right\}.$$

Cu notațiile din Exemplul 2.6.4, aceasta înseamnă $I(\bar{x}) = \emptyset$. Mai întâi, condiția necesară de optimalitate $-\nabla f(\bar{x}) \in N(M, \bar{x})$, se scrie, ținând cont de expresia conului normal (Exemplul 2.6.4)

$$\frac{n_i}{\bar{x}_i} f(\bar{x}) = c, \text{ constantă, } \forall i \in \overline{1, p},$$

adică

$$\frac{n_i}{\bar{x}_i} = c', \text{ constantă, } \forall i \in \overline{1, p}.$$

Cum $\sum_{i=1}^p \bar{x}_i = 1$ și $\sum_{i=1}^p n_i = N$, găsim

$$\bar{x}_i = \frac{n_i}{N}, \forall i \in \overline{1, p}.$$

Cum problema are soluție și un singur punct verifică condiția necesară, deducem că acel punct este soluția căutată.

O altă abordare constă în transformarea restricției geometrice într-una funcțională. Fie $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sum_{i=1}^p x_i - 1$. Este clar că $M = \{x \in \mathbb{R}^p \mid h(x) = 0\}$. Fie $\bar{x}$ soluție a problemei. Cum $\nabla h(\bar{x}) \neq 0$, putem aplica Teorema 3.4.3 pentru a deduce că există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\nabla f(\bar{x}) + \mu \nabla h(\bar{x}) = 0,$$

adică

$$-\frac{n_i}{\bar{x}_i} f(\bar{x}) = \mu, \text{ constantă, } \forall i \in \overline{1, p}.$$

Astfel, se obține aceeași concluzie ca mai sus.

Exemplul 3.5.5 (obținerea unor inegalități) Metodele de optimizare studiate permit obținerea unor inegalități remarcabile. Ilustrăm astfel de posibilități.

1. Fie funcția $f : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } (x, y, z) = 0 \in \mathbb{R}^3, \\ \frac{xyz}{(x+y+z)^2}, & \text{dacă } (x, y, z) \neq 0. \end{cases}$$

Fie $a > 0$. Studiind problema maximizării lui f pe mulțimea

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

vom deduce următoarea inegalitate: pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$|xyz| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}} (|x| + |y| + |z|)^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Mai întâi, observăm că funcția f este evident continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ca raport de funcții continue. Mai mult, pentru $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3$:

$$xyz \leq (\max(x, y, z))^3$$

și

$$(x + y + z)^2 \geq (\max(x, y, z))^2,$$

deci $f(x, y, z) \leq \max(x, y, z)$, ceea ce probează continuitatea lui f în 0.

Mulțimea $M \cup \{0\}$ este compactă, așadar f își atinge maximul global pe $M \cup \{0\}$. Cum acest maxim nu poate fi în 0, rezultă că punctul de maxim este în M . Din nou, este evident că f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}_+^3$. Este aplicabilă Teorema Karush-Kuhn-Tucker pentru problema maximizării lui f cu restricția $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și cu $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \setminus \{0\}$. Astfel, dacă $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 \setminus \{0\}$ este punct de maxim pentru această problemă, există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{aligned} \frac{yz}{(x+y+z)^2} - 2\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu x &= 0 \\ \frac{xz}{(x+y+z)^2} - 2\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu y &= 0 \\ \frac{xy}{(x+y+z)^2} - 2\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Deducem

$$\begin{aligned} \frac{xyz}{(x+y+z)^2} - 2x\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu x^2 &= 0 \\ \frac{xyz}{(x+y+z)^2} - 2y\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu y^2 &= 0 \\ \frac{xyz}{(x+y+z)^2} - 2z\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \end{aligned}$$

de unde

$$0 < f(x, y, z) = 3 \frac{xyz}{(x+y+z)^2} - 2 \frac{xyz}{(x+y+z)^2} = -2\mu a^2.$$

În particular, $\mu < 0$ și scăzând primele două ecuații din sistemul Karush-Kuhn-Tucker, avem

$$\frac{z(y-x)}{(x+y+z)^2} + 2\mu(x-y) = 0,$$

deci

$$\left(2\mu - \frac{z}{(x+y+z)^2}\right)(x-y) = 0.$$

Cum expresia din prima paranteză este strict mai mică decât 0, găsim $x = y$. Similar, $x = z$, deci

$$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

și

$$\sup_{(x,y,z) \in M} f(x, y, z) = \frac{a}{9\sqrt{3}}.$$

Fie acum $x, y, z \in \mathbb{R}$. Notăm $a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ și din cele de mai sus,

$$f(|x|, |y|, |z|) \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{9\sqrt{3}},$$

iar concluzia se obține imediat.

2. Fie $x, y, z \geq 0$ cu $x + y + z = 1$. Arătăm că

$$0 \leq xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Pentru aceasta considerăm problemele minimizării și maximizării funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ date prin

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz - 2xyz$$

cu restricțiile $x, y, z \geq 0$ cu $x + y + z = 1$. Cum mulțimea punctelor fezabile este compactă, ambele probleme au soluții globale. De asemenea, observăm că sistemul de restricții este afin.

Pentru a simplifica calculele, să observăm că dacă cel puțin una dintre variabile este 0, atunci inegalitatea este adevărată. Deci putem presupune că $x, y, z > 0$, adică restricțiile inegalități sunt inactive. Astfel, considerăm doar restricția egalitate și condițiile de optimalitate se scriu similar pentru ambele probleme: există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} y + z - 2yz + \mu = 0 \\ x + z - 2xz + \mu = 0 \\ x + y - 2xy + \mu = 0 \\ x + y + z = 1. \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

Scăzând ecuațiile două câte două obținem că singura posibilitate este $x = y = z = 3^{-1}$. Dar

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

Cum, de exemplu, $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) < \frac{7}{27}$ deducem că punctul obținut este soluția globală a problemei de maximizare. Obținem astfel inegalitatea din dreapta. Cum nu am obținut soluție pentru problema de minimizare, atunci când am îndepărtat restricțiile cu inegalități, înseamnă că soluțiile acestei probleme au măcar o componentă nulă. Deci are loc și inegalitatea din stânga, iar egalitatea este atinsă, de exemplu, în $(1, 0, 0)$.

Exemplul 3.5.6 (o problemă de geometrie plană) *Fixăm lungimile tuturor laturilor unui patrulater. Care este poziția acestor laturi încât aria patrulaterului să fie maximă?*

Vom încerca să abordăm această problemă din prisma Teoriei Optimizării, întrucât este o problemă de maximizare. Notăm cu $ABCD$ patrulaterul și cu θ_1, θ_2 unghiurile din A și respectiv C . Aria patrulaterului este suma ariilor triunghiurilor ABD și CBD , deci

$$\frac{1}{2}(ad \sin \theta_1 + bc \sin \theta_2).$$

Evident, avem o legătură între unghiurile θ_1 și θ_2 , legătură pe care o determinăm exprimând lungimea diagonalei BD în cele două triunghiuri:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta_1 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_2.$$

Avem acum problema maximizării funcției obiectiv $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(\theta_1, \theta_2) = ad \sin \theta_1 + bc \sin \theta_2$$

cu restricțiile $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$, $h(\theta_1, \theta_2) = 0$, unde $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(\theta_1, \theta_2) = (a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta_1) - (b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta_2).$$

Este clar că mulțimea punctelor fezabile este compactă, iar funcția obiectiv este continuă, deci Teorema lui Weierstrass asigură faptul că problema admite soluție. Este clar că pentru atingerea maximului nu putem avea $\theta_1, \theta_2 \in \{0, \pi\}$, deci restricțiile date de $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ sunt inactice. Cum $\nabla h(\theta_1, \theta_2) = 0 \in \mathbb{R}^2$, înseamnă că $\sin \theta_1 = \sin \theta_2 = 0$ ceea ce corespunde cazului unui patrulater degenerat (de arie 0), deducem că în toate punctele de maxim (eventualele soluții) are loc condiția de liniară independență. Aplicăm Teorema Karush-Kuhn-Tucker: dacă (θ_1, θ_2) este punct de maxim pentru problema dată, există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\nabla f(\theta_1, \theta_2) + \mu \nabla h(\theta_1, \theta_2) = (0, 0),$$

ceea ce conduce la sistemul

$$\begin{cases} ad \cos \theta_1 + 2\mu ad \sin \theta_1 = 0 \\ bc \cos \theta_2 - 2\mu bc \sin \theta_2 = 0. \end{cases}$$

Am hotărât că într-un punct de maxim $\sin \theta_1, \sin \theta_2 \neq 0$, deci

$$2\mu = -\frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2},$$

adică

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = 0.$$

Cum $0 < \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$, deducem că $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, adică patrulaterul este inscriptibil. Cum se poate relativ ușor constata că există o unică poziție a laturilor astfel încât $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, deducem că soluția este unică. Demonstrația este completă.

Exemplul 3.5.7 (proiecția pe un hiperplan, distanța la un hiperplan) Fie $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ și $a \in \mathbb{R}$. Considerăm mulțimea (numită hiperplan)

$$M := \{x \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, x \rangle = a\}.$$

Această mulțime este convexă și închisă, deci, pentru orice $v \in \mathbb{R}^p \setminus M$, există proiecția lui v pe M , pe care o notăm cu v_a . Ne propunem să determinăm expresia explicită a acestui element și valoarea distanței de la v la M , adică $\|v - v_a\|$.

Fixăm așadar $v \in \mathbb{R}^p \setminus M$. Atunci v_a este soluția unică a problemei de minimizare a funcției $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \|x - v\|^2,$$

pentru

$$x \in M = \{x \in \mathbb{R}^p \mid h(x) = 0\},$$

unde $h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e dată prin $h(x) = \langle u, x \rangle - a$.

Alegerea funcției obiectiv ca mai sus are aceeași motivație ca și în cazul metodei celor mai mici pătrate. Evident, $\nabla f(x) = x - v$, $\nabla h(x) = u$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Cum constrângerea (privită funcțional) este afină, iar f este convexă, elementul v_a este caracterizat de

$$\begin{cases} \exists \mu \in \mathbb{R}, \nabla f(v_a) + \mu \nabla h(v_a) = 0 \\ \langle u, v_a \rangle = a, \end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} v_a - v + \mu u = 0 \\ \langle u, v_a \rangle = a. \end{cases}$$

Din prima relație, făcând produsul scalar cu u , deducem

$$\langle v_a - v, u \rangle + \mu \|u\|^2 = 0,$$

deci, folosind a doua relație,

$$\mu = \frac{\langle u, v \rangle - a}{\|u\|^2}.$$

Revenind, obținem

$$v_a = v - \frac{\langle u, v \rangle - a}{\|u\|^2} u.$$

În final, distanța de la v la M are valoarea

$$\|v - v_a\| = \frac{|\langle u, v \rangle - a|}{\|u\|}.$$

Exemplul 3.5.8 (proiecția pe un elipsoid generalizat) Fie acum $a_1, a_2, \dots, a_p \in (0, \infty)$ și mulțimea (elipsoidul generalizat)

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^p \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Evident această mulțime este convexă și compactă. Fie $v \notin M$. Există $\bar{v} \in M$, proiecția lui v pe M . Din nou, dorim să găsim o expresie a acestui element.

Ca mai sus, $\bar{v}$ este soluție a problemei de optimizare a funcției $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x - v\|^2$ sub constrângerea

$$x \in M = \{x \in \mathbb{R}^p \mid g(x) \leq 0\},$$

unde $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ e dată prin

$$g(x) = \sum_{i=1}^p \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 - 1$$

Observăm că funcția g este convexă și are loc condiția Slater.

În plus, funcția f este de asemenea convexă, așa încât putem trage concluzia că $\bar{v}$ este soluție a problemei dacă și numai dacă există $\lambda \geq 0$ astfel încât

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{v}) + \lambda \nabla g(\bar{v}) = 0 \\ \lambda g(\bar{v}) = 0. \end{cases}$$

Acest sistem este echivalent cu

$$\begin{aligned} \bar{v}_i - v_i + \lambda \frac{\bar{v}_i}{a_i^2} &= 0 \\ \lambda \left(\sum_{i=1}^p \left(\frac{\bar{v}_i}{a_i} \right)^2 - 1 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Dacă $\lambda = 0$, prima ecuație atrage $\bar{v} - v = 0$, adică $v \in M$, ceea ce este fals.

Prin urmare $\lambda \neq 0$ și restricția este activă în $\bar{v}$, adică $\sum_{i=1}^p \left(\frac{\bar{v}_i}{a_i} \right)^2 = 1$. Deducem că

$$\bar{v}_i = \frac{a_i^2 v_i}{a_i^2 + \lambda}, \quad \forall i = \overline{1, p}.$$

Pe de altă parte, cum $\sum_{i=1}^p \left(\frac{\bar{v}_i}{a_i} \right)^2 = 1$, deci

$$\sum_{i=1}^p \frac{a_i^2 v_i^2}{(a_i^2 + \lambda)^2} = 1.$$

Altfel, a-l găsi pe λ presupune a rezolva ecuația de mai sus în necunoscuta $\lambda > 0$. În sfârșit, să remarcăm că ecuația are soluție unică întrucât funcția

$$0 \leq \lambda \mapsto \sum_{i=1}^p \frac{a_i^2 v_i^2}{(a_i^2 + \lambda)^2}$$

este strict descrescătoare iar valoarea sa în 0 este strict supraunitară (pentru că $v \notin M$) în timp ce limita sa la $+\infty$ este 0. Revenind, a-l determina pe $\bar{v}$ revine la rezolvarea unei ecuații de grad $2p$, lucru în general imposibil.

Atunci vom fi interesați de metode de aproximare a rădăcinilor ecuațiilor neliniare, lucru de care ne vom ocupa în capitolul următor.

3.6 Exerciții

Exercițiul 3.1 Să se deseneze mulțimea punctelor fezabile, mulțimile de nivel pentru funcția obiectiv și să se determine grafic soluțiile pentru problemele de mai jos:

(i)

$$\begin{aligned} & \max(x_1 - x_2), \text{ cu} \\ & x_1 + x_2 \leq 1, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq -1, \quad -x_1 + 3x_2 \geq -3 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \max(2x_1 + 6x_2), \text{ cu} \\ & -x_1 + x_2 \leq 1, \quad 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Exercițiul 3.2 Să se deseneze în plan regiunea determinată de inegalitățile

$$x_2 \geq 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 3, \quad -x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 4.$$

Să se determine punctele din această regiune în care următoarele expresii își ating maximul și respectiv minimul:

$$2x_1 + x_2; \quad x_1 + x_2; \quad x_1 + 2x_2.$$

Exercițiul 3.3 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Să se arate că f' este surjectivă.

Soluție Fie $r \in \mathbb{R}$ arbitrar și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - rx$. E clar că $\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ și deci g își atinge minimul (global) într-un punct $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Deci, din Teorema lui Fermat, $0 = g'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - r$. $\square$

Exercițiul 3.4 Fie $f, g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ funcții diferențiabile și $a \in \mathbb{R}^p$. Presupunem că $f(a) = g(a)$ și că pe o vecinătate a lui a , $f(x) \geq g(x)$. Să se arate că $\nabla f(a) = \nabla g(a)$.

Problema 3.5 Fie $U \subset \mathbb{R}^p$ deschisă, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continuă și $\bar{x} \in U$. Presupunem că există o vecinătate V a lui $\bar{x}$ astfel încât f este diferențiabilă pe $V \setminus \{\bar{x}\}$ și $\nabla f(x)(x - \bar{x}) \geq 0$ pentru orice $x \in V \setminus \{\bar{x}\}$. Atunci $\bar{x}$ este punct de minim local pentru f .

Soluție Este suficient să considerăm că V este o bilă deschisă centrată în $\bar{x}$. Fie $x \in V \setminus \{\bar{x}\}$. Considerăm funcția $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(\bar{x} + t(x - \bar{x}))$ care, din proprietățile lui f , este continuă pe $[0, 1]$ și derivabilă pe $(0, 1)$, iar

$$\varphi'(t) = \nabla f(\bar{x} + t(x - \bar{x}))(x - \bar{x}).$$

Aplicând Teorema lui Lagrange lui φ pe $[0, 1]$, există $u \in (0, 1)$ cu $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(u)$, adică

$$f(x) - f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x} + u(x - \bar{x}))(x - \bar{x}).$$

Evident, notând $x_u = \bar{x} + u(x - \bar{x}) \in V \setminus \{\bar{x}\}$ avem $x - \bar{x} = u^{-1}(x_u - \bar{x})$. Deci, folosind relația de mai sus și ultima ipoteză,

$$f(x) - f(\bar{x}) = u^{-1} \nabla f(x_u)(x_u - \bar{x}) \geq 0.$$

Concluzia este acum evidentă. $\square$

Problema 3.6 Fie $U \subset \mathbb{R}^p$ deschisă, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferențiabilă și $\bar{x} \in U$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $\bar{x}$ este un punct critic al lui f .

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, $\bar{x}$ este un punct de minim local pentru funcția

$$x \mapsto f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|.$$

Soluție Presupunem că are loc (i) și luăm $\varepsilon > 0$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $\bar{x}$ nu este punct de minim pentru f_ε . Atunci există un șir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \bar{x}$ de elemente din U astfel încât

$$f_\varepsilon(x_k) < f_\varepsilon(\bar{x}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Evident, $x_k \neq \bar{x}$ pentru orice k ,

Cum f este diferențiabilă în $\bar{x}$, există $(\alpha_k) \rightarrow 0$ astfel încât pentru orice k

$$f(x_k) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x_k - \bar{x}) + \alpha_k \|x_k - \bar{x}\|.$$

Deci, pentru orice k ,

$$-\varepsilon \|x_k - \bar{x}\| - \alpha_k \|x_k - \bar{x}\| \geq 0,$$

adică $-\varepsilon \geq \alpha_k$. Cum $(\alpha_k) \rightarrow 0$, aceasta este o contradicție.

Presupunem acum că (ii) are loc. Fie $\varepsilon > 0$. Există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D(\bar{x}, \delta_\varepsilon)$,

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon \|x - \bar{x}\|.$$

Fie $u \in \mathbb{R}^p$ de normă 1. Atunci, luând $x = \bar{x} + t\delta_\varepsilon u$ cu $t \in (0, 1)$, în inegalitatea de mai sus avem

$$\frac{f(\bar{x} + t\delta_\varepsilon u) - f(\bar{x}) - t\delta_\varepsilon \nabla f(\bar{x})(u)}{t\delta_\varepsilon \|u\|} t\delta_\varepsilon \|u\| + t\delta_\varepsilon \nabla f(\bar{x})(u) + \varepsilon t\delta_\varepsilon \|u\| \geq 0,$$

deci

$$\frac{f(\bar{x} + t\delta_\varepsilon u) - f(\bar{x}) - t\delta_\varepsilon \nabla f(\bar{x})(u)}{t\delta_\varepsilon \|u\|} + \nabla f(\bar{x})(u) + \varepsilon \geq 0.$$

Trecând la limită cu $t \rightarrow 0$, avem $\nabla f(\bar{x})(u) + \varepsilon \geq 0$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, deducem $\nabla f(\bar{x})(u) \geq 0$ pentru orice u de normă 1. Aceasta înseamnă că $\nabla f(\bar{x}) = 0$. $\square$

Problema 3.7 Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $c < d$ și $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Definim $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \inf\{f(x, y) \mid y \in [c, d]\}.$$

Să se arate că φ este bine definită și continuă.

Soluție Aplicația

$$[c, d] \ni y \mapsto f(x, y)$$

este continuă, deci își atinge minimumul pe $[c, d]$. Prin urmare, există $y_x \in [c, d]$ astfel încât $\varphi(x) = f(x, y_x)$.

Din Teorema lui Cantor (Teorema 4.6.51), f este uniform continuă pe mulțimea compactă $[a, b] \times [c, d]$: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, încât pentru orice $(x', y'), (x'', y'') \in [a, b] \times [c, d]$ cu $\|(x', y') - (x'', y'')\| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$.

Fie $x', x'' \in [a, b]$ cu $|x' - x''| \leq \delta_\varepsilon$. Atunci

$$\begin{aligned}\varphi(x') - \varphi(x'') &= f(x', y_{x'}) - f(x'', y_{x''}) \\ &\leq f(x', y_{x''}) - f(x'', y_{x''}) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Schimbând rolurile lui x' și x'' , obținem

$$\varphi(x'') - \varphi(x') < \varepsilon,$$

de unde deducem concluzia. □

Exercițiul 3.8 Să se determine punctele de extrem local ale funcțiilor de mai jos (probleme fără restricții):

- (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 6x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 45x_1 - 51x_2 + 7$;
- (ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
- (iii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$;
- (iv) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$;
- (v) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (1 + x_2)^3 x_1^2 + x_2^2$;
- (vi) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1(x_2 + 1) - x_1^2x_2$;
- (vii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = -x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 36x_2 + 9$;
- (viii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$;
- (ix) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 8x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2$;
- (x) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 2x_1x_2$;
- (xi) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1x_2^2e^{x_1-x_2}$;
- (xii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_2^4 + 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2$;
- (xiii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4)$;
- (xiv) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2$;
- (xv) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$;
- (xvi) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1x_2^2e^{x_1-x_2}$;
- (xvii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 3x_2^3 - 150x_1$;
- (xviii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2)e^{2x_1+3x_2}$;
- (xix) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^3 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 3x_2 + 2$;
- (xx) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 8x_3 - 5$;
- (xxi) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \ln(1 + x_1^2 + x_3^2)$;
- (xxii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2e^{x_3}$.

