Teoria optimizării
(suport de curs şi seminar – versiune în lucru)

Marius Durea

Teoria Optimizării – Licenţă, M-anul III, semestrul I

Desfăşurarea activităţii în anul universitar 2026–2027

Pe parcursul semestrului vor fi 2 ore de curs şi 2 ore de seminar săptămânal. Cursul şi seminarul vor urmări, preponderent, materialul corespunzător postat la adresa:

www.math.uaic.ro/˜durea – secţiunea teaching

Evaluarea se desfăşoară după procedura de mai jos.

- În timpul semestrului va avea loc evaluarea continuă (EC) care va avea ponderea de 50% din nota finală şi va cuprinde trei componente:
  - un examen parţial (EP): în săptămâna 7, 8 sau 9, studenţii vor susţine un examen parţial scris (cu durata de 100 de minute), iar nota obţinută va avea ponderea de 50% din EC; EP nu se poate reface şi nu se poate susţine în sesiune; exclusiv pe baza unor motive bine întemeiate, EP se poate susţine la o dată ulterioară în timpul semestrului;
  - o verificare scrisă (VS): într-una din săptămânile 11, 12 sau 13 va avea loc la seminar o verificare scrisă cu durata de 50 de minute, iar nota obţinută va avea ponderea de 25% din EC; exclusiv pe baza unor motive bine întemeiate, VS se poate susţine la o dată ulterioară în timpul semestrului;
  - activitatea de seminar (AS): activitatea şi calitatea răspunsurilor din timpul desfăşurării seminarelor vor genera o notă ce va avea o pondere de 25% din EC.
- În sesiune va avea loc evaluarea finală (EF) care va avea o pondere de 50% din nota finală şi care constă dintr-o probă scrisă de 2 ore. Pentru fiecare student, nota evaluării finale şi nota finală vor fi comunicate în cadrul unei întâlniri care va fi stabilită în prealabil. O condiţie necesară pentru promovare este ca nota evaluării finale să fie minim 4,5. Odată ce această condiţie este îndeplinită se va calcula nota finală, care va fi rotunjirea la cel mai apropiat număr natural din intervalul $[1, 10]$ a valorii

$$\frac{1}{2}EF + \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}EF + \frac{1}{4}EP + \frac{1}{8}VS + \frac{1}{8}AS.$$

Prefaţă

Scopul lucrării de faţă este acela de a prezenta, pe spaţii normate finit dimensionale (spaţiile $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), o serie de rezultate de analiză neliniară, cu accent pe studiul aspectelor clasice ale teoriei optimizării pentru probleme cu date netede (de clasă C^2). Evident, multe din rezultatele cuprinse în această prezentare au loc pe spaţii mult mai generale (spaţii metrice, spaţii normate infinit dimensionale), dar ideile fundamentale ce stau la baza teoriei sunt similare, indiferent de context. Cadrul spaţiilor finit dimensionale oferă posibilitatea scurtării unor demonstraţii şi, mai ales, un suport intuitiv necesar precizării cu mai mare claritate a acestor idei de bază. De asemenea, pentru o ilustrare cât mai cuprinzătoare a prezentării teoretice, aceasta este însoţită de exerciţii şi probleme dintre care unele sunt rezolvate.

Monografii clasice ale subiectului tratat precum şi lucrări mai recente care oferă un punct de vedere modern corelat cu tendinţe curente din teoria optimizării sunt prezentate la final şi au constituit bazele pe care acest curs a fost construit.

Cuprins

Prefaţă **i**

1 Introducere **1**
1.1 Concepte de bază 1
1.2 Exerciţii 6

2 Elemente de analiză neliniară **11**
2.1 Mulţimi convexe 11
2.2 Funcţii convexe 12
2.3 Funcţia distanţă 19
2.4 Conuri 21
2.5 Teorema lui Lyusternik 24
2.6 Lema lui Farkas 26
2.7 Exerciţii 30

3 Studiul unor probleme de optimizare **43**
3.1 Cadrul general 43
3.2 Rezultate de existenţă a soluţiilor 44
3.3 Condiţii de optimalitate 45
3.4 Restricţii funcţionale 51
3.4.1 Condiţiile Karush-Kuhn-Tucker 51
3.4.2 Condiţii de calificare pentru sisteme generale de restricţii 54
3.4.3 Condiţii de calificare pentru sisteme speciale de restricţii 57
3.5 Exemple şi aplicaţii 61
3.6 Exerciţii 71

4 Algoritmi iterativi **89**
4.1 Descriere generală 89
4.2 Principiul lui Banach de punct fix şi consecinţe 91
4.3 Metoda lui Newton 97
4.4 Metoda gradientului 100
4.5 Exerciţii 103

Appendix **117**
1. Spaţiul $\mathbb{R}^p$ 117
2. Limite de funcţii şi continuitate 121
3. Diferenţiabilitate 125
4. Integrala Riemann 130

Modele de evaluări scrise **133**
Model examen parţial 133
Model examen parţial 134
Model verificare scrisă 135
Model evaluare finală 136
Model evaluare finală 138

Bibliografie **141**

Capitolul 1

Introducere

1.1 Concepte de bază

Teoria optimizării se ocupă cu studiul punctelor de extrem (de minim sau de maxim) ale funcţiilor.

Definiţia 1.1.1 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$ (respectiv, $f(a) \geq f(x)$), pentru orice $x \in A \cap V$. Punctele de maxim sau de minim local se numesc puncte de extrem local.*

Dacă $f(a) \leq f(x)$ (respectiv $f(a) \geq f(x)$) pentru orice $x \in A$, spunem că a este punct de minim (respectiv, maxim) global (situaţii corespunzătoare cazului $V = \mathbb{R}$).

Observaţia 1.1.2 *Remarcăm faptul că, în notaţiile definiţiei precedente, $a \in A$ nu este punct de minim local pentru f dacă şi numai dacă există un şir (a_n) de elemente din A cu limita a astfel încât $f(a_n) < f(a)$ pentru orice n. O observaţie similară are loc pentru maximalitate.*

Două rezultate fundamentale reprezintă baza Teoriei optimizării. Acestea sunt Teorema lui Weierstrass şi Teorema lui Fermat.

Teorema 1.1.3 (Weierstrass) *Dacă $f : K \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă pe mulţimea compactă $K \subset \mathbb{R}$, atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe K (adică există $a, b \in K$, astfel încât $\sup_{x \in K} f(x) = f(a)$ şi $\inf_{x \in K} f(x) = f(b)$).*

Teorema lui Weierstrass asigură condiţii suficiente de existenţă a punctelor de extrem (adică de minim sau de maxim) globale. Condiţia de compactitate este severă.

Teorema 1.1.4 (Fermat) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $a \in \operatorname{int} I$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a, iar a este punct de extrem local pentru f, atunci $f'(a) = 0$.*

Teorema lui Fermat precizează condiţii necesare de optimalitate. Reciproca este falsă, aşa cum se poate vedea considerând funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ şi $a = 0$.

De-a lungul cursului vom dezvolta instrumente de studiu care să permită generalizarea acestor două rezultate de bază.

Subliniem unele concepte-cheie.

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\min f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Evident $\overline{x} = 0$ este minim global. Aceasta este o **problemă de optimizare fără restricţii**.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in [-1, \infty)$, adică

$$\min f(x),\ x \in [-1, \infty).$$

Din nou, $\overline{x} = 0$ este minim global. Aceasta este o **problemă de optimizare cu restricţii**, dar pentru că punctul de minim este în interiorul domeniului, **restricţia este inactivă local** (nu influenţează problema).

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in [1, \infty)$, adică

$$\min f(x),\ x \in [1, \infty).$$

Acum $\overline{x} = 1$ este minim global. Aceasta este o problemă de optimizare cu restricţii, iar punctul de minim este pe frontiera domeniului, deci restricţia joacă un rol important (spunem că **restricţia este activă**).

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\min f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Funcţia **nu admite punct de extrem**.

5. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in [-1, \infty)$, adică

$$\min f(x),\ x \in [-1, \infty).$$

Funcţia admite punct de minim în $\overline{x} = -1$ (**restricţia este activă şi determină o soluţie**).

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (e^x + x - 5)^2$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\min f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Evident, $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă ar exista soluţii ale ecuaţiei $e^x + x - 5 = 0$ acestea ar fi puncte de minim global. Ecuaţia nu poate fi rezolvată. Considerând $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x + x - 5$ constatăm că $g(0) \cdot g(5) < 0$ şi continuitatea lui g asigură existenţa unei soluţii în intervalul $(0, 5)$. Putem cel mult să aproximăm această soluţie. Deci vom fi interesaţi de **algoritmi de aproximare a rădăcinilor ecuaţiilor neliniare**. În multe cazuri, rezolvarea

unei probleme de optimizare depinde de determinarea (fie şi aproximativă) a soluţiilor unei ecuaţii neliniare.

7. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2\sin x$. Considerăm problema minimizării lui f când $x \in \mathbb{R}$, adică

$$\min f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Aplicarea Teoremei lui Fermat conduce la rezolvarea ecuaţiei $x = \cos x$, adică la problema determinării **punctelor fixe** pentru funcţia cos . O reprezentare grafică sau un studiu analitic arată că un astfel de punct $\overline{x}$ există. În plus, variaţia funcţiei în jurul acestui punct dovedeşte că $\overline{x}$ este punct de minim pentru f. Din nou, nu îl vom putea determina ci vom preciza **algoritmi de aproximare a punctelor fixe**, puncte ce vor interveni în mai multe situaţii. De altfel, legat de punctul precedent, rezolvarea unei ecuaţii de forma $f(x) = 0$ revine la rezolvarea ecuaţiei $f(x) + x = x$, adică la determinarea punctelor fixe ale funcţiei $f + \mathrm{id}$, această abordare fiind utilă uneori.

8. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 10}.$$

Din cauză că $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ şi $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, funcţia nu admite punct de minim global. Dar, tot din cauzele menţionale, pentru studiul existenţei punctelor de maxim global putem să **restrângem discuţia la un interval compact** pe care se aplică Teorema lui Weierstrass. Teorema lui Fermat şi studiul variaţiei funcţiei dovedesc că $\overline{x} = \sqrt{10}$ este punct de maxim global.

9. În unele cazuri este mai utilă **informaţia ce poate fi dedusă pe baza ecuaţiei** $f'(x) = 0$ decât rezolvarea sa efectivă, rezolvare care în unele cazuri este imposibilă. Ilustrăm aceasta prin deducerea legii fizice a refracţiei luminii ce se obţine din Teorema lui Fermat aplicată în virtutea Principiului lui Fermat: într-un mediu neomogen, lumina parcurge distanţa dintre două puncte astfel încât timpul de parcurs este minim.

Astfel se obţine faptul că atunci când trece dintr-un mediu în altul, direcţia luminii satisface relaţia $\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}$, unde α_1, α_2 sunt unghiurile dintre direcţiile luminii şi normala la suprafaţa care separă cele două medii.

Să demonstrăm această lege. **Mai întâi modelăm problema.** Presupunem că raza de lumina străbate drumul dintre punctul $(0, a)$, $a > 0$, aflat în primul mediu şi punctul (b, c), $b > 0$, $c < 0$, din cel de-al doilea.

Pentru uşurinţa calculelor, presupunem că suprafaţa care separă cele două medii este axa Ox. Fie v_1, v_2 vitezele luminii în cele două medii. Notăm cu $(x, 0)$ punctul în care raza trece dintr-un mediu în altul, unde x trebuie determinat conform Principiului lui Fermat. Timpii de parcurs în cele două medii sunt, respectiv,

$$t_1 = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1}$$
$$t_2 = \frac{\sqrt{(b - x)^2 + c^2}}{v_2},$$

deci timpul total care trebuie minimizat este $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2}$. Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+c^2}}{v_2},$$

pe care trebuie să o minimizăm pe $\mathbb{R}$. Derivata lui f este

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{x-b}{v_2\sqrt{(x-b)^2+c^2}}.$$

Cum $f'(0) = \frac{-b}{v_2\sqrt{b^2+c^2}} < 0$, $f'(b) = \frac{b}{v_1\sqrt{a^2+b^2}} > 0$ şi

$$f''(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{c^2}{((x-b)^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

există un singur punct critic pentru f situat în intervalul $[0, b]$. Notăm acest punct cu $\overline{x}$. Variaţia lui f arată că $\overline{x}$ este punct de minim. Atunci

$$\frac{\overline{x}}{v_1\sqrt{a^2+\overline{x}^2}} = \frac{b-\overline{x}}{v_2\sqrt{(\overline{x}-b)^2+c^2}}.$$

Dar,

$$\frac{\overline{x}}{\sqrt{a^2+\overline{x}^2}} = \sin\alpha_1$$

şi

$$\frac{b-\overline{x}}{\sqrt{(\overline{x}-b)^2+c^2}} = \sin\alpha_2,$$

deci

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2}.$$

10. Considerăm următoarea problemă de optimizare cu restricţii de **mai multe** (două) **variabile**:

$$\max(x+y)$$

cu restricţiile

$$\begin{aligned} &x \geq 0, y \geq 0, x \leq 6 \\ &4^{-1}x + y \leq 6 \\ &3x + 2y \leq 22. \end{aligned}$$

Problema se poate rezolva grafic pentru că toate funcţiile implicate sunt **liniare**. Atunci când se face desenul pentru mulţimea restricţiilor şi se interpretează sensul **liniilor de nivel** pentru expresia de maximizat, se observă că acest maxim se atinge în punctul (4,5) care este unul dintre vârfurile poligonului ce reprezintă mulţimea restricţiilor.

11. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$. **Condiţiile de optimalitate de ordin superior** ne asigură faptul că $\overline{x} = 0$ este punct de minim pentru f. Într-adevăr, ne amintim rezultatul de mai jos.

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ori derivabilă în $a \in I$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, astfel încât

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0, ..., f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

(i) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem, şi anume: punct de maxim local dacă $f^{(n)}(a) < 0$ şi punct de minim local dacă $f^{(n)}(a) > 0$.
(ii) Dacă n este impar, atunci a nu este punct de extrem.

În cazul concret al funcţiei de mai sus, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, iar $f^{(iv)}(0) = 4 > 0$.

1.2 Exerciţii

Exerciţiul 1.1 *Să se studieze existenţa punctelor de extrem local pentru funcţiile polinomiale de gradul al III-lea. Admit acestea puncte de extrem global? Aplicaţie: problema lui Tartaglia: să se scrie numărul* 8 *ca sumă de doi termeni pozitivi astfel încât produsul acestora înmulţit cu diferenţa lor să fie maxim.*

Exerciţiul 1.2 *Un panou publicitar se află la înălţimea h_1 faţă de nivelul străzii şi are înălţimea l. La ce distanţă faţă de locul instalării panoului trebuie să se afle un privitor ce are înălţimea $h_2 < h_1$ astfel încât unghiul sub care se vede panoul să fie maxim?*

Exerciţiul 1.3 *O persoană se află în următoarea situaţie: trebuie să meargă la un râu aflat în apropiere, să încarce o cantitate de apă şi apoi să o transporte în alt loc aflat pe acelaşi mal. Să se stabilească traseul optim din punct de vedere al timpului de parcurs dacă fără încărcătură viteza de deplasare este v_1, iar cu încărcătură viteza de deplasare este $v_2 < v_1$.*

Exerciţiul 1.4 *La construcţia unei clădiri, constructorul are următoarele costuri:* 10.000.000 *u.m (unităţi monetare) pentru terenul de amplasament,* 250.000 *u.m. costuri independente pentru fiecare etaj şi* $10.000x$ *costuri comune specifice pentru fiecare etaj (unde x este numărul de etaje). Să se determine numărul x de etaje ce trebuie construite astfel încât costul mediu pe etaj să fie minim.*

Exerciţiul 1.5 *Cum poate fi descompus numărul* 100 *într-o sumă de termeni pozitivi astfel încât produsul acestora să fie maxim? Dar dacă termenii sunt numere naturale?*

Exerciţiul 1.6 *Un soldat are la dispoziţie* $74''$ *pentru a dezamorsa o bombă aflată în largul mării la o distanţă de* $50m$ *faţă de ţărm. Soldatul se află la* $100m$ *în lungul ţărmului faţă de poziţia bombei în raport cu ţărmul. Ştiind că soldatul aleargă cu* $5m/s$ *înoată cu* $2m/s$ *şi, odată ajuns la bombă, are nevoie de* $30''$ *pentru a opri circuitul de detonare, determinaţi dacă poate opri explozia.*

Exerciţiul 1.7 (problema butoaielor – Kepler) *Să se determine dimensiunile cilindrului de volum maxim pentru care distanţa de la mijlocul generatoarei la cele două puncte "opuse" ale bazei este constantă ($d > 0$).*

Exerciţiul 1.8 *Se ştie că înălţimea la care se găseşte centrul de greutate a unui sistem format din două corpuri este dată de relaţia*

$$\frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2},$$

unde m_1 şi m_2 sunt masele celor două corpuri, iar h_1 şi h_2 sunt înălţimile la care se găsesc centrele de greutate ale corpurilor respective. Considerăm un pahar cilindric cu înălţimea de $20\ cm$*, masa de* $100\ g$ *şi aria bazei de* $10\ cm^2$*. Se pune întrebarea până la ce înălţime trebuie turnată apă în pahar pentru ca sistemul să fie cât mai stabil (i.e., să aibă centrul de greutate cât mai jos).*

Soluţie Modelăm problema. Notăm cu h înălţimea până la care turnăm apă. Avem $m_1 = 100$, $h_1 = 10$ (datele corespunzătoare paharului) şi $m_2 = 10h$, $h_2 = h/2$ (datele corespunzătoare apei). Conform formulei de mai sus, centrul de greutate al paharului cu apă este la înălţimea

$$g(h) = \frac{1000 + 5h^2}{100 + 10h} = \frac{200 + h^2}{20 + 2h}.$$

Studiul variaţiei lui g conduce la punctul de minim $\bar{h} = 10(\sqrt{3} - 1)$. Se constată şi că $g(\bar{h}) = \bar{h}$, adică $\bar{h}$ este punct fix pentru g, lucru care nu este înlâmplător dacă ne gândim la semnificaţia fizică a rezultatului. □

Exerciţiul 1.9 *Se doreşte confecţionarea unui container cilindric cu volumul de un litru folosind cat mai puţin material. Aria laterală se poate tăia dintr-o bucată dreptunghiulară de material, fără pierderi. Bazele sunt tăiate din nişte pătrate de latură* $2r$ *(deci materialul necesar are aria* $2(2r)^2 = 8r^2$*). Determinaţi dimensiunile containerului pentru care se utilizează cel mai puţin material.*

Exerciţiul 1.10 *O cutie paralelipipedică cu baza pătrat, fără capac, are volumul* 100 dm^3*. Determinaţi dimensiunile cutiei care foloseşte cel mai puţin material.*

Exerciţiul 1.11 *Dorim să confecţionăm o cutie cilindrică (cu capac) de un volum dat. Presupunem că materialul din care se confecţionează bazele este de* $N \geq 1$ *mai scump pe unitate de arie decât cel pentru aria laterală a cilindrului. Să se determine, în funcţie de* N*, raportul dintre raza bazei cilindrului şi generatoarea acestuia astfel încât costul să fie minim.*

Exerciţiul 1.12 *Să se modeleze problema maximizării ariei unui dreptunghi de perimetru cunoscut (*$p > 0$*) şi să se rezolve.*

Exerciţiul 1.13 *Să se determine aria maximă pe care o poate avea un dreptunghi înscris într-un semicerc de rază* 10 *având o latură pe diametrul semicercului.*

Exerciţiul 1.14 *Să se determine punctele de extrem pentru funcţiile de mai jos.*
(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^3$;
(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;
(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$;
(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}$.

Soluţie (i) Derivata funcţiei este

$$f'(x) = (x + 2)(x - 1)^2(5x + 4),$$

deci punctele critice sunt $-2; 1; -\frac{4}{5}$. Din tabelul de variaţie se poate imediat deduce că -2 este punct de maxim local, $-\frac{4}{5}$ este punct de minim local, iar 1 nu este punct de extrem.

(ii) Este suficient să studiem funcţia pe intervalul $[0, 2\pi)$ (din periodicitate). Derivata funcţiei este

$$f'(x) = 3 \sin x \cos x(\sin x - \cos x),$$

având rădăcinile

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}.$$

Din analiza semnului derivatei in jurul acestor puncte avem că $0 + 2k\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) sunt maxime locale, iar $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\pi + 2k\pi$, $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ sunt minime locale.

O altă variantă este, ca după determinarea punctelor critice, să determinăm derivata a doua a funcţiei şi să folosim următorul rezultat: pentru punctul critic $\overline{x}$, dacă $f''(\overline{x}) > 0$, atunci $\overline{x}$ este punct de minim local, iar dacă $f''(\overline{x}) < 0$ atunci $\overline{x}$ este punct de maxim local.

(iii) Funcţia este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ şi derivata este

$$f'(x) = \frac{2}{3} \frac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}.$$

Punctele critice sunt $-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar candidaţii pentru punctele de extrem sunt aşadar

$$-1, 0, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Din analiza semnului derivatei lui f în jurul acestor puncte deducem că $-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ sunt puncte de maxim local, iar 0 este minim local.

(iv) Discuţia este analoagă metodelor descrise mai sus. Se obţine că $1 - \sqrt{2}$ este punct de maxim local, iar $1 + \sqrt{2}$ este punct de minim local. □

Exerciţiul 1.15 *Să se arate că $x = 0$ este punct de maxim iar $x = \pi$ este punct de minim pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = 2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Implementare Matlab 1.16 Să se reprezinte grafic utilizând Matlab funcţiile de la Exerciţiul 1.14. Spre exemplu, pentru a reprezenta funcţia de la (iv), putem folosi codul:

```
functie=@(x) [(x^2-5*x+6)/(x^2+1)];
fplot(functie,[-10,10]);
set(gca, 'XAxisLocation', 'origin')
set(gca, 'YAxisLocation', 'origin')
```

Să se studieze opţiunile oferite de Matlab pentru reprezentările grafice.

Exerciţiul 1.17 *Să se reprezinte grafic funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = |x|\, e^{\frac{1}{x-1}}$$

şi să se determine punctele sale de extrem.

Exerciţiul 1.18 *Fie $a_1, ..., a_n$ numere reale strict pozitive cu*

$$a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x \geq n, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să se arate că $a_1 a_2 ... a_n = 1$.

Soluţie Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x$. Cum $f(0) = n$, din ipoteză deducem că $x = 0$ este punct de minim pentru f, deci, din Teorema lui Fermat, $f'(0) = 0$, ceea ce conduce la concluzie. O altă soluţie se poate da folosind limita fundamentală

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \ a > 0.$$

□

Problema 1.19 *Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue. Definim $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$h(t) = \sup\{f(x) + tg(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Să se arate că h este corect definită şi este o funcţie Lipschitz.

Soluţie Fie $s, t \in \mathbb{R}$. Cum funcţiile $x \mapsto f(x) + tg(x)$ şi $x \mapsto f(x) + sg(x)$ sunt continue, aplicând Teorema lui Weierstrass pe intervalul compact $[a, b]$, există $x_t, x_s \in [a, b]$ astfel încât

$$\begin{aligned} h(t) &= f(x_t) + tg(x_t) \\ h(s) &= f(x_s) + sg(x_s). \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} h(t) - h(s) &= f(x_t) + tg(x_t) - (f(x_s) + sg(x_s)) \\ &\leq f(x_t) + tg(x_t) - f(x_t) - sg(x_t) \\ &= g(x_t)(t - s). \end{aligned}$$

Similar,

$$\begin{aligned} h(t) - h(s) &= f(x_t) + tg(x_t) - (f(x_s) + sg(x_s)) \\ &\geq f(x_s) + tg(x_s) - f(x_s) - sg(x_s) \\ &= g(x_s)(t - s). \end{aligned}$$

Notând cu $M := \max_{x \in [a,b]} |g(x)| \in \mathbb{R}$ (folosind din nou Teorema lui Weierstrass) obţinem

$$|h(t) - h(s)| \leq M |t - s|,$$

adică exact concluzia. □

Problema 1.20 *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $c < d$ şi $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ continuă. Definim $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$\varphi(x) = \inf\{f(x, y) \mid y \in [c, d]\}.$$

Să se arate că φ este bine definită şi continuă.

Exerciţiul 1.21 *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilă în a. Să se arate că dacă a este punct de minim atunci $f'(a) \geq 0$.*

Exerciţiul 1.22 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă, derivabilă în a şi b cu $f'(a)f'(b) < 0$. Să se arate că f admite un punct de extrem local în (a, b).*

Capitolul 2

Elemente de analiză neliniară

2.1 Mulţimi convexe

Fie $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pe parcursul cursului lucrăm pe spaţiul $\mathbb{R}^p$ înzestrat cu structura uzuală de spaţiu vectorial real de dimensiune p şi topologizat cu produsul scalar obişnuit, deci cu norma euclidiană. Un breviar al notaţiilor pe care le utilizăm şi al cadrului teoretic pe care ne bazăm este prezentat în Appendix.

Definiţia 2.1.1 *O mulţime $D \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte convexă dacă pentru orice $x, y \in D$, $[x, y] = \{\alpha x + (1-\alpha)y \mid \alpha \in [0,1]\} \subset D$.*

Cu alte cuvinte, o mulţime nevidă D este convexă dacă şi numai dacă odată cu două puncte a_1, a_2 conţine întreg segmentul $[a_1, a_2]$. Se mai observă că în definiţia aceasta este suficient să luăm $\alpha \in (0,1)$. Convenim să considerăm mulţimea vidă ca fiind convexă.

Prin inducţie (a se vedea Exerciţiul 2.1) se arată imediat că $D \neq \emptyset$ este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in D$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in [0,1]$ cu $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, are loc

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in D.$$

O sumă cum este cea de mai sus se numeşte combinaţie convexă a elementelor $(x_i)_{i \in \overline{1,n}}$.

Observaţia 2.1.2 *(i) Este evident că orice intersecţie de mulţimi convexe este convexă, iar o reuniune de mulţimi convexe nu este, în general, convexă.*

(ii) În $\mathbb{R}$ mulţimile convexe sunt intervalele.

Discutăm acum conceptul de înfăşurătoare convexă a unei mulţimi nevide. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Se numeşte înfăşurătoarea convexă a mulţimii A, mulţimea

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ (\alpha_i)_{i \in \overline{1,n}} \subset [0, \infty),\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1,\ (x_i)_{i \in \overline{1,n}} \subset A \right\}.$$

Este uşor de arătat că înfăşurătoarea convexă a lui A este mulţime convexă, conţine mulţimea A şi este cea mai mică mulţime (în sensul incluziunii) cu aceste proprietăţi (a se vedea Exerciţiul 2.2).

Prezentăm o teoremă care se referă la structura mulţimii conv A şi poartă numele de Teorema lui Carathéodory, după numele matematicianului grec Constantin Carathéodory care a demonstrat acest rezultat în 1911 pentru mulţimi compacte.

Teorema 2.1.3 (Teorema lui Carathéodory) *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Atunci*

$$\operatorname{conv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i x_i \mid (\alpha_i)_{i\in\overline{1,p+1}} \subset [0,\infty),\ \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_i = 1,\ (x_i)_{i\in\overline{1,p+1}} \subset A \right\}.$$

Demonstraţie Trebuie arătat că orice element din conv A se poate scrie ca o combinaţie de cel mult $p+1$ elemente din A. Fie deci $x \in \operatorname{conv} A$. Conform definiţiei lui conv A, x se poate scrie ca o combinaţie convexă de elemente din A. Presupunem, prin reducere la absurd, că numărul minim de elemente din A care pot da o combinaţie convexă cu valoarea x este $n > p+1$. Deci există $x_1, x_2, ..., x_n \in A$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in (0,1)$ cu $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ astfel încât $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = x$. Atunci elementele $(x_i - x_n)_{i\in\overline{1,n-1}}$ sunt liniar dependente (sunt mai multe decât dimensiunea p a spaţiului), deci există $(\lambda_i)_{i\in\overline{1,n-1}}$, nu toate nule, cu

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (x_i - x_n) = 0,$$

ceea ce înseamnă

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) x_n = 0$$

Notând $-\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right) = \lambda_n$, avem $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ şi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Atunci pentru orice $t \in \mathbb{R}$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + t \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + t\lambda_i) x_i$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + t\lambda_i) = 1.$$

Cum $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ şi există măcar o valoare nenulă, va exista şi cel puţin o valoare negativă printre valorile $(\lambda_i)_{i\in\overline{1,n}}$. Notăm $\overline{t} := \min\{-\alpha_i \lambda_i^{-1} \mid \lambda_i < 0\}$. Atunci toate valorile $(\alpha_i + \overline{t}\lambda_i)$ vor fi din intervalul $[0,\infty)$, iar valoarea corespunzătoare indicelui care dă minimul de mai sus este zero, deci x apare ca o combinaţie convexă de mai puţin de n elemente din A, contrazicându-se minimalitatea lui n. Aşadar, presupunerea făcută este falsă, deci concluzia are loc. □

2.2 Funcţii convexe

În această secţiune prezentăm o clasă specială de funcţii, numite funcţii convexe. Aceste funcţii sunt definite pe mulţimi convexe.

Definiţia 2.2.1 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă. O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte convexă dacă*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),\ \forall x, y \in D,\ \forall \lambda \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Este clar că în definiţia de mai sus este suficient să luăm $\lambda \in (0,1)$.

Observaţia 2.2.2 *(i) Este uşor de văzut că suma unui număr finit de funcţii convexe (definite pe aceeaşi mulţime) este o funcţie convexă, iar produsul unei funcţii convexe cu un scalar pozitiv este o funcţie convexă.*

(ii) De asemenea, orice funcţie afină de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}$ este convexă.

Cum am mai spus, în $\mathbb{R}$ mulţimile convexe sunt intervalele. În acest cadru, convexitatea are următoarea interpretare geometrică: pentru orice două puncte $x, y \in D$, $x < y$, graficul restricţiei lui f la intervalul $[x, y]$ se află sub coarda ce uneşte punctele $(x, f(x))$ şi $(y, f(y))$. Aceasta se mai scrie astfel: pentru orice $u \in [x, y]$,

$$f(u) \leq f(x) + \frac{f(y) - f(x)}{y - x}(u - x), \tag{2.2}$$

inegalitate care se obţine din (2.1) înlocuind λ cu valoarea obţinută din relaţia $u = \lambda x + (1-\lambda)y$. Astfel, (2.1) şi (2.2) sunt echivalente (pentru funcţii de variabilă reală).

Exemplul 2.2.3 Este uşor de verificat prin calcul direct că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ este convexă.

Definiţia 2.2.4 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă. O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte concavă dacă $-f$ este convexă.*

Toate proprietăţile funcţiilor concave se deduc cu uşurinţă din proprietăţile funcţiilor convexe, astfel că vom considera în continuare doar acest ultim caz.

Mai întâi deducem unele proprietăţi generale ale funcţiilor convexe. Începem cu un rezultat ajutător.

Lema 2.2.5 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă. Pentru orice $x, y \in D$ definim $I_{x,y} := \{t \in \mathbb{R} \mid tx + (1-t)y \in D\}$. Atunci $I_{x,y}$ este un interval ce conţine intervalul $[0, 1]$.*

Demonstraţie. Practic trebuie să arătăm că $I_{x,y}$ este mulţime convexă. Într-adevăr, dacă $u, v \in I_{x,y}$ şi $\lambda \in [0,1]$, este uşor de verificat că

$$[\lambda u + (1-\lambda)v]x + [1 - \lambda u - (1-\lambda)v]y = \lambda(ux + (1-u)y) + (1-\lambda)\left(vx + (1-v)y\right) \in D.$$

Faptul că $0, 1 \in I_{x,y}$ este evident. □

Propoziţia 2.2.6 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă şi $f : D \to \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f este convexă;

(ii) pentru orice $x, y \in D$, funcţia $\varphi_{x,y} : I_{x,y} \to \mathbb{R}$, $\varphi_{x,y}(t) = f(tx + (1-t)y)$ este convexă.

Demonstraţie Arătăm că (i) implică (ii) . În lema anterioară am constatat că $I_{x,y}$ este un interval (deci o mulţime convexă) care include $[0,1]$.