Soluție (i) Rezolvăm sistemul ce rezultă din relația $\nabla f(x) = 0$ pentru a determina punctele critice. Avem sistemul

$$\begin{aligned}12x_1x_2 &= 45 \\ 6x_1^2 + 6x_2^2 &= 51\end{aligned}$$

care are soluțiile $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}), (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

Astfel, în cazul nostru, obținem concluziile: $(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ este minim local, $(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), (-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$ nu sunt extreme locale, $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ este maxim local.

(iii) Singurul punct critic este $(0, 0)$, dar determinanții formați din matricea hessiană sunt nuli, deci nu putem decide pe această bază. Totuși este simplu de observat că

$$f(x_1, x_2) \geq 0 = f(0, 0), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

deci $(0, 0)$ este minim global.

(iv) Din nou, singurul punct critic este $(0, 0)$, dar nu putem decide dacă este punct de extrem pe baza teoriei de mai sus. Observăm că $f(0, 0) = 0$, iar pentru șirul $x_n = (\frac{1}{n}, 0) \rightarrow (0, 0)$, $f(x_n) > 0$ în timp ce pentru $y_n = (0, -\frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$, $f(y_n) < 0$. Deci în orice vecinătate a lui $(0, 0)$ există atât puncte pentru care funcția cost ia valori mai mari cât și valori mai mici. Deci punctul nu este de extrem local.

La celelalte subpuncte se procedează analog: există atât puncte critice pentru care putem aplica teoria, cât și puncte pentru care trebuie folosită structura problemei. Există de asemenea situații în care se poate decide dacă $\nabla^2 f(\bar{x})$ este pozitiv (negativ) definită sau nu folosind calculul direct al acesteia, criteriul lui Sylvester nefiind aplicabil. $\square$

Implementare Matlab 3.9 Să se reprezinte grafic funcțiile de mai sus precum și curbele lor de nivel (i.e., mulțimile de tip $\{x \mid f(x) = c\}$, unde c este o constantă) și să se compare cu concluziile teoretice. Ilustrăm reprezentările grafice pentru punctul (iv). Folosim codul:

```
[x,y]=meshgrid(-0.5:.001:0.5);
```

```
z=x.^2+y.^3;
```

```
mesh(x,y,z)
```

iar pentru a desena curbele de nivel:

```
[c,h]=contour(x,y,z,70);
```

```
clabel(c,h);
```

Pentru punctul (v), se desenează ca mai sus pe `[x,y]=meshgrid(-7:.01:7)`.

Exercițiul 3.10 Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + \alpha$ are un punct de minim global. Determinați α astfel încât $\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = 0$.

Exercițiul 3.11 Pentru următoarele funcții studiați punctele de extrem și stabiliți dacă există extreme globale.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 + 2y - 3xy - \frac{7}{2}y^2$.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 3x - y$;

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + y^2 - z - yz + z^2$.

Exercițiul 3.12 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - \sin y$. Să se arate că f are o infinitate de minime globale, dar nu are niciun maxim local. Să se reprezinte grafic funcția folosind Matlab.

Exercițiul 3.13 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{3x} + y^3 - 3ye^x$. Să se arate că f are un singur punct critic care este punct de minim local dar nu este punct de minim global.

Exercițiul 3.14 Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ are o infinitate de maxime globale, dar nu are niciun minim local.

Exercițiul 3.15 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

și mulțimea restricțiilor

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Să considerăm problema (P) a minimizării lui f pe M . Să se verifice dacă este îndeplinită condiția necesară, respectiv condiția suficientă de optimalitate de ordinul I în punctele: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{1}{3})$, $(\frac{1}{4}, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$.

Similar pentru problema maximizării lui f pe M .

Exercițiul 3.16 Să se demonstreze ultima afirmație de la Exemplul 3.4.4.

Exercițiul 3.17 Fie $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4$. Să se arate că sistemul de restricții $h(x) = 0$ satisface condiția Abadie în toate punctele sale. Apoi, să se determine maximele și minimele globale ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ cu această restricție.

Soluție Mulțimea punctelor fezabile este

$$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4\}.$$

Este clar că pentru orice $x \in M$,

$$D(x) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0\}.$$

Folosind Teorema lui Lyusternik, deducem că $T(M, x)$ este exact $D(x)$. Deci condiția Abadie are loc.

Cum sfera descrisă de ecuația $h(x) = 0$ este mulțime compactă și f este continuă, din Teorema lui Weierstrass există extremele globale ale problemei date. Se observă că în cazul de față, având doar restricții egalități atât pentru minime cât și pentru maxime, trebuie să determinăm mai întâi punctele critice ale funcției lagrangian. Obținem sistemul

$$\begin{aligned}x_1(3x_1 + 2\mu) &= 0 \\x_2(3x_2 + 2\mu) &= 0 \\x_3(3x_3 + 2\mu) &= 0 \\x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 4.\end{aligned}$$

Avem de distins între mai multe situații.

- Dacă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ atunci punctul nu este fezabil.
- Dacă $x_1 = x_2 = 0$ și $x_3 \neq 0$, avem $x_3 = \pm 2$ (μ nu este important acum).
- Dacă $x_1 = 0$, $x_2, x_3 \neq 0$, obținem $x_2 = x_3 = \pm\sqrt{2}$.

- Dacă $x_1, x_2, x_3 \neq 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Luând în calcul că celelalte cazuri sunt simetrice acestora, avem punctele

$$\begin{aligned} &(\pm 2, 0, 0); (0, \pm 2, 0); (0, 0, \pm 2); \\ &(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}); (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}); \\ &(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}); (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0); (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0); \\ &\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right); \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Prin calculul direct al valorilor funcției în aceste puncte, deducem că maximum este 8 și este atins în $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$, iar minimum este -8 , fiind atins în $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$, $(0, 0, -2)$. $\square$

Exercițiul 3.18 Să se determine minimumul și maximumul global al funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ pe cercul unitate cu centrul în origine.

Exercițiul 3.19 Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^2$ și $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9$. Să se studieze minimele lui f sub restricția $g(x) \leq 0$.

Exercițiul 3.20 Să se determine punctul (punctele) cel (cele) mai apropiat (apropiate) de origine al (ale) suprafețelor:

- (i) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$;
- (ii) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$.

Exercițiul 3.21 Fie problema minimizării lui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_2$$

cu restricția $g(x) \leq 0$ unde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x_1 + x_2 - 1$. Să se arate că problema este convexă (i.e. f, g sunt convexe) și să se determine soluțiile acesteia.

Exercițiul 3.22 Fie $a > 4^{-1}$, $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + ax_2^2 + x_1x_2 + x_1$ și $g(x) = x_1 + x_2 - 1$. Să se studieze problema (P) (cu notațiile standard).

Exercițiul 3.23 Fie funcția obiectiv $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$ și funcția $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$ ce definește o restricție de tip egalitate (adică $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) = 0\}$). Studiați problema (P).

Exercițiul 3.24 Fie $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2. \\ g_1(x) &= -x_2 + x_1^2 \\ g_2(x) &= x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Fie problema minimizării lui f cu restricțiile $g_1(x) \leq 0$, $g_2(x) \leq 0$. Să se deseneze mulțimea punctelor fezabile. Să se arate că g_1, g_2 sunt funcții convexe și că are loc condiția Slater. Apoi, să se justifice existența și unicitatea și să se determine soluția problemei atât grafic cât și analitic pe baza condițiilor Karush-Kuhn-Tucker.

Exercițiul 3.25 Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și $g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, x_3) = -x_3$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$. Considerăm problema minimizării lui f cu restricțiile $g(x) \leq 0, h(x) = 0$. Să se arate că problema are soluție, că se poate aplica teorema Karush-Kuhn-Tucker (verificând condiția de liniară independentă) și apoi să se determine soluțiile.

Exercițiul 3.26 Fie $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)$, $g(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2$, $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 2$. Considerăm problema minimizării lui f cu restricțiile $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$. Să se arate că problema are soluție locală, sistemul de constrângeri este convex și este îndeplinită cel puțin o condiție de calificare. Se se aplice Teorema Karush-Kuhn-Tucker și să se determine soluțiile.

Exercițiul 3.27 Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + 4x_2 + 4$, $g(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4$. Să se arate că f, g sunt convexe. Fie problema minimizării globale a lui f cu restricția $g(x) \leq 0$. Să se arate că mulțimea restricțiilor este compactă, este îndeplinită o condiție de calificare și să se determine soluțiile problemei.

Exercițiul 3.28 Fie $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $g(x) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$. Să se arate că f este convexă dar g nu este convexă. Să se arate că are loc o condiție de calificare pentru restricția $g(x) \leq 0$. Să se arate că mulțimea restricțiilor este închisă și nemărginită. Să se justifice faptul că problema minimizării lui f cu restricția $g(x) \leq 0$ are soluție globală și să se găsească soluțiile.

Exercițiul 3.29 Fie $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}$. Se consideră problema determinării proiecției originii pe mulțimea M . Justificați faptul că această problemă este echivalentă cu rezolvarea problemei minimizării funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ cu restricția $x \in M$. Să se studieze această problemă sub următoarele aspecte: (i) existența și unicitatea soluției; (ii) posibilitatea aplicării Teoremei Karush-Kuhn-Tucker pentru determinarea soluției (soluțiilor); (iii) determinarea efectivă a soluției (soluțiilor).

Exercițiul 3.30 Să se determine maximele și minimele globale ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ pe mulțimea punctelor ce satisfac $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, stabilind mai întâi existența soluțiilor și studiind posibilitatea aplicării Teoremei Karush-Kuhn-Tucker.

Soluție Punctele căutate există pe baza Teoremei lui Weierstrass. Avem o restricție de forma $h(x) = 0$, unde

$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad h(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4, x_1 + x_2 + x_3 - 1).$$

Condiția de liniară independentă este satisfăcută pentru toate tripletele (x_1, x_2, x_3) pentru care măcar două coordonate sunt diferite. Cum nu există puncte fezabile cu $x_1 = x_2 = x_3$ deducem că are loc condiția de calificare dorită, deci punctele de extrem sunt puncte critice ale

lagrangianului. Obținem sistemul

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 2\mu_1x_1 + \mu_2 &= 0 \\ 3x_2^2 + 2\mu_1x_2 + \mu_2 &= 0 \\ 3x_3^2 + 2\mu_1x_3 + \mu_2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Pentru ca sistemul format din primele trei ecuații să fie compatibil în necunoscutele μ_1, μ_2 trebuie ca

$$\begin{vmatrix} 3x_1^2 & 2x_1 & 1 \\ 3x_2^2 & 2x_2 & 1 \\ 3x_3^2 & 2x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

deci

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Obținem soluțiile

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3}\right) \\ &\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{3}\right) \end{aligned}$$

și permutările lor. Este acum ușor de verificat că primul set de soluții corespunde maximului, iar celălalt corespunde minimului. $\square$

Exercițiul 3.31 Fie problema $\min \left(\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + \frac{3x_3^2}{2} \right)$ cu restricțiile $x_1^2 + x_3 \leq 1$ și $x_2^2 + x_3^2 = 4$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.32 Fie problema $\min \left(x_1^2 + x_2 + \frac{x_3^2}{2} \right)$ cu restricțiile $x_3^2 - x_1 \leq 0$ și $x_2^2 + x_3^2 = 1$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.33 Studiați problema maximizării funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = -2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

cu restricțiile

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Exercițiul 3.34 Determinați minimele și maximele globale pentru $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ cu restricțiile

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{5} + \frac{x_3^2}{25} = 1 \text{ și } x_3 = x_1 + x_2.$$

Exercițiul 3.35 Determinați $\min(-3.6x_1 + 0.4x_1^2 - 1.6x_2 + 0.2x_2^2)$ cu restricțiile $2x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exercițiul 3.36 Fie problema $\min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1)$ cu restricțiile $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ și $x_3 \leq 4$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.37 Fie problema $\min(x_1 - x_2^2 + 2x_3)$ cu restricțiile $x_1^2 + x_3^2 \leq 5$ și $x_2^2 - x_1^2 \leq 1$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.38 Determinați soluțiile globale ale problemei $\max(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3)$ cu restricțiile $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$, $\theta_i \geq 0$, $i \in \overline{1, 3}$.

Exercițiul 3.39 Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ și $a_i > 0$, pentru orice $i \in \overline{1, n}$. Să se determine minimul expresiei

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^2$$

supusă la constrângerea

$$\sum_{i=1}^n x_i = c,$$

unde c este o constantă dată. Care este maximul expresiei sub aceeași restricție?

Soluție Să observăm că dacă notăm cu $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = c\}$ mulțimea punctelor fezabile și cu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ funcția obiectiv, atunci pentru $\nu \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i c^2}{n^2}$ mulțimea $M \cap N_\nu f$ este nevidă (conține, spre exemplu, elementul $(cn^{-1}, \dots, cn^{-1}) \in \mathbb{R}^n$) și mărginită. Deci, conform Teoremei 3.2.2, există minimul problemei propuse. Cum funcția ce dă restricția este afină, nu este nevoie să verificăm condiții de calificare. Astfel, condițiile de optimalitate prin intermediul lagrangianului conduc la

$$2a_i x_i + \mu = 0, \quad \forall i \in \overline{1, n},$$

deci

$$x_i = -\frac{\mu}{2a_i}.$$

Înlocuind în forma restricției deducem

$$c = -\sum_{i=1}^n \frac{\mu}{2a_i},$$

deci

$$\mu = -\frac{2c}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

Prin urmare

$$x_i = \frac{c}{a_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}, \quad \forall i \in \overline{1, n}.$$

Evident, expresia nu admite un maxim: observăm că pentru șirul de puncte fezabile $(p, -p, c)_{p \in \mathbb{N}}$ valoarea expresiei tinde la $+\infty$. $\square$

Exercițiul 3.40 Să se minimizeze funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + \frac{1}{2} \left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_3^2}{10} \right)$$

sub restricțiile $x_1 + x_2 + x_3 = r$ ($r > 0$), $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Soluție Existența minimului este asigurată de Teorema lui Weierstrass. Constrângerile sunt liniare, deci nu avem de verificat condiții de calificare. Oricum, pentru a aduce problema la forma standard, restricțiile cu inegalități se scriu $-x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_3 \leq 0$. Folosind lagrangianul obținem sistemul

$$\begin{aligned} x_1 - \lambda_1 + \mu &= 0 \\ x_2 - \lambda_2 + \mu &= 0 \\ 1 + \frac{x_3}{10} - \lambda_3 + \mu &= 0 \\ \lambda_1 x_1 &= 0 \\ \lambda_2 x_2 &= 0 \\ \lambda_3 x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= r \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

După considerarea tuturor posibilităților găsim soluția

- pentru $r \leq 2$,

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, 0 \right) \text{ și } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu) = \left(0, 0, 1 - \frac{r}{2}, \frac{r}{2} \right);$$

- pentru $r > 2$,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{r+10}{12}, \frac{r+10}{12}, \frac{5(r-2)}{6} \right) \text{ și} \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu) &= \left(0, 0, 0, -\frac{10+r}{12} \right). \end{aligned}$$

Problema este rezolvată. $\square$

Exercițiul 3.41 Să se determine punctele de minim și de maxim global ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1 x_2 x_3$ supusă la restricția $h(x) = 0$ unde $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x) = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 8, x_1 + x_2 + x_3 - 5)$.

Soluție Vom arăta mai întâi că, în acest caz, mulțimea punctelor fezabile este mărginită (deci compactă).

Folosind egalitatea $x_3 = 5 - x_1 - x_2$, putem elimina x_3 din prima restricție, adică

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5x_1 + 5x_2 + 8 = 0,$$

de unde găsim

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 13.$$

Deducem că x_1 și x_2 parcurg mulțimi de numere reale mărginite, situație care se întâmplă atunci și în cazul lui x_3 . Deci mulțimea punctelor fezabile este compactă și atât problema de minim cât și cea de maxim admit soluție.

Verificăm condiția de liniară independență: ne întrebăm dacă există două numere reale α_1, α_2 cu $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ astfel încât

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_2 + x_3) + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1(x_1 + x_3) + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1(x_1 + x_2) + \alpha_2 &= 0.\end{aligned}$$

Cum suntem interesați doar de mulțimea punctelor fezabile, deducem

$$\begin{aligned}\alpha_1(5 - x_1) + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1(5 - x_2) + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_1(5 - x_3) + \alpha_2 &= 0.\end{aligned}$$

Astfel, găsim condiția $x_1 = x_2 = x_3$ care nu este îndeplinită de nici un punct fezabil. Prin urmare, este îndeplinită condiția de liniară independență pe mulțimea punctelor fezabile. Aplicarea Teoremei 3.4.3 (și a observațiilor ce o însoțesc) conduce la concluzia: dacă $\bar{x}$ este punct de minim sau de maxim pentru problema considerată, atunci există $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{aligned}\bar{x}_2\bar{x}_3 + \mu_1(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) + \mu_2 &= 0 \\ \bar{x}_1\bar{x}_3 + \mu_1(\bar{x}_1 + \bar{x}_3) + \mu_2 &= 0 \\ \bar{x}_1\bar{x}_2 + \mu_1(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \mu_2 &= 0 \\ \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 &= 8 \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 &= 5.\end{aligned}$$

Evident, μ_1, μ_2 nu pot fi simultan 0. Înmulțind corespunzător ecuațiile și scăzându-le obținem

$$\begin{aligned}(\mu_1\bar{x}_3 + \mu_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) &= 0 \\ (\mu_1\bar{x}_2 + \mu_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_3) &= 0 \\ (\mu_1\bar{x}_1 + \mu_2)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) &= 0 \\ \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3 &= 8 \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 &= 5.\end{aligned}$$

Dacă $\mu_1 = 0$, atunci, din observația anterioară, deducem $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}_3$ ceea ce nu se poate întâmpla pe mulțimea punctelor fezabile. Deci $\mu_1 \neq 0$ și cum $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ nu pot fi egale, găsim $\bar{x} = (2, 2, 1)$, $\bar{x} = (1, 2, 2)$, $\bar{x} = (2, 1, 2)$ și $\bar{x} = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, $\bar{x} = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $\bar{x} = (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$. Comparând valorile funcției în aceste puncte deducem că primele sunt puncte de maxim, iar ultimele de minim. $\square$

Exercițiul 3.42 Să se determine minimele globale ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ pe mulțimea punctelor ce satisfac $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4$ și $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$.

Soluție Din nou, existența minimului este asigurată de Teorema lui Weierstrass. Mai observăm că este aceeași funcție obiectiv ca la Exercițiul 3.30, dar constrângerile sunt sub formă de inegalități. Se observă că sistemul de restricții este convex și, în plus, are loc condiția Slater. Deci punctele de minim se află printre punctele critice ale lagrangianului problemei. Avem

$$\begin{aligned} 3x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 3x_2^2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 &= 0 \\ 3x_3^2 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4) &= 0 \\ \lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1) &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1 \\ \lambda_1, \lambda_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Din nou, distingem mai multe cazuri.

- Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- Dacă $\lambda_1 = 0$ și $\lambda_2 \neq 0$, atunci $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ și deducem

$$\lambda_2 = -3x_1^2 = -3x_2^2 = -3x_3^2 < 0,$$

ceea ce nu este convenabil.

- Dacă $\lambda_2 = 0$ și $\lambda_1 \neq 0$, atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ și avem

$$12 + 2(x_1 + x_2 + x_3)\lambda_1 = 0,$$

adică

$$\lambda_1 = -\frac{6}{x_1 + x_2 + x_3}.$$

Înlocuind în primele trei ecuații, obținem soluțiile

$$\begin{aligned} &(-2, 0, 0), (0, -2, 0), (0, 0, -2) \\ &(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}), (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \\ &\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

- Dacă $\lambda_2 \neq 0$ și $\lambda_1 \neq 0$, atunci $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ ne regăsim în situația de la Exercițiul 3.30.

După calculul valorilor funcției de cost în punctele găsite se obține faptul că minimul este atins în punctele $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$, $(0, 0, -2)$, deci în puncte diferite față de cele de la Exercițiul 3.30. $\square$

Exercițiul 3.43 Să se cerceteze dacă există minim global pentru $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$$

pe discul unitate închis cu centrul în origine și în caz afirmativ să se determine.

Exercițiul 3.44 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ și $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 + 5$. Considerăm problema minimizării lui f cu restricția $h(x) = 0$. Să se arate că problema are soluție unică și apoi să se determine soluția precum și multiplicatorul Lagrange $\bar{\mu}$ asociat. Să se arate că apoi că soluția determinată este minim global fără restricții pentru funcția $x \rightarrow L(x, \bar{\mu})$. Se păstrează aceste concluzii pentru problema minimizării lui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 3x_2$ cu restricția egalitate $h(x) = 0$, unde $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = x_2$?

Exercițiul 3.45 Să se justifice existența punctelor de minim ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3$$

cu restricția $g(x) \leq 0$ unde $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2$. Să se arate că funcția g este convexă. Să se verifice explicit îndeplinirea condiției Slater și a condiției de Mangasarian-Fromovitz pe mulțimea punctelor fezabile. Apoi să se rezolve problema.

Exercițiul 3.46 Fie problema minimizării lui $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1x_2$$

cu restricția $g(x) \leq 0$ unde $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - a$ ($a > 0$). Să se justifice existența soluției pentru această problemă. Să se deseneze mulțimea curbelor de nivel pentru f și mulțimea punctelor fezabile. Să se identifice grafic soluțiile. Să se arate că funcția g este convexă. Să se verifice explicit îndeplinirea condiției Slater și a condiției de Mangasarian-Fromovitz pe mulțimea punctelor fezabile. Apoi să se rezolve analitic problema.

Exercițiul 3.47 Fie problema minimizării funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - yz + z^2$ cu restricțiile $z - y \geq 1$, $x = z$, $z \geq 0$. Să se arate că problema admite soluție și că este aplicabilă Teorema Karush-Kuhn-Tucker. Să se determine soluția sau soluțiile problemei.

Exercițiul 3.48 Fie problema minimizării funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 6^{-1}x^2 + 2x + y^2 + z^2$ cu restricțiile $x + y + z = 2$, $x, y, z \geq 0$. Să se arate că problema admite soluție și că este aplicabilă Teorema Karush-Kuhn-Tucker. Să se determine soluția sau soluțiile problemei.

Exercițiul 3.49 Fie $f, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ și $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4$. Să se arate că problema minimizării lui f cu restricția $h(x) = 0$ admite soluție și să se determine soluțiile. Are soluție problema maximizării lui f cu aceeași restricție?

Exercițiul 3.50 Fie $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_3$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4$, $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 2$. Să se arate că problema minimizării lui f cu restricțiile $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$ este convexă, mulțimea restricțiilor este compactă și este îndeplinită o condiție de calificare. Apoi să se determine soluțiile.

Exercițiul 3.51 Fie $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{-1}x_1^3 + x_2^2 + 2x_3$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2$, $h(x) = x_1 + x_3$. Fie problema minimizării lui f cu restricțiile $g(x) \leq 0, h(x) = 0$. Să se arate că mulțimea restricțiilor este compactă și este îndeplinită o condiție de calificare. Apoi să se determine soluțiile globale.

Exercițiul 3.52 Fie $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3$, $g(x) = 2^{-1}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1$, $h(x) = x_1 - x_2$. Fie problema minimizării globale a lui f cu restricțiile $g(x) \leq 0, h(x) = 0$. Să se arate că mulțimea restricțiilor este compactă și este îndeplinită o condiție de calificare. Apoi să se determine soluțiile globale.

Exercițiul 3.53 Fie $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1$, $g(x) = x_1 - x_2$, $h(x) = x_2 - x_3$. Fie problema minimizării globale a lui f cu restricțiile $g(x) \leq 0, h(x) = 0$. Să se arate că f este convexă. Este mulțimea restricțiilor compactă? Să se arate că problema are soluție. Să se precizeze dacă se poate aplica Teorema Karush-Kuhn-Tucker. Să se determine soluțiile.

Exercițiul 3.54 Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_2$, $g(x) = x_1 + x_2 - 1$. Să se arate că problema minimizării lui f cu restricția $g(x) \leq 0$ este convexă, are soluție, se poate aplica Teorema Karush-Kuhn-Tucker și să se determine soluțiile problemei.

Exercițiul 3.55 Fie problema $\min (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - x_3)$ cu restricțiile $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ și $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.56 Fie problema $\min (x_1^2 + x_2^2)$ cu restricțiile $x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.57 Să se determine punctul cel mai apropiat și punctul cel mai depărtat de origine de pe (hiperbola)

$$x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2 = 225.$$

Exercițiul 3.58 Fie problema $\min (2x_1 + 3x_2 - x_3)$ cu restricțiile $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ și $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.59 Fie problema $\min (4x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2)$ cu restricțiile $2x_1 + x_2 \leq 1$ și $x_1^2 \leq 1$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.60 Fie problema $\min (x_1 + x_2 + x_3)$ cu restricțiile $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4$ și $x_1 - x_2 + x_3 = 2$. Determinați soluțiile problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.61 Fie problema $\min (x_1 x_2 x_3)$ cu restricțiile $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 2$. Determinați soluțiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea soluțiilor).

Exercițiul 3.62 Fie problema $\min (x_1 + x_2 + x_3)$ cu restricțiile $x_1^2 + x_2^2 \leq x_3$ și $x_3 \leq 1$. Determinați soluția sau soluțiile problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea efectivă a soluțiilor).

Exercițiul 3.63 Fie problema $\min (x_1^2 + x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2)$ cu restricțiile $x_1 - x_2 \geq 1, x_1 = x_3$ și $x_3 \geq 0$. Determinați soluția sau soluțiile problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexității problemei, determinarea efectivă a soluțiilor).

Exercițiul 3.64 Fie $a, b, c > 0$. Studiați problema maximizării expresiei $(x + a)(y + b)$ cu restricțiile $x, y \geq 0, x + y = c$.

Exercițiul 3.65 Fie $f, h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \prod_{i=1}^p x_i^2, \quad h(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - 1.$$

Studiați problema maximizării funcției f cu restricția $h(x) = 0$. Deduceți inegalitatea mediilor.

Soluție Cum mulțimea punctelor fezabile este o sferă problema are soluție globală. De asemenea, are loc condiția de liniară independență în toate punctele fezabile. Cum avem o restricție cu egalitate, condițiile Karush-Kuhn-Tucker se scriu astfel: dacă punctul fezabil x este soluție, atunci există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\nabla f(x) + \mu \nabla h(x) = 0,$$

relație ce revine la

$$2x_i \prod_{j=1, j \neq i}^p x_j^2 + 2\mu x_i = 0, \quad \forall i \in \overline{1, p}.$$

Înmulțim cu x_i fiecare relație și avem

$$-\prod_{j=1}^p x_j^2 + \mu x_i^2 = 0, \quad \forall i \in \overline{1, p},$$

deci

$$\mu x_i^2 = \mu x_j^2, \quad \forall i, j \in \overline{1, p}.$$

Dacă $\mu = 0$, atunci din cele de mai sus deducem $f(x) = 0$, ceea ce nu se poate întâmpla într-un punct de maxim. Deci

$$x_i^2 = x_j^2, \quad \forall i, j \in \overline{1, p},$$

și cum $h(x) = 0$, găsim

$$x_i^2 = \frac{1}{p}, \quad \forall i \in \overline{1, p}.$$

Așadar, valoarea maximă a funcției cu restricția dată este p^{-p} .

Dacă $z \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, atunci $y = \|z\|^{-1} z$ satisface restricția și

$$\prod_{i=1}^p \left(\frac{z_i}{\|z\|} \right)^2 = \frac{\prod_{i=1}^p z_i^2}{\|z\|^{2p}} \leq \frac{1}{p^p}.$$

Concluzionăm că

$$\prod_{i=1}^p z_i^2 \leq \frac{\|z\|^{2p}}{p^p} = \left(\frac{\sum_{i=1}^p z_i^2}{p} \right)^p$$

Deci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\left| \prod_{i=1}^p x_i \right| \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^p |x_i|}{p} \right)^p,$$

ceea ce reprezintă inegalitatea mediilor. □

Exercițiul 3.66 Să se studieze problema minimizării expresiei $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ($n \geq 2$) pentru $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ cu restricția $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ și apoi să se deducă inegalitatea mediilor.

Exercițiul 3.67 Cu o panglică de lungime a legăm o cutie de cadou de formă paralelipipedică. Care este volumul maxim al unei astfel de cutii?

Soluție Modelul matematic al problemei este

$$\max \quad x_1 x_2 x_3$$

cu restricțiile $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq a$. Este clar că maximul este atins (Teorema lui Weierstrass) și este strict pozitiv. Pentru standardizare, ne vom ocupa de problema

$$\min \quad -x_1 x_2 x_3$$

cu restricții (afine) scrise ca inegalități de forma $\leq$. Din nou aplicăm teoria și avem sistemul

$$\begin{aligned} -x_2 x_3 - \lambda_1 + 2\lambda_4 &= 0 \\ -x_1 x_3 - \lambda_2 + 2\lambda_4 &= 0 \\ -x_1 x_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 x_1 &= 0 \\ \lambda_2 x_2 &= 0 \\ \lambda_3 x_3 &= 0 \\ (2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - a)\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 &\geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq a \end{aligned}$$

Deducem

$$\begin{aligned}x_1(-x_2x_3 + 2\lambda_4) &= 0 \\x_2(-x_1x_3 + 2\lambda_4) &= 0 \\x_3(-x_1x_2 + 4\lambda_4) &= 0 \\(2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - a)\lambda_4 &= 0\end{aligned}$$

Adunăm primele trei ecuații și avem $-3x_1x_2x_3 + \lambda_4(2x_1 + 2x_2 + 4x_3) = 0$, de unde

$$-3x_1x_2x_3 + a\lambda_4 = 0,$$

deci $\lambda_4 = \frac{3x_1x_2x_3}{a}$. Înlocuind în ecuația $x_1(-x_2x_3 + 2\lambda_4) = 0$ cum $x_1x_2x_3 \neq 0$ găsim $x_1 = \frac{a}{6}$. Analog, $x_2 = \frac{a}{6}$, $x_3 = \frac{a}{12}$. Multiplicatorii sunt $(0, 0, 0, \frac{a^2}{144})$. Deci soluția problemei este $(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{12})$. $\square$

Exercițiul 3.68 *Să se modeleze problema determinării celui mai apropiat, respectiv al celui mai îndepărtat punct față de $(3, -3)$ de pe elipsa*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Să se scrie ecuația de determinare a multiplicatorului asociat problemei.

Exercițiul 3.69 *Determinați dimensiunile unei cutii paralelipipedice de arie totală minimă având volumul $v > 0$.*

Exercițiul 3.70 *Determinați dimensiunile unui pahar cilindric care are volumul $v > 0$ și pentru care aria este minimă.*

Capitolul 4

Algoritmi pentru aproximarea soluțiilor ecuațiilor neliniare

4.1 Descriere generală

Majoritatea problemelor studiate până acum au fost situații fericite, în sensul că am putut rezolva ecuațiile ale căror soluții dădeau punctele candidate la a fi soluții. Apoi, folosind mijloacele teoretice pe care le-am dezvoltat anterior am fost capabili să rezolvăm complet problemele date. Totuși, de foarte multe ori, pot apărea probleme pentru care nu putem rezolva sistemele ce dau punctele critice ale funcției obiectiv (în cazul problemelor fără restricții) sau punctele critice ale lagrangianului (la problemele cu restricții). Am văzut un astfel de exemplu chiar în finalul secțiunii precedente sau cu ocazia discuției privind metoda celor mai mici pătrate. Pentru astfel de probleme, sunt necesari algoritmi pentru aproximarea soluțiilor.

În ceea ce ne privește, vom studia algoritmi iterativi. Toți acești algoritmi cer precizarea unui punct de start pe care îl notăm cu x_0 . Este bine ca acest punct să fie el însuși o cât mai bună aproximare a soluției căutate (mai ales dacă aceasta nu este unică). De exemplu, funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

are două puncte de minim și două rădăcini reale nenule. Dacă se pleacă cu o valoare x_0 apropiată de unul dintre aceste puncte, atunci este probabil ca algoritmul (pentru rezolvarea ecuației sau pentru găsirea punctelor de extrem) să găsească o aproximare a acelui punct.

Revenind la discuția generală, după alegerea lui x_0 , algoritmul generează un șir de iterații $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ care au scopul de a se apropia de soluția, notată $\bar{x}$ (soluție a unei ecuații sau punct de optim). Evident, în practică, $x_k \neq \bar{x}$ pentru orice k pentru că, în caz contrar, soluția este determinată într-un număr finit de pași, ceea ce este, în general, imposibil. Generarea șirului (x_k) se va opri atunci când nu se mai pot face progrese în încercarea de apropiere de soluție (conform regulii interne a algoritmului de generare a iterațiilor) sau când a fost atinsă o anumită acuratețe dinainte stabilită. Orice algoritm trebuie să implementeze o regulă internă de generare a unei noi iterații utilizând iterațiile deja existente. În general, fiecare nouă iterație trebuie să realizeze o apropiere de soluție, dar există și algoritmi nemonotoni, pentru care descreșterea nu trebuie să se producă neapărat la fiecare pas.

Două sunt problemele atunci când se studiază un algoritm întrucât ne interesează atât dacă algoritmul este global (i.e., este convergent pentru orice dată inițială x_0), cât și viteza de convergență.

Așadar, o problemă foarte importantă din punct de vedere practic atunci când este studiat un algoritm este viteza sa de convergență.

Definiția 4.1.1 (viteză de convergență) Fie $(x_k)_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subset \mathbb{R}^p$ un șir convergent la $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ cu $x_k \neq \bar{x}$ pentru orice $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Spunem că:

(i) (x_k) converge liniar dacă există $r \in (0, 1)$ (numit rată de convergență) astfel încât pentru orice k suficient de mare,

$$\frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|} \leq r;$$

(ii) (x_k) converge pătratic dacă există $M > 0$ astfel încât pentru orice k suficient de mare,

$$\frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|^2} \leq M.$$

Observația 4.1.2 În particular, dacă există limita

$$\lim \frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|}$$

și este un număr subunitar, atunci (x_k) converge liniar.

Similar, dacă există limita

$$\lim \frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|^2},$$

atunci (x_k) converge pătratic.

Observația 4.1.3 Evident, convergența pătratică implică convergența liniară. Pentru convergența liniară, viteza este influențată semnificativ de rata r , în timp ce pentru convergența pătratică dependența de M este mai puțin importantă. Folosind modelul oferit de definiția convergenței pătratice, putem defini convergențe de orice ordin; spunem că avem o convergență de ordin $\theta > 1$ dacă există $M > 0$ astfel încât pentru orice k suficient de mare

$$\frac{\|x_{k+1} - \bar{x}\|}{\|x_k - \bar{x}\|^\theta} \leq M.$$

Exemplul 4.1.4 (i) Șirul $\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$ este liniar convergent la 1 cu rata $r = \frac{1}{3}$.

(ii) Șirul $\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\right)$ converge pătratic la 1.

Vom vedea însă că sarcina proiectării unor algoritmi globali care să aibă viteză bună de convergență (cel puțin pătratică) este una dificilă.

Începem în continuare studiul unor metode de a determina cu aproximație rădăcinile unor ecuații neliniare. Menționăm că o ecuație neliniară nerezolvabilă a apărut la Exemplul 3.5.8.

În plus, să mai remarcăm că Teorema 3.4.3 transformă o problemă de optimizare în problema rezolvării ecuației $L(x, (\lambda, \mu)) = 0$ (de cele mai multe ori neliniare și chiar imposibil de rezolvat exact). Un alt argument ar fi și acela că, în fond, problema rezolvării unei ecuații de forma $f(x) = 0$ este echivalentă cu problema determinării soluțiilor globale ale problemei de optimizare fără restricții $\min f^2$.

Un prim procedeu este cel descris în exemplul de mai jos.

Exemplul 4.1.5 (Metoda înjumătățirii intervalului) Să presupunem că avem o funcție continuă f și două numere reale $a < b$ pentru care $f(a)f(b) < 0$. Atunci, f are o rădăcină în (a, b) . Pentru ușurința expunerii, presupunem că această soluție este unică. Generăm un șir (x_k) astfel:

- alegem $a_0 = a$, $b_0 = b$;
- fie $x_0 = 2^{-1}(a_0 + b_0)$; dacă $f(x_0) = 0$ atunci x_0 este soluția căutată și iterarea se oprește; astfel, dacă $f(a_0)f(x_0) < 0$ alegem $a_1 = a_0$ și $b_1 = x_0$, iar dacă $f(x_0)f(b_0) < 0$ alegem $a_1 = x_0$ și $b_1 = b_0$.

- continuăm procedeul luând $x_1 = 2^{-1}(a_1 + b_1)$.

Procedând recurent, ne apropiem cu (x_k) de soluție, înjumătățind la fiecare pas intervalul în care se găsește soluția. Evident, dacă pentru un număr k , $f(x_k) = 0$, atunci x_k e chiar soluția căutată.

De exemplu, dacă avem funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^3 - x - 2$, este ușor de constatat (folosind șirul lui Rolle) că ecuația $f(x) = 0$ are o soluție reală unică situată în intervalul $(\sqrt{3-1}, \infty)$. Apoi, cum $f(1) \cdot f(2) < 0$, deducem că soluția este în intervalul $(1, 2)$. Din acest moment, putem folosi metoda descrisă mai sus pentru a aproxima soluția.

Alegem $x = 1.5$. Observăm că $f(1.5) \cdot f(2) < 0$, deci punctul se află în $(1.5, 2)$. Alegem apoi $x = 1.75$ și continuăm procedeul.

În această metodă,

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{k+1}} (b - a), \quad \forall k \geq 1.$$

Metoda înjumătățirii intervalului este foarte robustă, dar convergența sa este relativ lentă comparativ cu a altor metode pe care le vom studia în continuare.

4.2 Principiul lui Banach de punct fix

Această secțiune este dedicată Principiului lui Banach de punct fix care este unul dintre rezultatele fundamentale ale analizei neliniare. Vom vedea cum acest principiu și demonstrația sa conduc la un algoritm care ulterior va putea fi folosit pentru obținerea unei metode de aproximare a rădăcinilor unei ecuații cu viteză pătratică.

Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Un punct $x \in \mathbb{R}^p$ pentru care $f(x) = x$ se numește punct fix al lui f . Prin rezultat de punct fix vom înțelege un rezultat care asigură existența punctelor fixe pentru o funcție dată.

Un prim rezultat simplu, dar foarte important, este următorul.

Teorema 4.2.1 Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ o funcție continuă. Atunci există $\bar{x} \in [a, b]$ astfel încât $f(\bar{x}) = \bar{x}$, adică f are cel puțin un punct fix.

Demonstrație Definim funcția $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $g(x) = f(x) - x$. Este evident că g este continuă ca diferență de funcții continue și, în particular, are proprietatea lui Darboux. Evident, din cauză că $f(a), f(b) \in [a, b]$, avem inegalitățile

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - a \geq 0 \\ g(b) &= f(b) - b \leq 0, \end{aligned}$$

deci $g(a) \cdot g(b) \leq 0$ și din proprietatea lui Darboux, deducem existența unui punct $\bar{x} \in [a, b]$ având proprietatea că $g(\bar{x}) = 0$. Prin urmare, $f(\bar{x}) = \bar{x}$ și teorema este demonstrată. $\square$

Observația 4.2.2 Este esențial ca intervalul să fie închis. De exemplu, funcția $f : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ dată prin $f(x) = \frac{x+1}{2}$ nu are puncte fixe. De asemenea este esențial ca intervalul să fie mărginit: funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ dată prin $f(x) = x + x^{-1}$ nu are puncte fixe. În sfârșit, rezultatul nu mai este valabil dacă funcția nu este definită pe un interval. De exemplu, $f : [-2, -1] \cup [1, 2] \rightarrow [-2, -1] \cup [1, 2]$, $f(x) = -x$ nu are puncte fixe.

Rezultatul de mai sus este unul de existență și nu ne dă informații suplimentare despre modalitatea de determinare a punctelor fixe. Pentru a obține rezultate mai precise din acest punct de vedere dăm următoarea definiție.

Definiția 4.2.3 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$. O aplicație $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește *contracție* pe A dacă există o constantă reală $\lambda \in (0, 1)$ așa încât $\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$, pentru orice $x, y \in A$.

Remarcăm că λ , valoare numită constantă de contracție, nu depinde de x și y , iar prin aplicarea funcției f unei perechi de puncte din A , distanța dintre ele se micșorează (se contractă). Noțiunea de contracție este un caz particular al conceptului de funcție Lipschitz (Definiția 4.6.52), deci, în particular, orice contracție este funcție continuă (Propoziția 4.6.53). Evident, dacă λ este constantă de contracție, atunci orice $\lambda' \in (\lambda, 1)$ este de asemenea constantă de contracție.

Observația 4.2.4 Are loc următoarea afirmație care este deseori utilizată pentru a arăta că o funcție este Lipschitz: dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă pe I atunci f este Lipschitz pe I dacă și numai dacă f este mărginită pe I , caz în care constanta Lipschitz este constanta de mărginire a lui $|f'|$. Demonstrația afirmației directe rezultă din chiar definiția derivatei. Demonstrația reciprocei se sprijină pe Teorema lui Lagrange: pentru orice două puncte $x, y \in I$, $x < y$ deducem existența unui element $c_{x,y} \in (x, y) \subset I$ cu proprietatea că

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c_{x,y})(x - y)| \leq \sup_{x \in I} |f'(x)| \cdot |x - y|,$$

deci f este Lipschitz pe I . Enunțăm un caz particular imediat al acestei observații.

Propoziția 4.2.5 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe I . Funcția f este contracție pe I dacă și numai dacă există $M \in (0, 1)$ astfel încât $|f'(x)| \leq M$ pentru orice $x \in I$. În acest caz, $\sup_{x \in I} |f'(x)|$ este constantă de contracție.

Exemplul 4.2.6 Funcția $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ definită prin $f(x) = \frac{1}{2}x$ este o contracție a lui $\mathbb{R}^p$ în el însuși întrucât:

$$\|f(x) - f(y)\| = \frac{1}{2} \|x - y\|.$$

De asemenea, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ definită prin $f(x) = \frac{1}{2} \|x\|$ este o contracție.

Exemplul 4.2.7 Funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \cos x$ este o contracție, de constantă $\lambda = \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = \sin 1$.

Exemplul 4.2.8 Funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sin x$ nu este o contracție pentru că $\sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = \cos 0 = 1$.

Exemplul 4.2.9 Fie $A = [0, \infty)$ și funcția $f : A \rightarrow A$, definită prin $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Funcția f este contracție pe A , lucru pe care îl arătăm folosind Propoziția 4.2.5. Pentru funcția f definită anterior derivata sa este

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

și deci

$$|f'(x)| = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Definim funcția auxiliară $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dată prin $g(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Derivata acestei funcții este

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{2(1+x^2)(1+x^2-4x^2)}{(1+x^2)^4} = 2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Observăm că $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ este punctul de maxim global al funcției g și $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{8\sqrt{3}} < 1$. Deci $|f'(x)| \leq \frac{9}{8\sqrt{3}} < 1$ oricare ar fi $x \in [0, \infty)$. Rezultă din Propoziția 4.2.5 că f este contracție.

Observația 4.2.10 Menționăm că ipoteza $|f'(x)| < 1$ pentru orice $x \in (a, b)$ nu implică faptul că f este contracție pe (a, b) . Exemplu: funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sin x$ discutată mai sus. Un alt exemplu de același tip este $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \arctg x$.