Presupunem că f este convexă şi luăm $u, v \in I_{x,y}$, $\lambda \in [0,1]$. Avem

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(\lambda u + (1-\lambda)v) &= f([\lambda u + (1-\lambda)v]x + [1 - \lambda u - (1-\lambda)v]y) \\ &= f(\lambda(ux + (1-u)y) + (1-\lambda)(vx + (1-v)y)) \\ &\leq \lambda f(ux + (1-u)y) + (1-\lambda)f(vx + (1-v)y) \\ &= \lambda\varphi_{x,y}(u) + (1-\lambda)\varphi_{x,y}(v).\end{aligned}$$

Arătăm acum că (ii) implică (i) . Luăm $x, y \in D$ şi $t \in [0,1]$. Atunci $\varphi_{x,y}$ este convexă şi deci pentru orice $\lambda \in [0,1], u, v \in I_{x,y}$

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(\lambda u + (1-\lambda)v) &\leq \lambda\varphi_{x,y}(u) + (1-\lambda)\varphi_{x,y}(v) \\ &= \lambda f(ux + (1-u)y) + (1-\lambda)f(vx + (1-v)y).\end{aligned}$$

Făcând $u = 1, v = 0, \lambda = t$ deducem

$$\varphi_{x,y}(t) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

deci f este convexă. □

Observaţia 2.2.7 *Deşi convexitatea este o proprietate algebrică, funcţiile convexe au proprietăţi topologice remarcabile: a se vedea, de exemplu, Problema 2.41.*

Dorim să punem acum în evidenţă caracterizări ale funcţiilor convexe diferenţiabile. Pentru aceasta, avem nevoie de unele rezultate care se referă la funcţii convexe definite pe un interval din $\mathbb{R}$.

Propoziţia 2.2.8 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f este convexă;

(ii) pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in I$ în relaţia $x_1 < x_2 < x_3$ avem

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2};$$

(iii) pentru orice $a \in \operatorname{int} I$, funcţia $g : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

este crescătoare.

Demonstraţie Arătăm implicaţia $(i) \Rightarrow (ii)$. Luăm $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0,1)$. Atunci are loc egalitatea $x_2 = \lambda x_3 + (1-\lambda)x_1$ şi inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\lambda(x_3 - x_1)} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(1-\lambda)(x_3 - x_1)}.$$

După efectuarea calculelor, obţinem

$$f(x_2) \leq \lambda f(x_3) + (1-\lambda) f(x_1).$$

Implicaţia $(ii) \Rightarrow (i)$ urmează traseul invers implicaţiei $(i) \Rightarrow (ii)$, deci (i) şi (ii) sunt echivalente.

Pentru a demonstra $(ii) \Rightarrow (iii)$, fixăm $x_1, x_2 \in I \setminus \{a\}$ cu $x_1 < x_2$. Distingem trei situaţii. Dacă $x_1 < x_2 < a$ atunci aplicăm (ii) pentru tripleta (x_1, x_2, a). Dacă $x_1 < a < x_2$ atunci aplicăm (ii) pentru tripleta (x_1, a, x_2). În sfârşit, dacă $a < x_1 < x_2$ atunci aplicăm (ii) pentru tripleta (a, x_1, x_2).

Pentru a demonstra $(iii) \Rightarrow (i)$, luăm $x, y \in I$ cu $x < y$ şi $\lambda \in (0,1)$. Atunci $x < \lambda x + (1-\lambda)y < y$ şi aplicând (iii) pentru $a = \lambda x + (1-\lambda)y$ deducem

$$\frac{f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{x - \lambda x - (1-\lambda)y} \leq \frac{f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{y - \lambda x - (1-\lambda)y}.$$

Din nou efectuând calculele ajungem la relaţia din definiţia convexităţii. Faptul că această relaţie are loc pentru orice $x, y \in I$ cu $x < y$ şi orice $\lambda \in (0,1)$ este suficient pentru a proba afirmaţia dorită. Demonstraţia este completă. □

Observaţia 2.2.9 *Proprietatea de la punctul (ii) din rezultatul precedent se numeşte inegalitatea pantelor. O interpretare geometrică elementară justifică această denumire.*

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a funcţiilor convexe derivabile (de o variabilă reală).

Teorema 2.2.10 *Fie I un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie.*

(i) Presupunând că f este derivabilă pe I, atunci f este convexă dacă şi numai dacă f' este crescătoare pe I.

(ii) Presupunând că f este de două ori derivabilă pe I atunci f este convexă dacă şi numai dacă $f''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$.

Demonstraţie În acest caz, al funcţiilor reale de o variabilă reală, ţinând cont de echivalenţa dintre monotonia lui f' şi semnul lui f'' este suficient să arătăm că f este convexă dacă şi numai dacă f' este crescătoare pe I.

Presupunem că f este convexă şi demonstrăm monotonia derivatei. Fie $x, y \in I$ cu $x < y$. Considerăm $z \in (x, y)$. Conform inegalităţii pantelor putem scrie

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}, \ \forall z \in (x, y),$$

adică

$$\begin{cases} \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \end{cases}, \ \forall z \in (x, y).$$

Dacă în prima inegalitate facem $z \to x$, iar în a doua $z \to y$, deducem

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y),$$

deci f' este crescătoare.

Invers, presupunem că f' este crescătoare şi arătăm că f este convexă. Fie $a, b \in I$, $a < b$. Definim $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dată prin

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Evident, $g(a) = g(b) = 0$, iar

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Funcţia f satisface condiţiile Teoremei lui Lagrange pe $[a, b]$, deci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Prin urmare, $g'(x) = f'(x) - f'(c)$. Din monotonia lui f' deducem că g este descrescătoare pe intervalul (a, c) şi crescătoare pe intervalul (c, b), iar din $g(a) = g(b) = 0$ obţinem că g este negativă pe tot intervalul $[a, b]$.

Fie $\lambda \in (0, 1)$. Atunci

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b \in (a, b).$$

Înlocuim în expresia lui g şi ţinând cont că $g(x) \leq 0$ deducem

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) - f(a) - (1 - \lambda)(b - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0,$$

relaţie care se reduce la definiţia convexităţii. □

Observaţia 2.2.11 *De fapt, se poate arăta (a se vedea Problema 2.42) că dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă, atunci f admite derivate laterale în fiecare punct interior intervalului I şi pentru orice $x, y \in \operatorname{int} I$, cu $x < y$ avem*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y).$$

Exemplul 2.2.12 Pe baza rezultatului de mai sus, deducem convexitatea următoarelor funcţii: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$; $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$; $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$; $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^a, a \geq 1$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$; $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$; $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^{-1} x$.

Un alt exemplu este dat de rezultatul următor.

Caracterizăm acum funcţiile convexe diferenţiabile generale.

Teorema 2.2.13 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă şi deschisă şi fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie.*

(i) Dacă f este diferenţiabilă pe D atunci f este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in D$,

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

(ii) Dacă f este diferenţiabilă de ordinul al doilea pe D, atunci f este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $x \in D$ şi $y \in \mathbb{R}^p$ are loc

$$\nabla^2 f(x)(y, y) \geq 0.$$

Demonstraţie (i) Considerăm pentru început cazul $p = 1$. Fixăm $x, y \in D$ cu $y \neq x$ şi luăm $\lambda \in (0, 1]$. Cum f este convexă, obţinem

$$\begin{aligned} f\left(x + \lambda\left(y - x\right)\right) &= f\left(\left(1 - \lambda\right)x + \lambda y\right) \\ &\leq \left(1 - \lambda\right) f(x) + \lambda f(y) = f(x) + \lambda\left(f\left(y\right) - f\left(x\right)\right). \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\frac{f\left(x + \lambda\left(y - x\right)\right) - f\left(x\right)}{\lambda\left(y - x\right)} \cdot \left(y - x\right) \leq f\left(y\right) - f\left(x\right).$$

Trecând la limită cu $\lambda \to 0$, obţinem $f'\left(x\right)\left(y - x\right) \leq f\left(y\right) - f\left(x\right)$.

Trecem acum la cazul general. Pentru $x, y \in D$ considerăm funcţia $\varphi_{y,x}$ din Propoziţia 2.2.6 despre care ştim că este convexă. Mai mult, $\varphi_{y,x}$ este derivabilă pe intervalul deschis $I_{y,x}$ şi

$$\varphi'_{y,x}(t) = \nabla f(ty + (1 - t)x)(y - x).$$

Conform pasului anterior,

$$\varphi_{y,x}(1) \geq \varphi_{y,x}(0) + \varphi'_{y,x}(0)$$

ceea ce înseamnă că

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y - x).$$

Reciproc, fixăm $x, y \in D$ şi $\lambda \in [0, 1]$. Astfel, din ipoteză,

$$f\left(x\right) \geq f\left(\lambda x + (1 - \lambda)y\right) + (1 - \lambda)\nabla f\left(\lambda x + (1 - \lambda)y\right)\left(x - y\right)$$

şi

$$f\left(y\right) \geq f\left(\lambda x + (1 - \lambda)y\right) + \lambda\nabla f\left(\lambda x + (1 - \lambda)y\right)\left(y - x\right).$$

Înmulţind prima inegalitate cu λ şi a doua inegalitate cu $(1-\lambda)$ şi adunând noile inegalităţi, obţinem

$$\lambda f\left(x\right) + (1 - \lambda) f\left(y\right) \geq f\left(\lambda x + (1 - \lambda)y\right),$$

ceea ce demonstrează că f este convexă.

(ii) Cazul $p = 1$ este demonstrat în Teorema 2.2.10. Acum, pentru a demonstra cazul general, fie $x \in D$, $y \in \mathbb{R}^p$. Presupunem că f este convexă. Cum D este deschisă, există $\alpha > 0$ astfel încât $u := x + \alpha y \in D$. Conform ipotezei $\varphi_{u,x}$ este convexă şi din cazul discutat mai sus, $\varphi''_{u,x}(t) \geq 0$ pentru orice $t \in I_{u,x}$. Pentru $t = 0$, deducem

$$0 \leq \varphi''_{u,x}(0) = \nabla^2 f(x)(u - x, u - x),$$

de unde se obţine concluzia. Invers, pentru $x, y \in D$ şi $t \in I_{x,y}$, $\varphi''_{x,y}(t) \geq 0$. Din cazul $p = 1$, obţinem că $\varphi_{x,y}$ este convexă, deci f este convexă. Demonstraţia este completă. □

Exemplul 2.2.14 Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f\left(x_1, x_2\right) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 - 4x_2$ este convexă.

Din aceste rezultate se observă că anumite proprietăţi ale funcţiilor convexe au un caracter global, lucru ce se va constata şi în continuare.

Observaţia 2.2.15 *Să mai constatăm că o funcţie diferenţiabilă este convexă simultan cu opusa sa dacă şi numai dacă este afină. Într-adevăr, este clar că o funcţie afină este simultan convexă şi concavă. Invers, ambele proprietăţi implică egalitatea*

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)(y - x),\ \forall x, y \in D,$$

adică, fixând x,

$$f(y) = \nabla f(x)(y) + (f(x) - \nabla f(x)(x)),\ \forall y \in D,$$

ceea ce înseamnă că f *se scrie ca suma dintre o funcţie liniară şi o constantă.*

De fapt, această proprietate are loc şi în absenţa diferenţiabilităţii (a se vedea Problema 2.33).

În final, definim o proprietate mai puternică decât convexitatea.

Definiţia 2.2.16 *Fie* $D \subset \mathbb{R}^p$ *o mulţime convexă. O funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *se numeşte strict convexă dacă*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),\ \forall x, y \in D,\ x \neq y,\ \forall \lambda \in (0, 1).$$

Definiţia 2.2.17 *Fie* $D \subset \mathbb{R}^p$ *o mulţime convexă. O funcţie* $f : D \to \mathbb{R}$ *se numeşte strict concavă dacă* $-f$ *este strict convexă.*

Evident, orice funcţie strict convexă este convexă în timp ce reciproca este falsă: este suficient să considerăm o funcţie convexă care să fie constantă pe un interval. Din nou, proprietăţile funcţiilor strict concave se deduc din proprietăţile funcţiilor strict convexe.

Folosind argumente cu totul similare celor din rezultatele precedente deducem următoarele caracterizări.

Teorema 2.2.18 *Fie* I *un interval deschis şi* $f : I \to \mathbb{R}$ *o funcţie două ori derivabilă (pe* I*). Considerăm următoarele afirmaţii:*

(i) f *este strict convexă;*

(ii) f' *este strict crescătoare.*

(iii) $f''(x) > 0$ *pentru orice* $t \in I$*.*

Atunci $(iii) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (ii)$*.*

Teorema 2.2.19 *Fie* $D \subset \mathbb{R}^p$ *o mulţime convexă şi deschisă şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie două ori diferenţiabilă (pe* D*). Considerăm următoarele afirmaţii:*

(i) f *este strict convexă;*

(ii) $f(y) > f(x) + \nabla f(x)(y - x)$*, pentru orice* $x, y \in D$*,* $x \neq y$*.*

(iii) $\nabla^2 f(x)(y, y) > 0$ *pentru orice* $x \in D$ *şi* $y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$*.*

Atunci $(iii) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (ii)$*.*

Exemplul 2.2.20 Folosind aceste rezultate obţinem că următoarele funcţii sunt strict convexe: $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$; $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$; $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$, $a > 1$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$; $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 + x^p)^{\frac{1}{p}}$, $p > 1$; $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, unde $a, c > 0$ şi $4ac > b^2$.

2.3 Funcţia distanţă

Definiţia 2.3.1 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi fie $x \in \mathbb{R}^p$. Definim distanţa de la x la A prin relaţia:*

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Funcţia $d_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ dată prin $d_A(x) = d(x, A)$ se numeşte funcţia distanţă asociată mulţimii A.

Punem în evidenţă câteva proprietăţi fundamentale ale distanţei de la un punct la o mulţime (nevidă).

Teorema 2.3.2 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p, A \neq \emptyset$. Atunci:*

(i) $d(x, A) = 0$ dacă şi numai dacă $x \in \overline{A}$.

(ii) Funcţia $d_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ dată prin $d_A(x) = d(x, A)$ este $1-$Lipschitz.

(iii) Dacă A este închisă, atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, există $a_x \in A$ astfel încât $d(x, A) = \|x - a_x\|$. Dacă, în plus, A este convexă, atunci a_x cu proprietatea precedentă este unic şi este caracterizat de proprietăţile $a_x \in A$ şi $\langle x - a_x, u - a_x \rangle \leq 0$ pentru orice $u \in A$.

Demonstraţie (i) Au loc echivalenţele

$$\begin{aligned} d(x, A) = 0 &\Leftrightarrow \inf_{a \in A} \|x - a\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists\, (a_n) \subset A \text{ cu } \lim_{n \to \infty} \|x - a_n\| = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}. \end{aligned}$$

(ii) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ şi orice $a \in A$ au loc relaţiile:

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

Cum a este arbitrar în A deducem

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A)$$

adică

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|.$$

Inversând rolurile lui x şi y avem:

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|,$$

adică concluzia.

(iii) Dacă $x \in A$, atunci $a_x := x$ este unicul element cu proprietatea anunţată. Fie $x \notin A$. Cum $d(x, A)$ este un număr real, există $r > 0$ astfel încât $A_1 := A \cap D(x, r) \neq \emptyset$. Observăm că A_1 este mulţime compactă, deci funcţia $g : A_1 \to \mathbb{R}$, $g(y) = \|x - y\|$ este continuă pe o mulţime compactă. Conform teoremei lui Weierstrass, g îşi atinge minimul pe A_1, adică există $a_x \in A_1$ cu $g(a_x) = \inf_{y \in A_1} g(y) = d(x, A_1)$. Dar se observă că $d(x, A_1) = d(x, A)$ şi prima concluzie urmează. Presupunem acum că, în plus, A este convexă. Din nou, dacă $x \in A$, nu

avem nimic de arătat. Luăm $x \notin A$. Considerăm $a_1, a_2 \in A$ cu $d(x, A) = \|x - a_1\| = \|x - a_2\|$. Folosind egalitatea paralelogramului avem

$$\|(x - a_1) + (x - a_2)\|^2 + \|(x - a_1) - (x - a_2)\|^2 = 2\|x - a_1\|^2 + 2\|x - a_2\|^2,$$

adică

$$\|2x - a_1 - a_2\|^2 + \|a_2 - a_1\|^2 = 4d^2(x, A)$$

şi împărţind prin 4 obţinem

$$\left\|x - \frac{a_1 + a_2}{2}\right\|^2 + 4^{-1}\|a_2 - a_1\|^2 = d^2(x, A).$$

Cum A este convexă, $2^{-1}(a_1+a_2) \in A$, deci $\left\|x - \frac{a_1+a_2}{2}\right\|^2 \geq d^2(x, A)$. Această relaţie şi egalitatea precedentă arată că $\|a_2 - a_1\| = 0$, deci $a_1 = a_2$. Demonstraţia unicităţii este completă. Să demonstrăm acum că a_x verifică relaţia $\langle x - a_x, u - a_x\rangle \leq 0$ pentru orice $u \in A$. Pentru aceasta luăm $u \in A$. Atunci pentru orice $\alpha \in (0, 1]$

$$v = \alpha u + (1 - \alpha)a_x \in A.$$

Deci

$$\|x - a_x\| \leq \|x - \alpha u - (1 - \alpha)a_x\| = \|x - a_x - \alpha(u - a_x)\|,$$

de unde, prin ridicare la pătrat,

$$\|x - a_x\|^2 \leq \|x - a_x\|^2 - 2\alpha\langle x - a_x, u - a_x\rangle + \alpha^2\|u - a_x\|^2.$$

După reducere şi simplificarea cu $\alpha > 0$ obţinem

$$0 \leq -2\langle x - a_x, u - a_x\rangle + \alpha\|u - a_x\|^2.$$

Făcând $\alpha \to 0$ obţinem inegalitatea anunţată. Invers, dacă un element $a \in A$ satisface $\langle x - a, u - a\rangle \leq 0$ pentru orice $u \in A$, atunci pentru orice $v \in A$

$$\|x - a\|^2 - \|x - v\|^2 = 2\langle x - a, v - a\rangle - \|a - v\|^2 \leq 0,$$

deci a coincide cu a_x. Demonstraţia este încheiată. □

În cazul în care A este închisă şi convexă, atunci pentru $x \in \mathbb{R}^p$ notăm elementul $a_x \in A$ cu $\mathrm{pr}_A x$ şi-l numim proiecţia lui x pe A.

Observaţia 2.3.3 *Dacă A este convexă şi nevidă, atunci d_A este convexă (a se vedea Problema 2.46).*

2.4 Conuri

Unul dintre obiectele fundamentale pentru studiul nostru este definit mai jos.

Definiţia 2.4.1 *O submulţime nevidă $C \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte con dacă are loc proprietatea*

$$\forall y \in C,\ \forall \lambda \in [0, \infty),\ \lambda y \in C.$$

Conform acestei definiţii, orice con conţine elementul 0.

Propoziţia 2.4.2 *Un con C este mulţime convexă dacă şi numai dacă $C + C = C$.*

Demonstraţie Presupunem mai întâi că C este în acelaşi timp con şi mulţime convexă. Cum $0 \in C$, este clar că $C \subset C + C$. Fie $u \in C + C$. Atunci există $c_1, c_2 \in C$ încât $c_1 + c_2 = u$. Dar, ţinând cont de proprietăţile lui C şi de scrierea echivalentă

$$u = 2\left(2^{-1}c_1 + 2^{-1}c_2\right)$$

deducem faptul că $u \in C$. Pentru implicaţia inversă, presupunem că C este con şi $C + C = C$. Fie $\alpha \in (0, 1)$ şi $c_1, c_2 \in C$. Atunci, din proprietatea de con, $\alpha c_1, (1 - \alpha)c_2 \in C$ şi deci $\alpha c_1 + (1 - \alpha)c_2 \in C + C = C$, observaţie care încheie demonstraţia. □

Înfăşurătoarea conică a unei mulţimi nevide $A \subset \mathbb{R}^p$ este mulţimea

$$\operatorname{con} A = [0, \infty)A$$

care poate fi scrisă echivalent în forma $\mathbb{R}_+ A$ (cu notaţia $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$) sau $\{\alpha x \mid \alpha \geq 0,\ x \in A\}$.

Din nou, $\operatorname{con} A$ este cel mai mic con ce conţine A (a se vedea Exerciţiul 2.49).

Fie $S \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Numim polara lui S mulţimea

$$S^- := \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, x\rangle \leq 0,\ \forall x \in S\}.$$

Este uşor de constatat că S^- este un con convex închis şi că, în general, $S \subset (S^-)^-$. De asemenea, $S^- = \left(\overline{\operatorname{con} S}\right)^-$ (a se vedea Exerciţiul 2.49).

Exemplul 2.4.3 1. Fie $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$. Este uşor de observat că $S^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$. Evident, $(S^-)^- = S^-$.

2. Polara lui $\mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\}$ este $\mathbb{R}^2_- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \leq 0\}$. Mulţimea $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ are ca polară tot mulţimea $\mathbb{R}^2_-$. Deci, în general, $S_1^- = S_2^-$ nu implică faptul că $S_1 = S_2$.

De-a lungul acestui curs vom avea nevoie de multe ori de conceptul de vector tangent într-un punct la o mulţime. Introducem acum acest concept.

Definiţia 2.4.4 *Fie $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi $\overline{x} \in M$. Un vector $u \in \mathbb{R}^p$ se numeşte tangent la mulţimea M în $\overline{x}$ dacă există $(t_n) \subset (0, \infty), t_n \to 0$ şi $(u_n) \to u$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{x} + t_n u_n \in M.$$

Evident, este suficient ca relaţia de mai sus să aibă loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$ de la un loc încolo (pentru n suficient de mare).

Teorema 2.4.5 *Mulţimea, notată $T(M, \overline{x})$, a tuturor vectorilor tangenţi la M în $\overline{x}$ este un con închis, numit conul tangent (în sens Bouligand) la M în $\overline{x}$.*

Demonstraţie Mai întâi observăm că $0 \in T(M, \overline{x})$ pentru că este suficient să luăm (u_n) şirul constant 0.

Fie acum $u \in T(M, \overline{x})$ şi $\lambda > 0$. Conform definiţiei, există $(t_n) \subset (0, \infty)$, $t_n \to 0$ şi $(u_n) \to u$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{x} + t_n u_n \in M.$$

Evident, ultima relaţie este echivalentă cu

$$\overline{x} + \frac{t_n}{\lambda}(\lambda u_n) \in M.$$

Cum $\left(\frac{t_n}{\lambda}\right) \to 0$ şi $(\lambda u_n) \to \lambda u$, deducem că $\lambda u \in T(M, \overline{x})$, deci $T(M, \overline{x})$ este con. Arătăm acum că închiderea lui $T(M, \overline{x})$ este inclusă în $T(M, \overline{x})$. Fie $(u_n) \subset T(M, \overline{x})$ şi $(u_n) \to u$. Trebuie să arătăm că $u \in T(M, \overline{x})$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, există $(t_n^k)_k \subset (0, \infty)$, $t_n^k \overset{k \to \infty}{\to} 0$ şi $(u_n^k) \overset{k \to \infty}{\to} u_n$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{x} + t_n^k u_n^k \in M.$$

Urmând un procedeu de diagonalizare, pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, există $k_n \in \mathbb{N}$ astfel încât (k_n) este strict crescător şi au loc relaţiile:

$$t_n^{k_n} < \frac{1}{n}$$
$$\left\| u_n^{k_n} - u_n \right\| \leq \frac{1}{n}.$$

Evident, şirul de numere pozitive $(t_n^{k_n})_n$ are limita 0 şi din relaţia

$$\left\| u_n^{k_n} - u \right\| \leq \left\| u_n^{k_n} - u_n \right\| + \|u_n - u\|$$

deducem că $(u_n^{k_n}) \to u$. În plus, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{x} + t_n^{k_n} u_n^{k_n} \in M,$$

deci, $u \in T(M, \overline{x})$ şi demonstraţia este încheiată. □

Un prim exemplu este următorul.

Exemplul 2.4.6 1. Fie discul $M \subset \mathbb{R}^2$, $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$. Atunci $T(M, (0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$.

2. Se poate cu uşurinţă observa că dacă $C \subset \mathbb{R}^p$ este un con închis, atunci $T(C, 0) = C$.

Propoziţia 2.4.7 *Dacă $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^p$ şi $\overline{x} \in M$. Dacă $\overline{x} \in \operatorname{int} M$, atunci $T(M, \overline{x}) = \mathbb{R}^p$.*

Demonstraţie Dacă $\overline{x} \in \operatorname{int} M$, atunci pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$ şi orice $(t_n) \subset (0, \infty), t_n \to 0$ avem $\overline{x} + t_n u_n \in M$ pentru orice n suficient de mare. Aceasta arată, în particular, că $u \in T(M, \overline{x})$, de unde obţinem concluzia. □

Observaţia 2.4.8 *Este clar că are loc relaţia* $T(M, \overline{x}) = T(M - \overline{x}, 0)$, *deci a determina conul tangent la* M *în* $\overline{x}$ *revine la a determina conul tangent la* $M - \overline{x}$ *în* 0.

Să remarcăm că, în general, conul tangent nu este convex şi relaţia $T(M, \overline{x}) = \mathbb{R}^p$ poate avea loc, chiar dacă $\overline{x} \notin \operatorname{int} M$.

Exemplul 2.4.9 1. Fie $M \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{(x, y) \mid x \geq 0, y = 0\} \cup \{(x, y) \mid x = 0, y \geq 0\}$. Atunci $T(M, (0, 0)) = M$ nu este o mulţime convexă.

2. Fie mulţimea M dată de curba (numită cardioida) având următoarele ecuaţii parametrice

$$\begin{cases} x = -2\cos t + \cos 2t + 1 \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi],$$

împreună cu interiorul său geometric. Atunci $T(M, (0, 0)) = \mathbb{R}^2$, dar $(0, 0) \notin \operatorname{int} M$.

Vom nota cu $N(M, \overline{x})$ polara lui $T(M, \overline{x})$ (i.e. $N(M, \overline{x}) := T(M, \overline{x})^-$) şi vom numi acest con conul normal la M în $\overline{x}$.

Dacă mulţimea M este convexă, atunci conul tangent capătă o formă specială.

Propoziţia 2.4.10 *Fie* $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^p$ *convexă şi* $\overline{x} \in M$. *Atunci*

$$T(M, \overline{x}) = \operatorname{cl} \operatorname{con}(M - \overline{x}),$$

iar

$$N(M, \overline{x}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, c - \overline{x} \rangle \leq 0, \forall c \in M\}.$$

Mai mult, în acest caz $T(M, \overline{x})$ *este mulţime convexă.*

Demonstraţie Fie $c \in M$ şi $d := c - \overline{x}$. Fie $(t_k)_k \to 0$. Atunci

$$\overline{x} + t_k d = (1 - t_k)\overline{x} + t_k c \in M$$

şi deci $M - \overline{x} \subset T(M, \overline{x})$. Cum $T(M, \overline{x})$ este con închis, obţinem $\operatorname{cl} \mathbb{R}_+(M - \overline{x}) \subset T(M, \overline{x})$. Fie $u \in T(M, \overline{x})$. Conform definiţiei vectorului tangent, există $(t_k) \subset (0, \infty), t_k \to 0$ şi $(u_k) \to u$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{k:} = \overline{x} + t_k u_k \in M.$$

Deci $u = \lim_k \frac{x_k - \overline{x}}{t_k}$. Dar $\left(\frac{x_k - \overline{x}}{t_k}\right)_k \subset \mathbb{R}_+(M - \overline{x})$. Deducem că $T(M, \overline{x}) \subset \operatorname{cl} \mathbb{R}_+(M - \overline{x})$. Ne reamintim că, prin definiţie, $N(M, \overline{x}) = T(M, \overline{x})^-$. Cum $T(M, \overline{x}) = \operatorname{cl} \mathbb{R}_+(M - \overline{x})$, deducem că

$$N(M, \overline{x}) = T(M, \overline{x})^- = (M - \overline{x})^- \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, c - \overline{x} \rangle \leq 0, \forall c \in M\}.$$

Pentru a observă că în acest caz $T(M, \overline{x})$ este mulţime convexă, observăm că toate operaţiile implicate în formula $T(M, \overline{x}) = \operatorname{cl} \operatorname{con}(M - \overline{x})$ păstrează convexitatea. □

2.5 Teorema lui Lyusternik

Următorul rezultat, care ne va fi util într-un moment cheie al discuţiei principale legate de probleme de optimizare, a fost demonstrat în anul 1934 de Lazar Lyusternik.

Teorema 2.5.1 (Lyusternik) *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ este o mulţime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}^q$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ şi $\overline{x} \in D$. Fie*

$$M := f^{-1}(f(\overline{x})) = \{x \in D \mid f(x) = f(\overline{x})\}.$$

Dacă diferenţiala $\nabla f(\overline{x}) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este surjectivă, atunci conul tangent M în $\overline{x}$ este nucleul aplicaţiei liniare $\nabla f(\overline{x})$, adică

$$T(M, \overline{x}) = \operatorname{Ker} \nabla f(\overline{x}) = \{v \in \mathbb{R}^p \mid \nabla f(\overline{x})(v) = 0\}.$$

Demonstraţie. Să observăm pentru început că surjectivitatea lui $\nabla f(\overline{x})$ atrage faptul că $p \geq q$. Apoi, observăm că, fără a restrânge generalitatea, putem lua $\overline{x} = 0$ şi $f(\overline{x}) = 0$, considerând altfel funcţia $x \mapsto f(x + \overline{x}) - f(\overline{x})$. Notăm $A := \nabla f(0)$.

Fie acum $u \in T(M, 0)$. Dacă $u = 0$ atunci este clar că $u \in \operatorname{Ker} \nabla f(0)$. Presupunem că $u \neq 0$. Conform definiţiei vectorului tangent, există $(t_n) \subset (0, \infty), t_n \to 0$ şi $(u_n) \to u$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $t_n u_n \in M$. Aşadar, $f(t_n u_n) = f(0) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pe de altă parte, deoarece f este de clasă $\mathcal{C}^1$, obţinem că

$$\lim \frac{f(0 + t_n u_n) - f(0) - A(t_n u_n)}{t_n \|u_n\|} = 0,$$

de unde deducem că $Au = 0$, adică $u \in \operatorname{Ker} A$.

Incluziunea inversă se bazează pe scrierea ecuaţiei $f(x) = 0$ într-o formă de tipul $f(y, z) = 0$ şi pe aplicarea Teoremei Funcţiilor Implicite.

Definim $K := \operatorname{Ker} A$ şi

$$L = K^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \langle x, u \rangle = 0, \ \forall u \in K\},$$

complementul său ortogonal. Folosind Teorema rangului pentru aplicaţii liniare, vom avea că

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = p.$$

De asemenea, cum A este surjectiv, vom avea că $\dim \operatorname{Im} A = q$. Aşadar, vom putea identifica, printr-o eventuală schimbare de baze, K şi L cu $\mathbb{R}^{p-q}$ şi $\mathbb{R}^q$, respectiv (de fapt, $K = \mathbb{R}^{p-q} \times \{0\}^q$, $L = \{0\}^{p-q} \times \mathbb{R}^q$). Scriem un punct oarecare $x \in \mathbb{R}^p$ sub forma $x = (y, z) \in K \times L$. Vom avea, pentru orice $(u, v) \in K \times L$, că

$$A(u, v) = \nabla_y f(0)(u) + \nabla_z f(0)(v),$$

de unde, pentru orice $(d, 0) \in \mathbb{R}^{p-q} \times \{0\}^q$ (identificat cu $K = \operatorname{Ker} A$),

$$0 = A(d, 0) = \nabla_y f(0)(d),$$

deci $\nabla_y f(0) = 0$. Folosind această relaţie şi ţinând cont de faptul că $\operatorname{rang} A = q$, urmează că $\operatorname{rang} \nabla_z f(0) = q$, adică, privită ca matrice (jacobianul), $\nabla_z f(0)$ este nesingulară şi deci ca aplicaţie este bijectivă.

Folosind Teorema funcţiilor implicite, vor exista două vecinătăţi $U_1 \subset \mathbb{R}^{p-q}$ şi $V_1 \subset \mathbb{R}^q$ ale originilor şi o funcţie $\alpha : U_1 \to V_1$ de clasă $\mathcal{C}^1$ astfel încât $\alpha(0) = 0$ şi cu proprietatea că orice punct $x = (y, z) \in U_1 \times V_1$ satisface $f(x) = 0$ dacă şi numai dacă $z = \alpha(y)$. Ecuaţia $f(x) = 0$ se va putea atunci scrie sub forma $f(y, \alpha(y)) = 0$. Diferenţiind această relaţie şi ţinând cont de regula lanţului, vom obţine

$$0 = \nabla_y f(y, \alpha(y)) + \nabla_z f(y, \alpha(y)) \nabla \alpha(y).$$

Ţinând cont că $\alpha(0) = 0$, $\nabla_y f(0, 0) = 0$, iar $\nabla_z f(0, 0)$ este nesingulară, obţinem $\nabla \alpha(0) = 0$.