Teorema lui Banach de punct fix (sau Principiul lui Banach de punct fix) este un rezultat care asigură, în anumite condiții, atât existența, cât și unicitatea punctului fix. Această teoremă stă la baza obținerii a numeroase rezultate matematice remarcabile cum ar fi, printre altele, teorema funcțiilor implicite sau teoreme privind existența și unicitatea soluției unor ecuații și sisteme diferențiale. Formulăm acum rezultatul anunțat, rezultat demonstrat de către Stefan Banach în 1922 în cadrul spațiilor normate complete.

Teorema 4.2.11 (Principiul lui Banach de punct fix) Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime închisă nevidă și $f : A \rightarrow A$ o contracție. Atunci f admite un unic punct fix. În plus, acest punct este limita oricărui șir (x_k) construit astfel:

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{k+1} = f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Demonstrație Ca de obicei în cazul rezultatelor de existență și unicitate, împărțim demonstrația în două etape. Arătăm mai întâi existența și apoi unicitatea punctului fix. Conform definiției, există un număr real $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|,$$

pentru orice $x, y \in A$. Să considerăm $x_0 \in A$ un punct arbitrar și să notăm cu $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_k = f(x_{k-1})$, operație care se poate face pentru orice număr natural $k \geq 1$. Se observă că $x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ și, în general, $x_k = f^k(x_0)$ (am notat f^2 în loc de $f \circ f$ și, în general, f^k în loc de $f \circ f \circ \dots \circ f$ de k ori). Arătăm că $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy. Au loc relațiile

$$\begin{aligned}\|x_2 - x_1\| &= \|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \lambda \|x_1 - x_0\|, \\ \|x_3 - x_2\| &= \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \lambda \|x_2 - x_1\| \leq \lambda^2 \|x_1 - x_0\|.\end{aligned}$$

Folosind metoda inducției matematice se obține inegalitatea

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \lambda^k \|x_1 - x_0\|$$

pentru orice $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru $\ell, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, numere naturale arbitrare, putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned}\|x_{\ell+k} - x_k\| &\leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_{k+2} - x_{k+1}\| + \dots + \|x_{k+\ell} - x_{k+\ell-1}\| \\ &\leq \lambda^k \|x_1 - x_0\| + \lambda^{k+1} \|x_1 - x_0\| + \dots + \lambda^{k+\ell-1} \|x_1 - x_0\| \\ &= \|x_1 - x_0\| (\lambda^k + \lambda^{k+1} + \dots + \lambda^{k+\ell-1}) = \|x_1 - x_0\| \lambda^k \frac{1 - \lambda^\ell}{1 - \lambda} \\ &\leq \|x_1 - x_0\| \frac{\lambda^k}{1 - \lambda}.\end{aligned}$$

Deci

$$\|x_{k+\ell} - x_k\| \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| \quad (4.1)$$

pentru orice $k, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dacă $\|x_1 - x_0\| = 0$ rezultă că $f(x_0) = x_0$, adică x_0 este punct fix și deci existența punctului fix este asigurată. Dacă $\|x_1 - x_0\| \neq 0$, atunci, folosind faptul că $\lambda \in (0, 1)$, deducem că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} = 0,$$

deci

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| = 0.$$

Scriind caracterizarea cu ε a acestei convergențe, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, astfel încât pentru orice $k \geq k_\varepsilon$ avem

$$\frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| < \varepsilon.$$

Combinând această relație cu relația (4.1) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, astfel încât pentru orice $k \geq k_\varepsilon$ și orice $\ell \in \mathbb{N}$, are loc

$$\|x_{k+\ell} - x_k\| < \varepsilon.$$

Am obținut astfel faptul că (x_k) este un șir Cauchy și cum $\mathbb{R}^p$ este un spațiu complet, șirul $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent, deci există $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ cu $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$. Cum $(x_k) \subset A$ și A este închisă, deducem că $\bar{x} \in A$. Reamintim că șirul este dat prin relația

$$x_0 \in \mathbb{R}^p, \quad f(x_k) = x_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Funcția f este continuă deoarece orice contracție este continuă (a se vedea Propoziția 4.6.53). Deci, din proprietățile funcțiilor continue, există limita șirului $(f(x_k))_k$ și este egală cu $f(\bar{x})$. În relația (4.2) trecem la limită pentru $k \rightarrow \infty$ și obținem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1},$$

adică

$$f(\bar{x}) = \bar{x},$$

deci $\bar{x}$ este punct fix. Existența este demonstrată.

Pentru a demonstra unicitatea, să presupunem că ar exista două puncte fixe diferite x și y . Atunci

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Cum $\|x - y\| > 0$ rezultă $1 \leq \lambda$ ceea ce este absurd. Prin urmare există un singur punct fix. $\square$

Observația 4.2.12 *Așadar, Teorema lui Banach de punct fix arată nu numai existența și unicitatea punctului fix ci, în același timp, ne oferă o metodă pentru obținerea cu aproximație a punctului $\bar{x}$ și de asemenea ne permite punerea în evidență a unei formule pentru aprecierea erorii ce se produce considerând respectiva aproximație. Această metodă de aproximare a soluției prin termenii șirului $x_k = f^k(x_0)$ se numește metoda aproximațiilor succesive sau metoda aproximațiilor Picard după numele lui C. É. Picard care a inițiat această metodă în 1890.*

În afară de aceste observații ce țin de modul de convergență a iterațiilor către punctul fix, facem și câteva observații privitoare la ipotezele teoremei.

Observația 4.2.13 *Ipoteza $\lambda < 1$ este esențială atât pentru existența cât și pentru unicitatea punctului fix. Astfel se vede, spre exemplu, că pentru aplicația identică $f(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, orice punct al lui $\mathbb{R}$ este punct fix, în timp ce aplicația $f(x) = x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu posedă niciun punct fix. În ambele cazuri, $\lambda = 1$.*

Observația 4.2.14 *Dacă A nu este închisă, se pierde argumentul de completitudine și rezultatul Teoremei lui Banach nu se mai păstrează. Spre exemplu, aplicația $f : (0, 1] \rightarrow (0, 1]$ definită prin $f(x) = \frac{x}{2}$ nu are niciun punct fix deși este contracție.*

4.3 Consecințe ale Principiului lui Banach în proiectarea unor algoritmi

Analiza enunțului, dar și a demonstrației Principiului lui Banach ne oferă mai multe concluzii utile în ceea ce privește proiectarea unor algoritmi. Mai întâi, să vedem cum a fost obținut (în

partea de existență) punctul fix: pentru fiecare punct inițial $x_0 \in A$ șirul dat de relația (4.2) converge către unicul punct fix $\bar{x}$ al aplicației f . Revenind la inegalitățile de mai sus, au loc relațiile:

$$\begin{aligned}\|x_k - x_0\| &\leq \|x_1 - x_0\| + \|x_2 - x_1\| + \cdots + \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \|x_1 - x_0\| + \lambda \|x_1 - x_0\| + \cdots + \lambda^{k-1} \|x_1 - x_0\| \\ &= (1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{k-1}) \|x_1 - x_0\| = \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\|,\end{aligned}$$

de unde prin trecere la limită cu $k \rightarrow \infty$ deducem

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \frac{1}{1 - \lambda} \|x_0 - f(x_0)\|.$$

Astfel, de fapt, pentru orice $x \in A$ are loc relația

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|x - f(x)\| \frac{1}{1 - \lambda}. \quad (4.3)$$

În plus avem și estimarea

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\|, \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (4.4)$$

care rezultă din relația (4.1) prin trecere la limită pentru $m \rightarrow \infty$.

Estimarea "a priori" astfel obținută ajută la determinarea numărului maxim de pași ai iterației din relația (4.2) pentru obținerea preciziei dorite în estimarea punctului fix, cunoscându-se valoarea inițială x_0 și valoarea $x_1 = f(x_0)$, lucru de care ne vom folosi atunci când vom discuta unui algoritmi. Mai exact, pentru o obține o eroare mai mică decât $\varepsilon > 0$ este nevoie ca

$$\frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \|x_1 - x_0\| < \varepsilon.$$

Astfel, cu cât λ este mai aproape de 0 această valoare este mai mică și va trebui să iterăm de mai puține ori pentru a avea precizia dorită. De asemenea, se observă din relația (??) că o valoare mică a lui $\|x_1 - x_0\|$ duce de asemenea la scăderea numărului de iterații necesare unei precizii prestabilite. Deci, așa cum este de așteptat, este de preferat să se plece cu puncte cât mai apropiate de punctul fix căutat.

De asemenea, se obține și următoarea estimare:

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} \|x_k - x_{k-1}\| \quad (4.5)$$

care se deduce tot prin trecere la limită pentru $\ell \rightarrow \infty$ în inegalitatea

$$\begin{aligned}\|x_{k+\ell} - x_k\| &\leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_{k+2} - x_{k+1}\| + \cdots + \|x_{k+\ell} - x_{k+\ell-1}\| \\ &\leq \lambda \|x_k - x_{k-1}\| + \lambda^2 \|x_k - x_{k-1}\| + \cdots + \lambda^\ell \|x_k - x_{k-1}\| \\ &= (\lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^\ell) \|x_k - x_{k-1}\|.\end{aligned}$$

Viteza de convergență a șirului (x_k) este dată de aproximarea

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \lambda \|x_k - \bar{x}\|$$

care se deduce din șirul de relații

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| = \|f(x_k) - f(\bar{x})\| \leq \lambda \|x_k - \bar{x}\|.$$

Asupra vitezei de convergență vom reveni pe larg un pic mai târziu în cadrul acestei expunerii. O altă inegalitate ce se obține imediat din definiția contracției este

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \lambda^k \|x_0 - \bar{x}\|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

A rezolva o ecuație de tipul $g(x) = 0$ este echivalent cu a găsi punctele fixe ale funcției $f(x) = g(x) + x$, așa încât această discuție referitoare la convergența iterațiilor Picard este aplicabilă, prin această echivalență, unor algoritmi de determinare a soluțiilor unor ecuații.

Fie I este un interval închis (în sens topologic) și $f : I \rightarrow I$ este o funcție derivabilă astfel încât derivata sa este mărginită (în modul) pe I de o constantă strict subunitară. Atunci pentru orice dată inițială $x_0 \in I$ iterația Picard definită de $x_{k+1} = f(x_k)$, $k \geq 0$ este convergentă către unicul punct fix $\bar{x}$ al lui f din I . Presupunem că f este de clasă C^1 .

Se poate observa fără dificultate că dacă punctul fix nu este atins (șirul este nestaționar), atunci

$$\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} = \frac{f(x_k) - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(\bar{x}).$$

Astfel, observăm că, în general avem de-a face cu o convergență liniară. Pentru k suficient de mare, eroarea la pasul $(k+1)$ se comportă ca eroarea la pasul k înmulțită cu o constantă subunitară. Acest tip de convergență este relativ lent.

Observația 4.3.1 Așadar, viteza convergenței iterațiilor Picard este dată de valoarea lui $f'(\bar{x})$. În general, dacă $f'(\bar{x}) \neq 0$, viteza de convergență a iterațiilor Picard este relativ lentă. În cazul cel mai favorabil în care $f'(x) = 0$ putem avea convergențe mai bune decât convergența liniară. În general, în contextul de mai sus, dacă $f'(\bar{x}) = 0$ și f este de clasă C^2 atunci, aplicând de două ori regula lui L'Hôpital avem:

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - \bar{x}}{(x - \bar{x})^2} = \frac{f''(\bar{x})}{2},$$

deci pentru orice iterație Picard nestaționară

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - \bar{x}}{(x_k - \bar{x})^2} = \frac{f''(\bar{x})}{2},$$

adică o convergență pătratică.

Exemplul 4.3.2 Să considerăm funcția $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dată prin $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Am văzut că f este o contracție și are un singur punct fix care este unica soluție pozitivă a ecuației

$x^3 + x - 1 = 0$ (care are valoarea aproximativă $\bar{x} \approx 0.6823$; a se vedea Implementare Matlab 4.5), iar șirul iterațiilor Picard satisface:

$$\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f'(\bar{x}) = \frac{-2\bar{x}}{(1 + \bar{x}^2)^2} = -2\bar{x}^3 \approx -0.6353.$$

Cum valoarea $|f'(\bar{x})|$ este relativ mică ne așteptăm la o viteză de convergență liniară acceptabilă. Deci, practic pentru k suficient de mare, la fiecare pas al iterației, eroarea se multiplică (în valoare absolută) cu aproximativ 0.6353.

Exemplul 4.3.3 Să luăm cazul funcției $f : [\sqrt{2}, \infty) \rightarrow [\sqrt{2}, \infty)$ dată prin

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Este ușor de verificat că f este bine definită (inegalitatea mediilor). În plus,

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

deci f este contracție și are ca unic punct fix $\bar{x} = \sqrt{2}$. Se observă că $f'(\bar{x}) = 0$ și, deci, pentru orice iterație Picard nestaționară avem

$$\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{(x_k - \bar{x})^2} = \frac{1}{2x_k} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{f''(\bar{x})}{2}.$$

Așadar are loc o convergență pătratică, așa încât ne așteptăm la o viteză de convergență foarte bună (a se vedea Implementare Matlab 4.5).

4.4 Teorema lui Picard

Prezentăm acum un rezultat de punct fix pentru funcții reale de o variabilă reală. Geometric, în acest context, punctele fixe ale unei funcții f sunt acele elemente x pentru care punctul $(x, f(x))$ este pe prima bisectoare, adică abcisele punctelor în care graficul lui f intersectează prima bisectoare.

Exemplul 4.4.1 Am văzut că funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \cos x$ este o contracție (de constantă $\lambda = \sin 1$), deci are un singur punct fix ce se poate aproxima folosind iterații Picard. În schimb, pentru $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sin x$ nu putem aplica Principiul lui Banach ($f'(x) < 1$ pentru orice $x \in (0, 1)$ și f nu este contracție). Pentru a trata astfel de situații avem rezultatul de mai jos.

Teorema 4.4.2 (Teorema lui Picard) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) cu proprietatea că $|f'(x)| < 1$ pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci f are un singur punct fix, iar șirurile iterațiilor Picard sunt convergente la unicul punct fix al lui f .

Demonstrație Existența și unicitatea punctului fix rezultă din rezultatele anterioare. Notăm cu $\bar{x}$ acest punct. Fie $x_0 \in [a, b]$ și fie (x_k) șirul Picard generat pornind cu termenul inițial x_0 . Dacă pentru un $k \in \mathbb{N}$ am avea $x_k = x_{k+1}$, atunci x_k ar fi punctul fix, iar șirul ar deveni staționar, în acest caz convergența fiind evidentă. Presupunem deci că (x_k) este nestaționar. Din Teorema lui Lagrange aplicată funcției f pe un interval determinat de capetele $\bar{x}$ și x_k deducem existența unui element $c_k \in (a, b)$ pentru care putem scrie relația:

$$x_{k+1} - \bar{x} = f(x_k) - f(\bar{x}) = f'(c_k)(x_k - \bar{x}).$$

Această inegalitate și ipoteza asupra derivatei lui f conduc la

$$|x_{k+1} - \bar{x}| < |x_k - \bar{x}|. \quad (4.6)$$

Arătăm acum că (x_k) converge la $\bar{x}$. Cum (x_k) este un șir mărginit (fiind inclus în $[a, b]$) este suficient să arătăm că orice subșir convergent are limita $\bar{x}$. Fie așadar un subșir convergent $(x_{k_\ell})_\ell$ al lui (x_k) și numărul real $x \in [a, b]$ limita sa. Cum (k_ℓ) este strict crescător, aplicând inductiv inegalitatea (4.6) obținem:

$$|x_{k_{\ell+1}} - \bar{x}| \leq |x_{k_\ell+1} - \bar{x}| < |x_{k_\ell} - \bar{x}|.$$

Dar $|x_{k_\ell} - \bar{x}| \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} |x - \bar{x}|$, iar $|x_{k_{\ell+1}} - \bar{x}| \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} |x - \bar{x}|$ în timp ce

$$|x_{k_{\ell+1}} - \bar{x}| = |f(x_{k_\ell}) - f(\bar{x})| \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} |f(x) - f(\bar{x})|.$$

Din Teorema cleștelui obținem

$$|f(x) - f(\bar{x})| = |x - \bar{x}|.$$

Dacă am fi în situația $x \neq \bar{x}$, aplicând din nou Teorema lui Lagrange am avea

$$|f(x) - f(\bar{x})| < |x - \bar{x}|,$$

ceea ce ar reprezenta o contradicție. Prin urmare $\bar{x} = x$ și teorema este demonstrată. $\square$

Exemplul 4.4.3 Revenim, în lumina Teoremei lui Picard, la restricția funcției sin la intervalul $[0, 1]$. Pentru această funcție care este satisfacă condițiile Teoremei lui Picard cu $\bar{x} = 0$ punct fix, situația vitezei de convergență se schimbă pentru că orice iterație Picard (x_k) satisface

$$\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(\bar{x}) = 1$$

și nu ne așteptăm să avem o viteză de convergență rezonabilă (a se vedea Implementare Matlab 4.5).

Evident, sferele de aplicabilitate ale Principiului lui Banach și Teoremei lui Picard sunt diferite. Observațiile de mai jos prezintă o comparație a ipotezelor celor două rezultate pentru funcții reale de o variabilă reală.

Observația 4.4.4 Dorim să evidențiem faptul că dacă, în Teorema lui Picard, nu are loc condiția $|f'(x)| < 1$ pentru orice $x \in (a, b)$ atunci, chiar dacă f are punct fix unic, șirul Picard poate să nu fie convergent la acel punct fix. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definită prin $f(x) = -x$. Evident, f este derivabilă pe domeniul de definiție, dar modulul derivatei este constant 1. Singurul punct fix al lui f este $\bar{x} = 0$. Construind iterația Picard de la un termen inițial $x_0 \neq 0$, șirul Picard are forma $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$ și deci nu este convergent.

Observația 4.4.5 Să mai remarcăm că o funcție care satisface condițiile Teoremei lui Picard nu este neapărat contracție, deci Teorema lui Picard nu poate fi obținută din Principiul lui Banach. Pentru a ilustra acest aspect avem următorul exemplu. Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Evident $|f'(x)| \in (0, 1)$ pentru orice $x \in (0, 1)$, dar f nu este o contracție pentru că

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x \neq y} \frac{1}{(x+1)(y+1)} = 1.$$

Totuși, pentru funcția f am putea aplica Principiul lui Banach dacă restrângem funcția la un interval pe care este contracție. Se observă că pentru $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$, deci putem defini $f : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ și să observăm că această restricție este contracție pentru că $\sup_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} |f'(x)| = \frac{4}{9} < 1$. Astfel, există un punct fix unic al lui f în $[\frac{1}{2}, 1]$ și cum funcția inițială are un singur punct fix, punctul fix al restricției coincide cu acesta.

Observația 4.4.6 În unele cazuri, se poate întâmpla să nu putem nici să restrângem funcția la o contracție, nici să găsim o iterație care să fie contracție, deci nu se poate aplica niciuna din cele două metode de la exemplul precedent (a se vedea Exercițiul 4.7). Ca exemplu, luăm funcția $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Din nou, $|f'(x)| \in (0, 1)$ pentru orice $x \in (0, 1)$, iar pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ și orice $x \in [0, 1]$,

$$f^n(x) = \frac{x}{1+nx}.$$

Ca mai sus:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x \neq y} \frac{|f^n(x) - f^n(y)|}{|x - y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x \neq y} \frac{1}{(nx+1)(ny+1)} = 1$$

și deci f^n nu este contracție. În plus, nu putem găsi nicio restricție a funcției f care să fie contracție de la o mulțime la ea însăși, deoarece punctul fix al lui f este $\bar{x} = 0$, deci o eventuală astfel de restricție ar trebui definită pe un interval care să conțină pe 0, lucru imposibil din cauza relației

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = 1.$$

4.5 Metoda lui Newton

Metoda a lui Newton este unul dintre cele mai cunoscute procedee iterative de a aproxima rădăcinile unei funcții care are proprietăți suficiente de derivabilitate. Din nou vom vedea că această metodă este una locală (algoritmul nu este global, în sensul că pentru a avea o convergență a șirului de iterații către o anumită rădăcină trebuie ca punctul de plecare să fie suficient de apropiat de rădăcina respectivă), dar are o rată de convergență pătratică. Să considerăm o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^2 și fie $\bar{x}$ o rădăcină simplă a lui f (i.e. $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$). Considerăm o valoare x_0 suficient de apropiată de $\bar{x}$. Șirul iterațiilor Newton pleacă de la ecuația tangentei la graficul lui f . Cerința este de a considera de fiecare dată ca punct următor al iterației valoarea în care tangenta la punctul curent al iteratei intersectează axa Ox . Astfel, pentru x_k dat, avem ecuația:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Această ecuație, din care trebuie să obținem expresia lui x_{k+1} , arată de ce se solicită ca soluția să fie simplă și să se plece dintr-un punct apropiat lui $\bar{x}$: trebuie să ne plasăm într-o vecinătate a lui $\bar{x}$ în care f' nu se anulează, ori o astfel de vecinătate există tocmai datorită faptului că f' este continuă și nenulă în $\bar{x}$. Astfel, se definește iterația Newton prin formula:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \geq 0. \quad (4.7)$$

Arătăm în continuare că pentru o alegere potrivită a datei inițiale iterația (4.7) este bine definită, iar șirul (x_k) converge pătratic la $\bar{x}$.

Fie $L \in (0, 1)$. Să notăm cu V un interval închis centrat în $\bar{x}$ pentru care $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V$ și

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < L, \quad \forall x \in V. \quad (4.8)$$

Relația de mai sus este posibilă tocmai pentru că $f(\bar{x}) = 0$ și $f'(\bar{x}) \neq 0$. Fie acum funcția $g : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Evident, această funcție este bine definită pe V și cum

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

din alegerea lui V , deducem că g este o contracție. Pe de altă parte $g(\bar{x}) = \bar{x}$, deci, în particular,

$$|g(x) - \bar{x}| \leq L|x - \bar{x}|, \quad \forall x \in V$$

ceea ce înseamnă că g aplică V în V . Acum, dacă plecăm cu $x_0 \in V$, să observăm că iterația Newton este de fapt o iterație Picard asociată funcției g . Aplicând teoria dezvoltată anterior, iterația Newton (pentru orice dată inițială $x_0 \in V$) converge la punctul fix al lui g care este tocmai rădăcina lui f din V (adică $\bar{x}$). Așa cum am spus anterior,

$$g'(\bar{x}) = 0$$

și deducem că are loc o convergență pătratică pentru că

$$\begin{aligned}\lim_k \frac{x_{k+1} - \bar{x}}{(x_k - \bar{x})^2} &= \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{g(x) - \bar{x}}{(x - \bar{x})^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{1}{f'(x)} \frac{xf'(x) - f(x) - \bar{x}f'(x)}{(x - \bar{x})^2} = \frac{f''(\bar{x})}{2f'(\bar{x})} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Discuția de mai sus indică faptul că pentru a fi siguri că iterația Newton converge către soluția dorită cu viteză pătratică, trebuie ca x_0 să fie dintr-o vecinătate V a soluției în care să nu se anuleze derivata și în care să aibă loc condiția (4.8). Astfel, pentru funcții care au mai multe zerouri, în funcție de data inițială aleasă putem găsi diferite soluții.

Se poate întâmpla ca metoda lui Newton să funcționeze și pentru cazul unei rădăcini multiple, dar convergența în acest caz poate să nu mai fie pătratică. Astfel, să presupunem că f este de forma $f(x) = (x - \bar{x})^q u(x)$, unde $q > 1$, u este de clasă C^2 și $u(\bar{x}) \neq 0$. Atunci funcția g se scrie

$$g(x) = x - \frac{(x - \bar{x})u(x)}{qu(x) + (x - \bar{x})u'(x)}$$

iar, după calcule,

$$g'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{q}\right) + (x - \bar{x})\frac{2u'(x)}{qu(x)} + (x - \bar{x})^2\frac{u''(x)}{q^2u(x)}}{\left[1 + (x - \bar{x})\frac{u'(x)}{qu(x)}\right]^2}.$$

Pentru valori suficient de apropiate de $\bar{x}$, $|g'(x)| < 1$, deci iterațiile Picard generate de g converg la punctul fix al lui g care este $\bar{x}$ (în vecinătatea considerată). Pe de altă parte, $g'(\bar{x}) = 1 - \frac{1}{q} \neq 0$, deci convergența este doar liniară. Așadar, procedura Newton converge pătratic doar pentru rădăcini simple. Dacă pentru o rădăcină $\bar{x}$ se cunoaște ordinul de multiplicitate q , atunci se poate considera funcția

$$g_q(x) = x - q \frac{f(x)}{f'(x)} = x - q \frac{(x - \bar{x})u(x)}{qu(x) + (x - \bar{x})u'(x)},$$

iar un calcul rapid arată că $g'_q(\bar{x}) = 0$, deci, folosind considerentele anterioare, se reobține convergența pătratică.

Încheiem cu discutarea unor posibilități de a alege punctul x_0 suficient de aproape de soluție astfel încât metoda lui Newton să converge la punctul căutat. O primă posibilitate (empirică) este aceea de a studia graficul funcției și de a alege o valoare x_0 care pare a fi destul de apropiată soluției. O altă variantă ar fi de a aplica o altă metodă de aproximare a rădăcinilor unei funcții a cărei convergență este mai lentă dar care totuși după câteva iterații ne duce în apropierea soluției, moment din care putem alege x_0 și aplica metoda lui Newton pentru accelerarea convergenței. O astfel de metodă este, de exemplu, metoda înjumătățirii intervalului. Cum am discutat, în general, această convergență nu este foarte rapidă, deci e de preferat să o folosim doar preț de câteva iterații pentru a găsi un punct relativ apropiat de soluție care să folosească drept dată inițială pentru mult mai rapidă convergență Newton.

Observația 4.5.1 Implementarea metodei lui Newton ne permite să rezolvăm (cu aproximație) ecuația neliniară de la Exemplul 3.5.8 și deci să aflăm soluția problemei de optimizare respective: a se vedea Exercițiul 4.30.

Observația 4.5.2 Metoda lui Newton se poate aplica pentru a aproxima puncte fixe cu viteză pătratică, pierzându-se însă caracterul global al algoritmului. Pentru ecuația $f(x) = x$, funcția g ale cărei iterații Picard sunt iterații Newton este

$$g(x) = x - \frac{f(x) - x}{f'(x) - 1}.$$

Pentru ilustrarea acestei observații, a se vedea Exercițiul 4.31.

Observația 4.5.3 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție ce clasă C^3 , strict convexă și coercivă. Atunci f are un unic punct de minim global $\bar{x}$ care este soluția ecuației $f'(\bar{x}) = 0$. Astfel, pentru aproximarea sa, putem folosi metoda lui Newton și iterația devine

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.$$

Pentru ilustrarea acestei observații, a se vedea Implementare Matlab 4.36.

4.6 Exerciții

Implementare Matlab 4.1 Sistemul dat de metoda celor mai mici pătrate pentru modelul $v = at + b$ admite soluție unică:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i^2 & \sum_{i=1}^N t_i \\ \sum_{i=1}^N t_i & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i v_i \\ \sum_{i=1}^N v_i \end{pmatrix}.$$

iar perechea (a, b) de mai sus reprezintă soluția problemei. Să luăm exemplul concret: $N = 5$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_5 = 4$ și $v_1 = 1.1$, $v_2 = 2.8$, $v_3 = 5.2$, $v_4 = 6.9$, $v_5 = 8.9$.

Pentru calculul parametrilor a, b implementăm codul:

```
t=[0,1,2,3,4];
v=[1.1,2.8,5.2,6.9,8.9];
A=[sum(t.^2) sum(t)
   sum(t) 5]
B=[sum(t.*v)
   sum(v) ]
U=A^(-1)*B
x=linspace(0,4.5,90);
y=U(1)*x+U(2);
plot(t,v,'o','Linewidth',2);
hold on;
plot(x,y);
```

Experimentând acest cod obținem valorile 1.9700 și 1.0400 precum și graficul corespunzător.

Implementare Matlab 4.2 Implementăm metoda înjumătățirii intervalului pe funcția de la Exemplul 4.1.5.

```
clc
functie=@(x) [x^3-x-2];
a=1;b=2;
eps=0.00001;i=0;
while (abs(b-a)>eps)
    if functie((a+b)/2)==0
        break
    end
    if functie(a)*functie((a+b)/2)<0
        b=(a+b)/2;
    else
        a=(a+b)/2;
    end
    i=i+1;
endwhile
x=(a+b)/2
i
```

```

functie(x)
cu rezultatele
x = 1.521381378173828
i = 17
ans = 9.934278368817218e-06

```

Exercițiul 4.3 Să se deseneze în Matlab graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ date prin

$$f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x + 1$$

și să se deducă faptul că ecuația $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale. Să se aproximeze aceste rădăcini folosind metoda înjumătățirii intervalului.

Implementare Matlab 4.4 Dorim să aproximăm soluția ecuației $\cos x = x$, $x \in [0, 1]$, folosind algoritmul dat de Principiul lui Banach. Evident, o soluție a acestei ecuații este punct fix pentru restricția funcției $\cos$ la intervalul $[0, 1]$. Funcția $\cos$ este o contracție întrucât $\sup_{x \in [0, 1]} |\cos' x| = \sin 1 < 1$. Mai mult, orice calculator ne dă valoarea aproximativă a acestei constante de contracție: $\sin 1 \simeq 0.84147$, deci

$$|\cos x - \cos y| \leq 0.8415 |x - y|.$$

Atunci, conform Principiului lui Banach de punct fix, există o singură soluție a ecuației menționate care aproximează folosind șirul iterațiilor Picard generat de dată inițială $x_0 \in [0, 1]$ arbitrar aleasă. Totuși, am vrea să știm cât de bine aproximăm soluția după un număr prestabilit de iterații. Sau, spre exemplu, de câte iterații este nevoie pentru o obține valoarea lui $\bar{x}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3} . Acest lucru este posibil datorită estimărilor privind viteza de convergență a aproximațiilor Picard în Principiul lui Banach.

Avem următoarele estimări:

$$|x_k - \bar{x}| \leq |x_1 - x_0| \frac{\lambda^k}{1 - \lambda} \quad (4.9)$$

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} |x_k - x_{k-1}| \quad (4.10)$$

Această discuție ne va ajuta să experimentăm consecințele acestor formule. Ținând cont de relațiile (4.9) și (4.10), pentru $x_0 = 0$ avem

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{0.8415^k}{1 - 0.8415} \text{ și } |x_k - \bar{x}| \leq \frac{0.8415}{1 - 0.8415} |x_k - x_{k-1}|.$$

Se poate verifica direct (a se și vedea calculele de mai jos) că a doua estimare este mai bună decât prima. Astfel, valoarea $\frac{0.8415^k}{1 - 0.8415}$ ajunge să fie mai mică decât 0.001 pentru $k = 50$, în timp ce a doua este sub 0.001 mult mai repede, pentru $k = 21$. Luând $k = 21$ obținem o încadrare a lui $\bar{x}$ între două valori foarte apropiate.

Programele Matlab care verifică afirmațiile de mai sus sunt:

```

functie=@(x) [cos(x)];
lambda=0.8415;

```

```

u=0; c=abs(funcție(u)-u)/(1-lambda); i=0;
while c*lambda>0.001 % abs(u-funcție(u))>0.001
i=i+1; c=c*lambda; u =funcție(u);
end
disp(i); disp(c); disp(u);
care returnează
    50
    0.0011290
    0.73909
și respectiv
u=0; i=0;
while (0.8415/(1-0.8415))*abs((u-cos(u)))>0.001
    i=i+1; u=cos(u);
end
disp(i); disp((0.8415/(1-0.8415))*abs((u-cos(u)))); disp(u);
care returnează
    21
    0.0008820
    0.73909

```

Din nou, procesul de aproximare este mai rapid dacă se pleacă cu o valoare inițială mai apropiată de $\bar{x}$. De exemplu, pentru $x_0 = 0.7$, estimările

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{0.8415^k}{1 - 0.8415} |\cos(0.7) - 0.7| \quad \text{și} \quad |x_k - \bar{x}| \leq \frac{0.8415}{1 - 0.8415} |x_k - x_{k-1}|$$

dau o eroare inferioară lui 0.001 pentru valori mai mici ale lui k , valori ce se pot determina făcând modificările evidente în programele de mai sus.

Implementare Matlab 4.5 Să considerăm funcția $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ dată prin $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Am văzut că f este o contracție și are un singur punct fix care este unica soluție pozitivă a ecuației $x^3 + x - 1 = 0$, iar șirul iterațiilor Picard satisface:

$$\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(\bar{x}) = \frac{-2\bar{x}}{(1 + \bar{x}^2)^2} = -2\bar{x}^3 \approx -0.63534438165.$$

Să studiem viteza de convergență prin intermediul unui program Matlab. Criteriul de oprire este atingerea unui număr maxim de iterații (1000) sau cazul în care distanța dintre două iterații consecutive este sub o toleranță admisă (10^{-7}).

```

funcția=@(x) [1/(1+x^2)];
tol=1e-7; maxiter=1000;
k=0; x=1; x_vechi=0;
%Picard
while abs(x-x_vechi)>tol && k<maxiter
    x_vechi=x; x=funcția(x); k=k+1;
end
%endPicard

```

```
disp(x); disp(k);
```

Rezultatele afișate sunt:

```
-->disp(u); 0.6823278 -->disp(k); 35.
```

deci algoritmul s-a oprit după 35 de iterații și a găsit valoarea aproximativă a soluției 0.6823278, pornind de la valoarea inițială $x_0 = 1$. Această viteză acceptabilă de calcul se datorează faptului că valoarea $|f'(\bar{x})|$ este relativ mică.

Să luăm cazul funcției $f : [\sqrt{2}, \infty) \rightarrow [\sqrt{2}, \infty)$ dată prin

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Este ușor de verificat că f este bine definită (inegalitatea mediilor). În plus,

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \right| \leq \frac{1}{2},$$

deci f este contracție și are ca unic punct fix $\bar{x} = \sqrt{2}$. Se observă că $f'(\bar{x}) = 0$ și, deci, pentru orice iterație Picard nestaționară

$$\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{(x_k - \bar{x})^2} = \frac{1}{2x_k} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} = f''(\bar{x}),$$

deci avem o convergență pătratică, așa încât ne așteptăm la o viteză de convergență foarte rapidă. Repetăm programul anterior pentru noua funcție și obținem:

```
-->disp(u); 1.4142136 -->disp(k); 5.
```

deci algoritmul se oprește după doar 5 iterații și obține o aproximare foarte bună a punctului fix $\bar{x} = \sqrt{2}$.

Pentru restricția funcției $\sin x$ la intervalul $[0, 1]$ care satisface condițiile Teoremei lui Picard cu $\bar{x} = 0$ punct fix, situația se schimbă pentru că orice iterație Picard (x_k) satisface

$$\frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_k - \bar{x}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f'(\bar{x}) = 1$$

și nu ne așteptăm să avem o viteză de convergență rezonabilă. Dacă în programul anterior schimbăm legea funcției f cu noua situație, atunci vom obține rezultatele:

```
-->disp(u);
```

```
0.0545930
```

```
-->disp(k);
```

```
1000.
```

deci după 1000 de iterații s-a obținut o aproximare nu tocmai convenabilă a soluției. Situația se schimbă foarte puțin dacă plecăm cu o valoare (de exemplu $x_0 = 0.1$) mai apropiată de soluție:

```
-->disp(u); 0.0480222 -->disp(k); 1000.
```

Exercițiul 4.6 Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$ și $f : A \rightarrow A$.

(i) Să se arate că dacă f este contracție de constantă $\lambda \in (0, 1)$, atunci pentru orice $n \geq 1$, f^n este contracție de constantă λ^n .

(ii) Să se arate că dacă $\bar{x}$ este punct fix pentru f atunci $\bar{x}$ este punct fix pentru orice iterată a lui f .

(iii) Studiind exemplele: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = e^{-x}$, să se arate că este posibil ca o iterată a lui f să fie contracție, fără ca f să fie contracție.

Exercițiul 4.7 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Dacă există $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ astfel încât f^q este o contracție, atunci f are un unic punct fix. În plus, iterațiile Picard ale lui f converg la punctul fix. Folosind această concluzie și punctul (ii) al exercitiului precedent, să se scrie un program Matlab care să aproximeze punctul fix al funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.

Soluție Fie $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ astfel încât f^q este o contracție. Din Principiul lui Banach, f^q are un punct fix unic pe care îl notăm $\bar{x}$. Să observăm, pe baza comentariului de mai sus, că $\bar{x}$ este singurul candidat pentru a fi punct fix pentru f (orice punct fix al lui f este punct fix pentru orice iterație). Au loc relațiile:

$$f(\bar{x}) = f(f^q(\bar{x})) = f^q(f(\bar{x})),$$

adică $f(\bar{x})$ este punct fix pentru f^q . Cum f^q are un unic punct fix, deducem că $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Să demonstrăm acum afirmația privitoare la convergența iterațiilor Picard. Pornim cu un element fixat $x_0 \in \mathbb{R}^p$ și construim șirul Picard asociat $(f^n(x_0))_n$. Trebuie să arătăm că acest șir converge la $\bar{x}$. Fie $r \in \overline{0, q-1}$. Atunci, mulțimea termenilor șirului $(f^n(x_0))_n$ este reuniunea mulțimilor termenilor subșirurilor de forma $(f^{qk+r}(x_0))_k$. Pe de altă parte, $(f^{qk+r}(x_0))_k$ poate fi privit ca șirul iterațiilor Picard asociat lui f^q cu punctul inițial $f^r(x_0)$ pentru că:

$$f^{qk+r}(x_0) = (f^q)^k(f^r(x_0)).$$

Cum f^q este o contracție, știm din Principiul lui Banach că toate iterațiile Picard ale lui f^q converg către punctul fix $\bar{x}$. Deci toate cele q subșiruri care partiționează șirul inițial au aceeași limită (i.e., $\bar{x}$), ceea ce arată că $\lim_n f^n(x_0) = \bar{x}$ și demonstrația este acum completă. $\square$

Problema 4.8 Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ o funcție crescătoare. Atunci f are cel puțin un punct fix. Dacă f este descrescătoare rezultatul nu se mai păstrează.

Soluție Definim mulțimea

$$A := \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq x\}.$$

Este clar, pe de o parte, că A este nevidă (întrucât $a \in A$) iar, pe de altă parte, că A este mărginită (fiind submulțime a lui $[a, b]$). Deci, conform axiomei de completitudine, A admite margine superioară în $\mathbb{R}$. Să notăm acest număr cu $\bar{x}$. Așadar, $\bar{x} = \sup A$ și este clar că $\bar{x} \in [a, b]$. Cum $\bar{x} \geq x$ pentru orice $x \in A$, monotonia lui f ne permite să scriem inegalitatea $f(\bar{x}) \geq f(x) \geq x$ pentru orice $x \in A$. Așadar, $f(\bar{x})$ este majorant pentru A , deci $f(\bar{x}) \geq \bar{x}$. Tot din monotonie, rezultă că $f(f(\bar{x})) \geq f(\bar{x})$, deci $f(\bar{x}) \in A$, adică $f(\bar{x}) \leq \bar{x}$. Prin urmare, avem egalitatea $f(\bar{x}) = \bar{x}$ și deci $\bar{x}$ este punct fix.

Pentru a arăta că în cazul funcțiilor descrescătoare concluzia nu se mai păstrează în general, avem contraexemplul următor: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dacă } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{2} & \text{dacă } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Este clar că f este descrescătoare pe $[0, 1]$, dar totuși nu admite puncte fixe. $\square$

Problema 4.9 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $x_0 \in \mathbb{R}$. Dacă șirul iterațiilor Picard de termen inițial x_0 este convergent la un număr $l \in \mathbb{R}$, fără a fi staționar și f este derivabilă în l , atunci $|f'(l)| \leq 1$.

Soluție Presupunem prin reducere la absurd că $|f'(l)| > 1$. Este clar, din continuitatea lui f și dintr-un comentariu anterior, că l trebuie să fie punct fix pentru funcția f . Cum

$$\lim_{x \rightarrow l} \frac{f(x) - f(l)}{x - l} = f'(l)$$

obținem

$$\lim_{x \rightarrow l} \left| \frac{f(x) - f(l)}{x - l} \right| = |f'(l)|.$$

Fie

$$\varepsilon := \frac{|f'(l)| - 1}{2} > 0.$$

Atunci, pentru acest ε , există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in (l - \delta, l + \delta) \setminus \{l\}$,

$$|f'(l)| - \varepsilon < \left| \frac{f(x) - f(l)}{x - l} \right| < |f'(l)| + \varepsilon$$

sau

$$\frac{|f'(l)| + 1}{2} < \left| \frac{f(x) - f(l)}{x - l} \right|.$$

În particular, cum $|f'(l)| > 1$,

$$|x - l| < |x - l| \frac{|f'(l)| + 1}{2} < |f(x) - f(l)|$$

pentru orice $x \in (l - \delta, l + \delta) \setminus \{l\}$. Cum șirul (x_k) al iterațiilor Picard cu termen inițial x_0 este convergent la l , fără a fi staționar, există $k_\delta \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $k \geq k_\delta$,

$$x_k \in (l - \delta, l + \delta) \setminus \{l\}.$$

Obținem din relațiile de mai sus

$$|x_k - l| < |f(x_k) - f(l)| = |x_{k+1} - l|,$$

pentru orice $k \geq k_\delta$. În particular, deducem

$$|x_{k_\delta} - l| < |x_{k_\delta+1} - l| < |x_k - l|,$$

pentru orice $k > k_\delta + 1$. Trecând la limită în ultima relație pentru $k \rightarrow \infty$ ajungem la contradicția:

$$|x_{k_\delta} - l| < |x_{k_\delta+1} - l| \leq 0.$$

Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci $|f'(l)| \leq 1$. Să precizăm și faptul că în general nu se poate obține inegalitatea asupra derivatei dacă șirul este staționar. Dacă luăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$ șirul iterațiilor Picard pornind din 0 este convergent (chiar staționar) la 0, dar $f'(0) = 2$. $\square$

Problema 4.10 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că pentru orice două numere reale distincte x și y are loc relația

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Atunci există $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$ șirul Picard generat de

$$x_k = f^k(x), \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

are limita $\bar{x}$.

Soluție Presupunem mai întâi că f are un punct fix, $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Evident că acesta va fi singurul punct fix al lui f . Fără a restrânge generalitatea putem considera $\bar{x} = 0$, deci

$$|f(x)| < |x|$$

pentru orice $x \neq 0$. Fixăm $x \in \mathbb{R}$. Atunci șirul $(|f^k(x)|)_k$ este descrescător, deci convergent către un număr $\mu(x) \geq 0$. Vom arăta că $\mu(x) = 0$ pentru orice dată inițială x . Presupunem prin reducere la absurd că $\mu(x) > 0$. Atunci $f(\mu(x)) =: y_1$, iar $f(-\mu(x)) =: y_2$, unde $|y_1|, |y_2| < |\mu(x)|$. Din continuitatea lui f , există două vecinătăți ale lui $\mu(x)$ și respectiv $-\mu(x)$ care sunt duse prin f în intervalul $I := (-\mu(x), \mu(x))$ care conține y_1 și y_2 . Atunci, pentru k suficient de mare, $f^k(x)$ se află de asemenea în I ceea ce este în contradicție cu inegalitatea $|f^k(x)| \geq |\mu(x)|$. Așadar, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ are loc convergența $f^k(x) \rightarrow 0$.