Fie acum $v = (v_1, 0) \in \mathbb{R}^{p-q} \times \{0\}^q$ (ca mai sus, identificat $\operatorname{Ker} A$). Atunci, cum α este de clasă $\mathcal{C}^1$, vom avea, ca mai sus, pentru un şir arbitrar $(t_n) \subset (0, \infty), t_n \to 0$, că

$$\frac{\alpha(t_n v_1)}{t_n} \to \nabla \alpha(0)(v_1) = 0.$$

Va exista aşadar

$$u_n := \left(v_1, \frac{\alpha(t_n v_1)}{t_n} \right) \to (v_1, 0) = v$$

astfel încât

$$f(t_n u_n) = f\left(t_n v_1, \alpha(t_n v_1)\right) = 0,$$

sau, echivalent, $t_n u_n \in M$, pentru orice n suficient de mare. Rezultă $v \in T(M, 0)$, deci implicaţia inversă este demonstrată şi are loc concluzia teoremei. □

Exemplul 2.5.2 Fie $a, b > 0$ şi mulţimea închisă (elipsa)

$$M := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}.$$

Ne interesează expresia conului tangent la M într-un punct oarecare $(\overline{x}, \overline{y}) \in M$. Pentru aceasta, considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Astfel,

$$M = f^{-1}(1) = f^{-1}(f(\overline{x}, \overline{y})).$$

Observăm de asemenea că diferenţiala $\nabla f(\overline{x}, \overline{y}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este

$$\nabla f(\overline{x}, \overline{y})(u, v) = \frac{2\overline{x}}{a^2} u + \frac{2\overline{y}}{b^2} v,$$

aplicaţie care este surjectivă în virtutea faptului că

$$(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Astfel, conform Teoremei lui Lyusternik, conul tangent la M în $(\overline{x}, \overline{y})$ este dreapta

$$\left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\overline{x} u}{a^2} + \frac{\overline{y} v}{b^2} = 0 \right\}.$$

2.6 Lema lui Farkas

Rezultat algebric pe care îl prezentăm în finalul acestui capitol va fi foarte important în continuare. El a fost obţinut de către Julius Farkas în 1902.

Teorema 2.6.1 (Lema lui Farkas) *Fie* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(\varphi_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ *şi* $\varphi \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. *Atunci*

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1(x) \leq 0, \ldots, \varphi_n(x) \leq 0] \Rightarrow \varphi(x) \leq 0 \tag{2.3}$$

dacă şi numai dacă există $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset [0, \infty)$ *astfel încât* $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$.

Demonstraţie Implicaţia de la dreapta la stânga este evidentă. Demonstrăm cealaltă implicaţie prin inducţie după $n \geq 1$. Definim propoziţia $P(n)$ ce afirmă că pentru orice $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ satisfăcând (2.3) există $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset [0, \infty)$ astfel încât $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$.

Arătăm că $P(1)$ este adevărată. Într-adevăr, fie $\varphi, \varphi_1 \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ astfel încât

$$\varphi_1(x) \leq 0 \Rightarrow \varphi(x) \leq 0.$$

Dacă $\varphi = 0$ atunci, evident, $\varphi = 0\varphi_1$. Fie $\varphi \neq 0$. Atunci, folosind ipoteza,

$$\varphi_1(x) = 0 \Leftrightarrow [\varphi_1(x) \leq 0, \varphi_1(-x) \leq 0] \Rightarrow [\varphi(x) \leq 0, \varphi(-x) \leq 0] \Leftrightarrow \varphi(x) = 0,$$

deci $\operatorname{Ker} \varphi_1 \subset \operatorname{Ker} \varphi$. Cum $\varphi \neq 0$, avem $\varphi_1 \neq 0$, deci există $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$ cu $\varphi_1(\overline{x}) = -1$. Tot din ipoteză, $\varphi(\overline{x}) \leq 0$. Fie $x \in \mathbb{R}^p$ arbitrar. Atunci, este simplu de verificat că

$$x + \varphi_1(x)\overline{x} \in \operatorname{Ker} \varphi_1,$$

deci

$$x + \varphi_1(x)\overline{x} \in \operatorname{Ker} \varphi,$$

adică

$$\varphi\left(x + \varphi_1(x)\overline{x}\right) = 0,$$

ceea ce conduce la

$$\varphi(x) = -\varphi(\overline{x})\varphi_1(x).$$

Cum x este arbitrar, relaţia din enunţ este arătată pentru $\alpha_1 := -\varphi(\overline{x}) \geq 0$.

Presupunem acum că $P(n)$ este adevărată pentru un număr fixat $n \geq 1$ şi arătăm că $P(n+1)$ este adevărată.

Fie $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ astfel încât

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1(x) \leq 0, \ldots, \varphi_n(x) \leq 0, \varphi_{n+1}(x) \leq 0] \Rightarrow \varphi(x) \leq 0. \tag{2.4}$$

Dacă

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1(x) \leq 0, \ldots, \varphi_n(x) \leq 0] \Rightarrow \varphi(x) \leq 0, \tag{2.5}$$

atunci, din $P(n)$, există $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset [0, \infty)$ astfel încât $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i$; luăm $\alpha_{n+1} := 0$ şi concluzia are loc.

Presupunem că nu are loc relaţia (2.5). Atunci există $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$ astfel încât $\varphi(\overline{x}) > 0$ şi $\varphi_i(\overline{x}) \leq 0$ pentru orice $i \in \overline{1,n}$. Cum are loc (2.4), $\varphi_{n+1}(\overline{x}) > 0$; putem presupune (după o eventuală multiplicare cu un scalar strict pozitiv) că $\varphi_{n+1}(\overline{x}) = 1$. Dar

$$\varphi_{n+1}(x - \varphi_{n+1}(x)\overline{x}) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^p,$$

iar din (2.4) deducem

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1(x - \varphi_{n+1}(x)\overline{x}) \leq 0, \ldots, \varphi_n(x - \varphi_{n+1}(x)\overline{x}) \leq 0] \\ &\quad \Rightarrow \varphi(x - \varphi_{n+1}(x)\overline{x}) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Luăm acum $\varphi_i' := \varphi_i - \varphi_i(\overline{x})\varphi_{n+1}$ pentru $i \in \overline{1,n}$ şi $\varphi' := \varphi - \varphi(\overline{x})\varphi_{n+1}$, iar relaţia (2.6) devine

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\varphi_1'(x) \leq 0, \ldots, \varphi_n'(x) \leq 0] \Rightarrow \varphi'(x) \leq 0.$$

Cum $P(n)$ este adevărată, există $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset [0,\infty)$ astfel încât $\varphi' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i'$. Deducem

$$\varphi - \varphi(\overline{x})\varphi_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\varphi_i - \varphi_i(\overline{x})\varphi_{n+1}\right],$$

deci $\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i$, unde $\alpha_{n+1} = \varphi(\overline{x}) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(\overline{x}) \geq 0$ din alegerea lui $\overline{x}$ şi din faptul că $\alpha_i \geq 0$ pentru $i \in \overline{1,n}$). Demonstraţia este completă. □

Având în vedere identificarea dintre $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ şi $\mathbb{R}^p$ se obţine următorul corolar.

Corolarul 2.6.2 *Fie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(a_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset \mathbb{R}^p$ şi $a \in \mathbb{R}^p$. Atunci*

$$\forall x \in \mathbb{R}^p : [\langle a_1, x\rangle \leq 0, \ldots, \langle a_n, x\rangle \leq 0] \Rightarrow \langle a, x\rangle \leq 0$$

dacă şi numai dacă există $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset [0,\infty)$ astfel încât $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$.

Exemplul 2.6.3 Fie $A \subset \mathbb{R}^3$ dată prin

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, x_1 + x_2 \geq 0, x_3 \leq 0\right\}.$$

Dorim să scriem polara mulţimii A.

Prin definiţie, $u \in A^-$ dacă şi numai dacă pentru orice $x \in A$, $\langle u, x\rangle \leq 0$.

Considerăm vectorii $a = (3,-1,2)$, $b = (-3,1-2)$, $c = (-1,-1,0)$, $d = (0,0,1)$ şi atunci

$$x \in A \iff x \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \langle a, x\rangle \leq 0 \\ \langle b, x\rangle \leq 0 \\ \langle c, x\rangle \leq 0 \\ \langle d, x\rangle \leq 0. \end{cases}$$

Prin urmare

$$u \in A^- \iff \left(x \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \langle a, x\rangle \leq 0 \\ \langle b, x\rangle \leq 0 \\ \langle c, x\rangle \leq 0 \\ \langle d, x\rangle \leq 0 \end{cases} \implies \langle u, x\rangle \leq 0 \right).$$

Conform Lemei lui Farkas, ultima implicaţie este echivalentă cu faptul că există $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ astfel încât

$$u = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d.$$

Deci

$$A^- = \{(3\alpha - 3\beta - \gamma, -\alpha + \beta - \gamma, 2\alpha - 2\beta + \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0\}.$$

Exemplul 2.6.4 Să calculăm conurile tangente şi conurile normale în diferite puncte la mulţimea $M \subset \mathbb{R}^p$,

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p \mid x_i \geq 0,\ \forall i \in \overline{1,p},\ \sum_{i=1}^{p} x_i = 1 \right\},$$

numită simplexul unitate. Această mulţime este, evident, convexă şi închisă. Conform rezultatului precedent, pentru fiecare $\overline{x} \in M$,

$$\begin{aligned} T(M, \overline{x}) &= \operatorname{cl} \mathbb{R}_+(M - \overline{x}) \\ &= \operatorname{cl} \{u \in \mathbb{R}^p \mid \exists \alpha \geq 0,\ x \in M,\ u = \alpha(x - \overline{x})\}. \end{aligned}$$

Fie u din mulţimea din membrul drept. Este clar că, pe de o parte, $\sum_{i=1}^{p} u_i = 0$ iar, pe de altă parte, dacă $\overline{x}_i = 0$, atunci $u_i \geq 0$. Notăm cu $I(\overline{x}) := \left\{ i \in \overline{1,p} \mid \overline{x}_i = 0 \right\}$. Deducem că

$$T(M, \overline{x}) \subset \left\{ u \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^{p} u_i = 0 \text{ şi } u_i \geq 0,\ \forall i \in I(\overline{x}) \right\}.$$

Să demonstrăm incluziunea inversă. Este simplu de verificat că mulţimea din dreapta este închisă. Fie u din această mulţime. Dacă $u = 0$, atunci, evident, $u \in T(M, \overline{x})$. Dacă $u \neq 0$ arătăm că există $\alpha > 0$ cu $\overline{x} + \alpha u \in M$. Pe de o parte, faptul că $\sum_{i=1}^{p} (\overline{x}_i + \alpha u_i) = 1$ este clar pentru orice α. Dacă nu există indici i cu $u_i < 0$, atunci şi faptul că $\overline{x}_i + \alpha u_i \geq 0$, pentru orice $i \in \overline{1,p}$ este evident şi deci $u \in T(M, \overline{x})$. Presupunem acum că mulţimea J a indicilor pentru care $u_j < 0$ este nevidă. Atunci $J \subset \overline{1,p} \setminus I(\overline{x})$, deci $\overline{x}_j > 0$ pentru orice $j \in J$. Alegem atunci α strict pozitiv cu

$$\alpha < \min\{-u_j^{-1} \overline{x}_j \mid j \in J\}$$

şi avem din nou că $\overline{x}_i + \alpha u_i \geq 0$, pentru orice $i \in \overline{1,p}$. Prin urmare şi în acest caz $u \in T(M, \overline{x})$, deci are loc egalitatea.

În continuare, arătăm că

$$\begin{aligned} N(M, \overline{x}) = &\{(a, a, ..., a) \in \mathbb{R}^p \mid a \in \mathbb{R}\} \\ &+ \{v \in \mathbb{R}^p \mid v_i \leq 0,\ \forall i \in I(\overline{x}),\ v_i = 0,\ i \notin I(\overline{x})\}. \end{aligned}$$

Pentru aceasta considerăm elementele

$$a_0 = (1, 1, ..., 1),\ a_1 = -(1, 0, ..., 0),\ ...,\ a_n = -(0, 0, ..., 1)$$

şi observăm următoarea scriere echivalentă a lui $T(M, \overline{x})$:

$$T(M, \overline{x}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle a_0, u \rangle \leq 0,\ \langle -a_0, u \rangle \leq 0,\ \langle a_i, u \rangle \leq 0,\ \forall i \in I(\overline{x})\}.$$

Polara acestei mulţimi este

$$N(M,\overline{x}) = \left\{ \alpha a_0 - \beta a_0 + \sum_{i \in I(\overline{x})} \alpha_i a_i \mid \alpha, \beta, \alpha_i \geq 0,\ \forall i \in I(\overline{x}) \right\}.$$

Într-adevăr, faptul că mulţimea din dreapta este inclusă în conul normal este evident, iar incluziunea inversă rezultă din Lema lui Farkas (Teorema 2.6.1) întrucât:

$$\begin{aligned} v \in N(M,\overline{x}) &\iff \langle u, v\rangle \leq 0, \forall u \in T(M,\overline{x}) \\ &\iff \forall u \in \mathbb{R}^p : [\langle a_0, u\rangle \leq 0,\ \ \langle -a_0, u\rangle \leq 0,\ \ \langle a_i, u\rangle \leq 0,\ \forall i \in I(\overline{x})] \Rightarrow \langle u, v\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Astfel, se ajunge la forma anunţată a conului normal.

2.7 Exerciţii

Exerciţiul 2.1 *Să se arate că o mulţime nevidă $D \subset \mathbb{R}^p$ este convexă dacă şi numai dacă D conţine orice combinaţie convexă a elementelor sale.*

Exerciţiul 2.2 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Să se arate că mulţimea* $\operatorname{conv} D$ *este cea mai mică mulţime convexă (în sensul incluziunii) care conţine mulţimea D.*

Problema 2.3 *Să se arate că înfăşurătoarea convexă a unei mulţimi închise nu este neaparat închisă. Să se arate că înfăşurătoarea convexă a unei mulţimi compacte este compactă.*

Problema 2.4 *Să se arate că înfăşurătoarea convexă a unei mulţimi deschise este deschisă.*

Exerciţiul 2.5 *Fie $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mulţimi nevide convexe. Să se arate că*

$$\operatorname{conv}(A \cup B) = \{\alpha a + (1-\alpha) b \mid a \in A, b \in B, \alpha \in [0,1]\}.$$

Exerciţiul 2.6 *Fie $A, B \subset \mathbb{R}^p$ mulţimi nevide. Să se arate că* $\operatorname{conv}(A+B) = \operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B$.

Problema 2.7 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ nevidă. Definim*

$$\widetilde{A} := [0,1]A = \{\alpha a \mid \alpha \in [0,1], a \in A\}.$$

Să se arate că:

(i) dacă A este compactă, atunci $\widetilde{A}$ este compactă;

(ii) dacă A este convexă, atunci $\widetilde{A}$ este convexă;

(iii) reciproca afirmaţiei de la (i) nu este adevărată;

(iv) reciproca afirmaţiei de la (ii) nu este adevărată.

Problema 2.8 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Definim înfăşurătoarea echilibrată a mulţimii A prin*

$$\operatorname{echi} A := [-1,1]\, A = \{\alpha a \mid \alpha \in [-1,1], a \in A\}.$$

(i) Să se scrie înfăşurătoarea echilibrată a mulţimii $C := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\right\}$.

(ii) Să se arate că, în general, dacă A este compactă, atunci $\operatorname{echi} A$ *este compactă, dar reciproca nu este adevărată.*

(iii) Este înfăşurătoarea echilibrată a unei mulţimi convexe mulţime convexă?

(iv) Să se stabilească valoarea de adevăr a relaţiei $\operatorname{conv}(\operatorname{echi} A) = \operatorname{echi}(\operatorname{conv}(\operatorname{echi} A))$.

Exerciţiul 2.9 *Să se arate că simplexul unitate este mulţime compactă şi convexă.*

Exerciţiul 2.10 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ o mulţime compactă. Să se arate că înfăşurătoarea conică a lui A este mulţime închisă. Se menţine concluzia dacă $0 \in A$?*

Problema 2.11 *Fie $A, B, C \subset \mathbb{R}^p$ mulţimi nevide astfel încât C este mărginită. Să se arate că dacă $A + C \subset B + C$, atunci $A \subset \overline{\operatorname{conv}} B$.*

Exerciţiul 2.12 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x < y$. Consideră un scalar $\lambda > 1$. Să se ordoneze crescător numerele $(1-\lambda)x + \lambda y, x, y$. Să se arate că*

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq f((1-\lambda)x + \lambda y).$$

Ce se poate spune în cazul $\lambda < 0$? Interpretaţi geometric rezultatele.

Problema 2.13 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă.*

(i) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se studieze poziţia graficului lui f în raport cu dreapta ce trece prin $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$.

(ii) Să se deducă faptul că dacă f este mărginită, atunci este constantă. Să se deducă faptul că dacă f este în plus crescătoare, atunci $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Soluţie (i) Este clar (din interpretarea geometrică a convexităţii) că pentru $x \in [a, b]$, graficul lui f se află sub dreapta ce uneşte punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$ şi care are ecuaţia

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Pentru $x > b$, din convexitate şi din $a < b < x$ deducem

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

adică

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

adică graficul lui f este deasupra dreptei. Aceeaşi concluzie se obţine în mod analog pentru $x < a$.

(ii) Presupunem că f nu ar fi constantă. Atunci ar exista $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$ şi $f(a) \neq f(b)$. Putem considera, fără a restrânge generalitatea, că $f(b) > f(a)$. Cum pentru $x > b$,

$$f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

obţinem că $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, adică f nu este mărginită. Ultima concluzie rezultă din consideraţiile anterioare. □

Problema 2.14 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ convexă. Să se arate că f este mărginită inferior. Este în general f mărginită?*

Soluţie Fie $x_0 < x_1 < x_2$ trei puncte din intervalul (a, b). Pentru $x < x_1$, avem

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ceea ce atrage

$$(x_1 - x)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + f(x_1) \leq f(x),$$

deci f este mărginită inferior pe $(a, x_1]$. Analog, pentru $x \geq x_1$,

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

adică

$$(x - x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + f(x_0) \leq f(x).$$

Obţinem că f este mărginită inferior pe $[x_1, b)$, deci, în final este mărginită inferior pe (a, b).

În general, mărginirea superioară nu este asigurată. Ca exemplu, considerăm funcţia $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |\operatorname{tg} x|$. □

Problema 2.15 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă.*

(i) Să se arate că dacă $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, atunci $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Să se arate că f admite asimptotă la $+\infty$, atunci graficul său este deasupra asimptotei.

Soluţie (i) Presupunem, prin reducere la absurd, că există un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) < 0$. Din ipoteză, există $x_1 > x_0$ cu $f(x_1) > f(x_0)$. Pentru $x > x_1$ are loc (pe baza convexităţii)

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

deci

$$f(x_1) + (x - x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f(x).$$

Obţinem contradicţia $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(ii) Fie $y = ax + b$ ecuaţia asimptotei. Funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - ax - b$ este convexă (sumă dintre o funcţie convexă şi o funcţie afină) şi, în plus, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Aplicăm punctul precedent şi rezultă concluzia. □

Exerciţiul 2.16 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă şi $f : D \to \mathbb{R}$. Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f este convexă;

(ii) epigraful lui f, $\operatorname{epi} f := \{(x, t) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ este o submulţime convexă a lui $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$.

Exerciţiul 2.17 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ mulţimea*

$$N_a f = \{x \in D \mid f(x) \leq a\}$$

este convexă. Are loc reciproca? Să se arate că proprietatea de mai sus este echivalentă cu

$$\forall x, y \in D, \forall \lambda \in (0, 1), f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

Exerciţiul 2.18 *Fie $a, b > 0$. Să se arate că mulţimea*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

este convexă.

Exerciţiul 2.19 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă şi $f, g : D \to \mathbb{R}$ o funcţii convexe. Să se arate că funcţia $\max\{f, g\}$ este convexă. Este $\min\{f, g\}$ convexă, în general?*

Problema 2.20 (Inegalitatea lui Jensen) *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă şi $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă funcţia f este convexă atunci*

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_m f(x_m)$$

pentru orice $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x_1, ..., x_m \in D$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$, $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$. Inegalitatea este strictă dacă funcţia f este strict convexă, cel puţin două din punctele (x_k) sunt distincte şi scalarii (λ_k) corespunzători sunt strict pozitivi.

Problema 2.21 *(i) Folosind inegalitatea lui Jensen funcţia strict convexă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ deduceţi: pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ şi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ cu $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ are loc*

$$e^{\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k e^{x_k}$$

cu egalitate doar în cazul $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

(ii) Arătaţi că pentru orice $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ şi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ cu $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ are loc

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} ... a_n^{\lambda_n} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k.$$

(iii) Deduceţi inegalitatea mediilor.

(iv) Deduceţi că pentru orice $u, v > 0$ şi $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ are loc

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leq \frac{u}{p} + \frac{v}{q}.$$

Când are loc egalitatea?

(v) Deduceţi inegalitatea lui Hölder: pentru orice $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ şi $y_1, y_2, ..., y_n > 0$ are loc

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Când are loc egalitatea?

Exerciţiul 2.22 *Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$. Să se arate că f este convexă şi că pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(x_i)_{i \in \overline{1,n}} \subset (0, +\infty)$ cu $\sum_1^n x_i = 1$ are loc*

$$\ln \frac{1}{n} \leq \sum_1^n x_i \ln x_i.$$

Exerciţiul 2.23 *Să se arate că $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln(\ln x)$ este convexă. Deduceţi că pentru orice $a, b > 1$ are loc relaţia*

$$\sqrt{\ln a \ln b} \leq \ln \left(\frac{a+b}{2} \right).$$

Soluţie Derivata a doua a lui f pe intervalul de definiţie este

$$f''(x) = \frac{1}{x^2 \ln x} + \frac{1}{x^2 \ln^2 x}.$$

Cum $x > 1$ această funcţie este pozitivă, deci f este convexă.

Pe baza acestei proprietăţi, deducem

$$-\ln\left(\ln\frac{a+b}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}\left(\ln(\ln a) + \ln(\ln b)\right) = -\ln(\sqrt{\ln a \ln b}),$$

de unde se obţine inegalitatea căutată. □

Exerciţiul 2.24 *Să se arate că dacă α, β, γ sunt unghiurile unui triunghi, atunci*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 2.25 (Inegalitatea Hermite-Hadamard) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi continuă pe $[a, b]$. Atunci are loc inegalitatea*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Problema 2.26 *Să se arate că următoarele funcţii sunt convexe şi să se scrie inegalitatea Hermite-Hadamard în fiecare caz în parte pe diferite intervale compacte:*

(i) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^{-1}$;

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$;

(iii) $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sin x$.

Problema 2.27 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 astfel încât există $m, M \in \mathbb{R}$ cu $m \leq f''(x) \leq M$ pentru orice $x \in [a, b]$. Să se arate că*

$$m\frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq M\frac{(b-a)^2}{24}$$

şi

$$m\frac{(b-a)^2}{12} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Soluţie Este uşor de observat că funcţiile

$$x \mapsto f(x) - \frac{mx^2}{2}$$
$$x \mapsto \frac{Mx^2}{2} - f(x)$$

sunt convexe şi continue. Ambele inegalităţi cerute se obţin aplicând inegalitatea Hermite-Hadamard acestor două funcţii. □

Exerciţiul 2.28 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie L-Lipschitz ($L > 0$). Să se arate că*

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] L(b-a).$$

Soluţie Putem scrie succesiv

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - f(t))dt \right| \\ &\leq \frac{L}{b-a} \int_a^b |x-t| \, dt \\ &= \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] L(b-a), \end{aligned}$$

şi inegalitatea este demonstrată. □

Problema 2.29 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 astfel încât $f(a) = f(b) = 0$. Fie $M := \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ şi $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2}; \; h(x) = -f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Să se arate că g, h sunt convexe şi să se deducă inegalitatea

$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}, \; \forall x \in [a, b].$$

Problema 2.30 *(i) Fie $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $M > 0$ şi $(f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii $M-$Lipschitz pe $[a, b]$. Să se arate că dacă (f_n) este convergent punctual pe $[a, b]$, atunci (f_n) este uniform convergent pe $[a, b]$.*

(ii) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, şi $(f_n) : (a, b) \to \mathbb{R}$ un şir de funcţii convexe convergent punctual pe (a, b). Să se arate că şirul (f_n) este uniform convergent pe orice subinterval închis al lui (a, b).

Soluţie (i) Este clar că dacă f este limita punctuală a lui (f_n), atunci f este ea însăşi $M-$Lipschitz. Fie $\varepsilon > 0$. Fixăm o divizare a intervalului (a, b) de forma

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_p = b$$

de normă mai mică decât $\frac{\varepsilon}{M}$. Din convergenţa punctuală există un rang n_0 suficient de mare încât pentru orice $i \in \overline{0, p}$,

$$|f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| < \varepsilon.$$

Fie $x \in [a, b]$. Există $i \in \overline{0, p-1}$ cu $x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Avem

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(\alpha_i)| + |f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)| + |f(\alpha_i) - f(x)| \\ &< M|x - \alpha_i| + \varepsilon + M|x - \alpha_i| \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Deci (f_n) este uniform convergent către f.

(ii) Vom reduce problema la cazul precedent. Fie $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ şi $\alpha'\in(a,\alpha),\beta'\in(\beta,b)$. Cum f_n este convexă, pentru orice $x,y\in[\alpha,\beta]$ cu $x\neq y$,

$$\frac{f_n(\alpha)-f_n(\alpha')}{\alpha-\alpha'}\leq\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\leq\frac{f_n(\beta)-f_n(\beta')}{\beta-\beta'}.$$

Membrii extremi ai acestei inegalităţi sunt mărginiţi (din convergenţa punctuală), deci există $M>0$ cu

$$\left|\frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}\right|\leq M,\ \forall x,y\in[\alpha,\beta],\ x\neq y,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Aşadar, funcţiile (f_n) sunt echi-Lipschitz pe $[\alpha,\beta]$, deci se aplică punctul (i). □

Exerciţiul 2.31 *Fie $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Să se arate că dacă f este convexă iar g este afină atunci $f\circ g$ este convexă.*

Exerciţiul 2.32 *Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ convexă. Să se arate că $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ dată prin*

$$\varphi(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

este convexă.

Problema 2.33 *Fie $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$. Să se arate că f este simultan convexă şi concavă dacă şi numai dacă f este afină.*

Exerciţiul 2.34 *Să se arate că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ este convexă. Fie $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Deduceţi inegalităţile:*

(i) pentru orice numere reale $a_1,a_2,...,a_n$

$$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)^2+n^2}\leq\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+...+\sqrt{a_n^2+1};$$

(ii)

$$\frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}<\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2^2+1}+...+\sqrt{n^2+1}.$$

Exerciţiul 2.35 *Fie $g:[-2+\sqrt{2},+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2e^x$. Să se arate că g este strict convexă şi apoi să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $(x_i)_{i\in\overline{1,n}}\subset[-2+\sqrt{2},+\infty)$ cu $\sum_1^n x_i=2$ are loc*

$$\frac{4\sqrt[n]{e^2}}{n}\leq\sum_1^n x_i^2e^{x_i}.$$

Exerciţiul 2.36 *(i) Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\ln(1+e^x)$ este convexă.*

(ii) Să se arate că pentru orice $x_1,...,x_n>0$ ($n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$) are loc inegalitatea

$$(1+x_1)...(1+x_n)\geq\left(1+\sqrt[n]{x_1...x_n}\right)^n.$$

Problema 2.37 *(i) Să se arate că* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^\mu$ *unde* $\mu>1$ *este convexă.*

(ii) Arătaţi că pentru orice $\mu>1$, *numerele reale strict pozitive* $a_1,a_2,...,a_n$ *şi pentru orice* $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in[0,1]$ *cu* $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ $(n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})$ *are loc inegalitatea*

$$(\lambda_1a_1+...+\lambda_na_n)^\mu\le\lambda_1a_1^\mu+...+\lambda_na_n^\mu.$$

(iii)Arătaţi că pentru orice $p,q>0$, $p<q$, *pentru orice numere reale strict pozitive* $a_1,a_2,...,a_n$ *şi pentru orice* $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in[0,1]$ *cu* $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ $(n\in\mathbb{N}\setminus\{0\})$ *are loc inegalitatea*

$$(\lambda_1a_1^p+...+\lambda_na_n^p)^{1/p}\le(\lambda_1a_1^q+...+\lambda_na_n^q)^{1/q}.$$

Exerciţiul 2.38 *Să se arate că funcţia* $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *dată prin*

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$$

este convexă. Să se deducă faptul că pentru orice $a,b,c>0$ *cu* $a+b+c=1$ *are loc inegalitatea:*

$$\frac{10^{10}}{3^9}\le\left(a+\frac{1}{a}\right)^{10}+\left(b+\frac{1}{b}\right)^{10}+\left(c+\frac{1}{c}\right)^{10}.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 2.39 *(i) Fie* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. *Să se arate că dacă* f *este o funcţie convexă crescătoare şi* g *este convexă atunci* $f\circ g$ *este convexă.*

(ii) Fie $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$. *Să se arate că funcţia* $\ln f$ *este convexă dacă şi numai dacă pentru orice* $\alpha>0$, *funcţia* f^α *este convexă.*

Exerciţiul 2.40 *Să se arate că funcţia* $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$ *este strict convexă. Deduceţi inegalitatea:*

$$(x_1x_2...x_n)^{\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}}\le x_1^{x_1}x_2^{x_2}...x_n^{x_n},\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},x_1,x_2,...,x_n>0.$$

Să se scrie inegalitatea Hermite-Hadamard pentru f *pe un interval de forma* $[1,a]$ *cu* $a>1$. *Deduceţi inegalitatea*

$$2a\ln a<a^2-1,\ \forall a>1.$$

Problema 2.41 *Fie* $D\subset\mathbb{R}^p$ *o mulţime convexă şi* $f:D\to\mathbb{R}$ *o funcţie convexă. Să se arate că* f *este continuă în orice punct interior mulţimii* D.

Soluţie Fie $\overline{x}\in\operatorname{int}D$. Făcând eventual o translaţie, putem considera cazul $\overline{x}=0$. Arătăm mai întâi că f este mărginită pe o vecinătate a punctului 0. Dacă notăm cu $(e_i)_{i\in\overline{1,p}}$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^p$, atunci există $a>0$ astfel încât ae_i şi $-ae_i$ sunt în D pentru orice $i\in\overline{1,p}$. În aceste condiţii, mulţimea

$$V:=\left\{x\in\mathbb{R}^p\mid x=\sum_{i=1}^p x_ie_i,\ \ |x_i|<\frac{a}{p},\ \forall i\in\overline{1,p}\right\}$$

este o vecinătate a lui 0 inclusă în D. Pentru $x \in V$, există $(x_i)_{i\in\overline{1,p}}$ cu $|x_i| < \frac{a}{p}$, $i \in \overline{1,p}$ şi $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$. Presupunem mai întâi că $x_i \neq 0$ pentru orice $i \in \overline{1,p}$. Avem

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{p} \frac{|x_i|}{a} a \frac{x_i}{|x_i|} e_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \frac{|x_i|}{a}\right) 0\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \frac{|x_i|}{a} f\left(a \frac{x_i}{|x_i|} e_i\right) + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} \frac{|x_i|}{a}\right) f(0) \\ &\leq \max\{f(ae_i), f(-ae_i) \mid i \in \overline{1,p}\} + |f(0)|. \end{aligned}$$

Acum se observă că dacă avem indici i pentru care $x_i = 0$, atunci putem să excludem din calculele de mai sus respectivii indici, iar estimarea se păstrează.

Cum membrul drept este o constantă (pe care o notăm cu M), afirmaţia făcută anterior este demonstrată. Fie $\varepsilon \in (0,1)$ şi U o vecinătate simetrică a lui 0 cu proprietatea că $\varepsilon^{-1}U \subset V$. Atunci, pentru orice $x \in U$,

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\varepsilon(\varepsilon^{-1}x) + (1-\varepsilon)0\right) &\leq \varepsilon f(\varepsilon^{-1}x) + (1-\varepsilon)f(0) \\ &\leq \varepsilon M + (1-\varepsilon)f(0), \end{aligned}$$

adică

$$f(x) - f(0) \leq \varepsilon M - \varepsilon f(0).$$

Din faptul că U este simetrică, deducem că pentru orice $x \in U$

$$f(-x) \leq \varepsilon M + (1-\varepsilon)f(0).$$

Mai mult,

$$\begin{aligned} f(0) &= f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon M + (1-\varepsilon)f(0)\right), \end{aligned}$$

deci

$$f(0) - f(x) \leq \varepsilon M - \varepsilon f(0),$$

relaţie care, în combinaţie cu cea de mai sus, conduce la

$$|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon M - \varepsilon f(0).$$

Această inegalitate probează continuitatea lui f în 0. □

Problema 2.42 *Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă, atunci f admite derivate laterale în fiecare punct interior intervalului I şi pentru orice $x, y \in \operatorname{int} I$, cu $x < y$ au loc inegalităţile:*

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y).$$

Exerciţiul 2.43 *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Să se arate că g este convexă dacă şi numai dacă pentru orice funcţie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann are loc inegalitatea*

$$g\left(\int_0^1 f(u)du\right) \leq \int_0^1 g\left(f(u)\right) du.$$

Soluţie Dacă g este convexă atunci pentru orice diviziune a intervalului $[0,1]$ şi pentru orice sistem de puncte intermediare (cu notaţiile din Definiţia 4.5.73) are loc

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right) \leq \sum_{i=1}^{n} g(f(\xi_i))(x_i - x_{i-1}).$$

Trecând la limită cu norma diviziunii tinzând la 0 obţinem inegalitatea dorită.