Presupunem acum că f nu are puncte fixe. Atunci $f(x) > x$ sau $f(x) < x$ pentru orice x real. Demonstrăm numai situația $f(x) > x$, cealaltă demonstrându-se analog. Este clar că pentru orice număr real x , șirul $(f^k(x))$ este strict crescător, deci are limita în $(-\infty, +\infty]$. Dacă limita ar fi un număr real l , atunci $f^k(x) \neq l$ pentru orice număr natural și nenul k și obținem

$$|f^{k+1}(x) - f(l)| < |f^k(x) - l|$$

de unde prin trecere la limită obținem $f(l) = l$, adică l este punct fix, ceea ce reprezintă o contradicție. Deci $f^k(x) \rightarrow +\infty$. Evident, în cazul $f(x) < x$ obținem $f^k(x) \rightarrow -\infty$. Cu aceasta, demonstrația este încheiată. $\square$

Problema 4.11 Fie $g : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ continuă. Presupunem că există $\alpha \in (0, 1)$ astfel încât

$$\|g(x, t) - g(y, t)\| \leq \alpha \|x - y\|$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}^q$ și $x, y \in \mathbb{R}^p$. Pentru t fixat în $\mathbb{R}^q$, notăm cu $\mu(t)$ punctul fix unic al contracției $g(\cdot, t)$. Atunci aplicația $\mu : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ este continuă.

Soluție Fie $t_0 \in \mathbb{R}^q$ și $\varepsilon > 0$. Continuitatea lui g în $(\mu(t_0), t_0)$ implică existența unui număr $\delta > 0$ astfel încât pentru orice t fixat, cu $\|t - t_0\| < \delta$, are loc

$$\|g(\mu(t_0), t) - g(\mu(t_0), t_0)\| < \varepsilon(1 - \alpha)$$

ceea ce este echivalent cu

$$\|g(\mu(t_0), t) - \mu(t_0)\| < \varepsilon(1 - \alpha).$$

Din relația (4.3) și relațiile de mai sus deducem că pentru orice t cu $\|t - t_0\| < \delta$ are loc

$$\|\mu(t) - \mu(t_0)\| \leq \frac{\|\mu(t_0) - g(\mu(t_0), t)\|}{1 - \alpha} < \varepsilon,$$

ceea ce încheie demonstrația. □

Problema 4.12 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ o contracție. Atunci funcția $\nu : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ dată prin $\nu(x) = x + f(x)$ este o bijecție bicontinuă.

Soluție Este clar că ν este continuă. În plus, f este injectivă pentru că relația $\nu(x) = \nu(y)$ și proprietatea de contracție a lui f implică $x = y$. Fie $g : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ definită prin

$$g(x, y) = y - f(x).$$

Este clar că g satisface proprietatea din ipoteza problemei precedente, deci aplicația $x \mapsto g(x, y)$ are un punct fix $\mu(y)$ pentru orice $y \in \mathbb{R}^p$. Așadar,

$$\mu(y) = y - f(\mu(y)),$$

adică

$$y = \nu(\mu(y)), \tag{4.11}$$

deci ν este surjectivă. Rămâne să arătăm că ν^{-1} este continuă. Dar relația (4.11) arată că funcțiile ν și μ sunt inverse una alteia, iar continuitatea lui μ (deci a lui ν^{-1}) este asigurată de teorema precedentă. Deci ν este homeomorfism. □

Problema 4.13 Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$. Să se arate că dacă există $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ astfel încât $f^m(x) = x$ pentru orice $x \in [0, 1]$, atunci $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

Soluție În ipotezele de mai sus, f este bijecție în baza unui bine cunoscut rezultat referitor la proprietățile de injectivitate și surjectivitate a compunerii funcțiilor, întrucât f^m este bijecție. Conform unui rezultat de la funcții continue (Teorema 4.6.54), f trebuie să fie strict monotonă și ipotezele $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ asigură că f este strict crescătoare. Presupunem prin reducere la absurd că există $x \in (0, 1)$ astfel încât $f(x) > x$ (cazul $f(x) < x$ este similar). Atunci, din monotonie, pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$f^n(x) > f^{n-1}(x) > \dots > f(x) > x.$$

În particular, pentru $n = m$, obținem o contradicție, deci presupunerea făcută este falsă. □

Problema 4.14 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă astfel încât $f \circ f$ admite puncte fixe. Să se arate că și f admite puncte fixe.

Soluție Dacă presupunem că f nu admite puncte fixe. Atunci, din ipoteza de continuitate rezultă că fie $f(x) > x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, fie $f(x) < x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În prima situație, trecând x în $f(x)$ obținem: $f(f(x)) > f(x) > x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $(f \circ f)(x) > x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, $f \circ f$ nu admite puncte fixe, ceea ce este fals. A doua situație este similară. $\square$

Exercițiul 4.15 Fie $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ o funcție 1-Lipschitz pe $[0, 1]$. Să se arate că mulțimea punctelor fixe este un interval (posibil degenerat).

Exercițiul 4.16 Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4} \sin \frac{1}{x}.$$

Pentru o dată inițială $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ considerăm iterația Picard asociată (x_k) . Să se studieze convergența acestui șir. Să se scrie un program Matlab care să aproximeze valoarea limitei.

Soluție Imaginea lui f este intervalul $I = [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$. Considerăm restricția lui f la acest interval și arătăm că aceasta este o contracție de la I la I . Pentru aceasta, calculăm (pentru $x \in I$)

$$f'(x) = -\frac{1}{4x^2} \cos \frac{1}{x},$$

de unde

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9} < 1, \quad \forall x \in I.$$

Cum $x_1 = f(x_0) \in I$, putem aplica demonstrația Principiului lui Banach pentru a deduce că (x_k) este convergent la singurul punct fix al lui f din I . $\square$

Exercițiul 4.17 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + 1.$$

Să se arate că f este contracție. Se dă șirul (x_k) prin $x_0 = 1$,

$$x_{k+1} = 1 + \frac{x_k}{x_k^2 + 2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că (x_k) este convergent iar limita sa $\bar{x}$ este soluție a ecuației $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ și pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, avem

$$|x_k - \bar{x}| \leq 2^{-k} |\bar{x} - 1|.$$

Exercițiul 4.18 Fie funcția $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$,

$$f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}.$$

Să se arate că f este bine definită și că este o contracție pe domeniul său de definiție. Să se deducă faptul că ecuația

$$x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

are soluție unică în intervalul $(1, 2)$, iar această soluție coincide cu limita șirului (x_k) dat prin $x_{k+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_k}}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ cu $x_0 = 1$. Apoi, precizați viteza de convergență a acestui șir.

Exercițiul 4.19 Fie $f, g : \mathbb{R}_+ := [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 1. \end{cases}, \quad g(x) = (x - 2)e^{2x} + (x + 2)e^x.$$

- (i) Să se arate că $g(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$.
- (ii) Să se arate că f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}_+$.
- (iii) Să se arate că

$$f''(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^3}, \quad \forall x \in (0, \infty)$$

și $|f'(x)| \leq 2^{-1}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$.

- (iv) Definim șirul (x_k) prin $x_0 = 0$ și $x_{k+1} = f(x_k)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Să se arate că

$$|x_k - \ln 2| \leq 2^{-k} \ln 2, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Soluție (i) Funcția g este o (strict) crescătoare pe $[0, \infty)$, lucru care se verifică în mod obișnuit. Mai mult, $g(0) = 0$, deci $g(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$.

- (ii) Evident, f este derivabilă pe $(0, \infty)$ și, pe acest interval,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Calculăm limita acestei derivate în 0 și obținem (combinând o limită fundamentală și regula lui l'Hôpital)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - 1 - xe^x}{x^2} \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - 1 - xe^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aplicând una dintre consecințele Teoremei lui Lagrange, deducem că f este derivabilă în 0, iar derivata sa este continuă în 0. În plus, $f'(0) = -2^{-1}$.

(iii) Funcția f este derivabilă de două ori pe $(0, \infty)$ iar relația anunțată se arată prin calcul direct. Conform punctului (i), f' este crescătoare pe $(0, \infty)$, iar din continuitatea lui f' , din relația $f'(0) = -2^{-1}$ și din observația

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$$

deducem că $f'(x) \in [-2^{-1}, 0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$, de unde rezultă concluzia.

(iv) Punctul precedent arată că f este o 2^{-1} -contracție pe $\mathbb{R}_+$ care ia valori tot în $\mathbb{R}_+$. Cum șirul (x_k) este o iterație Picard cu data inițială 0, deducem, pe baza Principiului lui Banach, că (x_k) converge la singurul punct fix al lui f din $\mathbb{R}_+$ care, prin calcul direct, se dovedește a fi $\bar{x} = \ln 2$. Acum estimarea căutată rezultă (prin inducție) din

$$|x_k - \bar{x}| = |f(x_{k-1}) - f(\bar{x})| \leq 2^{-1} |x_{k-1} - \bar{x}| \leq \dots \leq 2^{-k} |x_0 - \bar{x}|.$$

Așadar, inegalitatea are loc. □

Exercițiul 4.20 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

(i) Să se arate că f este contracție.

(ii) Se consideră iterația Picard

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{k+1} = f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Să se arate că șirul (x_k) converge la unica soluție reală a ecuației $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Să se implementeze în Matlab.

Exercițiul 4.21 Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $|a| < 1$. Considerăm șirul (x_k) definit de relația de recurență

$$x_{k+1} = ax_k + b, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Să se precizeze funcția pentru care acest șir reprezintă o iterație Picard. Folosind un rezultat studiat, să se arate că (x_k) este convergent și să se stabilească limita sa.

Exercițiul 4.22 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + 1.$$

Să se arate că f este contracție. Se dă șirul (x_k) prin $x_0 = 1$,

$$x_{k+1} = 1 + \frac{x_k}{x_k^2 + 2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că (x_k) este convergent iar limita sa $\bar{x}$ este soluție a ecuației $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ și pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, avem

$$|x_k - \bar{x}| \leq 2^{-k} |\bar{x} - 1|.$$

Exercițiul 4.23 Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$. Să se arate că f este contracție. Se dă șirul (x_k) definit prin $x_0 = 1$, $x_{k+1} = f(x_k)$. Să se arate că $0 < x_k < 2^{-k}$ pentru orice $k \geq 1$.

Exercițiul 4.24 Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. Să se arate că f este contracție. Se dă șirul (x_k) definit prin $x_0 = 2$, $x_{k+1} = f(x_k)$. Să se arate că $0 < x_k < 2^{-k+1}$ pentru orice $k \geq 1$.

Exercițiul 4.25 Fie $f : [0, 1/2] \rightarrow [0, 1/2]$, $f(x) = \frac{1}{5}(x^5 + 1)$. Să se arate că f este corect definită, este contracție și să se determine constanta de contracție. Să se deducă faptul că ecuația $x^5 - 5x + 1 = 0$ are soluție unică în intervalul $[0, 1/2]$. Să se indice un mod de a aproxima această soluție și să se estimeze un număr rațional care aproximează soluția cu o eroare mai mică de 10^{-2} .

Exercițiul 4.26 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2}{2} + 3 \right).$$

Să se arate că f are un punct fix în intervalul $(1, 2)$. Să se studieze dacă iterațiile Picard ale lui f aproximează acest punct fix și în caz afirmativ să se precizeze (cu justificare) ordinul de convergență.

Exercițiul 4.27 Fie $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$,

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x} + 1.$$

Să se arate că f are un punct fix în intervalul $(1, 3)$. Să se studieze dacă iterațiile Picard ale lui f aproximează acest punct fix și în caz afirmativ să se precizeze (cu justificare) ordinul de convergență.

Implementare Matlab 4.28 Prezintă acum o situație particulară în care o iterație Picard poate fi accelerată printr-o funcție auxiliară. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 10$. Folosind șirul lui Rolle este ușor de arătat că ecuația $f(x) = x$ are o singură rădăcină reală care este pozitivă, deci f are un singur punct fix, notat $\bar{x}$ și localizat în intervalul $[1, 2]$ (a se vedea și graficul de mai jos). Despre f nu putem folosi teoria precedentă pentru că nu este contracție. În schimb, luăm funcția $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x},$$

iar egalitatea $g(x) = x$ este echivalentă cu $f(x) = x$. Dar

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(6x^2 + 8x)(3x^2 + 8x) - (6x + 8)(2x^3 + 4x^2 + 10)}{(3x^2 + 8x)^2} \\ &= \frac{(6x + 8)(x^3 + 4x^2 - 10)}{(3x^2 + 8x)^2}. \end{aligned}$$

Cum $\bar{x}$ este soluția ecuației $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, obținem că $g'(\bar{x}) = 0$. Aceasta înseamnă că pe o vecinătate a lui $\bar{x}$, g este contracție și, în plus, convergența șirului Picard asociat este pătratică. Programul următor arată că dacă se aplică iterația Picard funcției f pornind de la 1, atunci după doar 9 iterații șirul are o valoare ce, în valoare absolută, depășește valoarea maximă acceptată de Matlab (deci este divergent), lucru ce era de așteptat din cauză că f nu este contracție. În schimb, utilizând funcția g avem o aproximare bună a soluției după doar 5 iterații. Să se studieze codul de mai jos.

```

tol=1e-7;maxiter=1000;
u=1; u_vechi=0; k=0; t=1; t_vechi=0; p=0;
%Picard g
while abs(u-u_vechi)>tol & n<maxiter
    u_vechi=u; u=(2*u^3+4*u^2+10)/(3*u^2+8*u); k=k+1;
end
%Picard f
while abs(t-t_vechi)>tol & p<maxiter
    t_vechi=t; t=t^3+4*t^2+t-10; p=p+1;
end
disp(u); disp(n); disp(t); disp(p);
Rezultatul este:
--> disp(u); disp(k); disp(t); disp(p);
1.36523
5.
Nan
9.

```

Implementare Matlab 4.29 Testăm metoda lui Newton pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de relația

$$f(x) = x + e^x + \frac{10}{1+x^2} - 5$$

care are o rădăcină simplă în intervalul $(-2, 0)$ după cum se poate constata din studiul graficului său. Plecând cu data inițială $x_0 = 1.5$ aproximăm această soluție folosind metoda lui Newton:

```

functie=@(x) [x+exp(x)+10/(1+x^2)-5];
%desen
fplot(functie,[-3,3]);
functie_der=@(x) [1+exp(x)-20*x/(1+x^2)^2];
%Newton
x=1.5;x_precedent=-1;k=0;eps=10^(-6);maxiter=50;
while abs(x-x_precedent)>eps && k<maxiter
    x_precedent=x;
    x=x-functie(x)/functie_der(x);
    k=k+1;
end
x
k
functie(x)
care returnează:
x = -0.9046
k = 35
ans = 8.8818e-016

```

Dacă se pleacă cu data inițială $u = -1.5$, atunci se obține valoarea de mai sus după doar 5 iterații. Să se observe că metoda este foarte sensibilă la data inițială testând pentru 1.5, 1.4, 0.

Exercițiul 4.30 Să se aproximeze în cazul

$$p = 7, a_i = i, v_i = 10, i \in \overline{1, 7},$$

prin metoda lui Newton, soluția ecuației neliniare de a cărei rezolvare depindea calculul proiecției unui punct pe un elipsoid generalizat (a se vedea Exemplul 3.5.8).

Exercițiul 4.31 Să se revolve ecuația $\cos x = x$ prin metoda lui Newton. Să se compare cu metoda Picard.

Problema 4.32 Fie ecuația $x^3 - x - 1 = 0$ pentru $x \in [1, 2]$.

(i) Să se transforme această ecuație într-o problemă de determinare a punctului fix pentru o contracție.

(ii) Să se deducă existența și unicitatea soluției ecuației, să se construiască un șir convergent liniar și un altul convergent pătratic la această soluție. Să se implementeze în Matlab.

Soluție (i) Ecuația este echivalentă cu

$$x = x^3 - 1,$$

dar în această formulare ar trebui să luăm $g(x) = x^3 - 1$, dar $g([1, 2]) \not\subset [1, 2]$, iar g nu este contracție. Astfel vom scrie ecuația în formele echivalente

$$x^3 = x + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x + 1}.$$

Fie atunci $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$. Este ușor de observat că $f(I) \subset I$ și

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1,$$

deci f este o contracție de la I la I .

(ii) Având în vedere Principiul lui Banach și formularea de mai sus, deducem existența și unicitatea soluției ecuației (notată $\bar{x}$). Orice iterație Picard asociată funcției de mai sus este convergentă la soluție. Astfel, luăm $x_0 = 1$ și $x_{k+1} = f(x_k)$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. În plus, pentru orice k ,

$$|x_k - \bar{x}| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^k |x_0 - \bar{x}| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^k.$$

Este deci suficient să estimăm k pentru care

$$\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\right)^k \leq 10^{-5}.$$

Mai mult, este suficient ca

$$\frac{1}{4^k} \leq 10^{-5},$$

adică $k \geq 5 \log_4 10$. Astfel, $k = 9$ satisface cerința. $\square$

Exercițiul 4.33 Să se determine soluțiile aproximative ale problemelor de la Exercițiul 3.68.

Exercițiul 4.34 Fie șirul de numere reale dat prin $x_0 = 1$ și

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + 3}{3x_k^2}, \quad \forall k \geq 0.$$

Să se arate că $(x_k)_k$ este o iterație Newton pentru o funcție care se va determina. Ce se poate spune despre convergența lui $(x_k)_k$?

Exercițiul 4.35 Fie șirul de numere reale dat prin $x_0 = 1$ și

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}, \quad \forall k \geq 0.$$

Să se arate că $(x_k)_k$ este o iterație Newton pentru o funcție care se va determina și totodată o iterație Picard pentru o contracție g , al cărei domeniu de definiție convenabil îl veți preciza. Studiați convergența șirului (x_k) și, în caz de convergență, determinați-i limita.

Implementare Matlab 4.36 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 3x + 1.$$

Această funcție este strict convexă întrucât $f''(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Evident că f este și coercivă, deci există un singur punct de minim global. Aplicăm metoda lui Newton ecuației $f'(x) = 0$ pentru a aproxima acest punct.

```
functie=@(x) [x^4/4+x^2/2-3*x+1];
%desen
fplot(functie,[-5,5]);
%optimizare Newton
functie_der=@(x) [x^3+x-3];
functie_der_sec=@(x) [3*x^2+1];
x=1.5;x_precedent=-1;n=0;eps=10^(-6);maxiter=50;
while abs(x-x_precedent)>eps && k<maxiter
    x_precedent=x;
    x=x-functie_der(x)/functie_der_sec(x);
    k=k+1;
end
x
k
functie(x)
care returnează
x = 1.213411662762230
k = 5
ans = -1.362084275383167
```

Exercițiul 4.37 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3e^{-2x}$. Să se arate că f este strict convexă și admite punct de minim. Să se determine acest punct cu aproximație folosind metoda lui Newton (aplicată pentru ecuația $f'(x) = 0$).

Appendix

Spațiul $\mathbb{R}^p$

Fie $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notăm cu $\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale și introducem mulțimea

$$\mathbb{R}^p := \{(x_1, x_2, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \overline{1, p}\}.$$

Această mulțime se organizează ca spațiu vectorial real de dimensiune p cu operațiile standard definite astfel: pentru orice $x = (x_1, x_2, \dots, x_p), y = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ și orice $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_p + y_p) \in \mathbb{R}^p, \\ ax &= (ax_1, ax_2, \dots, ax_p) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

De multe ori, nefiind pericol de confuzie, vom folosi și notația în care indicii componentelor sunt jos. Vom extinde aceste operații și la mulțimi: dacă $A, B \subset \mathbb{R}^p$ sunt nevide, $\alpha \in \mathbb{R}$ și $C \subset \mathbb{R}$ este nevidă, definim $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$, $CA = \{\alpha a \mid \alpha \in C, a \in A\}$, $A - B = A + (-1)B$.

De foarte multe ori, dar mai ales atunci când vom folosi operații matriciale, vom privi un element x din $\mathbb{R}^p$ ca fiind o matrice de tip $p \times 1$ (adică un vector coloană). Matricea transpusă corespunzătoare va fi notată cu x^t , conform notației ce va fi adoptată pentru matrici de orice dimensiune. De asemenea, se definește produsul scalar uzual a doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^p$ prin

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p x_i y_i = x^t y.$$

De exemplu, în relația anterioară, notația $\langle x, y \rangle$ este una în care x, y sunt vectori din $\mathbb{R}^p$ ce pot fi priviți atât ca vectori linie cât și ca vectori coloană, iar notația $x^t y$ se referă la o înmulțire de matrici, deci pentru ca operația să fie posibilă x, y sunt matrici de tip $p \times 1$. Vom face de multe ori trecerea tacită de la o interpretare la alta, contextul neconducând la confuzii.

Spațiul $\mathbb{R}^p$ se organizează ca spațiu normat (și deci în particular spațiu metric) înzestrat cu norma euclidiană $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}_+$ definită prin

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^p x_i^2}.$$

Este ușor de arătat că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ are loc următoarea relație, numită egalitatea paralelogramului

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Se definește unghiul dintre doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ ca fiind valoarea $\theta \in [0, \pi]$ definită prin

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

Bila deschisă (respectiv închisă) centrată într-un punct $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ de rază $\varepsilon > 0$ se definește prin:

$$B(\bar{x}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - \bar{x}\| < \varepsilon\}$$

(respectiv $D(\bar{x}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}$). O submulțime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numește mărginită dacă este conținută într-o bilă deschisă centrată în origine, adică, există $M > 0$ astfel încât $A \subset B(0, M)$.