Pentru reciprocă, fixăm $x, y \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$ şi considerăm funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(u) = \begin{cases} x, \text{ dacă } u \in [0,\alpha] \\ y, \text{ dacă } u \in (\alpha,1]. \end{cases}$$

Atunci f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$ (a se vedea Teoremele 4.5.81, 4.5.82). Aplicând inegalitatea din ipoteză găsim

$$g(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1-\alpha)g(y),$$

ceea ce probează convexitatea lui g. □

Exerciţiul 2.44 *Să se arate că următoarele funcţii sunt convexe:*
(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = 3x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 + 1$;
(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_1$;
(iii) $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1,x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1 + x_2}.$$

Exerciţiul 2.45 *Studiaţi stricta convexitate a funcţiilor $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date prin:*
(i) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$;
(ii) $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$.

Problema 2.46 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă.*
(i) Să se arate că dacă A este convexă atunci d_A este convexă.
(ii) Să se arate că dacă A este închisă şi d_A este convexă atunci A este convexă.
(iii) Să se dea un exemplu de mulţime neconvexă pentru care d_A este convexă.

Exerciţiul 2.47 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Să se arate că arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$*

$$d(x,A) = d(x, \operatorname{cl} A).$$

Exerciţiul 2.48 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Să se arate că $\varphi_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $\varphi_A(x) = \|x\|^2 - d_A^2(x)$ este convexă.*

Exerciţiul 2.49 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ nevidă. Definim* $\operatorname{con} A := [0,\infty)A$. *Să se arate că*
(i) $\operatorname{con} A$ *este cel mai mic con ce conţine* A;
(ii) $\operatorname{con}(\operatorname{conv} A) = \operatorname{conv}(\operatorname{con} A)$;
(iii) A^- *este un con convex închis şi* $A \subset (A^-)^-$;
(iv) Egalitatea $A = (A^-)^-$ *are loc dacă şi numai dacă* A *este con convex închis;*
(v) dacă $A \subset B$, *atunci* $B^- \subset A^-$;
(vi) $A^- = (\overline{\operatorname{con} A})^-$.

Exerciţiul 2.50 *Fie mulţimea* $M := [1,2] \times [1,2]$. *Să se deseneze conurile tangente şi normale la această mulţime punctele sale. Aceeaşi problemă pentru* $M \setminus \operatorname{int} M$.

Exerciţiul 2.51 *Să se scrie conul tangent la mulţimea*

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x = y^2\right\}$$

într-un punct al său.

Exerciţiul 2.52 *Să se arate că dacă* $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^p$ *şi* $\overline{x} \in M$, *atunci are loc relaţia* $T(M,\overline{x}) = T(\overline{M},\overline{x})$.

Exerciţiul 2.53 *Fie* $A \subset \mathbb{R}^2$,

$$A = \{(x,y) \mid x - 2y \leq 0,\ 2x - y \geq 0\}.$$

Să se determine polara lui A *şi să se reprezinte grafic ambele mulţimi.*

Exerciţiul 2.54 *Să se determine polarele următoarelor mulţimi:*
(i) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0, x_3 \geq 0\}$;
(ii) $A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, x_1 \geq 0, x_3 \leq 0, x_2 + x_4 \leq 0\}$.

Exerciţiul 2.55 *Fie* $A, B \subset \mathbb{R}^p$ *mulţimi închise. Să se arate că au loc relaţiile:*
(i) dacă $\overline{x} \in A \cap B$ *atunci* $T(A \cup B, \overline{x}) = T(A,\overline{x}) \cup T(B,\overline{x})$;
(ii) dacă $\overline{x} \in A \cap B$ *atunci* $T(A \cap B, \overline{x}) \subset T(A,\overline{x}) \cap T(B,\overline{x})$;
(iii) dacă $\overline{x} \in \operatorname{Fr} A$ *atunci* $T(\operatorname{Fr} A, \overline{x}) = T(\operatorname{cl} A, \overline{x}) \cap T(\overline{\mathbb{R}^p \setminus A}, \overline{x})$.
Să se dea un exemplu în care incluziunea de la (ii) să fie strictă.

Problema 2.56 *Să se demonstreze următoarea variantă afină a Lemei lui Farkas. Fie* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(a_i)_{i\in\overline{1,n}}, \subset \mathbb{R}^p$, $b \in \mathbb{R}^p$ *şi* $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,n}}, \subset \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Presupunem că sistemul de inegalităţi* $\langle a_i, x\rangle \leq \alpha_i$, $i \in \overline{1,n}$ *are soluţie. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $\forall x \in \mathbb{R}^p : \langle a_i, x\rangle \leq \alpha_i, i \in \overline{1,n} \Rightarrow \langle b, x\rangle \leq \beta$;
(ii) $\exists (\gamma_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset [0,\infty)$ *astfel încât* $b = \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i$, $\sum_{i=1}^n \gamma_i \alpha_i \leq \beta$.

Soluţie Pentru orice $i \in \overline{1,n}$, inegalitatea $\langle a_i, x\rangle \leq \alpha_i$ este echivalentă cu

$$\langle (a_i, \alpha_i), (x, -1)\rangle \leq 0,$$

deci şi cu

$$\langle (a_i, \alpha_i), (tx, -t)\rangle \leq 0,\ \forall t \geq 0,$$

adică poate fi scrisă

$$\begin{cases} \langle (a_i, \alpha_i), (tx, -t) \rangle \leq 0 \\ \langle (0,1), (tx, -t) \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Aşadar sistemul în $(y, s) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$,

$$\langle (a_i, \alpha_i), (y, s) \rangle \leq 0, \ i \in \overline{1,n}, \ \ \langle (0,1), (y, s) \rangle \leq 0$$

implică $\langle (b, \beta), (y, s) \rangle \leq 0$. Conform Lemei lui Farkas, aceasta este echivalent cu faptul că există $(\gamma_i)_{i \in \overline{1,n}} \subset [0, \infty)$ şi $\gamma \geq 0$ astfel încât

$$(b, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (a_i, \alpha_i) + \gamma (0,1).$$

Se obţine concluzia. □

Capitolul 3

Studiul unor probleme de optimizare

3.1 Cadrul general

Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Suntem interesaţi să studiem problema minimizării funcţiei f atunci când argumentul acesteia parcurge mulţimea M. Mulţimea M se va numi mulţimea punctelor fezabile ale problemei (P) sau mulţimea constrângerilor sau, încă, mulţimea restricţiilor. Conceptul central este definit mai jos.

Definiţia 3.1.1 *Spunem că $\overline{x} \in M$ este punct de minim pentru funcţia f pe mulţimea M dacă există o vecinătate V a punctului $\overline{x}$ astfel încât $f(\overline{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in M \cap V$. Dacă $V = \mathbb{R}^p$, spunem că $\overline{x}$ este punct de minim global pentru f pe M.*

Evident, definiţia de mai sus are sens şi dacă f este definită doar pe mulţimea M. Noţiunea de punct de minim este întâlnită şi sub denumirea de punct de minim local, însă în aceast curs omitem, de multe ori, cuvântul "local". Să spunem de la început că ne vom ocupa de minimizarea funcţiei f, dar rezultate referitoare la maximizarea sa pot fi obţinute aplicând rezultatele de minimizare funcţiei $-f$ în baza relaţiei $\max f = -\min(-f)$. Să remarcăm şi că $\overline{x} \in M$ nu este punct minim pentru funcţia f pe mulţimea M dacă şi numai dacă există un şir $(x_n) \subset M$, $x_n \to \overline{x}$ astfel încât $f(x_n) < f(\overline{x})$ pentru orice n. Similar, $\overline{x} \in M$ nu este punct minim global pentru funcţia f pe mulţimea M dacă şi numai dacă există un şir $x \in M$ astfel încât $f(x) < f(\overline{x})$.

Formal, vom scrie problema de mai sus în forma următoare:

$$(P)\ \min f(x),\ x \in M,$$

iar prin soluţie locală (sau, simplu, soluţie) pentru problema (P) înţelegem un punct de minim pentru funcţia f pe mulţimea M în sensul definiţiei de mai sus. Atunci când avem de-a face cu un punnct de minim global pentru f pe M, spunem că acesta este soluţie globală a problemei (P).

Atunci când ne vom referi la problema (P) vom subînţelege mereu că M este o mulţime închisă.

Observaţia 3.1.2 *În general, cu excepţia cazului $M = \mathbb{R}^p$, problema (P) este o problemă cu restricţii (constrângeri) întrucât domeniul argumentului x este restrâns la mulţimea M (a*

se vedea exemplele ilustrative ale conceptelor-cheie de la începutul lucrării). Atunci când ne referim la problema minimizării lui f pe $\mathbb{R}^p$ (caz în care, de multe ori, M nu se mai precizează explicit) spunem că avem o problemă fără restricţii. Totuşi, să observăm că în Definiţia 3.1.1, dacă $\overline{x} \in \operatorname{int} M$, atunci $\overline{x}$ este soluţie locală neinfluenţată de restricţia M (este suficient să micşorăm vecinătatea V astfel încât $V \subset M$). Deci în cazul problemelor cu restricţii cazul interesant (care nu se reduce la cazul unei probleme fără restricţii) este cazul în care $\overline{x} \in \operatorname{Fr} M$. Dacă $\overline{x} \in \operatorname{int} M$ mai spunem şi că restricţia este inactivă, iar dacă $\overline{x} \in M \setminus \operatorname{int} M$ spunem că restricţia este activă.

Observaţia 3.1.3 *O restricţie de tip $x \in M$ se numeşte restricţie geometrică.*

Un rol important îl vor juca mulţimile de nivel ale unei funcţii. Având o funcţie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, dacă $\nu \in \mathbb{R}$,

$$N_\nu f := \{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \leq \nu\} = f^{-1}((-\infty, \nu]).$$

Să observăm că dacă $\nu > \inf_{x \in \mathbb{R}^p} f(x)$ atunci $N_\nu f \neq \emptyset$ iar dacă f este continuă atunci $N_\nu f$ este închisă.

3.2 Rezultate de existenţă a soluţiilor

Teorema 3.2.1 (Teorema lui Weierstrass) *Dacă $M \subset \mathbb{R}^p$ este o mulţime compactă şi $f : M \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci problema minimizării lui f pe M şi problema maximizării lui f pe M au soluţii globale.*

Demonstraţie Demonstrăm concluzia doar pentru problema minimizării lui f pe M. Fie $(x_n) \subset M$ astfel încât $f(x_n) \to \inf\{f(x) \mid x \in M\}$. Din compactitatea lui M, şirul (x_n) are un subşir convergent la un element $\overline{x} \in M$. Din faptul că mulţimile de tip $M \cap N_\nu f$ sunt închise pentru orice $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu > \inf\{f(x) \mid x \in M\}$, deducem că $\overline{x}$ se află în toate aceste mulţimi (pentru că pentru fiecare ν în parte, termenii x_n sunt, de la un loc încolo, în $M \cap N_\nu f$). Atunci deducem că $f(\overline{x}) \leq \nu$ pentru orice $\nu > \inf\{f(x) \mid x \in M\}$. Prin urmare, $f(\overline{x}) \leq \inf\{f(x) \mid x \in M\}$. Pe de o parte, aceasta înseamnă că $\inf\{f(x) \mid x \in M\} \in \mathbb{R}$, deci f este mărginită inferior pe M, iar, pe de altă parte, că $\overline{x}$ este punctul căutat care realizează minimul global al lui f pe M. Demonstraţia este încheiată. □

Teorema 3.2.2 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă şi închisă. Dacă există $\nu > \inf_{x \in M} f(x)$ astfel încât mulţimea de nivel a lui f relativ la M, adică $M \cap N_\nu f = \{x \in M \mid f(x) \leq \nu\}$, este mărginită, atunci f îşi atinge minimul global pe M.*

Demonstraţie Este clar că eventualul minim global al lui f pe M este totuna cu minimul global al lui f pe $M \cap N_\nu f$. Cum această mulţime este compactă iar f este continuă, din Teorema lui Weierstrass, deducem că f îşi atinge minimul global pe $M \cap N_\nu f$, deci pe M. □

Rezultatele de mai sus asigură existenţa punctelor de minim în condiţii de compactitate a mulţimilor de nivel. Evident, mărginirea inferioară a funcţiei este condiţie necesară pentru existenţa minimului, dar este clar că mărginirea mulţimilor de nivel nu este o astfel de condiţie. De exemplu funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$ îşi atinge minimul în $\overline{x} = 1$, valoarea minimă este 0, dar $N_\nu f$ nu este mărginită pentru nicio valoare $\nu > 0 = \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Evident, în teorema de mai sus, dacă M este mărginită, atunci ipoteza este automat verificată. Cazul interesant este acela în care M este nemărginită, situaţie în care ipoteza este verificată dacă impunem funcţiei f o condiţie suplimentară.

Propoziţia 3.2.3 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă, închisă şi nemărginită. Dacă $\lim_{x\in M, \|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ (i.e., pentru orice $(x_n) \subset M, \|x_n\| \to \infty$ are loc $f(x_n) \to \infty$) atunci mulţimea $N_\nu f \cap M$ este mărginită pentru orice $\nu > \inf_{x\in M} f(x)$.*

Demonstraţie Fie $\nu > \inf_{x\in M} f$. Dacă mulţimea $N_\nu f \cap M$ ar fi nemărginită, ar exista $(x_n) \subset N_\nu f \cap M$ cu $\|x_n\| \to \infty$. Atunci, pe de o parte, din ipoteză, $\lim f(x_n) = \infty$ iar, pe de altă parte, $f(x_n) \leq \nu$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce este absurd. □

Definiţia 3.2.4 *O funcţie f care satisface condiţia $\lim_{x\in M, \|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ se numeşte funcţie coercivă pe M.*

Reunind rezultatele de mai sus avem următorul rezultat de existenţă pentru cazul în care M este nemărginită.

Corolarul 3.2.5 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă, închisă şi nemărginită. Dacă f este coecivă pe M atunci problema (P) admite soluţie globală.*

3.3 Condiţii de optimalitate

Trecem acum la a doua parte a acestei secţiuni în care ne propunem să prezentăm condiţii necesare şi condiţii suficiente de optimalitate. Pentru început, deducem condiţii necesare de optimalitate pentru care utilizăm ideile dezvoltate în legătură cu studiul conului tangent (în sens Bouligand).

Teorema 3.3.1 (Condiţia necesară de ordinul I - probleme cu restricţii) *Dacă $\overline{x}$ este soluţie locală pentru problema (P) şi f este diferenţiabilă în $\overline{x}$, atunci $\nabla f(\overline{x})(u) \geq 0$ pentru orice $u \in T(M, \overline{x})$.*

Demonstraţie Fie V o vecinătate a lui $\overline{x}$ pentru care $f(\overline{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap M$. Fie $u \in T(M, \overline{x})$. Atunci există şi $(t_n) \subset (0, \infty)$ cu $t_n \to 0$ şi $(u_n) \to u$ astfel încât pentru orice n,

$$\overline{x} + t_n u_n \in M.$$

Evident şirul $(t_n u_n)$ converge la 0 în $\mathbb{R}^p$ şi, de la un loc încolo, $\overline{x} + t_n u_n$ este în V. Ţinând cont de diferenţiabilitatea lui f în $\overline{x}$, există $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}, \alpha_n \to 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$f(\overline{x} + t_n u_n) = f(\overline{x}) + t_n \nabla f(\overline{x})(u_n) + t_n \|u_n\| \alpha_n,$$

de unde,

$$\nabla f(\overline{x})(u_n) + \|u_n\| \alpha_n \geq 0,$$

pentru orice n suficient de mare. Trecând la limită cu $n \to \infty$, obţinem concluzia. □

Observaţia 3.3.2 *Condiţia se mai scrie, echivalent,*

$$-\nabla f(\overline{x}) \in N(M, \overline{x}).$$

Observaţia 3.3.3 *Ţinând cont de Propoziţia 2.4.7, dacă în teorema de mai sus* $\overline{x} \in \operatorname{int} M$ *(restricţie inactivă), obţinem* $\nabla f(\overline{x})(u) \geq 0$ *pentru orice* $u \in \mathbb{R}^p$. *Din liniaritatea lui* $\nabla f(\overline{x})$, *deducem* $\nabla f(\overline{x}) = 0$, *adică Teorema lui Fermat.*

O primă întrebare este dacă reciprocele acestor rezultate sunt adevărate. Răspunsul este negativ: este suficient să considerăm exemplul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ pentru $\overline{x} = 0$. Se pot însă impune condiţii suplimentare aşa încât să avem unele echivalenţe şi cel mai important caz este cel al funcţiilor convexe pe care îl vom studia separat ceva mai jos.

Revenind la Teorema 3.3.1, întărind condiţiile din concluziile acestui rezultat, obţinem condiţii suficiente de optimalitate.

Teorema 3.3.4 (Condiţia suficientă de ordinul I - probleme cu restricţii) *Considerăm problema* (P). *Dacă* f *este diferenţiabilă în* $\overline{x} \in M$ *şi*

$$\nabla f(\overline{x})(u) > 0, \ \forall u \in T(M, \overline{x}) \setminus \{0\},$$

atunci $\overline{x}$ *este soluţie locală pentru problema* (P).

Demonstraţie Presupunem, prin reducere la absurd, că $\overline{x}$ nu este soluţie. Atunci, negând definiţia, deducem că există un şir $(x_n) \to \overline{x}$, $(x_n) \subset M$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$f(x_n) < f(\overline{x}).$$

În virtutea acestei inegalităţi,

$$x_n \neq \overline{x}, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Cum f este diferenţiabilă, există un şir de numere reale $(\gamma_n) \to 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n) = f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})(x_n - \overline{x}) + \gamma_n \|x_n - \overline{x}\|.$$

Combinând cele două relaţii, avem

$$0 > \nabla f(\overline{x})(x_n - \overline{x}) + \gamma_n \|x_n - \overline{x}\|,$$

de unde, prin împărţire la numărul nenul $\|x_n - \overline{x}\|$ deducem

$$0 > \nabla f(\overline{x}) \left(\frac{x_n - \overline{x}}{\|x_n - \overline{x}\|} \right) + \gamma_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{3.1}$$

Cum şirul $\left(\frac{x_n - \overline{x}}{\|x_n - \overline{x}\|} \right)$ este mărginit, există un subşir convergent al acestuia. Limita, notată u, a respectivului subşir este nenulă (chiar de normă 1) şi, în plus, din faptul că $\|x_n - \overline{x}\| \to 0$, deducem că $u \in T(M, \overline{x})$. Prin urmare $u \in T(M, \overline{x}) \setminus \{0\}$ şi trecând la limită în relaţia (3.1) avem

$$0 \geq \nabla f(\overline{x})(u),$$

ceea ce contrazice ipoteza. □

Observaţia 3.3.5 *Transpunerea acestor condiţii pentru problema de maximizare asociată lui* (P) *este evidentă.*

Observaţia 3.3.6 *Traseul teoretic pentru rezolvarea unei probleme de optimizare este, de cele mai multe ori, următorul: se obţine existenţa măcar a unei soluţii folosind un rezultat de existenţă, se aplică condiţii necesare de optimalitate pentru determinarea punctelor "candidate" la statutul de soluţie, după care se aplică condiţii suficiente de optimalitate sau diverse alte metode pentru a găsi efectiv soluţiile.*

Prezentăm acum o condiţii de optimalitate de ordinul al doilea pentru problema fără restricţii. Începem cu condiţia necesară.

Teorema 3.3.7 (Condiţia necesară de ordinul al II-lea - probleme fără restricţii) *Dacă* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *este de clasă* C^2 *pe o vecinătate a lui* $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$, *iar* $\overline{x}$ *este punct de minim local pentru* f, *atunci* $\nabla f(\overline{x}) = 0$ *şi* $\nabla^2 f(\overline{x})$ *este pozitiv semidefinită (adică* $\nabla^2 f(\overline{x})(u,u) \geq 0$ *pentru orice* $u \in \mathbb{R}^p$*).*

Demonstraţie Fie $V \subset \mathbb{R}^p$ o vecinătate a lui $\overline{x}$ pentru care $f(\overline{x}) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V$ şi pe care f este de clasă C^2. Faptul că $\nabla f(\overline{x}) = 0$ rezultă din teorema precedentă. Ca mai sus, fie $u \in \mathbb{R}^p$ şi $(t_n) \subset (0,\infty)$ cu $t_n \to 0$. Din Teorema lui Taylor (Teorema 4.5.62), pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $c_n \in (\overline{x}, \overline{x} + t_n u)$ astfel încât

$$\begin{aligned} f(\overline{x} + t_n u) - f(\overline{x}) &= t_n \nabla f(\overline{x})(u) + \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 f(c_n)(u,u) \\ &= \frac{1}{2} t_n^2 \nabla^2 f(c_n)(u,u). \end{aligned}$$

Cum pentru n suficient de mare, $f(\overline{x} + t_n u) - f(\overline{x}) \geq 0$, deducem că

$$\nabla^2 f(c_n)(u,u) \geq 0,$$

de unde prin trecere la limită cu $n \to \infty$, obţinem că $c_n \to \overline{x}$ şi cum f este de clasă C^2, obţinem

$$\nabla^2 f(\overline{x})(u,u) \geq 0,$$

deci $\nabla^2 f(\overline{x})$ este pozitiv semidefinită. □

Evident, cu o demonstraţie similară, se constată că dacă $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$ este punct de maxim local pentru f, atunci $\nabla f(\overline{x}) = 0$ şi $\nabla^2 f(\overline{x})$ este negativ semidefinită (adică $\nabla^2 f(\overline{x})(u,u) \leq 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$). Se poate cu uşurinţă observa, din rezultatul de mai sus şi din demonstraţia sa, că dacă $\nabla^2 f(\overline{x})$ nu este nici pozitiv semidefinită nici negativ semidefinită (caz în care spunem că este nedefinită) atunci $\overline{x}$ nu este punct de extrem.

În privinţa condiţiilor suficiente de ordinul al doilea, are loc următorul rezultat.

Teorema 3.3.8 (Condiţia suficientă de ordinul al II-lea - probleme fără restricţii) *Fie* $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* C^2. *Dacă* $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$ *este punct critic pentru* f *şi* $\nabla^2 f(\overline{x})$ *este pozitiv definită (i.e.* $\nabla^2 f(\overline{x})(u,u) > 0$ *pentru orice* $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$*), atunci* $\overline{x}$ *este minim local pentru* f.

Demonstraţie Ca mai sus, presupunem prin reducere la absurd că nu are loc concluzia. Atunci, există $(x_n) \to \overline{x}$, $(x_n) \subset M \setminus \{\overline{x}\}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$f(x_n) < f(\overline{x}).$$

Din Teorema lui Taylor 4.5.62, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există c_n pe segmentul ce uneşte $\overline{x}$ cu x_n astfel încât

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(\overline{x}) &= \nabla f(\overline{x})(x_n - \overline{x}) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(c_n)(x_n - \overline{x}, x_n - \overline{x}) \\ &= \frac{1}{2}\nabla^2 f(c_n)(x_n - \overline{x}, x_n - \overline{x}). \end{aligned}$$

Obţinem

$$0 > \frac{1}{2}\nabla^2 f(c_n)(x_n - \overline{x}, x_n - \overline{x}),$$

de unde, pentru finalizarea demonstraţiei, împărţim la $\|x_n - \overline{x}\|^2$ şi repetăm, cu simplificările evidente, argumentele de mai sus. □

Aşa cum am spus, $\nabla^2 f(\overline{x})$ se identifică cu matricea hessiană a lui f în $\overline{x}$: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\overline{x})\right)_{i,j\in\overline{1,p}}$, iar o condiţie suficientă ca această matrice simetrică să fie pozitiv definită este dată de următorul criteriu: toţi determinanţii matricilor $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\overline{x})\right)_{i,j\in\overline{1,k}}$, $k \in \overline{1,p}$ sunt strict pozitivi. Analog, raţionând eventual pentru $-f$ avem condiţia: dacă determinanţii matricilor $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\overline{x})\right)_{i,j\in\overline{1,k}}$, $k \in \overline{1,p}$ sunt nenuli şi îşi alternează semnul începând cu semnul minus, atunci $\overline{x}$ este punct de maxim (conform Criteriului lui Sylvester). De asemenea, dacă aceşti determinanţi sunt nenuli, atunci orice altă configuraţie a semnelor decât cele descrise mai sus conduce la concluzia că punctul nu este de extrem local.

Aşadar metoda generală de rezolvare a problemelor de optimizare fără restricţii este următoarea şi se bazează pe condiţiile de optimalitate de ordinul I şi al II-lea şi pe Criteriul lui Sylvester. Se determină punctele critice rezolvând ecuaţia $\nabla f(x) = 0$. În fiecare din aceste puncte, calculăm $\nabla^2 f(\overline{x})$ ce se identifică cu matricea hessiană.

- Dacă $\nabla^2 f(\overline{x})$ este pozitiv definită, atunci $\overline{x}$ este punct de minim local;
- dacă $\nabla^2 f(\overline{x})$ este negativ definită, atunci $\overline{x}$ este punct de maxim local;
- dacă $\nabla^2 f(\overline{x})$ este nedefinită atunci $\overline{x}$ nu este punct de extrem local.

Pentru a verifica aceste aspecte, în unele cazuri, se poate utiliza metoda descrisă mai jos:

- dacă toţi determinanţii matricilor $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\overline{x})\right)_{i,j\in\overline{1,k}}$, $k \in \overline{1,p}$ sunt strict pozitivi atunci $\overline{x}$ este punct de minim local;
- dacă determinanţii matricilor $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\overline{x})\right)_{i,j\in\overline{1,k}}$, $k \in \overline{1,p}$ sunt nenuli şi îşi alternează semnul începând cu semnul minus, atunci $\overline{x}$ este punct de maxim;

- dacă aceşti determinanţi sunt nenuli, atunci orice altă configuraţie a semnelor decât cele descrise mai sus conduce la concluzia că punctul nu este de extrem local.

Dacă nu se poate aplica nici una dintre concluziile precedente, atunci se procedează de la caz la caz pentru a stabili natura punctului critic.

Ilustrăm teoria de mai sus prin două exemple.

Exemplul 3.3.9 Dorim să găsim punctele de minim pentru $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$. Această funcţie se numeşte funcţia Rosenbrock. Avem aşadar o problemă fără restricţii.

Pentru a găsi punctele critice rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

care este echivalent cu

$$\begin{cases} -2(1 - x_1) - 400x_1(x_2 - x_1^2) = 0 \\ 200(x_2 - x_1^2) = 0 \end{cases}$$

şi are soluţia unică $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Calculăm matricea hessiană în punctul respectiv,

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{pmatrix}$$

care este pozitiv definită, de unde putem deduce că $(1, 1)$ este minim local pentru f. De altfel, se poate observa că $f(1, 1) = 0$, iar $f(x_1, x_2) \geq 0$ pentru orice $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, deci $(1, 1)$ este minim global pentru f.

Exemplul 3.3.10 Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2$. Să găsim punctele de minim ale lui f.

Calculăm punctele critice: sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

are ca unică soluţie punctul $\overline{x} = (0, 0)$. Totuşi, condiţia necesară de ordinul al doilea nu este satisfăcută pentru că hessiana lui f în $\overline{x}$ este matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Aşadar, nu putem decide din Teorema 3.3.8 dacă punctul $\overline{x}$ este punct de minim. În astfel de cazuri, ne folosim de structura problemei pentru a concluziona. Se observă că $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2)(3x_1^2 - x_2)$, iar pentru şirul $x_k = (\sqrt{k^{-1}}, -k^{-1}) \to \overline{x}$

$$f(x_k) = \frac{8}{k^2} > f(\overline{x})$$

în timp ce pentru şirul $x_k = (\sqrt{(2k)^{-1}}, k^{-1}) \to \overline{x}$,

$$f(x_k) = -\frac{1}{4k^2} < f(\overline{x}).$$

Deci, $\overline{x}$ nu este punct de extrem local pentru f.

Studiem acum, cum am spus mai sus, cazul funcţiilor convexe. Privitor la natura punctelor de extrem pentru o funcţie convexă, dăm rezultatele de mai jos.

Propoziţia 3.3.11 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă. Dacă $\overline{x} \in M$ este punct de minim local pentru f pe M, atunci $\overline{x}$ este punct de minim global pentru f pe M.*

Demonstraţie Fie $\overline{x}$ un punct de minim local pentru f pe M. Atunci există V o vecinătate convexă a lui $\overline{x}$ astfel încât pentru orice $x \in V \cap M$, $f(\overline{x}) \leq f(x)$. Fie $x \in M$. Există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât $y := (1-\lambda)\overline{x} + \lambda x \in M \cap V$. Deci,

$$f(\overline{x}) \leq f(y) = f((1-\lambda)\overline{x} + \lambda x) \leq (1-\lambda)f(\overline{x}) + \lambda f(x),$$

adică,

$$\lambda f(\overline{x}) \leq \lambda f(x),$$

de unde se obţine concluzia. □

Propoziţia 3.3.12 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă. Atunci mulţimea punctelor de minim ale lui f pe M este convexă. Dacă, în plus, f este strict convexă, atunci această mulţime are cel mult un element.*

Demonstraţie Din rezultatul precedent, dacă $x_1, x_2 \in M$ sunt puncte de minim (global) pentru f pe M, atunci $f(x_1) = f(x_2)$. Convexitatea implică $f(x) = f(x_1)$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$. Astfel, prima parte este demonstrată. Dacă f este strict convexă şi presupunem că avem două minime globale distincte, atunci obţinem că $f(x) < f(x_1)$ pentru orice $x \in (x_1, x_2)$, ceea ce este imposibil. □

În cazul cu restricţii, pentru funcţiile convexe condiţia necesară de optimalitate de ordinul I este şi condiţie suficientă.

Propoziţia 3.3.13 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi diferenţiabilă şi $M \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime convexă şi închisă. Elementul $\overline{x} \in M$ este punct de minim pentru f pe M dacă şi numai dacă*

$$-\nabla f(\overline{x}) \in N(M, \overline{x}).$$

Demonstraţie Fie $\overline{x} \in M$, punct de minim local pentru f pe M. Atunci, conform Teoremei 3.3.1, $\nabla f(\overline{x})(u) \geq 0$ pentru orice $u \in T(M, \overline{x})$, adică

$$-\nabla f(\overline{x}) \in T(M, \overline{x})^- = N(M, \overline{x}).$$

Invers, ştim, din convexitatea lui f (Teorema 2.2.13), că

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})(x - \overline{x}),\ \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

Dar, folosind ipoteza şi convexitatea lui M (Propoziţia 2.4.10),

$$-\nabla f(\overline{x}) \in N(M, \overline{x}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, x - \overline{x} \rangle \leq 0,\ \forall x \in M\},$$

deci $\nabla f(\overline{x})(x - \overline{x}) \geq 0$ pentru orice $x \in M$. Din aceste relaţii, avem $f(x) \geq f(\overline{x})$ pentru orice $x \in M$. □

Pentru cazul problemelor convexe fără restricţii (adică probleme fără restricţii în care funcţia obiectiv este convexă) obţinem corolarul următor.

Corolarul 3.3.14 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă şi diferenţiabilă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\overline{x}$ este un minim global al lui f;

(ii) $\overline{x}$ este un minim local al lui f;

(iii) $\overline{x}$ este punct critic al lui f (i.e. $\nabla f(\overline{x}) = 0$).

Aşa cum se observă, în cazul funcţiilor convexe, condiţia de ordinul I (în cazul fără constrângeri) este necesară şi suficientă pentru optimalitate. În această situaţie, condiţia necesară de ordinul al II-lea din cazul fără restricţii nu aduce nimic nou, ea fiind automat safisfăcută de funcţiile convexe (conform Teoremei 2.2.13).