Se numește vecinătate a elementului $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ o submulțime a lui $\mathbb{R}^p$ care conține o bilă deschisă centrată în $\bar{x}$. Notăm cu $\mathcal{V}(\bar{x})$ mulțimea tuturor vecinătăților lui $\bar{x}$.

- O submulțime a lui $\mathbb{R}^p$ se numește deschisă dacă este mulțimea vidă sau dacă este vecinătate pentru orice punct al său.
- O submulțime a lui $\mathbb{R}^p$ se numește închisă dacă mulțimea sa complementară în raport cu $\mathbb{R}^p$ este deschisă.
- Un punct $a \in \mathbb{R}^p$ se numește punct interior mulțimii $A \subset \mathbb{R}^p$ dacă A este vecinătate a lui a . Notăm cu $\text{int } A$ interiorul lui A (i.e. mulțimea tuturor punctelor interioare lui A).
- Un punct $a \in \mathbb{R}^p$ se numește punct de acumulare pentru mulțimea $A \subset \mathbb{R}^p$ dacă orice vecinătate a lui a are în comun cu mulțimea A cel puțin un punct diferit de a . Notăm cu A' mulțimea derivată a lui A (i.e. mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale lui A). Un punct $a \in A \setminus A'$ se numește punct izolat al lui A .
- Un punct $a \in \mathbb{R}^p$ se numește punct aderent pentru mulțimea $A \subset \mathbb{R}^p$ dacă orice vecinătate a lui a are în comun cu mulțimea A cel puțin un punct. Vom folosi notațiile $\text{cl } A$ și $\bar{A}$ pentru a desemna mulțimea aderentă a lui A (i.e. mulțimea tuturor punctelor aderente lui A).
- Notăm cu $\text{Fr } A$ mulțimea $\text{cl } A \setminus \text{int } A = \text{cl } A \cap \text{cl}(\mathbb{R}^p \setminus A)$ și o numim frontiera lui A .
- O submulțime a lui $\mathbb{R}$ se numește compactă dacă este mărginită și închisă.

Au loc următoarele rezultate.

Propoziția 4.6.1 (i) O submulțime a lui $\mathbb{R}^p$ este deschisă dacă și numai dacă este egală cu interiorul său.

(ii) O submulțime a lui $\mathbb{R}^p$ este închisă dacă și numai dacă este egală cu aderența sa.

Definiția 4.6.2 Se numește șir de elemente din $\mathbb{R}^p$ o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Valoarea funcției f în $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$, se notează cu x_n (sau $y_n, z_n, \dots$), iar șirul definit de f se notează (x_n) (sau, respectiv, $(y_n), (z_n), \dots$).

Definiția 4.6.3 Un șir se numește mărginit dacă mulțimea termenilor săi este mărginită.

Definiția 4.6.4 Se numește subșir al șirului (x_n) un șir (y_k) cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $y_k = x_{n_k}$, unde (n_k) este un șir strict crescător de numere naturale.

Definiția 4.6.5 Un șir $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ este convergent dacă există $x \in \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n_V \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Numărul x se numește limita lui (x_n) .

Dacă există, limita unui șir este unică.

Vom folosi notațiile $x_n \rightarrow x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ sau, mai simplu, $\lim x_n = x$ pentru a descrie situația din definiția precedentă. Are loc următorul rezultat de caracterizare.

Propoziția 4.6.6 Un șir (x_n) este convergent la limita $x \in \mathbb{R}^p$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon, \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Propoziția 4.6.7 Șirul $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ converge la $x \in \mathbb{R}^p$ dacă și numai dacă șirurile coordonate (x_n^i) converg (în $\mathbb{R}$) la x^i pentru orice $i \in \overline{1, p}$.

Teorema 4.6.8 Un șir este convergent la limita $x \in \mathbb{R}^p$ dacă și numai dacă orice subșir al său este convergent la limita x .

Propoziția 4.6.9 Orice șir convergent este mărginit.

Propoziția 4.6.10 (Caracterizarea punctelor aderente cu ajutorul șirurilor) Fie $A \subset \mathbb{R}^p$. Un punct $x \in \mathbb{R}^p$ este aderent mulțimii A dacă și numai dacă există un șir (x_n) de puncte din A astfel încât $x_n \rightarrow x$.

Propoziția 4.6.11 Mulțimea $A \subset \mathbb{R}^p$ este închisă dacă și numai dacă limita oricărui șir convergent de puncte din A aparține lui A .

Propoziția 4.6.12 Mulțimea $A \subset \mathbb{R}^p$ este compactă dacă și numai dacă din orice șir de elemente din A se poate extrage un subșir convergent la un punct din A .

Teorema 4.6.13 (Lema lui Cesàro) Orice șir mărginit are un subșir convergent.

Definiția 4.6.14 Un șir $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ se numește șir Cauchy sau fundamental dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n, m \geq n_\varepsilon, \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Definiția de mai sus poate fi reformulată astfel: (x_n) este șir Cauchy dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

Teorema 4.6.15 (Teorema lui Cauchy) Spațiul $\mathbb{R}^p$ este complet, adică un șir de puncte din acest spațiu este convergent dacă și numai dacă este fundamental.

Dăm acum unele rezultate specifice cazului șirurilor de numere reale.

Definiția 4.6.16 *Un șir de numere reale (x_n) se numește crescător (strict crescător, descrescător, strict descrescător) dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} > x_n$, $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} < x_n$). Un șir crescător sau descrescător se numește monoton.*

Fie $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mulțimea extinsă a numerelor reale. Se numește vecinătate a lui $+\infty$ o submulțime a lui $\overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $(x, +\infty]$, unde $x \in \mathbb{R}$. Vecinătățile pentru $-\infty$ se definesc analog.

Definiția 4.6.17 (i) *Spunem că șirul $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă*

$$\forall V \in \mathcal{V}(+\infty), \exists n_V \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

(ii) *Spunem că șirul $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă*

$$\forall V \in \mathcal{V}(-\infty), \exists n_V \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_V, x_n \in V.$$

Rezultatele corespunzătoare de caracterizare sunt următoarele.

Propoziția 4.6.18 (i) *Un șir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă și numai dacă*

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_A, x_n > A.$$

(ii) *Un șir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă și numai dacă*

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_A, x_n < -A.$$

Propoziția 4.6.19 *Fie $(x_n), (y_n), (z_n)$ șiruri de numere reale, $x, y \in \mathbb{R}$ și $n_0 \in \mathbb{N}$.*

(i) (Trecerea la limită în inegalități) *Dacă $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ și $x_n \leq y_n$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci $x \leq y$;*

(ii) (Criteriul majorării) *dacă $|x_n - x| \leq y_n$, pentru orice $n \geq n_0$ și $y_n \rightarrow 0$, atunci $x_n \rightarrow x$;*

(iii) *dacă $x_n \geq y_n$, pentru orice $n \geq n_0$ și $y_n \rightarrow +\infty$, atunci $x_n \rightarrow +\infty$;*

(iv) *dacă $x_n \leq y_n$, pentru orice $n \geq n_0$ și $x_n \rightarrow -\infty$, atunci $y_n \rightarrow -\infty$;*

(v) *dacă (x_n) este mărginit și $y_n \rightarrow 0$, atunci $x_n y_n \rightarrow 0$;*

(vi) (Teorema cleștelui) *dacă $x_n \leq y_n \leq z_n$, pentru orice $n \geq n_0$ și $x_n \rightarrow x$, $z_n \rightarrow x$ atunci $y_n \rightarrow x$;*

(vii) *$x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |x_n| \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_n^2 \rightarrow 0$.*

Continuăm cu rezultate fundamentale în teoria șirurilor de numere reale.

Teorema 4.6.20 *Orice șir monoton de numere reale are limită în $\overline{\mathbb{R}}$. Dacă, în plus, șirul este mărginit, atunci el este convergent după cum urmează: dacă este crescător, atunci limita sa este marginea superioară a mulțimii termenilor șirului, iar dacă este descrescător, atunci limita sa este marginea inferioară a mulțimii termenilor șirului. Dacă este nemărginit, atunci are limita $+\infty$ sau $-\infty$ după cum este crescător sau descrescător.*

Teorema 4.6.21 (Teorema lui Weierstrass pentru șiruri) *Orice șir de numere reale mărginit și monoton este convergent.*

Definiția 4.6.22 Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește punct limită pentru (x_n) dacă există un subșir (x_{n_k}) al lui cu $x = \lim x_{n_k}$.

Finalizăm această secțiune cu două criterii utile de convergență.

Propoziția 4.6.23 Fie (x_n) un șir de numere reale strict pozitive astfel încât există $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = x$. Dacă $x < 1$, atunci $x_n \rightarrow 0$, iar dacă $x > 1$, atunci $x_n \rightarrow +\infty$.

Propoziția 4.6.24 (Criteriul Stolz-Cesàro)) Fie (x_n) și (y_n) șiruri de numere reale astfel încât (y_n) este strict crescător și cu limita $+\infty$. Dacă există $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există $\lim \frac{x_n}{y_n}$ și este egală cu x .

Limite de funcții și continuitate

Reamintim acum unele chestiuni legate de conceptul de limită a unei funcții și de continuitatea funcțiilor. Fie $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definiția 4.6.25 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ și a punct de acumulare pentru A . Spunem că elementul $l \in \mathbb{R}^q$ este limita funcției f în punctul a , dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(l)$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A$, $x \neq a$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Teorema 4.6.26 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ și a punct de acumulare pentru A . Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$;
- (ii) pentru orice $B(l, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^q$, există $B(a, \delta) \subset \mathbb{R}^p$ astfel încât dacă $x \in B(a, \delta) \cap A$, $x \neq a$, atunci are loc $f(x) \in B(l, \varepsilon)$;
- (iii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $\|x - a\| < \delta$, $x \in A$, $x \neq a$, atunci are loc $\|f(x) - l\| < \varepsilon$;
- (iv) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $|x_i - a_i| < \delta$, pentru orice $i \in \overline{1, p}$, unde $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in A$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_p)$, $x \neq a$, atunci are loc $\|f(x) - l\| < \varepsilon$;
- (v) pentru orice șir $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, $x_n \rightarrow a$ rezultă $f(x_n) \rightarrow l$.

Teorema 4.6.27 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$, $l \in \mathbb{R}^q$ și a punct de acumulare pentru A . Dacă funcția f are limita l în punctul a , atunci această limită este unică.

Observația 4.6.28 Dacă $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$, a punct de acumulare pentru A și există două șiruri $(x'_n), (x''_n) \subset A \setminus \{a\}$, $x'_n \rightarrow a$, $x''_n \rightarrow a$ astfel încât $f(x'_n) \rightarrow l'$, $f(x''_n) \rightarrow l''$ și $l' \neq l''$, atunci funcția f nu are limită în $a \in A'$.

Teorema 4.6.29 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ (adică f_i , $i \in \overline{1, q}$ sunt funcțiile coordonate) și a punct de acumulare pentru A . Atunci f are limita $l = (l_1, l_2, \dots, l_q) \in \mathbb{R}^q$ în punctul a dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i$, pentru orice $i \in \overline{1, q}$.

Definiția 4.6.30 Fie $a \in \mathbb{R}$ și $A \subset \mathbb{R}$. Notăm $A_s = A \cap (-\infty, a]$, $A_d = A \cap [a, \infty)$. Punctul a se numește punct de acumulare la stânga (respectiv dreapta) pentru A , dacă este punct de acumulare pentru mulțimea A_s (respectiv A_d). Vom nota mulțimea punctelor de acumulare la stânga (respectiv dreapta) cu A'_s (respectiv A'_d).

Definiția 4.6.31 Fie $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ și a punct de acumulare la stânga (respectiv dreapta) pentru A . Spunem că elementul $l \in \mathbb{R}^q$ este limita la stânga (respectiv dreapta) a funcției f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in U \cap A_s$ (respectiv $x \in U \cap A_d$), $x \neq a$, atunci are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = l$ sau $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = l$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = l$ sau $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = l$).

Teorema 4.6.32 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \rightarrow \mathbb{R}^q$, $I \subset \mathbb{R}$ și $a \in I$. Atunci există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ dacă și numai dacă există limitele laterale (la stânga și la dreapta) în a și sunt egale. În acest caz toate cele trei limite sunt egale: $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Un binecunoscut rezultat spune că funcțiile reale de o variabilă reală care sunt monotone admit limite laterale în punctele de acumulare ale domeniului.

Teorema 4.6.33 (Criteriul majorării) Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă există $l \in \mathbb{R}^q$ și $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\|f(x) - l\| \leq |g(x)|$, pentru orice $x \in U \setminus \{a\}$ și $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, atunci există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Teorema 4.6.34 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ și $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ și există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât g este mărginită pe U , atunci există limita $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

Teorema 4.6.35 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, $l > 0$ (respectiv $l < 0$) atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq a$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).

Teorema 4.6.36 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$. Dacă există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f este mărginită pe U .

Definiția 4.6.37 Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $a \in A'$. Spunem că funcția f are limita ∞ (respectiv $-\infty$) în punctul a , dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(\infty)$ (respectiv $V \in \mathcal{V}(-\infty)$), există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq a$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$).

Teorema 4.6.38 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci există $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $\|x - a\| < \delta$, $x \in A$, $x \neq a$ are loc $f(x) > \varepsilon$ (respectiv $f(x) < -\varepsilon$).

Definiția 4.6.39 Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem că ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A dacă există un șir de elemente din A cu limita ∞ (respectiv $-\infty$), ceea ce este echivalent cu a spune că A este nemărginită superior (respectiv inferior).

Definiția 4.6.40 Fie $A \subset \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel încât ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A . Spunem că elementul $l \in \mathbb{R}^q$ este limita funcției f în punctul ∞ (respectiv $-\infty$), dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(l)$, există $U \in \mathcal{V}(\infty)$ (respectiv $U \in \mathcal{V}(-\infty)$) astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$).

Teorema 4.6.41 Fie $A \subset \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel încât ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A . Atunci există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \in \mathbb{R}^q$ (respectiv $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}^q$) dacă și numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $x > \delta$ (respectiv $x < -\delta$), $x \in A$ are loc $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.

Definiția 4.6.42 Fie $A \subset \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A . Spunem că elementul ∞ este limita funcției f în punctul ∞ , dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(\infty)$, există $U \in \mathcal{V}(\infty)$ (respectiv $U \in \mathcal{V}(-\infty)$) astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Analog se definesc situațiile $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Caracterizările cu ε și δ ale tuturor acestor cazuri sunt similare celor deja descrise.

Definiția 4.6.43 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$. Spunem că funcția f este continuă în punctul a dacă oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \in V$.

Dacă f nu este continuă în a , vom spune că f este discontinuă în a sau că a este punct de discontinuitate al funcției f .

Teorema 4.6.44 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A' \cap A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$. Funcția f este continuă în a dacă și numai dacă are loc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Dacă a este un punct izolat al lui A , atunci f este continuă în a .

Teorema 4.6.45 Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este continuă în a ;
- (ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $\|x - a\| < \delta$, $x \in A$, atunci $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ (caracterizarea $\varepsilon - \delta$);
- (iii) pentru orice $(x_n) \subset A$, $x_n \rightarrow a$ are loc $f(x_n) \rightarrow f(a)$ (caracterizarea cu șiruri).

Teorema 4.6.46 Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este continuă;
- (ii) pentru orice mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^q$, $f^{-1}(D)$ este deschisă;
- (iii) pentru orice mulțime închisă $F \subset \mathbb{R}^q$, $f^{-1}(F)$ este închisă.

Teorema 4.6.47 Imaginea printr-o funcție continuă a unei mulțimi compacte este o mulțime compactă.

Teorema 4.6.48 (Teorema lui Weierstrass) Fie K din $\mathbb{R}^p$ o mulțime compactă. Dacă $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă atunci f este mărginită și își atinge marginile pe K (adică există $a, b \in K$, astfel încât $\sup_{x \in K} f(x) = f(a)$ și $\inf_{x \in K} f(x) = f(b)$).

Definiția 4.6.49 Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$. Funcția f se numește uniform continuă pe mulțimea D , dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, încât pentru orice $x', x'' \in D$ cu $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$ are loc relația $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Observația 4.6.50 O funcție uniform continuă pe D este continuă pe D .

Teorema 4.6.51 (Teorema lui Cantor) O funcție continuă pe o mulțime compactă K din $\mathbb{R}^p$ cu valori în $\mathbb{R}^q$ este și uniform continuă pe K .

Definiția 4.6.52 Fie $L \geq 0$ o constantă reală. O funcție $f : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ se numește Lipschitz pe A de constantă L sau L -Lipschitz pe A dacă $\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$, pentru orice $x, y \in A$.

Propoziția 4.6.53 Orice funcție Lipschitz pe $A \subset \mathbb{R}^p$ este uniform continuă pe A .

Teorema 4.6.54 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este injectivă și continuă, atunci f este strict monotonă pe I .

Definiția 4.6.55 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Spunem că funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă pentru orice $a, b \in I$, $a < b$ și orice $\lambda \in (f(a), f(b))$ sau $\lambda \in (f(b), f(a))$ există $c_\lambda \in (a, b)$ astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.

Teorema 4.6.56 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux și există $a, b \in I$, $a < b$, astfel încât $f(a)f(b) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b) .

Teorema 4.6.57 Fie $I \subset \mathbb{R}$, I interval. Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă și numai dacă pentru orice interval $J \subset I$, $f(J)$ este interval.

Teorema 4.6.58 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, atunci f are proprietatea lui Darboux.

Reamintim că orice aplicație liniară $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este continuă. Pentru o astfel de aplicație se definește numărul real

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{M > 0 \mid \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^p\} \\ &= \sup\left\{\|Tx\| \mid x \in \overline{B(0, 1)}\right\} \end{aligned}$$

care se numește norma operatorului T . Astfel, mulțimea aplicațiilor liniare de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^q$ se organizează ca spațiu liniar normat peste $\mathbb{R}$ cu operațiile algebrice uzuale și cu norma de mai sus. Acest spațiu se notează cu $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ și se identifică izomorf cu spațiul $\mathbb{R}^{pq}$. Mai mult, fiecărei aplicații $T \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ i se asociază în mod natural o matrice reală de dimensiune $q \times p$

notată $A_T = (a_{ji})_{j \in \overline{1,q}, i \in \overline{1,p}}$ astfel: dacă $(e_i)_{i \in \overline{1,p}}$ și $(e'_i)_{i \in \overline{1,q}}$ sunt bazele canonice ale spațiilor $\mathbb{R}^p$ și respectiv $\mathbb{R}^q$ atunci $(a_{ji})_{j \in \overline{1,q}, i \in \overline{1,p}}$ sunt coordonatele exprimării imaginilor elementelor $(e_i)_{i \in \overline{1,p}}$ prin T în raport cu baza $(e'_i)_{i \in \overline{1,q}}$, adică

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^q a_{ji} e'_j, \quad \forall i \in \overline{1,p}.$$

Prin urmare, $T \mapsto A_T$ este un izomorfism de spații liniare între $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ și spațiul matricilor reale de dimensiune $q \times p$ și, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$,

$$T(x) = A_T x.$$

În plus, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$ și $y \in \mathbb{R}^q$ are loc

$$\langle A_T x, y \rangle = \langle x, A_T^t y \rangle.$$

Dacă A este o matrice de dimensiune $q \times p$ atunci aplicația liniară asociată lui A este surjectivă dacă și numai dacă aplicația asociată lui A^t este injectivă.

Reamintim de asemenea că dacă $T : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este o aplicație liniară atunci

$$\text{Ker}(T) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid T(x) = 0\}$$

este subspațiu liniar în $\mathbb{R}^p$, iar

$$\text{Im}(T) := \{T(x) \mid x \in \mathbb{R}^p\}$$

este subspațiu liniar în $\mathbb{R}^q$ și

$$p = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)),$$

unde $\dim$ notează dimensiunea algebrică.

O matrice A pătratică simetrică de dimensiune p se numește pozitiv semidefinită dacă $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$ și pozitiv definită dacă $\langle Ax, x \rangle > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. De fapt, A este pozitiv definită dacă și numai dacă este pozitiv semidefinită și inversabilă. Dacă au loc inegalitățile opuse, matricea se numește negativ semidefinită, respectiv negativ definită. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,p}}$ atunci, conform Criteriului lui Sylvester, A este pozitiv definită dacă și numai dacă $\det(a_{ij})_{i,j \in \overline{1,q}} > 0$ pentru orice $q \in \overline{1,p}$ și negativ definită dacă și numai dacă $(-1)^q \det(a_{ij})_{i,j \in \overline{1,q}} > 0$ pentru orice $q \in \overline{1,p}$.

Diferențiabilitate

Definiția 4.6.59 Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in \text{int } D$. Spunem că f este Fréchet diferențiabilă (sau, pe scurt, diferențiabilă) în a dacă există o aplicație liniară notată $\nabla f(a) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \nabla f(a)(h)}{\|h\|} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Aplicația $\nabla f(a)$ se numește diferențiala Fréchet a funcției f în a .

Să observăm că relația de mai sus este echivalentă cu următoarele condiții:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(a, \delta), \|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|;$$

$$\exists \alpha : D - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^q, \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = \alpha(0) = 0,$$

$$f(a + h) = f(a) + \nabla f(a)(h) + \|h\| \alpha(h), \forall h \in D - \{a\}.$$

Spunem că $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este de clasă C^1 pe mulțimea deschisă D dacă f este Fréchet diferențiabilă pe D și ∇f este continuă pe D . Evident, f se poate scrie sub forma $f = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ unde $f_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \overline{1, q}$ și, în general, aplicația $\nabla f(a) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ se identifică cu matricea de dimensiune $q \times p$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

numită matricea jacobiană a lui f în punctul a , unde $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ reprezintă derivata parțială a funcției f_i în raport cu variabila x_j în a .