3.4 Restricţii funcţionale

Considerăm problema (P) din secţiunea precedentă care are restricţia geometrică $x \in M$. De cele mai multe ori în practică această mulţime M a punctelor fezabile este definită prin intermediul unor funcţii. Fie aşadar $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ şi $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ funcţii de clasă C^1. Evident, g şi h pot fi gândite ca fiind de forma $g = (g_1, g_2, ..., g_n)$, respectiv $h = (h_1, h_2, ..., h_m)$ unde unde $g_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $(i \in \overline{1,n})$ şi $h_j : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $(j \in \overline{1,m})$ sunt de clasă C^1.

Considerăm că mulţimea punctelor fezabile este

$$M := \{x \in \mathbb{R}^p \mid g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^p.$$

Se observă că avem două tipuri de restricţii: restricţii cu inegalităţi şi restricţii cu egalităţi. Acestea se numesc restricţii funcţionale. Fie $x \in M$. Dacă pentru un indice $i \in \overline{1,n}$, $g_i(x) < 0$, atunci, din continuitatea lui g, există o întreagă vecinătate V a lui x astfel încât $g_i(y) < 0$ pentru orice $y \in V$. Aceasta face ca, în cazul în care cercetăm dacă x este soluţie locală a problemei (P), restricţia $g_i \leq 0$ să nu influenţeze efectiv mulţimea punctelor u pentru care trebuie să comparăm $f(x)$ cu $f(u)$. De aceea, în acest caz, spunem că restricţia $g_i \leq 0$ este inactivă în x. Din acest motiv, ne interesează ca astfel de restricţii să fie eliminate din discuţie. Pentru $\overline{x} \in M$, notăm mulţimea indicilor restricţiilor inegalităţi active prin

$$A(\overline{x}) = \{i \in \overline{1,n} \mid g_i(\overline{x}) = 0\}.$$

În privinţa restricţiilor cu egalităţi, dacă există, acestea sunt toate active.

3.4.1 Condiţiile Karush-Kuhn-Tucker

Fie mulţimile

$$G(\overline{x}) = \left\{ \sum_{i \in A(\overline{x})} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) \mid \lambda_i \geq 0, \forall i \in A(\overline{x}),\ \mu_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \overline{1,m} \right\} \subset \mathbb{R}^p$$

(unde s-a identificat $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ cu $\mathbb{R}^p$) şi

$$D(\overline{x}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \nabla g_i(\overline{x})(u) \leq 0,\ \forall i \in A(\overline{x}) \text{ şi} \nabla h_j(\overline{x})(u) = 0,\ \forall j \in \overline{1,m}\}.$$

Mulţimea $D(\overline{x})$ este un con convex şi se numeşte conul liniarizat la M în $\overline{x}$. Înainte de a da rezultatul principal avem nevoie de o propoziţie ajutătoare.

Propoziţia 3.4.1 *Pentru orice $\overline{x} \in M$ avem:*
(i) $G(\overline{x}) = D(\overline{x})^-$;
(ii) $T(M, \overline{x}) \subset D(\overline{x})$.

Demonstraţie (i) Incluziunea $G(\overline{x}) \subset D(\overline{x})^-$ este evidentă, iar incluziuea reciprocă este o consecinţă directă a Lemei lui Farkas.

(ii) Evident, $0 \in D(\overline{x})$. Fie $u \in T(M, \overline{x}) \setminus \{0\}$. Din definiţia conului tangent, există $(t_k) \subset (0, \infty)$ cu $t_k \to 0$ şi $(u_k) \to u$ astfel încât pentru orice k,

$$\overline{x} + t_k u_k \in M.$$

Evident, şirul $(t_k u_k)$ converge la 0 în $\mathbb{R}^p$. Ţinând cont de diferenţiabilitatea lui h în $\overline{x}$, există $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}^m, \alpha_k \to 0$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$h(\overline{x} + t_k u_k) = h(\overline{x}) + t_k \nabla h(\overline{x})(u_k) + t_k \|u_k\| \alpha_k.$$

Cum $h(\overline{x} + t_k u_k) = h(\overline{x}) = 0$, împărţind prin t_k şi trecând la limită pentru $k \to \infty$ obţinem $\nabla h(\overline{x})(u) = 0$. Acum pentru fiecare $i \in A(\overline{x})$ există $(\alpha_k^i) \subset \mathbb{R}, \alpha_k^i \to 0$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$g_i(\overline{x} + t_k u_k) = g_i(\overline{x}) + t_k \nabla g_i(\overline{x})(u_k) + t_k \|u_k\| \alpha_k^i.$$

Ca mai sus, ţinând cont că $g_i(\overline{x} + t_k u_k) \leq 0$ şi $g_i(\overline{x}) = 0$ avem $\nabla g_i(\overline{x})(u) \leq 0$ şi propoziţia este demonstrată. □

Următorul exemplu arată că incluziunea de la punctul (ii) de mai sus este, în general, strictă.

Exemplul 3.4.2 Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$ şi $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$ şi punctul fezabil $\overline{x} = (0, 0)$. Atunci:

$$D(\overline{x}) = \{(u_1, u_2) \mid -u_1 - u_2 \leq 0\},$$
$$T(M, \overline{x}) = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 u_2 = 0\}.$$

Stabilim acum o formă generalizată a unui rezultat clasic cunoscut sub denumirea de Teorema Karush-Kuhn-Tucker întrucât a fost obţinut (sub o ipoteză ceva mai tare) de către W. Karush, H. W. Kuhn şi A. W. Tucker. De precizat că W. Karush a obţinut teorema în 1939, dar comunitatea matematică a devenit conştientă de importanţa acesteia după ce H. W. Kuhn şi A. W. Tucker au regăsit rezultatul pe o cale independentă in 1950.

Teorema 3.4.3 (Teorema Karush-Kuhn-Tucker) *Fie $\overline{x} \in M$ soluţie a problemei (P). Presupunem că $T(M, \overline{x})^- = D(\overline{x})^-$. Atunci există $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m) \in \mathbb{R}^m$, astfel încât*

$$\nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0 \tag{3.2}$$

şi

$$\lambda_i \geq 0, \ \lambda_i g_i(\overline{x}) = 0, \ \textit{pentru orice } i \in \overline{1, n}. \tag{3.3}$$

Demonstraţie Din Teorema 3.3.1, $\nabla f(\overline{x})(u) \geq 0$ pentru orice $u \in T(M, \overline{x})$, deci $-\nabla f(\overline{x}) \in T(M, \overline{x})^-$. Conform ipotezei, deducem $-\nabla f(\overline{x}) \in D(\overline{x})^-$. Aplicăm primul punct al propoziţiei precedente şi obţinem $-\nabla f(\overline{x}) \in G(\overline{x})$. Prin urmare, există $\lambda_i \geq 0, i \in A(\overline{x}), \mu_j \in \mathbb{R}, j \in \overline{1,m}$ încât

$$-\nabla f(\overline{x}) = \sum_{i \in A(\overline{x})} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}).$$

Dacă pentru indicii $i \in \overline{1,n} \setminus A(\overline{x})$ considerăm $\lambda_i = 0$, obţinem concluzia. □

Observaţia 3.4.4 *Funcţia* $L : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$,

$$L(x, (\lambda, \mu)) := f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(x)$$

se numeşte lagrangianul problemei (P). *Astfel, concluzia din relaţia* (3.2) *se poate scrie*

$$\nabla_x L(\overline{x}, (\lambda, \mu)) = 0,$$

iar elementele $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^m$ *se numesc multiplicatori Lagrange. Denumirea se datorează faptului că pentru prima dată o astfel de metodă de a converti o problemă de optimizare cu restricţii într-o problemă fără restricţii prin intermediul unor noi nedeterminate a apărut în unele dintre lucrările lui Lagrange legate de probleme de calculul variaţiilor. Este clar că teorema precedentă nu asigură unicitatea acestor multiplicatori. Pe de altă parte,* $L(x, (\lambda, \mu))$ *este o funcţie afină în variabilele* (λ, μ).

Observaţia 3.4.5 *Teorema 3.4.3 asigură condiţii necesare de optimalitate pentru problema* (P). *Dacă în loc de minimizare dorim să maximizăm funcţia obiectiv sub aceleaşi restricţii, atunci, din faptul că* $\max f = -\min(-f)$, *condiţia necesară (3.2) se scrie*

$$-\nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0.$$

Să mai observăm că în lipsa constrângerilor inegalităţi, ţinând seama de faptul că $h(x) = 0$ *este totuna cu* $-h(x) = 0$, *condiţia necesară se poate scrie, atât pentru minime cât şi pentru maxime, în forma*

$$\nabla f(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla h_j(\overline{x}) = 0.$$

Observaţia 3.4.6 *Relaţiile (3.2) şi (3.3) conţin* $p + n + m$ *necunoscute (componentele lui* x, *ale lui* λ *şi ale lui* μ*) şi* $p + n$ *ecuaţii scalare. Relaţia* $h(x) = 0$ *furnizează încă* m *asemenea ecuaţii. Deci cele două relaţii conduc la necesitatea rezolvării unui sistem de* $p+m+n$ *ecuaţii cu toa atâtea necunoscute. În plus, soluţiile acestui sistem trebuie să verifice* $2n$ *inegalităţi scalare (provenite din condiţiile* $g(x) \leq 0$ *şi* $\lambda \geq 0$*).*

Observaţia 3.4.7 *Dacă problema nu are restricţii (de exemplu, $M = \mathbb{R}^p$) sau are doar restricţii inactive atunci relaţia (3.2) se reduce la condiţia necesară de optimalitate de ordinul I (Teorema lui Fermat): $\nabla f(\overline{x}) = 0$.*

Este important de menţionat că relaţia (3.2) nu are loc în general fără ipoteze suplimentare, numite condiţii de calificare, aşa cum se vede în exemplul de mai jos.

Exemplul 3.4.8 Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite prin $f(x_1, x_2) = x_1$ şi $g(x_1, x_2) = (-x_2 + (1 - x_1)^3, x_2)$. Se verifică faptul că $\overline{x} = (1, 0)$ este punct de minim pentru problema asociată, dar condiţia (3.2) nu are loc. Se poate arăta că în acest caz condiţia $T(M, \overline{x})^- = D(\overline{x})^-$ nu este îndeplinită (a se vedea Exerciţiul 3.16).

Această observaţie ne îndeamnă să discutăm mai în amănunt diverse condiţii de calificare în secţiunea următoare.

3.4.2 Condiţii de calificare pentru sisteme generale de restricţii

Orice condiţie impusă sistemului de restricţii care asigură validitatea concluziilor Teoremei Karush-Kuhn-Tucker se numeşte condiţie de calificare. Discutăm în această secţiune astfel de condiţii pentru sisteme generale de restricţii. Astfel, condiţia de calificare $T(M, \overline{x})^- = D(\overline{x})^-$ impusă în Teorema 3.4.3 se numeşte condiţia Guignard în punctul $\overline{x}$ (după numele lui Monique Guignard care a introdus-o în 1969) şi este una dintre cele mai slabe condiţii de acest tip pe care le putem întâlni în literatură. Dorim acum să considerăm şi alte condiţii de calificare şi să le comparăm între ele. Evident, relaţia $T(M, \overline{x}) = D(\overline{x})$ este la rândul său o condiţie de calificare, numită condiţia de cvasi-regularitate sau condiţia Abadie în $\overline{x}$ (după numele lui Jean Abadie care a utilizat-o în 1967), întrucât implică condiţia utilizată mai sus. Cele două condiţii nu sunt însă echivalente, aşa cum se poate observa din exemplul următor (a se vedea şi Exemplul 2.4.3).

Exemplul 3.4.9 Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$ şi $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Să considerăm punctul fezabil $\overline{x} = (0, 0)$. Atunci:

$$D(\overline{x}) = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \geq 0, u_2 \leq 0\},$$
$$T(M, \overline{x}) = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \geq 0, u_2 \leq 0, u_1 u_2 = 0\}$$

şi

$$T(M, \overline{x})^- = D(\overline{x})^- = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \leq 0, u_2 \geq 0\}.$$

Evident, condiţiile de calificare sunt legate de punctul de referinţă ($\overline{x}$ în cazul nostru). De fiecare dată când nu vor fi dubii cu privire la punctul de referinţă vom evita precizarea acestuia, pentru uşurarea expunerii. Două dintre cele mai importante condiţii de calificare sunt prezentate mai jos.

Prima dintre acestea se numeşte condiţia de liniară independenţă (în $\overline{x}$) şi se formulează astfel: mulţimea $\{\nabla g_i(\overline{x}) \mid i \in A(\overline{x})\} \cup \{\nabla h_j(\overline{x}) \mid j \in \overline{1, m}\}$ este liniar independentă.

A doua se numeşte condiţia de calificare Mangasarian-Fromovitz (în $\overline{x}$): mulţimea $\{\nabla h_j(\overline{x}) \mid j \in \overline{1, m}\}$ este liniar independentă şi există $u \in \mathbb{R}^p$ astfel încât

$$\nabla h(\overline{x})(u) = 0 \text{ şi } \nabla g_i(\overline{x})(u) < 0, \ \forall i \in A(\overline{x}).$$

(Matematicienii Olvi Mangasarian şi Stanley Fromovitz au publicat această condiţie în 1967.)

Mai întâi vom stabili relaţiile dintre aceste condiţii şi apoi vom dovedi că sunt condiţii de calificare.

Teorema 3.4.10 *Dacă are loc condiţia de liniară independenţă în* $\overline{x} \in M$, *atunci are loc condiţia Mangasarian-Fromovitz în* $\overline{x}$.

Demonstraţie Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $A(\overline{x}) = \{1, ..., q\}$. Fie T matricea $(q+m) \times p$ având drept linii $\nabla g_i(\overline{x}), i \in \overline{1,q}$, $\nabla h_j(\overline{x}), j \in \overline{1,m}$ şi fie b vectorul coloană cu $b_i = -1, i \in \overline{1,q}$, $b_j = 0$, $j \in \overline{q+1, q+m}$. Cum liniile lui T sunt liniar independente, sistemul $Td = b$ are soluţie. Dacă u este o astfel de soluţie, atunci

$$\nabla g_i(\overline{x})(u^t) = -1, \ \forall i \in \overline{1,q} \text{ şi } \nabla h_j(\overline{x})(u^t) = 0, \ \forall j \in \overline{1,m},$$

deci condiţia Mangasarian-Fromovitz în $\overline{x}$ este satisfăcută. □

Totuşi, cele două condiţii nu sunt echivalente.

Exemplul 3.4.11 Fie $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,3}$ definite prin:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2 \\ g_2(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 2 \\ g_3(x) &= -x_1 \end{aligned}$$

şi punctul fezabil $\overline{x} = (0, 0)$. Este uşor de verificat că mulţimea

$$\{\nabla g_1(\overline{x}), \nabla g_2(\overline{x}), \nabla g_3(\overline{x}), \ i \in \overline{1,3}\}$$

este liniar dependentă. Pe de altă parte, pentru $u = (1, 0)$, $\nabla g_i(\overline{x})(u) < 0$ pentru orice $i \in \overline{1,3}$.

Pentru a clasifica mai precis condiţiile impuse până acum, vom arăta că din condiţia Mangasarian-Fromovitz se obţine condiţia Abadie.

Teorema 3.4.12 *Dacă are loc condiţia Mangasarian-Fromovitz în* $\overline{x} \in M$, *atunci* $T(M, \overline{x}) = D(\overline{x})$, *adică are loc condiţia Abadie în* $\overline{x}$.

Demonstraţie Aşa cum am văzut mai sus, o incluziune este adevărată întotdeauna. Invers, fie $u \in D(\overline{x})$ şi fie $\overline{u} \in \mathbb{R}^p$ vectorul dat de condiţia Mangasarian-Fromovitz. Fie $\lambda \in (0, 1)$ şi $d_\lambda := (1 - \lambda)u + \lambda\overline{u}$. Vom arăta că $d_\lambda \in T(M, \overline{x})$ pentru orice $\lambda \in (0, 1)$, apoi făcând $\lambda \to 0$ şi ţinând cont de închiderea lui $T(M, \overline{x})$ va rezulta concluzia. Fixăm deci $\lambda \in (0, 1)$.

Este evident că pentru orice indice $i \in A(\overline{x})$, $\nabla g_i(\overline{x})(d_\lambda) < 0$ (deci, în particular, $d_\lambda \neq 0$) şi pentru orice indice $j \in \overline{1,m}$, $\nabla h_j(\overline{x})(d_\lambda) = 0$.

Aplicaţia $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ are funcţiile coordonate $(h_j)_{j \in \overline{1,m}}$. Evident, $h(\overline{x}) = 0$. Faptul că mulţimea $\{\nabla h_j(\overline{x})\}_{j \in \overline{1,m}}$ este liniar independentă înseamnă că $\nabla h(\overline{x})$ este surjectivă. Putem aplica Teorema lui Lyusternik (adică Teorema 2.5.1):

$$T(\{x \in \mathbb{R}^p \mid h(x) = 0\}, \overline{x}) = \operatorname{Ker} \nabla h(\overline{x}).$$

Cum $d_\lambda \in \operatorname{Ker} \nabla h(\overline{x})$, deducem că

$$d_\lambda \in T(\{x \in \mathbb{R}^p \mid h(x) = 0\}, \overline{x}),$$

adică există $(t_k) \subset (0, \infty)$, $t_k \to 0$ şi $(u_k) \to d_\lambda$ astfel încât pentru orice k

$$h(\overline{x} + t_k u_k) = 0.$$

Aşadar,

$$h_j(\overline{x} + t_k u_k) = 0, \ \forall j \in \overline{1, m}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Pentru a obţine că $d_\lambda \in T(M, \overline{x})$ este suficient să mai arătăm că pentru k suficient de mare $g_i(\overline{x} + t_k u_k) \leq 0$ pentru orice i.

Dacă $i \notin A(\overline{x})$, atunci $g_i(\overline{x}) < 0$ şi din continuitatea lui g_i, $g_i(\overline{x} + t_k u_k) < 0$ pentru k suficient de mare, pentru că $\overline{x} + t_k u_k \to \overline{x}$.

Dacă $i \in A(\overline{x})$, cum g_i este de clasă C^1, există un şir $(\alpha_k) \to 0$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} g_i(\overline{x} + t_k u_k) &= g_i(\overline{x}) + t_k \nabla g_i(\overline{x})(u_k) + t_k \|u_k\| \alpha_k \\ &= t_k \nabla g_i(\overline{x})(u_k) + t_k \|u_k\| \alpha_k. \end{aligned}$$

Putem scrie

$$\frac{g_i(\overline{x} + t_k u_k)}{t_k} = \nabla g_i(\overline{x})(u_k) + \|u_k\| \alpha_k \overset{k \to \infty}{\to} \nabla g_i(\overline{x})(d_\lambda) < 0.$$

Prin urmare, $g_i(\overline{x} + t_k u_k) < 0$ pentru k suficient de mare. Cum există un număr finit de indici i, recompunând raţionamentele făcute, obţinem concluzia. □

Pentru a arăta că toate cele patru condiţii de calificare introduse până acum sunt diferite, mai trebuie să verificăm că cvasi-regularitatea nu implică condiţia Mangasarian-Fromovitz.

Exemplul 3.4.13 Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = (-x_1^2 + x_2, -x_1^2 - x_2)$ şi punctul fezabil $\overline{x} = (0, 0)$. Atunci, $D(\overline{x}) = \{(u_1, 0) \mid u_1 \in \mathbb{R}\}$. Pe de altă parte, se verifică simplu că $T(M, \overline{x}) \supset D(\overline{x})$ (deci are loc egalitatea), dar nu există $\overline{u} \in \mathbb{R}^2$ cu $\nabla g(\overline{x})(\overline{u}) < 0$.

Sistematizând, am arătat că au loc următoarele implicaţii:

Condiţia de liniară independenţă
$\Downarrow$
Condiţia Mangasarian-Fromovitz
$\Downarrow$
Condiţia Abadie
$\Downarrow$
Condiţia Guignard

şi niciuna dintre reciproce nu este adevărată.

3.4.3 Condiţii de calificare pentru sisteme speciale de restricţii

Condiţiile de calificare de mai sus se referă la sisteme generale de restricţii. Să discutăm acum condiţii speciale referitoare la cazuri particulare ale datelor problemei.

Definiţia 3.4.14 *Spunem că sistemul de restricţii asociat problemei* (P) *este de tip convex dacă restricţiile cu inegalităţi sunt exprimate prin funcţii convexe, în timp ce restricţiile cu egalităţi sunt date cu funcţii afine, adică* $(g_i)_{i\in\overline{1,n}}$ *sunt convexe şi* h *este afină.*

Definiţia 3.4.15 *Spunem că problema* (P) *este convexă dacă sistemul de restricţii asociat problemei* (P) *este de tip convex şi* f *este convexă.*

Să observăm că pentru probleme convexe condiţiile Karush-Kuhn-Tucker sunt şi suficiente.

Teorema 3.4.16 *Presupunem că problema* (P) *este convexă. Fie* $\overline{x} \in M$*. Dacă există* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *astfel încât au loc relaţiile* (3.2) *şi* (3.3) *atunci* $\overline{x}$ *este soluţie pentru* (P) *(sau minim al lui* f *pe* M*).*

Demonstraţie Condiţia (3.2) exprimă faptul că

$$\nabla_x L(\overline{x}, (\lambda, \mu)) = 0.$$

În ipotezele date, L este o funcţie convexă în x, deci conform Teoremei 3.3.14, $\overline{x}$ este un punct de minim pentru $x \mapsto L(x, (\lambda, \mu))$. Deci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} L(x, (\lambda, \mu)) &= f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(x) \\ &\geq L(\overline{x}, (\lambda, \mu)) = f(\overline{x}). \end{aligned}$$

Dar, pentru $x \in M$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(x) \leq 0,$$

deci $f(x) \geq f(\overline{x})$. Demonstraţia este completă. □

Definiţia 3.4.17 *Dacă sistemul de restricţii asociat problemei* (P) *este de tip convex, spunem că are loc condiţia Slater dacă există* $u \in \mathbb{R}^p$ *astfel încât* $h(u) = 0$ *şi* $g(u) < 0$*.*

Această condiţie a fost introdusă în 1950 de către Morton Slater.

Teorema 3.4.18 *Dacă sistemul de restricţii asociat problemei* (P) *este de tip convex şi este îndeplinită condiţia Slater, atunci condiţia Abadie este satisfăcută în orice punct fezabil. În particular, condiţia Slater este o condiţie de calificare.*

Demonstraţie Fie $\overline{x} \in M$. Incluziunea $T(M, \overline{x}) \subset D(\overline{x})$ este deja arătată în cazul general. Fie $v \in D(\overline{x})$. Din condiţia Slater şi convexitatea funcţiilor g_i deducem (Teorema 2.2.13)

$$0 > g_i(u) \geq g_i(\overline{x}) + \nabla g_i(\overline{x})(u - \overline{x}),$$

deci pentru $i \in A(\overline{x})$, $\nabla g_i(\overline{x})(u-\overline{x}) < 0$. Notăm $w = u - \overline{x}$, iar pentru $\lambda \in (0,1)$, definim

$$w_\lambda = (1-\lambda)v + \lambda w.$$

Vom arăta că $w_\lambda \in T(M, \overline{x})$ pentru orice $\lambda \in (0,1)$. Pentru $i \in A(\overline{x})$,

$$\nabla g_i(\overline{x})(v) \leq 0,\ \nabla g_i(\overline{x})(w) < 0,$$

deci $\nabla g_i(\overline{x})(w_\lambda) < 0$. Din formula lui Taylor, pentru orice $i \in A(\overline{x})$, există $\theta_i : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{t\to 0} t^{-1}\theta_i(t) = 0$ şi pentru orice t pozitiv suficient de mic,

$$g_i(\overline{x} + tw_\lambda) = g_i(\overline{x}) + t\nabla g_i(\overline{x})(w_\lambda) + \theta_i(t) = t\left(\nabla g_i(\overline{x})(w_\lambda) + \frac{\theta_i(t)}{t}\right).$$

Deducem că există $t > 0$ astfel încât $g_i(\overline{x} + tw_\lambda) < 0$ pentru orice $i \in A(\overline{x})$.

Fie $(t_k) \subset (0,\infty)$, $t_k \to 0$. Atunci

$$x_k := (1-t_k)\overline{x} + t_k(\overline{x} + tw_\lambda) = \overline{x} + t_k t w_\lambda \overset{k\to\infty}{\to} \overline{x}.$$

Pentru a finaliza, trebuie să arătăm că de la un loc încolo, toţi termenii şirului (x_k) sunt în M. Pentru $i \notin A(\overline{x})$, din continuitatea lui g, pentru k suficient de mare, $g_i(x_k) < 0$, iar pentru $i \in A(\overline{x})$,

$$g_i(x_k) \leq (1-t_k)g_i(\overline{x}) + t_k g_i(\overline{x} + tw_\lambda) < 0.$$

Din faptul că h este afină, iar $h(\overline{x}) = 0$, obţinem

$$h(x_k) = h(\overline{x} + t_k t w_\lambda) = t_k t \nabla h(\overline{x})(w_\lambda).$$

Cum $v \in D(\overline{x})$, $\nabla h(\overline{x})(v) = 0$, deci

$$\nabla h(\overline{x})(w_\lambda) = \lambda \nabla h(\overline{x})(w) = \lambda \nabla h(\overline{x})(u - \overline{x}) = \lambda h(u) = 0.$$

Obţinem că $h(x_k) = 0$ pentru orice k, deci, în final, $(x_k)_{k\geq k_0} \subset M$, ceea ce înseamnă că $w_\lambda \in T(M, \overline{x})$. Facem acum $\lambda \to 0$ şi din faptul că $T(M, \overline{x})$ este închis deducem că $v \in T(M, \overline{x})$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Observaţia 3.4.19 *Urmărind demonstraţia de mai sus, se observă că punem individualiza condiţia Slater într-un punct dat $\overline{x} \in M$ în forma: există $u \in \mathbb{R}^p$ astfel încât $h(u) = 0$ şi $g_i(u) < 0$ pentru orice $i \in A(\overline{x})$.*

Definiţia 3.4.20 *Spunem că sistemul de restricţii asociat problemei (P) este de tip afin dacă atât restricţiile cu inegalităţi, cât şi ce restricţiile cu egalităţi sunt date prin funcţii afine.*

Să considerăm acum cazul unui sistem de restricţii de tip afin. Astfel, vom considera o matrice A de tip $n \times p$, o matrice B de tip $m \times p$ şi $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^m$. Astfel mulţimea M devine $M = \{x \in \mathbb{R}^p \mid Ax \leq b,\ Bx = c\}$, unde relaţia "$\leq$" este înţeleasă ca având loc pe componente. Deci $g(x) = Ax - b$, $h(x) = Bx - c$.

Teorema 3.4.21 *Dacă sistemul de restricţii este de tip afin, atunci condiţia Abadie este satisfăcută în orice punct fezabil.*

Demonstraţie Fie $\overline{x} \in M$. Ca şi mai sus, este suficient să arătăm că $D(\overline{x}) \subset T(M, \overline{x})$. Fie $v \in D(\overline{x})$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că toţi indicii sunt activi. Atunci $Av \leq 0$, $Bv = 0$. Dacă $v = 0$ nu este nimic de arătat. În caz contrar, definim

$$x_k := \overline{x} + \frac{1}{k} v, \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Relaţiile

$$Ax_k \leq b, \ Bx_k = c, \ x_k \to \overline{x}$$

dovedesc faptul că $v \in T(M, \overline{x})$. □

Aşadar, în cazul restricţiilor afine nu trebuie verificată nicio condiţie de calificare.

Dăm acum un exemplu concret de rezolvare a unei probleme de optimizare prin folosirea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, punctând etapele esenţiale ale raţionamentului.

Exemplul 3.4.22 Să determinăm pentru funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ punctele de minim cu restricţiile $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 \leq -\frac{5}{2}$ şi $x_1 + x_2 + x_3 = -2$.

Evident, notăm, pentru a fi în cadrul deja discutat, $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + \frac{5}{2}$, $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 + 2$. Atunci avem problema minimizării lui f cu restricţiile $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$.

I. Existenţa soluţiei

Mai întâi, verificăm faptul că problema are într-adevăr soluţie. Pentru aceasta verificăm că mulţimea punctelor fezabile M este compactă sau că f este coercivă pe această mulţime (dacă este nemărginită). În cazul concret discutat, M este evident închisă. De asemenea este mărginită pentru că $g(x) \leq 0, h(x) = 0$ înseamnă $x_3 = -2 - x_1 - x_2$ şi $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 3x_2 - 6 + \frac{5}{2} \leq 0$, adică $\left(x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 - 8 \leq 0$. Deci coordonatele x_1, x_2 sunt mărginite şi din relaţia anterioară acelaşi lucru poate fi spus despre x_3. Deducem că M este compactă. (Pe de altă parte chiar dacă M ar fi fost nemărginită, putem observa că f este coercivă pentru că este pătratul normei.) Deci, problema admite soluţie (Teorema lui Weierstrass).

II. Convexitatea sistemului de restricţii, Convexitatea problemei

Este uşor de verificat g este convexă, iar h este afină, deci sistemul de restricţii este convex. În plus, f este convexă, deci problema este convexă. Prin urmare condiţiile din Teorema Karush-Kuhn-Tucker sunt necesare şi suficiente.

III. Verificarea unei condiţii de calificare

Pentru a determina soluţiile vrem să aplicăm teorema Karush-Kuhn-Tucker, motiv pentru care trebuie să verificăm o condiţie de calificare.

Varianta 1. Verificăm condiţia de liniară independenţă. Fie $x \in M$. Dacă $g(x) \leq 0$ este inactivă în x, cum $\nabla h(x) = (1, 1, 1) \neq 0$, mulţimea $\{\nabla h(x)\}$ este liniar independentă. Presupunem că g este activă în x. Presupunem că $\{\nabla g(x), \nabla h(x)\}$ nu este liniar independentă. Atunci există $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ astfel încât $\alpha \nabla g(x) + \beta \nabla h(x) = 0$. Aceasta conduce la

$$\begin{cases} 2\alpha x_1 + \beta = 0 \\ 2\alpha x_2 + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} \beta = -3\alpha \\ x_1 = x_2 = \frac{3}{2} \\ x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observăm însă că un punct de forma $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, u\right)$ nu este fezabil cu restricţia g activă: $\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+u = -2$ implică $u = -5$ iar $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -5\right)$ nu verifică $g(x) = 0$. Deducem că este îndeplinită condiţia de liniară independenţă în toate punctele lui M.

Varianta 2. O altă variantă este să observăm, din faptul că sistemul de restricţii este convex, că este suficient să verificăm condiţia Slater: aceasta este îndeplinită pentru $u = (0, 0, -2)$.

IV. Aplicarea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker

Cum am spus, datorită faptului că problema este convexă, condiţiile Karush-Kuhn-Tucker sunt necesare şi suficiente pentru minimalitate (globală). Deci x este soluţie a problemei noastre dacă şi numai dacă există $\lambda \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda x_1 + \mu = 0 \\ 2x_2 + 2\lambda x_2 + \mu = 0 \\ 2x_3 + 3\lambda + \mu = 0 \\ \lambda\left(x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + \frac{5}{2}\right) = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ \lambda \geq 0,\ x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + \frac{5}{2} \leq 0. \end{cases}$$

Plecăm de la a patra ecuaţie. Dacă $\lambda = 0$ atunci din primele trei ecuaţii deducem

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{2}{3},$$

punct pentru care ultima inegalitate este falsă.

Deci $\lambda > 0$, ceea ce înseamnă $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3 + \frac{5}{2} = 0$. Din primele două ecuaţii avem $x_1 = x_2$ iar din a cincea $x_3 = -2 - 2x_1$, adică

$$2x_1^2 - 6x_1 - 6 + \frac{5}{2} = 0.$$

Obţinem tripletele

$$\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, -9\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right).$$

Trebuie însă să determinăm λ pentru a verifica condiţia $\lambda \geq 0$. În cazul primului triplet primele trei ecuaţii conduc la $4\lambda = -25$, ceea ce înseamnă că acest triplet nu este soluţie. Pentru al doilea, găsim $\lambda = \frac{1}{4}$, deci singura soluţie a sistemului este elementul

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right) \in \mathbb{R}^3.$$

V. Concluzia

Putem concluziona că, într-adevăr, acest punct este soluţie a problemei în două feluri: pe de o parte problema admite soluţie şi punctul găsit este singurul care satisface condiţiile necesare; pe de altă parte, problema fiind convexă, punctele ce satisfac condiţia necesară sunt soluţii (condiţiile necesare sunt şi suficiente). Unicitatea soluţiei se putea deduce şi înainte de rezolvarea efectivă pentru că funcţia obiectiv este strict convexă.

3.5 Exemple şi aplicaţii

Ne propunem să ilustrăm rezultatele teoretice discutate mai sus prin intermediul a diverse exemple, fiecare dintre ele subliniind un aspect teoretic specific. De asemenea, prezentăm unele aplicaţii ale metodelor studiate până în acest punct.