De multe ori ne vom referi la matricea jacobiană în locul diferențialei. Pe baza unui rezultat general, dacă $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in D$, $\nabla f(a)$ este izomorfism al lui $\mathbb{R}^p$ dacă și numai dacă matricea jacobiană a lui f în punctul a este nesară.

Au loc următoarele reguli de calcul.

- Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ afină, adică având forma $f(x) := g(x) + u$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, unde $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este liniară, iar $u \in \mathbb{R}^q$. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, $\nabla f(x) = g$.
- Fie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de forma $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \langle b, x \rangle$ unde A este o matrice pătratică simetrică de ordin p , iar $b \in \mathbb{R}^p$. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, $\nabla f(x) = Ax + b$.
- Fie $D \subset \mathbb{R}^p$, $E \subset \mathbb{R}^q$, $\bar{x} \in \text{int } D$, $\bar{y} \in \text{int } E$ și $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $h : E \rightarrow \mathbb{R}^k$.
 - Dacă f, g sunt diferențiabile în $\bar{x}$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este diferențiabilă în $\bar{x}$ și are loc

$$\nabla(\alpha f + \beta g)(\bar{x}) = \alpha \nabla f(\bar{x}) + \beta \nabla g(\bar{x}).$$

- Dacă f, φ sunt diferențiabile în $\bar{x}$, atunci φf este diferențiabilă în $\bar{x}$ și

$$\nabla(\varphi f)(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) \nabla f(\bar{x}) + f(\bar{x}) \nabla \varphi(\bar{x}),$$

unde $(f(\bar{x}) \nabla \varphi(\bar{x}))(x) = \nabla \varphi(\bar{x})(x) \cdot f(\bar{x})$.

- Dacă $f(D) \subset E$, $\bar{y} = f(\bar{x})$, f este diferențiabilă în $\bar{x}$ și h este diferențiabilă în $\bar{y}$, atunci $h \circ f$ este diferențiabilă în $\bar{x}$ și

$$\nabla(h \circ f)(\bar{x}) = \nabla h(\bar{y}) \circ \nabla f(\bar{x}).$$

Un caz ce merită o atenție specială este $p = 1$. În acest caz spunem că f este derivabilă în a dacă există

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}^q. \quad (4.12)$$

Notăm această limită cu $f'(a)$ și o numim derivata lui f în a .

Propoziția 4.6.60 *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in \text{int } D$. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) f este derivabilă în a ;

(ii) f este Fréchet diferențiabilă în a .

În plus, în fiecare din aceste cazuri, $\nabla f(a)(x) = xf'(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$ și $(a, b) \in \text{int } D$ este fixat, definim $D_1 := \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x, b) \in D\}$ și $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^r$, $f_1(x) := f(x, b)$. Spunem că f este Fréchet diferențiabilă parțial în raport cu x dacă f_1 este Fréchet diferențiabilă în a , iar diferențiala se notează cu $\nabla_x f(a, b)$. Dacă f este diferențiabilă în (a, b) , atunci f este diferențiabilă parțial în raport cu x și y în a , respectiv b și

$$\nabla_x f(a, b) = \nabla f(a, b)(\cdot, 0), \quad \nabla_y f(a, b) = \nabla f(a, b)(0, \cdot).$$

Revenind acum la cazul general, spunem că $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ este Fréchet diferențiabilă de ordinul al doilea în $a \in \text{int } D$ dacă f este Fréchet diferențiabilă pe o vecinătate $V \subset D$ a lui a și $\nabla f : V \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ este Fréchet diferențiabilă în a , adică există o funcțională, notată $\nabla^2 f(a)$, din spațiul $L^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) := L(\mathbb{R}^p, L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q))$ și $\alpha : D - \{a\} \rightarrow L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ astfel că $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = \alpha(0) = 0$ și pentru orice $h \in D - \{a\}$ are loc

$$\nabla f(a+h) = \nabla f(a) + \nabla^2 f(a)(h, \cdot) + \|h\| \alpha(h).$$

Să reamintim că spațiul $L^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ definit mai sus se identifică cu spațiul aplicațiilor biliniare de la $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^q$.

Spunem că f este de clasă C^2 dacă este Fréchet diferențiabilă de ordinul al doilea pe D și $\nabla^2 f : D \rightarrow L^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ este continuă.

Teorema 4.6.61 *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ și $a \in \text{int } D$. Dacă f este Fréchet diferențiabilă de ordinul al doilea în a atunci $\nabla^2 f(a)$ este aplicație biliniară simetrică.*

În cazul în care $q = 1$, aplicația $\nabla^2 f(a)$ este definită de matricea pătratică simetrică $H(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a) \right)_{i,j \in \overline{1,p}}$, numită matricea hessiană a lui f în a . În plus, $\langle H(a)u, u \rangle = \nabla^2 f(a)(u, u)$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}^p$, definim segmentul închis de capete a, b mulțimea

$$[a, b] := \{\alpha a + (1 - \alpha)b \mid \alpha \in [0, 1]\}$$

și segmentul deschis de aceleași capete

$$(a, b) := \{\alpha a + (1 - \alpha)b \mid \alpha \in (0, 1)\}.$$

Teorema 4.6.62 (Teoremele lui Lagrange și Taylor) Fie $U \subset \mathbb{R}^p$ deschisă, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ și $a, b \in U$ cu $[a, b] \subset U$. Dacă f este de clasă C^1 pe U , atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) = f(a) + \nabla f(c)(b - a).$$

Dacă f este de clasă C^2 pe U , atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) = f(a) + \nabla f(a)(b - a) + \frac{1}{2} \nabla^2 f(c)(b - a, b - a).$$

Teorema 4.6.63 (Teorema funcțiilor implicite) Fie $D \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ o mulțime deschisă, $h : D \rightarrow \mathbb{R}^q$ o funcție și $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^q$ astfel încât

- (i) $h(\bar{x}, \bar{y}) = 0$;
- (ii) funcția h este de clasă C^1 pe D ;
- (iii) $\nabla_y h(\bar{x}, \bar{y})$ este nesingulară.

Atunci există două vecinătăți U și V ale lui $\bar{x}$ și respectiv $\bar{y}$ și o funcție continuă unică $\varphi : U \rightarrow V$ astfel încât

- (a) $h(x, \varphi(x)) = 0$ pentru orice $x \in U$;
- (b) dacă $(x, y) \in U \times V$ și $h(x, y) = 0$, atunci $y = \varphi(x)$;
- (c) φ este diferențiabilă pe U și

$$\nabla \varphi(x) = -[\nabla_y h(x, \varphi(x))]^{-1} \nabla_x h(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in U.$$

Câteva rezultate fundamentale din teoria derivabilității funcțiilor reale de o variabilă reală sunt date pe scurt în finalul acestui capitol.

În acest context ($p = q = 1$) se aplică Propoziția 4.6.60, dar are sens să vorbim de existența derivatei în puncte ale domeniului care sunt puncte de acumulare ale acestuia: este suficient să considerăm limita din relația (4.12) din această perspectivă. Mai mult, ca și în cazul limitelor laterale, putem vorbi de derivate laterale, din nou considerând, atunci când este posibil, limitele laterale pentru expresia din relația (4.12). Atunci când există, vom numi aceste limite derivatele la stânga și respectiv la dreapta ale funcției f în a și le vom nota cu $f'_-(a)$ și respectiv $f'_+(a)$.

Definiția 4.6.64 Fie $A \subset \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$ (respectiv $f(a) \geq f(x)$), pentru orice $x \in A \cap V$. Punctele de maxim sau de minim local se numesc puncte de extrem local.

Teorema 4.6.65 (Teorema lui Fermat) Fie $I \subset \mathbb{R}$, I interval și $a \in \text{int } I$. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în a , iar a este punct de extrem local pentru f , atunci $f'(a) = 0$.

Teorema 4.6.66 (Teorema lui Rolle) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema 4.6.67 (Teorema lui Lagrange) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) . Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Propoziția 4.6.68 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe I .

- (i) Dacă $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este constantă pe I .
- (ii) Dacă $f'(x) > 0$ (respectiv $f'(x) \geq 0$) pentru orice $x \in I$, atunci f este strict crescătoare (respectiv crescătoare) pe I .
- (iii) Dacă $f'(x) < 0$ (respectiv $f'(x) \leq 0$), pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare (respectiv descrescătoare) pe I .

Teorema 4.6.69 (Șirul lui Rolle) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție derivabilă. Dacă $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ sunt rădăcini consecutive ale derivatei f' (adică $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$ și $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (x_1, x_2)$) atunci:

- (i) dacă $f(x_1)f(x_2) < 0$, ecuația $f(x) = 0$ are exact o rădăcină în intervalul (x_1, x_2) ;
- (ii) dacă $f(x_1)f(x_2) > 0$, ecuația $f(x) = 0$ nu are nicio rădăcină în intervalul (x_1, x_2) ;
- (iii) dacă $f(x_1) = 0$ sau $f(x_2) = 0$, atunci x_1 sau x_2 este o rădăcină multiplă a ecuației $f(x) = 0$ și ecuația nu are nicio rădăcină în intervalul (x_1, x_2) .

Teorema 4.6.70 (Teorema lui Cauchy de eliminare a unor nedeterminări) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, care verifică condițiile:

- (i) $f(a) = g(a) = 0$;
- (ii) f, g sunt derivabile în a ;
- (iii) $g'(a) \neq 0$.

Atunci există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in V \setminus \{a\}$ și

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Teorema 4.6.71 (Regula lui L'Hôpital) Fie $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dacă:

- (i) f, g sunt derivabile pe (a, b) cu $g' \neq 0$ pe (a, b) ;

- (ii) există $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$;

- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ sau

- (iii)' $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$,

atunci există $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Teorema 4.6.72 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție de n ori derivabilă în $a \in I$, ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$), astfel încât

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0.$$

- (i) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem, după cum urmează: punct de maxim local dacă $f^{(n)}(a) < 0$ și punct de minim local dacă $f^{(n)}(a) > 0$.
- (ii) Dacă n este impar, atunci a nu este punct de extrem.

Integrala Riemann

În finalul acestui breviar teoretic discutăm principalele aspecte legate de integrala Riemann. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definiția 4.6.73 (i) Se numește diviziune a intervalului $[a, b]$ o mulțime finită de numere reale $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), notată Δ , cu proprietatea că

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

(ii) Se numește norma diviziunii Δ valoarea $\|\Delta\| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i \in \overline{1, n}\}$.

(iii) Se numește sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ o mulțime de puncte $\Xi := \{\xi_i \mid i \in \overline{1, n}\}$ cu proprietatea $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru orice $i \in \overline{1, n}$.

(iv) Fie o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se numește sumă Riemann corespunzătoare unei diviziuni Δ a intervalului $[a, b]$ și unui sistem asociat de puncte intermediare Ξ valoarea

$$S(f, \Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definiția 4.6.74 Fie o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$ dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ și pentru orice sistem de puncte intermediare Ξ asociat diviziunii Δ are loc inegalitatea

$$|S(f, \Delta, \Xi) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I din definiția precedentă este unic, se numește integrala lui f pe $[a, b]$ și se notează cu

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Convenim ca

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ și } \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 4.6.75 Orice funcție integrabilă Riemann pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.

Definiția 4.6.76 Fie o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că o funcție $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este primitivă a funcției f pe $[a, b]$ dacă F este derivabilă pe $[a, b]$ și $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

Evident, dacă o funcție admite o primitivă, atunci admite o infinitate de primitive, iar diferența dintre orice două primitive este o funcție constantă.

Are loc teorema fundamentală a calculului integral.

Teorema 4.6.77 (Leibniz-Newton) Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$ și admite o primitivă F pe $[a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Funcțiile continue satisfac ambele ipoteze ale teoremei precedente.

Teorema 4.6.78 Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ și admite primitivă pe $[a, b]$.

Teorema 4.6.79 Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este mărginită și mulțimea punctelor sale de discontinuitate este finită, atunci f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Orice funcție monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

Prezentăm în final principalele proprietăți ale integralei Riemann.

Teorema 4.6.80 (i) Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a, b]$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ și $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in [a, b]$ ($m, M \in \mathbb{R}$) atunci

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

În particular, dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

iar dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile și $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(iii) Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci $|f|$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

(iv) Dacă $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a, b]$ atunci $f \cdot g$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 4.6.81 (i) Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann pe orice subinterval al lui $[a, b]$.

(ii) Dacă $c \in (a, b)$ și f este integrabilă pe $[a, c]$ și $[c, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Teorema 4.6.82 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care coincide cu f pe $[a, b]$ cu excepția unui număr finit de puncte. Dacă f^* este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f^*(x) dx.$$

Modele de evaluări scrise

Model examen parțial – varianta 1

Subiectul 1. Să se definească noțiunea de vector tangent la o mulțime închisă din $\mathbb{R}^p$ într-un punct al său. Să se arate că mulțimea acestor vectori este un con închis. Este acest con convex, în general?

Subiectul 2. Fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$. Să se arate că f este convexă și că pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(x_i)_{i \in \overline{1, n}} \subset (0, +\infty)$ cu $\sum_1^n x_i = 1$ are loc

$$\ln \frac{1}{n} \leq \sum_1^n x_i \ln x_i.$$

Subiectul 3. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă. Definim

$$B = [-2, 1]A = \{\alpha a \mid \alpha \in [-2, 1], a \in A\}.$$

Să se arate că dacă A este compactă atunci B este compactă, dar reciproca nu este adevărată.

Subiectul 4. Să se scrie conul tangent la mulțimea

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6x = 5y^2\}$$

într-un punct al său. Justificați. Să se deseneze mulțimea și conul tangent determinat.

Barem de notare: (pentru fiecare subiect se acordă un punct din start)

1. definiția 2p; con 1p; închis 3p; convexitatea 3p.
2. convexitatea 2p; folosirea inegalității lui Jensen 3p; stabilirea rezultatului 4p.
3. directa 5p, reciproca 4p.
4. forma conului tangent 3p; justificarea 2p; desen 4p.

Timp de lucru: 100 minute

Model examen parțial – varianta 2

Subiectul 1. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulțime nevidă, convexă și închisă. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$ există un unic element $a_x \in A$ astfel încât $d_A(x) = \|x - a_x\|$.

Subiectul 2. Un dreptunghi este înscris în elipsa

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Care trebuie să fie dimensiunile dreptunghiului pentru ca aria să fie maximă. Determinați aria maximă.

Subiectul 3. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ nevidă. Definim $\text{con } A := [0, \infty)A$. Să se arate că:

- (a) dacă A este convexă, atunci $\text{con } A$ este convexă;
- (b) dacă A este compactă și $0 \notin A$, atunci $\text{con } A$ este închisă.
- (c) Să se dea, grafic, un exemplu de mulțime compactă pentru care $\text{con } A$ nu este închisă.

Subiectul 4. Fie mulțimea

$$C = \{\alpha(1, 1) + \beta(0, 1) \mid \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Să se arate că C este con convex închis. Să se deseneze mulțimea. Să se scrie și să se deseneze conul tangent și conul normal la această mulțime în punctul $(1, 1)$.

Barem de notare: (pentru fiecare subiect se acordă un punct din start)

- 1. directă 5p; reciprocă 4p;
- 2. modelare 4 p; rezolvare 5p.
- 3. (a) 3p; (b) 4p; (c) 2p.
- 4. C este con, închis și convex 4p; conul tangent, conul normal 3p; desene 2p.

Timp de lucru: 100 minute

Model verificare scrisă

Subiectul 1. Să se scrie cele două rezultate studiate de existență a soluțiilor globale pentru o problemă de optimizare de tip

$$\min f(x), \quad x \in M,$$

unde $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ și $M \subset \mathbb{R}^p$ cu precizarea notațiilor folosite. Să se demonstreze unul dintre aceste rezultate.

Subiectul 2. Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - ye^y$ are o infinitate de maxime globale, dar nu are niciun minim local.

Barem de notare: (pentru fiecare subiect se acordă un punct din start)

1. precizarea cadrului 2p; enunțuri 2x2=4; demonstrație 3p.
2. punctele critice 3 p; calculul matricei hessiene 2 p; determinarea punctelor de extrem 4p.

Timp de lucru: 50 minute

Model evaluare finală – varianta 1

Subiectul 1. (a) Conul tangent (în sens Bouligand) la o mulțime nevidă și închisă într-un punct al mulțimii. Proprietăți. Cazul special al mulțimilor convexe. (Enunțuri)

(b) Calculul proiecțiilor pe un hiperplan și pe un elipsoid generalizat

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1 - 4x_2 - x_1x_2$ și mulțimea restricțiilor M egală cu discul unitate închis. Considerăm problema (P) a minimizării lui f pe M . Să se verifice dacă este îndeplinită condiția necesară, respectiv condiția suficientă de optimalitate de ordinul I în punctul: $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Subiectul 3. Fie problema $\min(4x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2)$ cu restricțiile $2x_1 + x_2 \leq 1$ și $x_1^2 \leq 1$. Determinați soluțiile problemei, cu parcurgerea următorilor pași: existența soluțiilor, chestiunea convexității problemei, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, stabilirea soluțiilor.

Subiectul 4. Se dă codul Matlab

```
f = @(x) x^3 - 2*x + 2;  
f_der = @(x) 3*x^2 - 2;  
x=???;  
x_precedent=-1;k=0;eps=10^(-6);maxiter=100;  
while abs(x-x_precedent)>eps && k<maxiter  
    x_precedent=x;x=x-f(x)/f_der(x);k=k+1;  
end  
disp(x); disp(k); disp(f(x));
```

Dacă în acest cod se înlocuiește "???" (de pe a treia linie) cu -1.5 se obțin rezultatele: $x = -1.7693$; $k = 5$; $\text{ans} = 0$, iar dacă se înlocuiește cu 1.5 se obțin rezultatele: $x = 0$; $k = 100$; $\text{ans} = 2$.

Precizați metoda numerică pe care codul o implementează, comentați liniile principale ale codului și interpretați rezultatele.

Să se explice semnificația matematică a acestui cod, să se numeroteze și să se comenteze liniile principale. Să se interpreteze rezultatele.

Barem de notare:

1p – oficiu;

1. (a) 1p; (b) 1,5p. (=2,5p)

2. scrierea condițiilor 0,5p; verificarea condiției necesare 0,75p; verificarea condiției suficiente 0,25p. (=1,5p)

3. justificarea existenței soluțiilor: 0,5p; aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker: 0,5p; convexitatea problemei: 0,5p; scrierea și rezolvarea sistemului Karush-Kuhn-Tucker, determinarea soluțiilor: 1,5p. (=3p)

4. explicarea semnificației matematice: 1p; comentarea liniilor de cod și interpretarea rezultatelor 1p. (=2p).

Timp de lucru: 2 ore

Model evaluare finală – varianta 2

Subiectul 1. (a) Funcția distanță la o mulțime nevidă. Proprietăți (inclusiv cazul mulțimilor convexe) – doar enunțuri.

(b) Să se enunțe și să se demonstreze rezultatul referitor la condiția necesară de optimalitate de ordinul I. Să se prezinte cazul particular al Teoremei lui Fermat.

Subiectul 2. Fie $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4$. Să se arate că sistemul de restricții $h(x) = 0$ satisface condiția Abadie în toate punctele sale.

Subiectul 3. Fie problema $\min (x^2 + xy)$ cu restricția $x^2 + y^2 \leq 1$. Să se determine soluția/soluțiile globală/globale a/ale problemei (cu parcurgerea tuturor pașilor: existența soluțiilor, chestiunea convexității problemei, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, determinarea soluției/soluțiilor).

Subiectul 4. Fie $f : [1, 2] \rightarrow [1, 2]$ dată prin

$$f(x) = \frac{x}{x^3 + 1} + 1.$$

Să se arate că f este bine definită, apoi să se demonstreze că f este contracție. Se dă șirul (x_n) prin $x_0 = 1.5$,

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{x_n^3 + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că (x_n) este convergent, limita sa $\bar{x}$ este din intervalul $(1, 2)$, iar viteza de convergență este liniară.

Barem de notare:

1p – oficiu;

1. (a) 1p; (b) 1,5p. (=2,5p)

2. precizarea condiției 0,5; verificarea 1p. (=1,5p)

3. justificarea existenței soluțiilor: 0,5; studiul convexității problemei și aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker: 0,5p; aplicarea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker și rezolvarea sistemului Karush-Kuhn-Tucker: 1,5; determinarea soluției/soluțiilor: 0,5. (=3p)

4. f bine definită: 0,5; f contracție 0,75; convergența lui (x_n) : 0,75. (=2p).

Timp de lucru: 2 ore

Bibliografie

- [1] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, John Wiley & Sons, 2006.
- [2] O. Cârjă, *Unele metode de analiză funcțională neliniară*, Editura Matrix Rom, 2003.
- [3] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, John Wiley & Sons, 1983.
- [4] M. R. Hestenes, *Optimization Theory. The finite dimensional case*, John Wiley & Sons, 1975.
- [5] J.-B. Hiriart-Urruty, *Optimization et analyse convexe*, EDP Sciences, 2009.
- [6] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical optimization*, Springer, 2006.
- [7] P. Pedregal, *Introduction to optimization*, Springer, 2004.
- [8] T. L. Rădulescu, V. Rădulescu, T. Andreescu, *Problems in Real Analysis: advanced calculus on the real axis*, Springer, 2009.
- [9] A. Quarteroni, F. Saleri, *Scientific computing with MATLAB and Octave*, Springer, 2006.
- [10] C. Zălinescu, *Programare matematică în spații normate infinit dimensionale*, Editura Academiei, 1998.