Exemplul 3.5.1 (extrem local - extrem global) Primul exemplu marchează o diferenţă importantă între extremele globale ale unei funcţii reale de o variabilă reală şi cele ale funcţiilor de mai multe variabile.

Dacă o funcţie derivabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are un singur punct critic $\overline{x}$ care este punct de extrem local, atunci acesta este în mod necesar punct de extrem global. Într-adevăr, dacă $\overline{x}$ nu ar fi punct de minim global, atunci ar exista $u \in \mathbb{R}$ cu $f(u) < f(\overline{x})$. Putem presupune că $u < \overline{x}$. Dar, din condiţia de minim local pentru $\overline{x}$, există $v \in \mathbb{R}$, $u < v < \overline{x}$ astfel încât $f(\overline{x}) < f(v)$ (în caz contrar, f ar fi constantă pe un interval de forma $(\overline{x} - \varepsilon, \overline{x})$ şi $\overline{x}$ nu ar mai fi unicul punct critic care este şi extrem local). Prin urmare, $f(u) < f(\overline{x}) < f(v)$, deci valoarea $f(\overline{x})$ se atinge în intervalul (u, v), într-un punct notat w. Aplicând Teorema lui Rolle funcţiei f pe $[w, \overline{x}]$, există $t \in (w, \overline{x})$ cu $f'(t) = 0$, ceea ce reprezintă o contradicţie. Exemplul de mai jos demonstrează că în mai multe dimensiuni, această observaţie nu mai este adevărată.

Fie acum $p \geq 2$ şi $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = (1 + x_p)^3 \sum_{k=1}^{p-1} x_k^2 + x_p^2.$$

Atunci $0 \in \mathbb{R}^p$ este singurul punct critic al lui f, este punct de minim local strict (de ordinul $\alpha = 2$), dar nu este punct de minim global (o ilustrare grafică pentru cazul $p = 2$ poate fi făcută cu uşurinţă în Matlab).

Avem o problemă de optimizare fără restricţii. Să calculăm

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 2x_k(1 + x_p)^3, \ \forall k \in \overline{1, p-1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(x) = 3(1 + x_p)^2 \sum_{k=1}^{p-1} x_k^2 + 2x_p.$$

Singurul punct critic (i.e. $\nabla f(\overline{x}) = 0$, deci $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x}) = 0$ pentru $k \in \overline{1, p)}$ este $\overline{x} = 0$. Un calcul simplu arată că matricea hessiană asociată lui f în $\overline{x}$ este matricea pătratică de tip $p \times p$ care are numărul 2 pe diagonala principală şi 0 în rest, deci este pozitiv definită. Conform Teoremeii 3.3.8, deducem că $\overline{x}$ este soluţie locală. Să observăm că $f(1, 1, ..., x_p) = (p-1)(1 + x_p)^3 + x_p^2$, expresie care fiind un polinom de gradul al treilea, ia, atunci când x_p variază în $\mathbb{R}$, toate valorile dintre $-\infty$ şi $+\infty$. Deci f nu poate avea minim global. □

Exemplul 3.5.2 (metoda celor mai mici pătrate) Discutăm acum un caz special de problemă de optimizare fără restricţii, numită metoda celor mai mici pătrate, care apare foarte des în practica măsurătorilor şi experimentelor din ştiinţele naturii: fizică, chimie, astronomie, biologie. De altfel, din punct de vedere istoric, acest tip de problemă a apărut în legătură cu studiul mişcării planetelor şi în chestiuni legate de tehnici de navigaţie. Matematicianul care

a pus bazele acestei tehnici de studiu se consideră a fi Gauss, dar metoda a fost publicată pentru prima dată de către Legendre. În puţine cuvinte, este vorba de următoarea situaţie: avem la dispoziţie un număr de date $v_1, v_2, ..., v_N$ provenite în urma unor măsurători făcute la momentele $t_1, t_2, ..., t_N$. Obiectivul este acela de a determina cea mai bună funcţie model de forma $t \mapsto \varphi(t, x)$ (unde $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$ sunt parametri ajustabili) care se potriveşte cu datele măsurate. Astfel, pentru fiecare $i \in \overline{1, N}$ se defineşte abaterea (reziduul) dintre o dată măsurată la momentul t_i şi data descrisă de model la acelaşi moment ca fiind

$$r_i := v_i - \varphi(t_i, x),$$

iar problema este de a minimiza funcţia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[v_i - \varphi(t_i, x)\right]^2.$$

Ca o paranteză, să spunem că o altă posibilă funcţie obiectiv (poate mai firească) ar fi

$$\sum_{i=1}^{N} |v_i - \varphi(t_i, x)|$$

însă această construcţie nu conservă diferenţiabilitatea. Acesta este motivul pentru care se preferă suma pătratelor reziduurilor, de unde şi numele metodei.

Considerăm aici cazul unei dependenţe liniare. Presupunem că s-au făcut N măsurători la momentele diferite $t_1, t_2, ..., t_N > 0$ şi, corespunzător, s-au obţinut valorile $v_1, v_2, ..., v_N$. Ştiind că dependenţa dintre cele două seturi de valori este liniară ne interesează să determinăm o dreaptă care "se potriveşte" cel mai bine acestei colecţii de date observate. Fie deci o dreaptă oarecare $v = at + b$. Ca mai sus, abaterea la momentul t_i dintre valoarea măsurată v_i şi valoarea corespunzătoare a dependenţei liniare este $v_i - (at_i + b)$. Pentru a "măsura" suma abaterilor, considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^{N} \left[v_i - (at_i + b)\right]^2.$$

Dreapta faţă de care abaterea măsurătorilor va fi cea mai mică va fi dreapta căutată. Astfel ajungem la problema minimizării (fără restricţii) a funcţiei f. Să observăm şi faptul funcţia f este coercivă, adică $\lim_{\|(a,b)\| \to \infty} f(a, b) = \infty$, deci, conform Teoremei 3.2.2, admite punct de minim global.

Calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^{N} 2(-t_i)\left[v_i - (at_i + b)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^{N} -2\left[v_i - (at_i + b)\right]$$

şi determinarea punctelor critice revine la rezolvarea sistemului:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^N t_i\right) b = \sum_{i=1}^N t_i v_i \\ \left(\sum_{i=1}^N t_i\right) a + Nb = \sum_{i=1}^N v_i. \end{cases}$$

Determinantul matricei sistemului de mai sus este

$$\Delta := N\left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^N t_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^N 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^N t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^N 1 \cdot t_i\right)^2.$$

Din inegalitatea lui Hölder, acest număr este pozitiv (egalitatea s-ar obţine dacă şi numai dacă toate valorile t_i sunt egale, lucru exclus de la bun început). Aşadar, sistemul de mai sus admite soluţie unică:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i^2 & \sum_{i=1}^N t_i \\ \sum_{i=1}^N t_i & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i v_i \\ \sum_{i=1}^N v_i \end{pmatrix}.$$

Cum f admite punct de minim global aceasta care nu poate fi decât punctul critic determinat mai sus. Aşadar perechea (a, b) de mai sus reprezintă soluţia problemei.

Pentru exemplul general de mai sus, o parte din calcule s-ar păstra dacă am avea o dependenţă de tipul $v = a \cdot p(t) + b \cdot q(t)$, unde $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, obţinându-se sistemul

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N p^2(t_i) & \sum_{i=1}^N p(t_i)q(t_i) \\ \sum_{i=1}^N p(t_i)q(t_i) & \sum_{i=1}^N q^2(t_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N p(t_i)v_i \\ \sum_{i=1}^N q(t_i)v_i \end{pmatrix}.$$

Din nou folosind inegalitatea lui Hölder, matricea este inversabilă dacă şi numai dacă $(p^2(t_i))_{i=\overline{1,N}}$ şi $(q^2(t_i))_{i=\overline{1,N}}$ nu sunt proporţionale.

În general, pentru dependenţe mai complicate (neliniare în parametrul x) metoda celor mai mici pătrate nu are o soluţie care să poată fi atât de uşor dedusă, aşa încât, în astfel de situaţii sunt folosiţi diverşi algoritmi care să furnizeze aproximări ale soluţiei (a se vedea secţiunea următoare).

Exemplul 3.5.3 (optimizare pe simplexul unitate) Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ convexă şi diferenţiabilă. Dacă dorim să minimizăm această funcţie pe simplexul unitate (a se vedea Exemplul 2.6.4), atunci, conform Propoziţiei 3.3.13, $\overline{x} \in M$ este punct de minim pentru f pe M dacă şi numai dacă $-\nabla f(\overline{x}) \in N(M, \overline{x})$. Din forma particulară a lui $N(M, \overline{x})$, deducem că această condiţie se scrie

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) = c, \text{ (constantă)}, \forall i \notin I(\overline{x}) \\ &\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}) \geq c, \ \forall i \in I(\overline{x}). \end{aligned}$$

Fie $n_1, ..., n_p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\sum_{i=1}^p n_i = N > 0$ şi fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_p^{n_p}$. Să minimizăm această funcţie pe simplexul unitate din $\mathbb{R}^p$. Evident că problema are soluţie,

f fiind continuă, iar M compactă. Cum f este nulă dacă măcar una dintre componentele argumentului este zero, soluţiile se vor găsi în mulţimea

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid x_i > 0,\ \forall i \in \overline{1,p},\ \sum_{i=1}^{p} x_i = 1 \right\}.$$

Cu notaţiile din Exemplul 2.6.4, aceasta înseamnă $I(\overline{x}) = \emptyset$. Mai întâi, condiţia necesară de optimalitate $-\nabla f(\overline{x}) \in N(M, \overline{x})$, se scrie, ţinând cont de expresia conului normal (Exemplul 2.6.4)

$$\frac{n_i}{\overline{x}_i} f(\overline{x}) = c,\ \text{constantă},\ \forall i \in \overline{1,p},$$

adică

$$\frac{n_i}{\overline{x}_i} = c',\ \text{constantă},\ \forall i \in \overline{1,p}.$$

Cum $\sum_{i=1}^{p} \overline{x}_i = 1$ şi $\sum_{i=1}^{p} n_i = N$, găsim

$$\overline{x}_i = \frac{n_i}{N},\ \forall i \in \overline{1,p}.$$

Cum problema are soluţie şi un singur punct verifică condiţia necesară, deducem că acel punct este soluţia căutată.

O altă abordare constă în transformarea restricţiei geometrice într-una funcţională. Fie $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i - 1$. Este clar că $M = \{x \in \mathbb{R}^p \mid h(x) = 0\}$. Fie $\overline{x}$ soluţie a problemei. Cum $\nabla h(\overline{x}) \neq 0$, putem aplica Teorema 3.4.3 pentru a deduce că există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\nabla f(\overline{x}) + \mu \nabla h(\overline{x}) = 0,$$

adică

$$-\frac{n_i}{\overline{x}_i} f(\overline{x}) = \mu,\ \text{constantă},\ \forall i \in \overline{1,p}.$$

Astfel, se obţine aceeaşi concluzie ca mai sus.

Exemplul 3.5.4 (obţinerea unor inegalităţi) Metodele de optimizare studiate permit obţinerea unor inegalităţi remarcabile. Ilustrăm astfel de posibilităţi.

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } (x,y,z) = 0 \in \mathbb{R}^3, \\ \frac{xyz}{(x+y+z)^2}, & \text{dacă } (x,y,z) \neq 0. \end{cases}$$

Fie $a > 0$. Studiind problema maximizării lui f pe mulţimea

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

vom deduce următoarea inegalitate: pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$|xyz| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}} \left(|x| + |y| + |z|\right)^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Mai întâi, observăm că funcţia f este evident continuă pe $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ca raport de funcţii continue. Mai mult, pentru $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+$:

$$xyz \leq (\max(x, y, z))^3$$

şi

$$(x + y + z)^2 \geq (\max(x, y, z))^2,$$

deci $f(x, y, z) \leq \max(x, y, z)$, ceea ce probează continuitatea lui f în 0.

Mulţimea $M \cup \{0\}$ este compactă, aşadar f îşi atinge maximul global pe $M \cup \{0\}$. Cum acest maxim nu poate fi în 0, rezultă că punctul de maxim este în M. Din nou, este evident că f este de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3_+$. Este aplicabilă Teorema Karush-Kuhn-Tucker pentru problema maximizării lui f cu restricţia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ şi cu $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ \setminus \{0\}$. Astfel, dacă $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+ \setminus \{0\}$ este punct de maxim pentru această problemă, există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{aligned}
&\frac{yz}{(x+y+z)^2} - 2\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu x = 0\\
&\frac{xz}{(x+y+z)^2} - 2\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu y = 0\\
&\frac{xy}{(x+y+z)^2} - 2\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu z = 0\\
&x^2 + y^2 + z^2 = a^2.
\end{aligned}$$

Deducem

$$\begin{aligned}
&\frac{xyz}{(x+y+z)^2} - 2x\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu x^2 = 0\\
&\frac{xyz}{(x+y+z)^2} - 2y\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu y^2 = 0\\
&\frac{xyz}{(x+y+z)^2} - 2z\frac{xyz}{(x+y+z)^3} + 2\mu z^2 = 0\\
&x^2 + y^2 + z^2 = a^2,
\end{aligned}$$

de unde

$$0 < f(x, y, z) = 3\frac{xyz}{(x+y+z)^2} - 2\frac{xyz}{(x+y+z)^2} = -2\mu a^2.$$

În particular, $\mu < 0$ şi scăzând primele două ecuaţii din sistemul Karush-Kuhn-Tucker, avem

$$\frac{z(y-x)}{(x+y+z)^2} + 2\mu(x-y) = 0,$$

deci

$$\left(2\mu - \frac{z}{(x+y+z)^2}\right)(x-y) = 0.$$

Cum expresia din prima paranteză este strict mai mică decât 0, găsim $x = y$. Similar, $x = z$, deci

$$x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

şi

$$\sup_{(x,y,z)\in M} f(x,y,z) = \frac{a}{9\sqrt{3}}.$$

Fie acum $x, y, z \in \mathbb{R}$. Notăm $a = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ şi din cele de mai sus,

$$f(|x|,|y|,|z|) \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{9\sqrt{3}},$$

iar concluzia se obţine imediat.

2. Fie $x, y, z \geq 0$ cu $x+y+z=1$. Arătăm că

$$0 \leq xy+yz+xz-2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Pentru aceasta considerăm problemele minimizării şi maximizării funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ date prin

$$f(x,y,z) = xy+yz+xz-2xyz$$

cu restricţiile $x, y, z \geq 0$ cu $x+y+z=1$. Cum mulţimea punctelor fezabile este compactă, ambele probleme au soluţii globale. De asemenea, observăm că sistemul de restricţii este afin.

Pentu a simplifica calculele, să observăm că dacă cel puţin una dintre variabile este 0, atunci inegalitatea este adevărată. Deci putem presupune că $x, y, z > 0$, adică restricţiile inegalităţi sunt inactive. Astfel, considerăm doar restricţia egalitate şi condiţiile de optimalitate se scriu similar pentru ambele probleme: există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} y+z-2yz+\mu = 0 \\ x+z-2xz+\mu = 0 \\ x+y-2xy+\mu = 0 \\ x+y+z = 1. \\ x, y, z > 0. \end{cases}$$

Scăzând ecuaţiile două câte două obţinem că singura posibilitate este $x = y = z = 3^{-1}$. Dar

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}.$$

Cum, de exemplu, $f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) < \frac{7}{27}$ deducem că punctul obţinut este soluţia globală a problemei de maximizare. Obţinem astfel inegalitatea din dreapta. Cum nu am obţinut soluţie pentru problema de minimizare, atunci când am îndepărtat restricţiile cu inegalităţi, înseamnă că soluţiile acestei probleme au măcar o componentă nulă. Deci are loc şi inegalitatea din stânga, iar egalitatea este atinsă, de exemplu, în $(1,0,0)$.

Exemplul 3.5.5 (o problemă de geometrie plană) *Fixăm lungimile tuturor laturilor unui patrulater. Care este poziţia acestor laturi încât aria patrulaterului să fie maximă?*

Vom încerca să abordăm această problemă din prisma Teoriei Optimizării, întrucât este o problemă de maximizare. Notăm cu $ABCD$ patrulaterul şi cu θ_1, θ_2 unghiurile din A şi respectiv C. Aria patrulaterului este suma ariilor triunghiurilor ABD şi CBD, deci

$$\frac{1}{2}(ad\sin\theta_1 + bc\sin\theta_2).$$

Evident, avem o legătură între unghiurile θ_1 şi θ_2, legătură pe care o determinăm exprimând lungimea diagonalei BD în cele două triunghiuri:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta_1 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta_2.$$

Avem acum problema maximizării funcţiei obiectiv $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(\theta_1, \theta_2) = ad\sin\theta_1 + bc\sin\theta_2$$

cu restricţiile $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$, $h(\theta_1, \theta_2) = 0$, unde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(\theta_1, \theta_2) = (a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta_1) - (b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta_2).$$

Este clar că mulţimea punctelor fezabile este compactă, iar funcţia obiectiv este continuă, deci Teorema lui Weierstrass asigură faptul că problema admite soluţie. Este clar că pentru atingerea maximului nu putem avea $\theta_1, \theta_2 \in \{0, \pi\}$, deci restricţiile date de $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ sunt inactive. Cum $\nabla h(\theta_1, \theta_2) = 0 \in \mathbb{R}^2$, înseamnă că $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = 0$ ceea ce corespunde cazului unui patrulater degenerat (de arie 0), deducem că în toate punctele de maxim (eventualele soluţii) are loc condiţia de liniară independenţă. Aplicăm Teorema Karush-Kuhn-Tucker: dacă (θ_1, θ_2) este punct de maxim pentru problema dată, există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\nabla f(\theta_1, \theta_2) + \mu\nabla h(\theta_1, \theta_2) = (0, 0),$$

ceea ce conduce la sistemul

$$\begin{cases} ad\cos\theta_1 + 2\mu ad\sin\theta_1 = 0 \\ bc\cos\theta_2 - 2\mu bc\sin\theta_2 = 0. \end{cases}$$

Am hotărât că într-un punct de maxim $\sin\theta_1, \sin\theta_2 \neq 0$, deci

$$2\mu = -\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = \frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2},$$

adică

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = 0.$$

Cum $0 < \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$, deducem că $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, adică patrulaterul este inscriptibil. Cum se poate relativ uşor constata că există o unică poziţie a laturilor astfel încât $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, deducem că soluţia este unică. Demonstraţia este completă.

Exemplul 3.5.6 (proiecţia pe un hiperplan, distanţa la un hiperplan) Fie $u \in \mathbb{R}^p \setminus \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ şi $a \in \mathbb{R}$. Considerăm mulţimea (numită hiperplan)

$$M := \{x \in \mathbb{R}^p \mid \langle u, x\rangle = a\}.$$

Această mulţime este convexă şi închisă, deci, pentru orice $v \in \mathbb{R}^p \setminus M$, există proiecţia lui v pe M, pe care o notăm cu v_a. Ne propunem să determinăm expresia explicită a acestui element şi valoarea distanţei de la v la M, adică $\|v - v_a\|$.

Fixăm aşadar $v \in \mathbb{R}^p \setminus M$. Atunci v_a este soluţia unică a problemei de minimizare a funcţiei $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\|x - v\|^2,$$

pentru

$$x \in M = \{x \in \mathbb{R}^p \mid h(x) = 0\},$$

unde $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e dată prin $h(x) = \langle u, x \rangle - a$.

Alegerea funcţiei obiectiv ca mai sus are aceeaşi motivaţie ca şi în cazul metodei celor mai mici pătrate. Evident, $\nabla f(x) = x - v$, $\nabla h(x) = u$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$.

Cum constrângerea (privită funcţional) este afină, iar f este convexă, elementul v_a este caracterizat de

$$\begin{cases} \exists \mu \in \mathbb{R},\ \nabla f(v_a) + \mu \nabla h(v_a) = 0 \\ \langle u, v_a \rangle = a, \end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} v_a - v + \mu u = 0 \\ \langle u, v_a \rangle = a. \end{cases}$$

Din prima relaţie, făcând produsul scalar cu u, deducem

$$\langle v_a - v, u \rangle + \mu \|u\|^2 = 0,$$

deci, folosind a doua relaţie,

$$\mu = \frac{\langle u, v \rangle - a}{\|u\|^2}.$$

Revenind, obţinem

$$v_a = v - \frac{\langle u, v \rangle - a}{\|u\|^2} u.$$

În final, distanţa de la v la M are valoarea

$$\|v - v_a\| = \frac{|\langle u, v \rangle - a|}{\|u\|}.$$

Exemplul 3.5.7 (proiecţia pe un elipsoid generalizat) Fie acum $a_1, a_2, ..., a_p \in (0, \infty)$ şi mulţimea (elipsoidul generalizat)

$$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 \leq 1 \right\}.$$

Evident această mulţime este convexă şi compactă. Fie $v \notin M$. Există $\overline{v} \in M$, proiecţia lui v pe M. Din nou, dorim să găsim o expresie a acestui element.

Ca mai sus, $\overline{v}$ este soluţie a problemei de optimizare a funcţiei $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x - v\|^2$ sub constrângerea

$$x \in M = \{x \in \mathbb{R}^p \mid g(x) \leq 0\},$$

unde $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e dată prin

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 - 1$$

Observăm că funcţia g este convexă şi are loc condiţia Slater.

În plus, funcţia f este de asemenea convexă, aşa încât putem trage concluzia că $\overline{v}$ este soluţie a problemei dacă şi numai dacă există $\lambda \geq 0$ astfel încât

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{v}) + \lambda \nabla g(\overline{v}) = 0 \\ \lambda g(\overline{v}) = 0. \end{cases}$$

Acest sistem este echivalent cu

$$\overline{v}_i - v_i + \lambda \frac{\overline{v}_i}{a_i^2} = 0$$
$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\overline{v}_i}{a_i} \right)^2 - 1 \right) = 0.$$

Dacă $\lambda = 0$, prima ecuaţie atrage $\overline{v} - v = 0$, adică $v \in M$, ceea ce este fals.

Prin urmare $\lambda \neq 0$ şi restricţia este activă în $\overline{v}$, adică $\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\overline{v}_i}{a_i} \right)^2 = 1$. Deducem că

$$\overline{v}_i = \frac{a_i^2 v_i}{a_i^2 + \lambda}, \ \forall i = \overline{1, p}.$$

Pe de altă parte, cum $\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\overline{v}_i}{a_i} \right)^2 = 1$, deci

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{a_i^2 v_i^2}{(a_i^2 + \lambda)^2} = 1.$$

Altfel, a-l găsi pe λ presupune a rezolva ecuaţia de mai sus în necunoscuta $\lambda > 0$. În sfârşit, să remarcăm că ecuaţia are soluţie unică întrucât funcţia

$$0 \leq \lambda \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{a_i^2 v_i^2}{(a_i^2 + \lambda)^2}$$

este strict descrescătoare iar valoarea sa în 0 este strict supraunitară (pentru că $v \notin M$) în timp ce limita sa la $+\infty$ este 0. Revenind, a-l determina pe $\overline{v}$ revine la rezolvarea unei ecuaţii de grad $2p$, lucru în general imposibil. Singura posibilitate de a cunoaşte soluţia este aproximarea sa cât mai bună.

În lumina acestui exemplu, vom fi interesaţi de metode de aproximare a rădăcinilor ecuaţiilor neliniare, lucru de care ne vom ocupa în capitolul următor. Totuşi, să remarcăm că un procedeu de aproximarea a unei rădăcini a unei funcţii atunci când se cunoaşte un interval în care aceasta se află şi funcţia este continuă este binecunoscut şi este descris mai jos.

Exemplul 3.5.8 (Metoda înjumătăţirii intervalului) Să presupunem că avem o funcţie continuă f şi două numere reale $a < b$ pentru care $f(a)f(b) < 0$. Atunci, f are o rădăcină în (a, b). Pentru uşurinţa expunerii, presupunem că această soluţie este unică. Generăm un şir (x_k) astfel:

– alegem $a_0 = a$, $b_0 = b$;

– fie $x_0 = 2^{-1}(a_0 + b_0)$; dacă $f(x_0) = 0$ atunci x_0 este soluţia căutată şi iterarea se opreşte; astfel, dacă $f(a_0)f(x_0) < 0$ alegem $a_1 = a_0$ şi $b_1 = x_0$, iar dacă $f(x_0)f(b_0) < 0$ alegem $a_1 = x_0$ şi $b_1 = b_0$.

– continuăm procedeul luând $x_1 = 2^{-1}(a_1 + b_1)$.

Procedând recurent, ne apropiem cu (x_k) de soluţie, înjumătăţind la fiecare pas intervalul în care se găseşte soluţia. Evident, dacă pentru un număr k, $f(x_k) = 0$, atunci x_k e chiar soluţia căutată.

De exemplu, dacă avem funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^3 - x - 2$, este uşor de constatat (folosind şirul lui Rolle) că ecuaţia $f(x) = 0$ are o soluţie reală unică situată în intervalul $\left(\sqrt{3^{-1}}, \infty\right)$. Apoi, cum $f(1) \cdot f(2) < 0$, deducem că soluţia este în intervalul $(1, 2)$. Din acest moment, putem folosi metoda descrisă mai sus pentru a aproxima soluţia.

Alegem $x = 1.5$. Observăm că $f(1.5) \cdot f(2) < 0$, deci punctul se află în $(1.5, 2)$. Alegem apoi $x = 1.75$ şi continuăm procedeul.

În această metodă,

$$|x_k - \overline{x}| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b - a), \ \forall k \geq 1.$$

Metoda înjumătăţirii intervalului este foarte robustă, dar convergenţa sa este relativ lentă comparativ cu a altor metode pe care le vom studia în continuare.

3.6 Exerciţii

Exerciţiul 3.1 *Să se deseneze mulţimea punctelor fezabile, mulţimile de nivel pentru funcţia obiectiv şi să se determine grafic soluţiile pentru problemele de mai jos:*

(i)

$$\begin{aligned}&\max\left(x_1 - x_2\right),\ cu\\ &x_1 + x_2 \leq 1,\ -x_1 + 2x_2 \leq 2\\ &x_1 \geq -1,\ -x_1 + 3x_2 \geq -3\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}&\max\left(2x_1 + 6x_2\right),\ cu\\ &-x_1 + x_2 \leq 1,\ 2x_1 + x_2 \leq 2\\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Exerciţiul 3.2 *Să se deseneze în plan regiunea determinată de inegalităţile*

$$x_2 \geq 0,\ 0 \leq x_1 \leq 3,\ -x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + x_2 \leq 4.$$

Să se determine punctele din această regiune în care următoarele expresii îşi ating maximul şi respectiv minimul:

$$2x_1 + x_2;\ x_1 + x_2;\ x_1 + 2x_2.$$

Exerciţiul 3.3 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Să se arate că f' este surjectivă.*

Soluţie Fie $r \in \mathbb{R}$ arbitrar şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - rx$. E clar că $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = \infty$ şi deci g îşi atinge minimul (global) într-un punct $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Deci, din Teorema lui Fermat, $0 = g'(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - r$. □

Exerciţiul 3.4 *Fie $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ funcţii diferenţiabile şi $a \in \mathbb{R}^p$. Presupunem că $f(a) = g(a)$ şi că pe o vecinătate a lui a, $f(x) \geq g(x)$. Să se arate că $\nabla f(a) = \nabla g(a)$.*

Problema 3.5 *Fie $U \subset \mathbb{R}^p$ deschisă, $f : U \to \mathbb{R}$ continuă şi $\overline{x} \in U$. Presupunem că există o vecinătate V a lui $\overline{x}$ astfel încât f este diferenţiabilă pe $V \setminus \{\overline{x}\}$ şi $\nabla f(x)(x - \overline{x}) \geq 0$ pentru orice $x \in V \setminus \{\overline{x}\}$. Atunci $\overline{x}$ este punct de minim local pentru f.*

Soluţie Este suficient să considerăm că V este o bilă deschisă centrată în $\overline{x}$. Fie $x \in V \setminus \{\overline{x}\}$. Considerăm funcţia $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(\overline{x} + t(x - \overline{x}))$ care, din proprietăţile lui f, este continuă pe $[0, 1]$ şi derivabilă pe $(0, 1)$, iar

$$\varphi'(t) = \nabla f(\overline{x} + t(x - \overline{x}))(x - \overline{x}).$$

Aplicând Teorema lui Lagrange lui φ pe $[0, 1]$, există $u \in (0, 1)$ cu $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(u)$, adică

$$f(x) - f(\overline{x}) = \nabla f(\overline{x} + u(x - \overline{x}))(x - \overline{x}).$$

Evident, notând $x_u = \overline{x} + u(x - \overline{x}) \in V \setminus \{\overline{x}\}$ avem $x - \overline{x} = u^{-1}(x_u - \overline{x})$. Deci, folosind relaţia de mai sus şi ultima ipoteză,

$$f(x) - f(\overline{x}) = u^{-1}\nabla f(x_u)(x_u - \overline{x}) \geq 0.$$

Concluzia este acum evidentă. □

Problema 3.6 *Fie $U \subset \mathbb{R}^p$ deschisă, $f : U \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă şi $\overline{x} \in U$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\overline{x}$ este un punct critic al lui f.

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, $\overline{x}$ este un punct de minim local pentru funcţia

$$x \mapsto f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon \|x - \overline{x}\|.$$

Soluţie Presupunem că are loc (i) şi luăm $\varepsilon > 0$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $\overline{x}$ nu este punct de minim pentru f_ε. Atunci există un şir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \to \overline{x}$ de elemente din U astfel încât

$$f_\varepsilon(x_k) < f_\varepsilon(\overline{x}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Evident, $x_k \neq \overline{x}$ pentru orice k,

Cum f este diferenţiabilă în $\overline{x}$, există $(\alpha_k) \to 0$ astfel încât pentru orice k

$$f(x_k) = f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})(x_k - \overline{x}) + \alpha_k \|x_k - \overline{x}\|.$$

Deci, pentru orice k,

$$-\varepsilon \|x_k - \overline{x}\| - \alpha_k \|x_k - \overline{x}\| \geq 0,$$

adică $-\varepsilon \geq \alpha_k$. Cum $(\alpha_k) \to 0$, aceasta este o contradicţie.

Presupunem acum că (ii) are loc. Fie $\varepsilon > 0$. Există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in D(\overline{x}, \delta_\varepsilon)$,

$$f(\overline{x}) \leq f(x) + \varepsilon \|x - \overline{x}\|.$$

Fie $u \in \mathbb{R}^p$ de normă 1. Atunci, luând $x = \overline{x} + t\delta_\varepsilon u$ cu $t \in (0,1)$, în inegalitatea de mai sus avem

$$\frac{f(\overline{x} + t\delta_\varepsilon u) - f(\overline{x}) - t\delta_\varepsilon \nabla f(\overline{x})(u)}{t\delta_\varepsilon \|u\|} t\delta_\varepsilon \|u\| + t\delta_\varepsilon \nabla f(\overline{x})(u) + \varepsilon t\delta_\varepsilon \|u\| \geq 0,$$

deci

$$\frac{f(\overline{x} + t\delta_\varepsilon u) - f(\overline{x}) - t\delta_\varepsilon \nabla f(\overline{x})(u)}{t\delta_\varepsilon \|u\|} + \nabla f(\overline{x})(u) + \varepsilon \geq 0.$$

Trecând la limită cu $t \to 0$, avem $\nabla f(\overline{x})(u) + \varepsilon \geq 0$. Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, deducem $\nabla f(\overline{x})(u) \geq 0$ pentru orice u de normă 1. Aceasta înseamnă că $\nabla f(\overline{x}) = 0$. □

Problema 3.7 *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, $c < d$ şi $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Definim $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$\varphi(x) = \inf\{f(x,y) \mid y \in [c,d]\}.$$

Să se arate că φ este bine definită şi continuă.

Soluţie Aplicaţia

$$[c,d] \ni y \longmapsto f(x,y)$$

este continuă, deci îşi atinge minimul pe $[c,d]$. Prin urmare, există $y_x \in [c,d]$ astfel încât $\varphi(x) = f(x, y_x)$.

Din Teorema lui Cantor (Teorema 4.5.51), f este uniform continuă pe mulţimea compactă $[a,b] \times [c,d]$: pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, încât pentru orice (x', y'), $(x'', y'') \in [a,b] \times [c,d]$ cu $\|(x', y') - (x'', y'')\| < \delta_\varepsilon$ avem $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$.

Fie $x', x'' \in [a,b]$ cu $|x' - x''| \leq \delta_\varepsilon$. Atunci

$$\begin{aligned}\varphi(x') - \varphi(x'') &= f(x', y_{x'}) - f(x'', y_{x''}) \\ &\leq f(x', y_{x''}) - f(x'', y_{x''}) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Schimbând rolurile lui x' şi x'', obţinem

$$\varphi(x'') - \varphi(x') < \varepsilon,$$

de unde deducem concluzia. □

Exerciţiul 3.8 *Să se determine punctele de extrem local ale funcţiilor de mai jos (probleme fără restricţii):*

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 6x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 45x_1 - 51x_2 + 7$;
(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$;
(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$;
(v) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (1 + x_2)^3 x_1^2 + x_2^2$;
(vi) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1(x_2 + 1) - x_1^2x_2$;
(vii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = -x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 15x_1 - 36x_2 + 9$;
(viii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$;
(ix) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 8x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2$;
(x) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 2x_1x_2$;
(xi) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1x_2^2e^{x_1 - x_2}$;
(xii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = -x_1^4 - x_2^4 + 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 2$;
(xiii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 - 4)$;
(xiv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 4x_1^2x_2 + x_2^2$;
(xv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$;
(xvi) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1x_2^2e^{x_1 - x_2}$;
(xvii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 3x_2^3 - 150x_1$;
(xviii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2)e^{2x_1 + 3x_2}$;
(xix) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^3 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 3x_2 + 2$;
(xx) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 8x_3 - 5$;
(xxi) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \ln(1 + x_1^2 + x_3^2)$;
(xxii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2e^{x_3}$.

Soluţie (i) Rezolvăm sistemul ce rezultă din relaţia $\nabla f(x) = 0$ pentru a determina punctele critice. Avem sistemul

$$\begin{aligned}12x_1y_1 &= 45 \\ 6x_1^2 + 6x_2^2 &= 51\end{aligned}$$

care are soluţiile $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

Astfel, în cazul nostru, obţinem concluziile: $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ este minim local, $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ nu sunt extreme locale, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ este maxim local.

(iii) Singurul punct critic este $(0,0)$, dar determinanţii formaţi din matricea hessiană sunt nuli, deci nu putem decide pe acestă bază. Totuşi este simplu de observat că

$$f(x_1,x_2) \geq 0 = f(0,0),\ \forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

deci $(0,0)$ este minim global.

(iv) Din nou, singurul punct critic este $(0,0)$, dar nu putem decide dacă este punct de extrem pe baza teoriei de mai sus. Observăm că $f(0,0)=0$, iar pentru şirul $x_n = (\frac{1}{n},0) \to (0,0)$, $f(x_n) > 0$ în timp ce pentru $y_n = (0,-\frac{1}{n}) \to (0,0)$, $f(y_n) < 0$. Deci în orice vecinătate a lui $(0,0)$ există atât puncte pentru care funcţia cost ia valori mai mari cât şi valori mai mici. Deci punctul nu este de extrem local.

La celelalte subpuncte se procedează analog: există atât puncte critice pentru care putem aplica teoria, cât şi puncte pentru care trebuie folosită structura problemei. Există de asemenea situaţii în care se poate decide dacă $\nabla^2 f(\overline{x})$ este pozitiv (negativ) definită sau nu folosind calculul direct al acesteia, criteriul lui Sylvester nefiind aplicabil. □

Implementare Matlab 3.9 Să se reprezinte grafic funcţiile de mai sus precum şi curbele lor de nivel (i.e., mulţimile de tip $\{x \mid f(x) = c\}$, unde c este o constantă) şi să se compare cu concluziile teoretice. Ilustrăm reprezentările grafice pentru punctul (iv). Folosim codul:

```
[x,y]=meshgrid(-0.5:.001:0.5);
z=x.^2+y.^3;
mesh(x,y,z)
```

iar pentru a desena curbele de nivel:

```
[c,h]=contour(x,y,z,70);
clabel(c,h);
```

Pentru punctul (v), se desenează ca mai sus pe `[x,y]=meshgrid(-7:.01:7).`

Exerciţiul 3.10 *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + \alpha$ are un punct de minim global. Determinaţi α astfel încât $\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = 0$.*

Exerciţiul 3.11 *Pentru următoarele funcţii studiaţi punctele de extrem şi stabiliţi dacă există extreme globale.*

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 + 2y - 3xy - \frac{7}{2}y^2$.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 3x - y$;

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2x^2 - 2xy + y^2 - z - yz + z^2$.

Exerciţiul 3.12 *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - \sin y$. Să se arate că f are o infinitate de minime globale, dar nu are niciun maxim local. Să se reprezinte grafic funcţia folosind Matlab.*

Exerciţiul 3.13 *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{3x} + y^3 - 3ye^x$. Să se arate că f are un singur punct critic care este punct de minim local dar nu este punct de minim global.*

Exerciţiul 3.14 *Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (1+e^y)\cos x - ye^y$ are o infinitate de maxime globale, dar nu are niciun minim local.*

Exerciţiul 3.15 *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$

şi mulţimea restricţiilor

$$M := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\right\}.$$

Să considerăm problema (P) *a minimizării lui* f *pe* M. *Să se verifice dacă este îndeplinită condiţia necesară, respectiv condiţia suficientă de optimalitate de ordinul I în punctele:* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$.

Similar pentru problema maximizării lui f *pe* M.

Exerciţiul 3.16 *Să se demonstreze ultima afirmaţie de la Exemplul 3.4.8.*

Exerciţiul 3.17 *Fie* $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dată prin* $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4$. *Să se arate că sistemul de restricţii* $h(x) = 0$ *satisface condiţia Abadie în toate punctele sale. Apoi, să se determine maximele şi minimele globale ale funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ *cu această restricţie.*

Soluţie Mulţimea punctelor fezabile este

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4\right\}.$$

Este clar că pentru orice $x \in M$,

$$D(x) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 \mid x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0\right\}.$$

Folosind Teorema lui Lyusternik, deducem că $T(M, x)$ este exact $D(x)$. Deci condiţia Abadie are loc.

Cum sfera descrisă de ecuaţia $h(x) = 0$ este mulţime compactă şi f este continuă, din Teorema lui Weierstrass există extremele globale ale problemei date. Se observă că în cazul de faţă, având doar restricţii egalităţi atât pentru minime cât şi pentru maxime, trebuie să determinăm mai întâi punctele critice ale funcţiei lagrangian. Obţinem sistemul

$$\begin{aligned}
x_1(3x_1 + 2\mu) &= 0\\
x_2(3x_2 + 2\mu) &= 0\\
x_3(3x_3 + 2\mu) &= 0\\
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 4.
\end{aligned}$$

Avem de distins între mai multe situaţii.

- Dacă $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ atunci punctul nu este fezabil.
- Dacă $x_1 = x_2 = 0$ şi $x_3 \neq 0$, avem $x_3 = \pm 2$ (μ nu este important acum).
- Dacă $x_1 = 0$, $x_2, x_3 \neq 0$, obţinem $x_2 = x_3 = \pm\sqrt{2}$.

- Dacă $x_1, x_2, x_3 \neq 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Luând în calcul că celelalte cazuri sunt simetrice acestora, avem punctele

$$(\pm 2, 0, 0); (0, \pm 2, 0); (0, 0, \pm 2);$$
$$(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}); (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2});$$
$$(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}); (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0); (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0);$$
$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right); \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Prin calculul direct al valorilor funcţiei în aceste puncte, deducem că maximul este 8 şi este atins în $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$, iar minimum este -8, fiind atins în $(-2, 0, 0), (0, -2, 0), (0, 0, -2)$. □

Exerciţiul 3.18 *Să se determine minimul şi maximul global al funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ pe cercul unitate cu centrul în origine.*

Exerciţiul 3.19 *Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^2$ şi $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 9$. Să se studieze minimele lui f sub restricţia $g(x) \leq 0$.*

Exerciţiul 3.20 *Să se determine punctul (punctele) cel (cele) mai apropiat (apropiate) de origine al (ale) suprafeţelor:*
(i) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$;
(ii) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$.

Exerciţiul 3.21 *Fie problema minimizării lui $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_2$$

cu restricţia $g(x) \leq 0$ unde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1 + x_2 - 1$. Să se arate că problema este convexă (i.e. f, g sunt convexe) şi să se determine soluţiile acesteia.

Exerciţiul 3.22 *Fie $a > 4^{-1}$, $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + ax_2^2 + x_1x_2 + x_1$ şi $g(x) = x_1 + x_2 - 1$. Să se studieze problema (P) (cu notaţiile standard).*

Exerciţiul 3.23 *Fie funcţia obiectiv $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$ şi funcţia $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^2$ ce defineşte o restricţie de tip egalitate (adică $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) = 0\}$). Studiaţi problema (P).*

Exerciţiul 3.24 *Fie $f, g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2.$$
$$g_1(x) = -x_2 + x_1^2$$
$$g_2(x) = x_2 - x_1.$$

Fie problema minimizării lui f cu restricţiile $g_1(x) \leq 0$, $g_2(x) \leq 0$. Să se deseneze mulţimea punctelor fezabile. Să se arate că g_1, g_2 sunt funcţii convexe şi că are loc condiţia Slater. Apoi, să se justifice existenţa şi unicitatea şi să se determine soluţia problemei atât grafic cât şi analitic pe baza condiţiilor Karush-Kuhn-Tucker.

Exerciţiul 3.25 *Fie* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *şi* $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2, x_3) = -x_3$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$. *Consideră problema minimizării lui* f *cu restricţiile* $g(x) \leq 0, h(x) = 0$. *Să se arate că problema are soluţie, că se poate aplica teorema Karush-Kuhn-Tucker (verificând condiţia de liniară independenţă) şi apoi să se determine soluţiile.*

Exerciţiul 3.26 *Fie* $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_3^2)$, $g(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2$, $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 2$. *Consideră problema minimizării lui* f *cu restricţiile* $g(x) \leq 0$, $h(x) = 0$. *Să se arate că problema are soluţie locală, sistemul de constrângeri este convex şi este îndeplinită cel puţin o condiţie de calificare. Se se aplice Teorema Karush-Kuhn-Tucker şi să se determine soluţiile.*

Exerciţiul 3.27 *Fie* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + 4x_2 + 4$, $g(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4$. *Să se arate că* f, g *sunt convexe. Fie problema minimizării globale a lui* f *cu restricţia* $g(x) \leq 0$. *Să se arate că mulţimea restricţiilor este compactă, este îndeplinită o condiţie de calificare şi să se determine soluţiile problemei.*

Exerciţiul 3.28 *Fie* $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $g(x) = -2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1$. *Să se arate că* f *este convexă dar* g *nu este convexă. Să se arate că are loc o condiţie de calificare pentru restricţia* $g(x) \leq 0$. *Să se arate că mulţimea restricţiilor este închisă şi nemărginită. Să se justifice faptul că problema minimizării lui* f *cu restricţia* $g(x) \leq 0$ *are soluţie globală şi să se găsească soluţiile.*

Exerciţiul 3.29 *Fie* $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}$. *Se consideră problema determinării proiecţiei originii pe mulţimea* M. *Justificaţi faptul că această problemă este echivalentă cu rezolvarea problemei minimizării funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *cu restricţia* $x \in M$. *Să se studieze această problemă sub următoarele aspecte:* (i) *existenţa şi unicitatea soluţiei;* (ii) *posibilitatea aplicării Teoremei Karush-Kuhn-Tucker pentru determinarea soluţiei (soluţiilor);* (iii) *determinarea efectivă a soluţiei (soluţiilor).*

Exerciţiul 3.30 *Să se determine maximele şi minimele globale ale funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ *pe mulţimea punctelor ce satisfac* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ *şi* $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, *stabilind mai întâi existenţa soluţiilor şi studiind posibilitatea aplicării Teoremei Karush-Kuhn-Tucker.*

Soluţie Punctele căutate există pe baza Teoremei lui Weierstrass. Avem o restricţie de forma $h(x) = 0$, unde

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ h(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4, x_1 + x_2 + x_3 - 1).$$

Condiţia de liniară independenţă este satisfăcută pentru toate tripletele (x_1, x_2, x_3) pentru care măcar două coordonate sunt diferite. Cum nu există puncte fezabile cu $x_1 = x_2 = x_3$ deducem că are loc condiţia de calificare dorită, deci punctele de extrem sunt puncte critice ale

lagrangianului. Obţinem sistemul

$$\begin{aligned}
&3x_1^2 + 2\mu_1 x_1 + \mu_2 = 0\\
&3x_2^2 + 2\mu_1 x_2 + \mu_2 = 0\\
&3x_3^2 + 2\mu_1 x_3 + \mu_2 = 0\\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1.
\end{aligned}$$

Pentru ca sistemul format din primele trei ecuaţii să fie compatibil în necunoscutele μ_1, μ_2 trebuie ca

$$\begin{vmatrix} 3x_1^2 & 2x_1 & 1\\ 3x_2^2 & 2x_2 & 1\\ 3x_3^2 & 2x_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

deci

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) = 0\\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 1.
\end{aligned}$$

Obţinem soluţiile

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{6}, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{6}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{3}\right)$$

şi permutările lor. Este acum uşor de verificat că primul set de soluţii corespunde maximului, iar celălalt corespunde minimului. □

Exerciţiul 3.31 *Fie problema* $\min\left(\frac{x_1^2}{2} + x_2^2 + \frac{3x_3^2}{2}\right)$ *cu restricţiile* $x_1^2 + x_3 \leq 1$ *şi* $x_2^2 + x_3^2 = 4$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.32 *Fie problema* $\min\left(x_1^2 + x_2 + \frac{x_3^2}{2}\right)$ *cu restricţiile* $x_3^2 - x_1 \leq 0$ *şi* $x_2^2 + x_3^2 = 1$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.33 *Studiaţi problema maximizării funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dată prin*

$$f(x) = -2x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

cu restricţiile

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 = 1,\\
&4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2.
\end{aligned}$$

Exerciţiul 3.34 *Determinaţi minimele şi maximele globale pentru* $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ *cu restricţiile*

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{5} + \frac{x_3^2}{25} = 1 \text{ şi } x_3 = x_1 + x_2.$$

Exerciţiul 3.35 *Determinaţi* $\min(-3.6x_1 + 0.4x_1^2 - 1.6x_2 + 0.2x_2^2)$ *cu restricţiile* $2x_1 + x_2 \leq 10$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Exerciţiul 3.36 *Fie problema* $\min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1)$ *cu restricţiile* $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ *şi* $x_3 \leq 4$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.37 *Fie problema* $\min(x_1 - x_2^2 + 2x_3)$ *cu restricţiile* $x_1^2 + x_3^2 \leq 5$ *şi* $x_2^2 - x_1^2 \leq 1$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.38 *Determinaţi soluţiile globale ale problemei* $\max(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cos\theta_3)$ *cu restricţiile* $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi, \theta_i \geq 0$, $i \in \overline{1,3}$.

Exerciţiul 3.39 *Fie* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *şi* $a_i > 0$, *pentru orice* $i \in \overline{1,n}$. *Să se determine minimul expresiei*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$

supusă la constrângerea

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = c,$$

unde c *este o constantă dată. Care este maximul expresiei sub aceeaşi restricţie?*

Soluţie Să observăm că dacă notăm cu $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = c\}$ mulţimea punctelor fezabile şi cu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$ funcţia obiectiv, atunci pentru $\nu \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i c^2}{n^2}$ mulţimea $M \cap N_\nu f$ este nevidă (conţine, spre exemplu, elementul $(cn^{-1}, ..., cn^1) \in \mathbb{R}^n$) şi mărginită. Deci, conform Teoremei 3.2.2, există minimul problemei propuse. Cum funcţia ce dă restricţia este afină, nu este nevoie să verificăm condiţii de calificare. Astfel, condiţiile de optimalitate prin intermediul lagrangianului conduc la

$$2a_i x_i + \mu = 0, \ \forall i \in \overline{1,n},$$

deci

$$x_i = -\frac{\mu}{2a_i}.$$

Înlocuind în forma restricţiei deducem

$$c = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu}{2a_i},$$

deci

$$\mu = -\frac{2c}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}.$$

Prin urmare

$$x_i = \frac{c}{a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}},\ \forall i \in \overline{1,n}.$$

Evident, expresia nu admite un maxim: observăm că pentru şirul de puncte fezabile $(p, -p, c)_{p\in\mathbb{N}}$ valoarea expresiei tinde la $+\infty$. □

Exerciţiul 3.40 *Să se minimizeze funcţia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3 + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_3^2}{10}\right)$$

sub restricţiile $x_1 + x_2 + x_3 = r$ $(r > 0)$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

Soluţie Existenţa minimului este asigurată de Teorema lui Weierstrass. Constrângerile sunt liniare, deci nu avem de verificat condiţii de calificare. Oricum, pentru a aduce problema la forma standard, restricţiile cu inegalităţi se scriu $-x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_3 \leq 0$. Folosind lagrangianul obţinem sistemul

$$\begin{aligned}
&x_1 - \lambda_1 + \mu = 0\\
&x_2 - \lambda_2 + \mu = 0\\
&1 + \frac{x_3}{10} - \lambda_3 + \mu = 0\\
&\lambda_1 x_1 = 0\\
&\lambda_2 x_2 = 0\\
&\lambda_3 x_3 = 0\\
&x_1 + x_2 + x_3 = r\\
&\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

După considerarea tuturor posibilităţilor găsim soluţia

- pentru $r \leq 2$,

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, 0\right) \text{ şi } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu) = \left(0, 0, 1 - \frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right);$$

- pentru $r > 2$,

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2, x_3) = \left(\tfrac{r+10}{12}, \tfrac{r+10}{12}, \tfrac{5(r-2)}{6}\right) \text{ şi}\\
&(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu) = \left(0, 0, 0, -\tfrac{10+r}{12}\right).
\end{aligned}$$

Problema este rezolvată. □

Exerciţiul 3.41 *Să sedetermine punctele de minim şi de maxim global ale funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1x_2x_3$ *supusă la restricţia* $h(x) = 0$ *unde* $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - 8, x_1 + x_2 + x_3 - 5)$.

Soluţie Vom arăta mai întâi că, în acest caz, mulţimea punctelor fezabile este mărginită (deci compactă).

Folosind egalitatea $x_3 = 5 - x_1 - x_2$, putem elimina x_3 din prima restricţie, adică

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5x_1 + 5x_2 + 8 = 0,$$

de unde găsim

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 13.$$

Deducem că x_1 şi x_2 parcurg mulţimi de numere reale mărginite, situaţie care se întâmplă atunci şi în cazul lui x_3. Deci mulţimea punctelor fezabile este compactă şi atât problema de minim cât şi cea de maxim admit soluţie.

Verificăm condiţia de liniară independenţă: ne întrebăm dacă există două numere reale α_1, α_2 cu $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$ astfel încât

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x_2 + x_3) + \alpha_2 &= 0\\
\alpha_1(x_1 + x_3) + \alpha_2 &= 0\\
\alpha_1(x_1 + x_2) + \alpha_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Cum suntem interesaţi doar de mulţimea punctelor fezabile, deducem

$$\begin{aligned}
\alpha_1(5 - x_1) + \alpha_2 &= 0\\
\alpha_1(5 - x_2) + \alpha_2 &= 0\\
\alpha_1(5 - x_3) + \alpha_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Astfel, găsim condiţia $x_1 = x_2 = x_3$ care nu este indeplinită de nici un punct fezabil. Prin urmare, este îndeplinită condiţia de liniară independenţă pe mulţimea punctelor fezabile. Aplicarea Teoremei 3.4.3 (şi a observaţiilor ce o însoţesc) conduce la concluzia: dacă $\overline{x}$ este punct de minim sau de maxim pentru problema considerată, atunci există $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{aligned}
\overline{x}_2\overline{x}_3 + \mu_1(\overline{x}_2 + \overline{x}_3) + \mu_2 &= 0\\
\overline{x}_1\overline{x}_3 + \mu_1(\overline{x}_1 + \overline{x}_3) + \mu_2 &= 0\\
\overline{x}_1\overline{x}_2 + \mu_1(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) + \mu_2 &= 0\\
\overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_3 + \overline{x}_2\overline{x}_3 &= 8\\
\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 &= 5.
\end{aligned}$$

Evident, μ_1, μ_2 nu pot fi simultan 0. Înmulţind corespunzător ecuaţiile şi scăzându-le obţinem

$$\begin{aligned}
(\mu_1\overline{x}_3 + \mu_2)(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) &= 0\\
(\mu_1\overline{x}_2 + \mu_2)(\overline{x}_1 - \overline{x}_3) &= 0\\
(\mu_1\overline{x}_1 + \mu_2)(\overline{x}_2 - \overline{x}_3) &= 0\\
\overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1\overline{x}_3 + \overline{x}_2\overline{x}_3 &= 8\\
\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 &= 5.
\end{aligned}$$

Dacă $\mu_1 = 0$, atunci, din observaţia anterioară, deducem $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3$ ceea ce nu se poate întâmpla pe mulţimea punctelor fezabile. Deci $\mu_1 \neq 0$ şi cum $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3$ nu pot fi egale, găsim $\overline{x} = (2, 2, 1)$, $\overline{x} = (1, 2, 2)$, $\overline{x} = (2, 1, 2)$ şi $\overline{x} = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, $\overline{x} = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $\overline{x} = (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$. Comparând valorile funcţiei în aceste puncte deducem că primele sunt puncte de maxim, iar ultimele de minim. □

Exerciţiul 3.42 *Să se determine minimele globale ale funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ *pe mulţimea punctelor ce satisfac* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4$ *şi* $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$.

Soluţie Din nou, existenţa minimului este asigurată de Teorema lui Weierstrass. Mai obervăm că este aceeaşi funcţie obiectiv ca la Exerciţiul 3.30, dar constrângerile sunt sub formă de inegalităţi. Se observă că sistemul de restricţii este convex şi, în plus, are loc condiţia Slater. Deci punctele de minim se află printre punctele critice ale lagrangianului problemei. Avem

$$\begin{aligned}
&3x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0\\
&3x_2^2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0\\
&3x_3^2 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 = 0\\
&\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4) = 0\\
&\lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 1) = 0\\
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4\\
&x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\\
&\lambda_1, \lambda_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Din nou, distingem mai multe cazuri.

- Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
- Dacă $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 \neq 0$, atunci $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ şi deducem
$$\lambda_2 = -3x_1^2 = -3x_2^2 = -3x_3^2 < 0,$$
ceea ce nu este convenabil.
- Dacă $\lambda_2 = 0$ şi $\lambda_1 \neq 0$, atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ şi avem
$$12 + 2(x_1 + x_2 + x_3)\lambda_1 = 0,$$
adică
$$\lambda_1 = -\frac{6}{x_1 + x_2 + x_3}.$$
Înlocuind în primele trei ecuaţii, obţinem soluţiile
$$\begin{aligned}
&(-2, 0, 0), (0, -2, 0),\ (0, 0, -2)\\
&(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0),\ (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}),\ (0, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})\\
&\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$
- Dacă $\lambda_2 \neq 0$ şi $\lambda_1 \neq 0$, atunci $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$ ne regăsim în situaţia de la Exerciţiul 3.30.

După calculul valorilor funcţiei de cost în punctele găsite se obţine faptul că minimul este atins în punctele $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$, $(0, 0, -2)$, deci în puncte diferite faţă de cele de la Exerciţiul 3.30. □

Exerciţiul 3.43 *Să se cerceteze dacă există minim global pentru* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$$

pe discul unitate închis cu centrul în origine şi în caz afirmativ să se determine.

Exerciţiul 3.44 *Fie* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$ *şi* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 + 5$. *Considerăm problema minimizării lui* f *cu restricţia* $h(x) = 0$. *Să se arate că problema are soluţie unică şi apoi să se determine soluţia precum şi multiplicatorul Lagrange* $\bar{\mu}$ *asociat. Să se arate că apoi că soluţia determinată este minim global fără restricţii pentru funcţia* $x \to L(x, \bar{\mu})$. *Se păstrează aceste concluzii pentru problema minimizării lui* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 3x_2$ *cu restricţia egalitate* $h(x) = 0$, *unde* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2) = x_2$*?*

Exerciţiul 3.45 *Să se justifice existenţa punctelor de minim ale funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3$$

cu restricţia $g(x) \leq 0$ *unde* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2$. *Să se arate că funcţia* g *este convexă. Să se verifice explicit îndeplinirea condiţiei Slater şi a condiţiei de Mangasarian-Fromovitz pe mulţimea punctelor fezabile. Apoi să se rezolve problema.*

Exerciţiul 3.46 *Fie problema minimizării lui* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x_1x_2$$

cu restricţia $g(x) \leq 0$ *unde* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - a$ $(a > 0)$. *Să se justifice existenţa soluţiei pentru această problemă. Să se deseneze mulţimea curbelor de nivel pentru* f *şi mulţimea punctelor fezabile. Să se identifice grafic soluţiile. Să se arate că funcţia* g *este convexă. Să se verifice explicit îndeplinirea condiţiei Slater şi a condiţiei de Mangasarian-Fromovitz pe mulţimea punctelor fezabile. Apoi să se rezolve analitic problema.*

Exerciţiul 3.47 *Fie problema minimizării funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - yz + z^2$ *cu restricţiile* $z - y \geq 1$, $x = z$, $z \geq 0$. *Să se arate că problema admite soluţie şi că este aplicabilă Teorema Karush-Kuhn-Tucker. Să se determine soluţia sau soluţiile problemei.*

Exerciţiul 3.48 *Fie problema minimizării funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 6^{-1}x^2 + +2x + y^2 + z^2$ *cu restricţiile* $x + y + z = 2$, $x, y, z \geq 0$. *Să se arate că problema admite soluţie şi că este aplicabilă Teorema Karush-Kuhn-Tucker. Să se determine soluţia sau soluţiile problemei.*

Exerciţiul 3.49 *Fie* $f, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ *şi* $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 4$. *Să se arate că problema minimizării lui* f *cu restricţia* $h(x) = 0$ *admite soluţie şi să se determine soluţiile. Are soluţie problema maximizării lui* f *cu aceeaşi restricţie?*

Exerciţiul 3.50 *Fie* $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_3$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4$, $h(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 2$. *Să se arate că problema minimizării lui* f *cu restricţiile* $g(x) \leq 0, h(x) = 0$ *este convexă, mulţimea restricţiilor este compactă şi este îndeplinită o condiţie de calificare. Apoi să se determine soluţiile.*

Exerciţiul 3.51 *Fie* $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{-1}x_1^3 + x_2^2 + 2x_3$, $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2$, $h(x) = x_1 + x_3$. *Fie problema minimizării lui* f *cu restricţiile* $g(x) \leq 0, h(x) = 0$. *Să se arate că mulţimea restricţiilor este compactă şi este îndeplinită o condiţie de calificare. Apoi să se determine soluţiile globale.*

Exerciţiul 3.52 *Fie* $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3$, $g(x) = 2^{-1}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1$, $h(x) = x_1 - x_2$. *Fie problema minimizării globale a lui* f *cu restricţiile* $g(x) \leq 0, h(x) = 0$. *Să se arate că mulţimea restricţiilor este compactă şi este îndeplinită o condiţie de calificare. Apoi să se determine soluţiile globale.*

Exerciţiul 3.53 *Fie* $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1$, $g(x) = x_1 - x_2$, $h(x) = x_2 - x_3$. *Fie problema minimizării globale a lui* f *cu restricţiile* $g(x) \leq 0, h(x) = 0$. *Să se arate că* f *este convexă. Este mulţimea restricţiilor compactă? Să se arate că problema are soluţie. Să se precizeze dacă se poate aplica Teorema Karush-Kuhn-Tucker. Să se determine soluţiile.*

Exerciţiul 3.54 *Fie* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2 + x_2$, $g(x) = x_1 + x_2 - 1$. *Să se arate că problema minimizării lui* f *cu restricţia* $g(x) \leq 0$ *este convexă, are soluţie, se poate aplica Teorema Karush-Kuhn-Tucker şi să se determine soluţiile problemei.*

Exerciţiul 3.55 *Fie problema* $\min(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 - x_3)$ *cu restricţiile* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ *şi* $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.56 *Fie problema* $\min(x_1^2 + x_2^2)$ *cu restricţiile* $x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.57 *Să se determine punctul cel mai apropiat şi punctul cel mai depărtat de origine de pe (hiperbola)*

$$x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2 = 225.$$

Exerciţiul 3.58 *Fie problema* $\min(2x_1 + 3x_2 - x_3)$ *cu restricţiile* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ *şi* $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 = 2$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.59 *Fie problema* $\min(4x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2)$ *cu restricţiile* $2x_1 + x_2 \leq 1$ *şi* $x_1^2 \leq 1$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.60 *Fie problema* $\min(x_1 + x_2 + x_3)$ *cu restricţiile* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4$ *şi* $x_1 - x_2 + x_3 = 2$. *Determinaţi soluţiile problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.61 *Fie problema* $\min(x_1x_2x_3)$ *cu restricţiile* $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 4$ *şi* $x_1+x_2+x_3=2$. *Determinaţi soluţiile globale ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea soluţiilor).*

Exerciţiul 3.62 *Fie problema* $\min(x_1+x_2+x_3)$ *cu restricţiile* $x_1^2+x_2^2 \leq x_3$ *şi* $x_3 \leq 1$. *Determinaţi soluţia sau soluţiile problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea efectivă a soluţiilor).*

Exerciţiul 3.63 *Fie problema* $\min(x_1^2+x_2^2-x_2x_3+x_3^2)$ *cu restricţiile* $x_1-x_2 \geq 1, x_1=x_3$ *şi* $x_3 \geq 0$. *Determinaţi soluţia sau soluţiile problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, chestiunea convexităţii problemei, determinarea efectivă a soluţiilor).*

Exerciţiul 3.64 *Fie* $a,b,c>0$. *Studiaţi problema maximizării expresiei* $(x+a)(y+b)$ *cu restricţiile* $x,y \geq 0$, $x+y=c$.

Exerciţiul 3.65 *Fie* $f,h:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$,

$$f(x)=\prod_{i=1}^{p} x_i^2,\ h(x)=\sum_{i=1}^{p} x_i^2-1.$$

Studiaţi problema maximizării funcţiei f *cu restricţia* $h(x)=0$. *Deduceţi inegalitatea mediilor.*

Soluţie Cum mulţimea punctelor fezabile este o sferă problema are soluţie globală. De asemenea, are loc condiţia de liniară independenţă în toate punctele fezabile. Cum avem o restricţie cu egalitate, condiţiile Karush-Kuhn-Tucker se scriu astfel: dacă punctul fezabil x este soluţie, atunci există $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\nabla f(x)+\mu \nabla h(x)=0,$$

relaţie ce revine la

$$2x_i \prod_{j=1,j\neq i}^{p} x_j^2+2\mu x_i=0,\ \forall i \in \overline{1,p}.$$

Înmulţim cu x_i fiecare relaţie şi avem

$$-\prod_{j=1}^{p} x_j^2+\mu x_i^2=0,\ \forall i \in \overline{1,p},$$

deci

$$\mu x_i^2=\mu x_j^2,\ \forall i,j \in \overline{1,p}.$$

Dacă $\mu=0$, atunci din cele de mai sus deducem $f(x)=0$, ceea ce nu se poate întâmpla într-un punct de maxim. Deci

$$x_i^2=x_j^2,\ \forall i,j \in \overline{1,p},$$

şi cum $h(x) = 0$, găsim

$$x_i^2 = \frac{1}{p},\ \forall i \in \overline{1,p}.$$

Aşadar, valoarea maximă a funcţiei cu restricţia dată este p^{-p}.

Dacă $z \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, atunci $y = \|z\|^{-1} z$ satisface restricţia şi

$$\prod_{i=1}^{p} \left(\frac{z_i}{\|z\|} \right)^2 = \frac{\prod_{i=1}^{p} z_i^2}{\|z\|^{2p}} \leq \frac{1}{p^p}.$$

Concluzionăm că

$$\prod_{i=1}^{p} z_i^2 \leq \frac{\|z\|^{2p}}{p^p} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} z_i^2}{p} \right)^p$$

Deci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$,

$$\left| \prod_{i=1}^{p} x_i \right| \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{p} |x_i|}{p} \right)^p,$$

ceea ce reprezintă inegalitatea mediilor. □

Exerciţiul 3.66 *Să se studieze problema minimizării expresiei* $x_1 + x_2 + ... + x_n$ $(n \geq 2)$ *pentru* $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ *cu restricţia* $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$ *şi apoi să se deducă inegalitatea mediilor.*

Exerciţiul 3.67 *Cu o panglică de lungime a legăm o cutie de cadou de formă paralelipipedică. Care este volumul maxim al unei astfel de cutii?*

Soluţie Modelul matematic al problemei este

$$\max\ x_1 x_2 x_3$$

cu restricţiile $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq a$. Este clar că maximul este atins (Teorema lui Weierstrass) şi este strict pozitiv. Pentru standardizare, ne vom ocupa de problema

$$\min\ -x_1 x_2 x_3$$

cu restricţii (afine) scrise ca inegalităţi de forma $\leq$. Din nou aplicăm teoria şi avem sistemul

$$\begin{aligned}
&-x_2 x_3 - \lambda_1 + 2\lambda_4 = 0 \\
&-x_1 x_3 - \lambda_2 + 2\lambda_4 = 0 \\
&-x_1 x_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\
&\lambda_1 x_1 = 0 \\
&\lambda_2 x_2 = 0 \\
&\lambda_3 x_3 = 0 \\
&(2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - a)\lambda_4 = 0 \\
&\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\
&2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq a
\end{aligned}$$

Deducem

$$\begin{aligned} x_1(-x_2x_3 + 2\lambda_4) &= 0 \\ x_2(-x_1x_3 + 2\lambda_4) &= 0 \\ x_3(-x_1x_2 + 4\lambda_4) &= 0 \\ (2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - a)\lambda_4 &= 0 \end{aligned}$$

Adunăm primele trei ecuaţii şi avem $-3x_1x_2x_3 + \lambda_4(2x_1 + 2x_2 + 4x_3) = 0$, de unde

$$-3x_1x_2x_3 + a\lambda_4 = 0,$$

deci $\lambda_4 = \frac{3x_1x_2x_3}{a}$. Înlocuind în ecuaţia $x_1(-x_2x_3 + 2\lambda_4) = 0$ cum $x_1x_2x_3 \neq 0$ găsim $x_1 = \frac{a}{6}$. Analog, $x_2 = \frac{a}{6}$, $x_3 = \frac{a}{12}$. Multiplicatorii sunt $(0, 0, 0, \frac{a^2}{144})$. Deci soluţia problemei este $(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{12})$. □

Exerciţiul 3.68 *Să se modeleze problema determinării celui mai apropiat, respectiv al celui mai îndepărtat punct faţă de* $(3, -3)$ *de pe elipsa*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Să se scrie ecuaţia de determinare a multiplicatorului asociat problemei.

Exerciţiul 3.69 *Determinaţi dimensiunile unei cutii paralelipipedice de arie totală minimă având volumul* $v > 0$.

Exerciţiul 3.70 *Determinaţi dimensiunile unui pahar cilindric care are volumul* $v > 0$ *şi pentru care aria este minimă.*

Implementare Matlab 3.71 Sistemul dat de metoda celor mai mici pătrate pentru modelul $v = at + b$ admite soluţie unică:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i^2 & \sum_{i=1}^N t_i \\ \sum_{i=1}^N t_i & N \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N t_i v_i \\ \sum_{i=1}^N v_i \end{pmatrix}.$$

iar perechea (a, b) de mai sus reprezintă soluţia problemei. Să luăm exemplul concret: $N = 5$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_5 = 4$ şi $v_1 = 1.1$, $v_2 = 2.8$, $v_3 = 5.2$, $v_4 = 6.9$, $v_5 = 8.9$.

Pentru calculul parametrilor a, b implementăm codul:

```
t=[0,1,2,3,4];
v=[1.1,2.8,5.2,6.9,8.9];
A=[sum(t.^2) sum(t)
sum(t) 5]
B=[sum(t.*v)
sum(v) ]
U=A^(-1)*B
x=linspace(0,4.5,90);
```

```
y=U(1)*x+U(2);
plot(t,v,'o','Linewidth',2);
hold on;
plot(x,y);
```

Experimentând acest cod obţinem valorile 1.9700 şi 1.0400 precum şi graficul corespunzător.

Implementare Matlab 3.72 Implementăm metoda înjumătăţirii intervalului pe funcţia de la Exemplul 3.5.8.

```
clc
functie=@(x) [x^3-x-2];
a=1;b=2;
eps=0.00001;i=0;
while (abs(b-a)>eps)
 if functie((a+b)/2)==0
 break
 end
 if functie(a)*functie((a+b)/2)<0
 b=(a+b)/2;
 else
 a=(a+b)/2;
endif
i=i+1;
endwhile
x=(a+b)/2
i
functie(x)
```

cu rezultatele

```
x = 1.521381378173828
i = 17
ans = 9.934278368817218e-06
```

Exerciţiul 3.73 *Să se deseneze în Matlab graficul funcţiei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *date prin*

$$f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 - 4x + 1$$

şi să se deducă faptul că ecuaţia $f(x) = 0$ *are trei rădăcini reale. Să se aproximeze aceste rădăcini folosind metoda înjumătăţirii intervalului.*

Capitolul 4

Algoritmi iterativi

4.1 Descriere generală

Majoritatea problemelor studiate până acum au fost situaţii fericite, în sensul că am putut rezolva ecuaţiile ale căror soluţii dădeau punctele candidate la a fi soluţii. Apoi, folosind mijloacele teoretice pe care le-am dezvoltat anterior am fost capabili să rezolvăm complet problemele date. Totuşi, de foarte multe ori, pot apărea probleme pentru care nu putem rezolva sistemele ce dau punctele critice ale funcţiei obiectiv (în cazul problemelor fără restricţii) sau punctele critice ale lagrangianului (la problemele cu restricţii). Am văzut un astfel de exemplu chiar în finalul secţiunii precedente (problemă de găsire a soluţiei unei ecuaţii neliniare) sau cu ocazia discuţiei privind metoda celor mai mici pătrate (problemă de identificare a minimului unei funcţii). Pentru astfel de probleme, sunt necesari algoritmi pentru aproximarea soluţiilor, rădăcini sau puncte de minim, după caz.

În ceea ce ne priveşte, vom studia algoritmi iterativi. Toţi aceşti algoritmii cer precizarea unui punct de start pe care îl notăm cu x_0. Este bine ca acest punct să fie el însuşi o cât mai bună aproximare a soluţiei căutate (mai ales dacă aceasta nu este unică). De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

are două puncte de minim şi două rădăcini reale nenule. Dacă se pleacă cu o valoare x_0 apropiată de unul dintre aceste puncte, atunci este probabil ca algoritmul (pentru rezolvarea ecuaţiei sau pentru găsirea punctelor de extrem) să găsească o aproximare a acelui punct.

Revenind la discuţia generală, după alegerea lui x_0, algoritmul generează un şir de iteraţii $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ care au scopul de a se apropia de soluţia, notată $\overline{x}$ (soluţie a unei ecuaţii sau punct de optim). Evident, în practică, $x_k \neq \overline{x}$ pentru orice k pentru că, în caz contrar, soluţia este determinată într-un număr finit de paşi, ceea ce este, în general, imposibil. Generarea şirului (x_k) se va opri atunci când nu se mai pot face progrese în încercarea de apropiere de soluţie (conform regulii interne a algoritmului de generare a iteraţiilor) sau când a fost atinsă o anumită acurateţe dinainte stabilită. Orice algoritm trebuie să implementeze o regulă internă de generare a unei noi iteraţii utilizând iteraţiile deja existente. În general, fiecare nouă iteraţie trebuie să realizeze o apropiere de soluţie, dar există şi algoritmi nemonotoni, pentru care descreşterea nu trebuie să se producă neapărat la fiecare pas.

Două sunt problemele atunci când se studiază un algoritm întrucât ne interesează atât dacă algoritmul este global (i.e., este convergent pentru orice dată iniţială x_0), cât şi viteza de convergenţă.

Aşadar, o problemă foarte importantă din punct de vedere practic atunci când este studiat un algoritm este viteza sa de convergenţă.

Definiţia 4.1.1 (viteză de convergenţă) *Fie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subset \mathbb{R}^p$ un şir convergent la $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$ cu $x_k \neq \overline{x}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Spunem că:*

(i) (x_k) converge liniar dacă există $r \in (0,1)$ (numit rată de convergenţă) astfel încât pentru orice k suficient de mare,

$$\frac{\|x_{k+1}-\overline{x}\|}{\|x_k-\overline{x}\|} \leq r;$$

(ii) (x_k) converge pătratic dacă există $M > 0$ astfel încât pentru orice k suficient de mare,

$$\frac{\|x_{k+1}-\overline{x}\|}{\|x_k-\overline{x}\|^2} \leq M.$$

Observaţia 4.1.2 *În particular, dacă există limita*

$$\lim \frac{\|x_{k+1}-\overline{x}\|}{\|x_k-\overline{x}\|}$$

şi este un număr subunitar, atunci (x_k) converge liniar.

Similar, dacă există limita

$$\lim \frac{\|x_{k+1}-\overline{x}\|}{\|x_k-\overline{x}\|^2},$$

atunci (x_k) converge pătratic.

Observaţia 4.1.3 *Evident, convergenţa pătratică implică convergenţa liniară. Pentru convergenţa liniară, viteza este influenţată semnificativ de rata r, în timp ce pentru convergenţa pătratică dependenţa de M este mai puţin importantă. Folosind modelul oferit de definiţia convergenţei pătratice, putem defini convergenţe de orice ordin; spunem că avem o convergenţă de ordin $\theta > 1$ dacă există $M > 0$ astfel încât pentru orice k suficient de mare*

$$\frac{\|x_{k+1}-\overline{x}\|}{\|x_k-\overline{x}\|^\theta} \leq M.$$

Exemplul 4.1.4 (i) Şirul $\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$ este liniar convergent la 1 cu rata $r = \frac{1}{3}$.

(ii) Şirul $\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\right)$ converge pătratic la 1.

Vom vedea însă că sarcina proiectării unor algoritmi globali care să aibă viteză foarte bună de convergenţă (cel puţin pătratică) este una dificilă.

Începem în continuare studiul unor metode de a determina cu aproximaţie rădăcinile unor ecuaţii neliniare. Menţionăm că o ecuaţie neliniară nerezolvabilă a apărut la Exemplul 3.5.7.

În plus, să mai remarcăm că Teorema 3.4.3 transformă o problemă de optimizare în problema rezolvării ecuaţiei $L(x,(\lambda,\mu))=0$ (de cele mai multe ori neliniare şi chiar imposibil de rezolvat exact). Un alt argument ar fi şi acela că, în fond, problema rezolvării unei ecuaţii de forma $f(x)=0$ este echivalentă cu problema determinării soluţiilor globale ale problemei de optimizare fără restricţii $\min f^2$.

4.2 Principiul lui Banach de punct fix şi consecinţe

Această secţiune este dedicată Principiului lui Banach de punct fix care este unul dintre rezultatele fundamentale ale analizei neliniare.Vom vedea cum acest principiu şi demonstraţia sa conduc la un algoritm care ulterior va putea fi folosit pentru obţinerea unei metode de aproximare a rădăcinilor unei ecuaţii cu viteză pătratică.

Fie $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$. Un punct $x\in\mathbb{R}^p$ pentru care $f(x)=x$ se numeşte punct fix al lui f. Prin rezultat de punct fix vom înţelege un rezultat care asigură existenţa punctelor fixe pentru o funcţie dată.

Un prim rezultat simplu, dar foarte important, este următorul.

Teorema 4.2.1 *Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ şi $f:[a,b]\to[a,b]$ o funcţie continuă. Atunci există $\overline{x}\in[a,b]$ astfel încât $f(\overline{x})=\overline{x}$, adică f are cel puţin un punct fix.*

Demonstraţie Definim funcţia $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dată prin $g(x)=f(x)-x$. Este evident că g este continuă ca diferenţă de funcţii continue şi, în particular, are proprietatea lui Darboux. Evident, din cauză că $f(a),f(b)\in[a,b]$, avem inegalităţile

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a)-a\geq 0\\ g(b) &= f(b)-b\leq 0, \end{aligned}$$

deci $g(a)\cdot g(b)\leq 0$ şi din proprietatea lui Darboux, deducem existenţa unui punct $\overline{x}\in[a,b]$ având proprietatea că $g(\overline{x})=0$. Prin urmare, $f(\overline{x})=\overline{x}$ şi teorema este demonstrată. □

Observaţia 4.2.2 *Este esenţial ca intervalul să fie închis. De exemplu, funcţia $f:[0,1)\to[0,1)$ dată prin $f(x)=\frac{x+1}{2}$ nu are puncte fixe. De asemenea este esenţial ca intervalul să fie mărginit: funcţia $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$ dată prin $f(x)=x+x^{-1}$ nu are puncte fixe. În sfârşit, rezultatul nu mai este valabil dacă funcţia nu este definită pe un interval. De exemplu, $f:[-2,-1]\cup[1,2]\to[-2,-1]\cup[1,2]$, $f(x)=-x$ nu are puncte fixe.*

Rezultatul de mai sus este unul de existenţă şi nu ne dă informaţii suplimentare despre modalitatea de determinare a punctelor fixe. Pentru a obţine rezultate mai precise din acest punct de vedere dăm următoarea definiţie.

Definiţia 4.2.3 *Fie $A\subset\mathbb{R}^p$. O aplicaţie $f:A\to\mathbb{R}^q$ se numeşte contracţie pe A dacă există o constantă reală $\lambda\in(0,1)$ aşa încât $\|f(x)-f(y)\|\leq\lambda\|x-y\|$, pentru orice $x,y\in A$.*

Remarcăm că λ, valoare numită constantă de contracţie, nu depinde de x şi y, iar prin aplicarea funcţiei f unei perechi de puncte din A, distanţa dintre ele se micşorează (se contractă). Noţiunea de contracţie este un caz particular al conceptului de funcţie Lipschitz (Definiţia

4.5.52), deci, în particular, orice contracţie este funcţie continuă (Propoziţia 4.5.53). Evident, dacă λ este constantă de contracţie, atunci orice $\lambda' \in (\lambda, 1)$ este de asemenea constantă de contracţie.

Observaţia 4.2.4 *Are loc următoarea afirmaţie care este deseori utilizată pentru a arăta că o funcţie este Lipschitz: dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe I atunci f este Lipschitz pe I dacă şi numai dacă f este mărginită pe I, caz în care constanta Lipschitz este constanta de mărginire a lui $|f'|$. Demonstraţia afirmaţiei directe rezultă din chiar definiţia derivatei. Demonstraţia reciprocei se sprijină pe Teorema lui Lagrange: pentru orice două puncte $x, y \in I$, $x < y$ deducem existenţa unui element $c_{x,y} \in (x, y) \subset A$ cu proprietatea că*

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c_{x,y})(x - y)| \leq \sup_{x \in I} |f'(x)| \cdot |x - y|,$$

deci f este Lipschitz pe I. Enunţăm un caz particular imediat al acestei observaţii.

Propoziţia 4.2.5 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe I. Funcţia f este contracţie pe I dacă şi numai dacă există $M \in (0, 1)$ astfel încât $|f'(x)| \leq M$ pentru orice $x \in I$. În acest caz, $\sup_{x \in I} |f'(x)|$ este constantă de contracţie.*

Exemplul 4.2.6 Funcţia $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ definită prin $f(x) = \frac{1}{2}x$ este o contracţie a lui $\mathbb{R}^p$ în el însuşi întrucât:

$$\|f(x) - f(y)\| = \frac{1}{2}\|x - y\|.$$

De asemenea, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|$ este o contracţie.

Exemplul 4.2.7 Funcţia $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \cos x$ este o contracţie, de constantă $\lambda = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \sin 1$.

Exemplul 4.2.8 Funcţia $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \sin x$ nu este o contracţie pentru că $\sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| = \cos 0 = 1$).

Exemplul 4.2.9 Fie $A = [0, \infty)$ şi funcţia $f : A \to A$, definită prin $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Funcţia f este contracţie pe A, lucru pe care îl arătăm folosind Propoziţia 4.2.5. Pentru funcţia f definită anterior derivata sa este

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

şi deci

$$|f'(x)| = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Definim funcţia auxiliară $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dată prin $g(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Derivata acestei funcţii este

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2(1 + x^2)^2 - 2x \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} \\ &= \frac{2(1 + x^2)(1 + x^2 - 4x^2)}{(1 + x^2)^4} = 2\frac{1 - 3x^2}{(1 + x^2)^3}. \end{aligned}$$

Observăm că $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ este punctul de maxim global al funcţiei g şi $g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{8\sqrt{3}} < 1$. Deci $|f'(x)| \leq \frac{9}{8\sqrt{3}} < 1$ oricare ar fi $x \in [0, \infty)$. Rezultă din Propoziţia 4.2.5 că f este contracţie.

Observaţia 4.2.10 *Menţionăm că ipoteza $|f'(x)| < 1$ pentru orice $x \in (a, b)$ nu implică faptul că f este contracţie pe (a, b). Exemplu: funcţia $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = \sin x$ discutată mai sus. Un alt exemplu de acelaşi tip este $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$.*

Teorema lui Banach de punct fix (sau Principiul lui Banach de punct fix) este un rezultat care asigură, în anumite condiţii, atât existenţa, cât şi unicitatea punctului fix. Această teoremă stă la baza obţinerii a numeroase rezultate matematice remarcabile cum ar fi, printre altele, teorema funcţiilor implicite sau teoreme privind existenţa şi unicitatea soluţiei unor ecuaţii şi sisteme diferenţiale. Formulăm acum rezultatul anunţat, rezultat demonstrat de către Stefan Banach în 1922 în cadrul spaţiilor normate complete.

Teorema 4.2.11 (Principiul lui Banach de punct fix) *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime închisă nevidă şi $f : A \to A$ o contracţie. Atunci f admite un unic punct fix. În plus, acest punct este limita oricărui şir (x_k) construit astfel:*

$$\begin{cases} x_0 \in A \\ x_{k+1} = f(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Demonstraţie Ca de obicei în cazul rezultatelor de existenţă şi unicitate, împărţim demonstraţia în două etape. Arătăm mai întâi existenţa şi apoi unicitatea punctului fix. Conform definiţiei, există un număr real $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|,$$

pentru orice $x, y \in A$. Să considerăm $x_0 \in A$ un punct arbitrar şi să notăm cu $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), ..., x_k = f(x_{k-1})$, operaţie care se poate face pentru orice număr natural $k \geq 1$. Se observă că $x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ şi, în general, $x_k = f^k(x_0)$ (am notat f^2 în loc de $f \circ f$ şi, în general, f^k în loc de $f \circ f \circ ... \circ f$ de k ori). Arătăm că $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este un şir Cauchy. Au loc relaţiile

$$\|x_2 - x_1\| = \|f(x_1) - f(x_0)\| \leq \lambda \|x_1 - x_0\|,$$
$$\|x_3 - x_2\| = \|f(x_2) - f(x_1)\| \leq \lambda \|x_2 - x_1\| \leq \lambda^2 \|x_1 - x_0\|.$$

Folosind metoda inducţiei matematice se obţine inegalitatea

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leq \lambda^k \|x_1 - x_0\|$$

pentru orice $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pentru $\ell, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, numere naturale arbitrare, putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned} \|x_{\ell+k} - x_k\| &\leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_{k+2} - x_{k+1}\| + \cdots + \|x_{k+\ell} - x_{k+\ell-1}\| \\ &\leq \lambda^k \|x_1 - x_0\| + \lambda^{k+1} \|x_1 - x_0\| + \cdots + \lambda^{k+\ell-1} \|x_1 - x_0\| \\ &= \|x_1 - x_0\| (\lambda^k + \lambda^{k+1} + \cdots + \lambda^{k+\ell-1}) = \|x_1 - x_0\| \lambda^k \frac{1 - \lambda^\ell}{1 - \lambda} \\ &\leq \|x_1 - x_0\| \frac{\lambda^k}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Deci

$$\|x_{k+\ell} - x_k\| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\| \tag{4.1}$$

pentru orice $k, \ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dacă $\|x_1 - x_0\| = 0$ rezultă că $f(x_0) = x_0$, adică x_0 este punct fix şi deci existenţa punctului fix este asigurată. Dacă $\|x_1 - x_0\| \neq 0$, atunci, folosind faptul că $\lambda \in (0,1)$, deducem că

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda^k}{1-\lambda} = 0,$$

deci

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\| = 0.$$

Scriind caracterizarea cu ε a acestei convergenţe, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, astfel încât pentru orice $k \geq k_\varepsilon$ avem

$$\frac{\lambda^k}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\| < \varepsilon.$$

Combinând această relaţie cu relaţia (4.1) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $k_\varepsilon \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, astfel încât pentru orice $k \geq k_\varepsilon$ şi orice $\ell \in \mathbb{N}$, are loc

$$\|x_{k+\ell} - x_k\| < \varepsilon.$$

Am obţinut astfel faptul că (x_k) este un şir Cauchy şi cum $\mathbb{R}^p$ este un spaţiu complet, şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este convergent, deci există $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$ cu $\lim_{k\to\infty} x_k = \overline{x}$. Cum $(x_k) \subset A$ şi A este închisă, deducem că $\overline{x} \in A$. Reamintim că şirul este dat prin relaţia

$$x_0 \in \mathbb{R}^p, \ f(x_k) = x_{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Funcţia f este continuă deoarece orice contracţie este continuă (a se vedea Propoziţia 4.5.53). Deci, din proprietăţile funcţiilor continue, există limita şirului $(f(x_k))_k$ şi este egală cu $f(\overline{x})$. În relaţia (4.2) trecem la limită pentru $k \to \infty$ şi obţinem

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_{k+1},$$

adică

$$f(\overline{x}) = \overline{x},$$

deci $\overline{x}$ este punct fix. Existenţa este demonstrată.

Pentru a demonstra unicitatea, să presupunem că ar exista două puncte fixe diferite x şi y. Atunci

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\|.$$

Cum $\|x - y\| > 0$ rezultă $1 \leq \lambda$ ceea ce este absurd. Prin urmare există un singur punct fix. □

Observaţia 4.2.12 *Aşadar, Teorema lui Banach de punct fix arată nu numai existenţa şi unicitatea punctului fix ci, în acelaşi timp, ne oferă o metodă pentru obţinerea cu aproximaţie a punctului $\overline{x}$ şi de asemenea ne permite punerea în evidenţă a unei formule pentru aprecierea erorii ce se produce considerând respectiva aproximaţie. Această metodă de aproximare a soluţiei prin termenii şirului $x_k = f^k(x_0)$ se numeşte metoda aproximaţiilor succesive sau metoda aproximaţiilor Picard după numele lui C. É. Picard care a iniţiat această metodă în 1890.*

În afară de aceste observaţii ce ţin de modul de convergenţă a iteraţiilor către punctul fix, facem şi câteva observaţii privitoare la ipotezele teoremei.

Observaţia 4.2.13 *Ipoteza $\lambda < 1$ este esenţială atât pentru existenţa cât şi pentru unicitatea punctului fix. Astfel se vede, spre exemplu, că pentru aplicaţia identică $f(x) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, orice punct al lui $\mathbb{R}$ este punct fix, în timp ce aplicaţia $f(x) = x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, nu posedă niciun punct fix. În ambele cazuri, $\lambda = 1$.*

Observaţia 4.2.14 *Dacă A nu este închisă, se pierde argumentul de completitudine şi rezultatul Teoremei lui Banach nu se mai păstrează. Spre exemplu, aplicaţia $f : (0, 1] \to (0, 1]$ definită prin $f(x) = \frac{x}{2}$ nu are niciun punct fix deşi este contracţie.*

Analiza enunţului, dar şi a demonstraţiei Principiului lui Banach ne oferă mai multe concluzii utile în ceea ce priveşte proiectarea unor algoritmi. Mai întâi, să vedem cum a fost obţinut (în partea de existenţă) punctul fix: pentru fiecare punct iniţial $x_0 \in A$ şirul dat de relaţia (4.2) converge către unicul punct fix $\overline{x}$ al aplicaţiei f.

În plus avem şi estimarea

$$\|x_k - \overline{x}\| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\|, \ \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \tag{4.3}$$

care rezultă din relaţia (4.1) prin trecere la limită pentru $m \to \infty$.

Estimarea "a priori" astfel obţinută ajută la determinarea numărului maxim de paşi ai iteraţiei din relaţia (4.2) pentru obţinerea preciziei dorite în estimarea punctului fix, cunoscându-se valoarea iniţială x_0 şi valoarea $x_1 = f(x_0)$, lucru de care ne vom folosi atunci când vom discuta unii algoritmi. Mai exact, pentru o obţine o eroare mai mică decât $\varepsilon > 0$ este nevoie ca

$$\frac{\lambda^k}{1-\lambda} \|x_1 - x_0\| < \varepsilon.$$

Astfel, cu cât λ este mai aproape de 0 această valoare este mai mică şi va trebui să iterăm de mai puţine ori pentru a avea precizia dorită. De asemenea, se observă că o valoare mică a lui $\|x_1 - x_0\|$ duce de asemenea la scăderea numărului de iteraţii necesare unei precizii prestabilite. Deci, aşa cum este de aşteptat, este de preferat să se plece cu puncte cât mai apropiate de punctul fix căutat.

De asemenea, se obţine şi următoarea estimare:

$$\|x_k - \overline{x}\| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} \|x_k - x_{k-1}\| \tag{4.4}$$

care se deduce tot prin trecere la limită pentru $\ell \to \infty$ în inegalitatea

$$\begin{aligned}\|x_{k+\ell} - x_k\| &\leq \|x_{k+1} - x_k\| + \|x_{k+2} - x_{k+1}\| + \cdots + \|x_{k+\ell} - x_{k+\ell-1}\| \\ &\leq \lambda \|x_k - x_{k-1}\| + \lambda^2 \|x_k - x_{k-1}\| + \cdots + \lambda^\ell \|x_k - x_{k-1}\| \\ &= (\lambda + \lambda^2 + ... + \lambda^\ell) \|x_k - x_{k-1}\|.\end{aligned}$$

Viteza de convergenţă a şirului (x_k) este dată de aproximarea

$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| \leq \lambda \|x_k - \overline{x}\|$$

care se deduce din şirul de relaţii

$$\|x_{k+1} - \overline{x}\| = \|f(x_k) - f(\overline{x})\| \leq \lambda \|x_k - \overline{x}\|.$$

Deci, iteraţiile Picard converg cel puţin liniar. Asupra vitezei de convergenţă vom reveni pe larg un pic mai târziu.

O altă inegalitate ce se obţine imediat din definiţia contracţiei este

$$\|x_k - \overline{x}\| \leq \lambda^k \|x_0 - \overline{x}\|, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

A rezolva o ecuaţie de tipul $g(x) = 0$ este echivalent cu a găsi punctele fixe ale funcţiei $f(x) = g(x) + x$, aşa încât această dicuţie referitoare la convergenţa iteraţiilor Picard este aplicabilă, prin această echivalenţă, unor algoritmi de determinare a soluţiilor unor ecuaţii.

Fie I este un interval închis (în sens topologic) şi $f : I \to I$ este o funcţie derivabilă astfel încât derivata sa este mărginită (în modul) pe I de o constantă strict subunitară. Atunci pentru orice dată iniţială $x_0 \in I$ iteraţia Picard definită de $x_{k+1} = f(x_k)$, $k \geq 0$ este convergentă către unicul punct fix $\overline{x}$ al lui f din I. Presupunem că f este de clasă C^1.

Se poate observa fără dificultate că dacă punctul fix nu este atins (şirul este nestaţionar), atunci

$$\frac{x_{k+1} - \overline{x}}{x_k - \overline{x}} = \frac{f(x_k) - \overline{x}}{x_k - \overline{x}} \overset{k\to\infty}{\to} f'(\overline{x}).$$

Astfel, observăm că, în general avem de-a face cu o convergenţă liniară. Pentru k suficient de mare, eroarea la pasul $(k+1)$ se comportă ca eroarea la pasul k înmulţită cu o constantă subunitară. Acest tip de convergenţă este relativ lent.

Observaţia 4.2.15 *Aşadar, viteza convergenţei iteraţiilor Picard este dată de valoarea lui $f'(\overline{x})$. În general, dacă $f'(\overline{x}) \neq 0$, viteza de convergenţă a iteraţiilor Picard este relativ lentă. În cazul cel mai favorabil în care $f'(x) = 0$ putem avea convergenţe mai bune decât convergenţa liniară. În general, în contextul de mai sus, dacă $f'(\overline{x}) = 0$ şi f este de clasă C^2 atunci, aplicând de două ori regula lui L'Hôpital avem:*

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x) - \overline{x}}{(x - \overline{x})^2} = \frac{f''(\overline{x})}{2},$$

deci pentru orice iteraţie Picard nestaţionară

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \overline{x}}{(x_k - \overline{x})^2} = \frac{f''(\overline{x})}{2},$$

adică o convergenţă pătratică.

Exemplul 4.2.16 Să considerăm funcţia $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dată prin $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Am văzut că f este o contracţie şi are un singur punct fix care este unica soluţie pozitivă a ecuaţiei $x^3 + x - 1 = 0$ (care are valoarea aproximativă $\overline{x} \approx 0.6823$; a se vedea Implementare Matlab 4.2), iar şirul iteraţiilor Picard satisface:

$$\frac{x_{k+1} - \overline{x}}{x_k - \overline{x}} \overset{n\to\infty}{\to} f'(\overline{x}) = \frac{-2\overline{x}}{(1+\overline{x}^2)^2} = -2\overline{x}^3 \approx -0.6353.$$

Cum valoarea $|f'(\overline{x})|$ este relativ mică ne aşteptăm la o viteză de convergenţă liniară acceptabilă. Deci, practic pentru k suficient de mare, la fiecare pas al iteraţiei, eroarea se multiplică (în valoare absolută) cu aproximativ 0.6353.

Exemplul 4.2.17 Să luăm cazul funcţiei $f : [\sqrt{2}, \infty) \to [\sqrt{2}, \infty)$ dată prin

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Este uşor de verificat că f este bine definită (inegalitatea mediilor). În plus,

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{2},$$

deci f este contracţie şi are ca unic punct fix $\overline{x} = \sqrt{2}$. Se observă că $f'(\overline{x}) = 0$ şi, deci, pentru orice iteraţie Picard nestaţionară avem

$$\frac{x_{k+1} - \overline{x}}{(x_k - \overline{x})^2} = \frac{1}{2x_k} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{f''(\overline{x})}{2}.$$

Aşadar are loc o convergenţă pătratică, aşa încât ne aşteptăm la o viteză de convergenţă foarte bună (a se vedea Implementare Matlab 4.2).

4.3 Metoda lui Newton

Metoda a lui Newton este unul dintre cele mai cunoscute procedee iterative de a aproxima rădăcinile unei funcţii care are proprietăţi suficiente de derivabilitate. Din nou vom vedea că această metodă este una locală (algoritmul nu este global, în sensul că pentru a avea o convergenţă a şirului de iteraţii către o anume rădăcină trebuie ca punctul de plecare să fie suficient de apropiat de rădăcina respectivă), dar are o rată de convergenţă pătratică. Să considerăm o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 şi fie $\overline{x}$ o rădăcină simplă a lui f (i.e. $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\overline{x}) \neq 0$). Considerăm o valoare x_0 suficient de apropiată de $\overline{x}$. Şirul iteraţiilor Newton pleacă de la ecuaţia tangentei la graficul lui f. Cerinţa este de a considera de fiecare dată ca punct următor al iteraţiei valoarea în care tangenta la punctul curent al iteratei intersectează axa Ox. Astfel, pentru x_k dat, avem ecuaţia:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Această ecuaţie, din care trebuie să obţinem expresia lui x_{k+1}, arată de ce se solicită ca soluţia să fie simplă şi să se plece dintr-un punct apropiat lui $\overline{x}$: trebuie să ne plasăm într-o vecinătate

a lui $\overline{x}$ în care f' nu se anulează, ori o astfel de vecinătate există tocmai datorită faptului că f' este continuă şi nenulă în $\overline{x}$. Astfel, se defineşte iteraţia Newton prin formula:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ \forall k \geq 0. \tag{4.5}$$

Arătăm în continuare că pentru o alegere potrivită a datei iniţiale iteraţia (4.5) este bine definită, iar şirul (x_k) converge pătratic la $\overline{x}$.

Fie $L \in (0,1)$. Să notăm cu V un interval închis centrat în $\overline{x}$ pentru care $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V$ şi

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < L,\ \forall x \in V. \tag{4.6}$$

Relaţia de mai sus este posibilă tocmai pentru că $f(\overline{x}) = 0$ şi $f'(\overline{x}) \neq 0$. Fie acum funcţia $g : V \to \mathbb{R}$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Evident, această funcţie este bine definită pe V şi cum

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

din alegerea lui V, deducem că g este o contracţie. Pe de altă parte $g(\overline{x}) = \overline{x}$, deci, în particular,

$$|g(x) - \overline{x}| \leq L\,|x - \overline{x}|\,,\ \forall x \in V$$

ceea ce înseamnă că g aplică V în V. Acum, dacă plecăm cu $x_0 \in V$, să observăm că iteraţia Newton este de fapt o iteraţie Picard asociată funcţiei g. Aplicând teoria dezvoltată anterior, iteraţia Newton (pentru orice dată iniţială $x_0 \in V$) converge la punctul fix al lui g care este tocmai rădăcina lui f din V (adică $\overline{x}$). Aşa cum am spus anterior,

$$g'(\overline{x}) = 0$$

şi deducem că are loc o convergenţă pătratică pentru că

$$\begin{aligned}\lim_k \frac{x_{k+1} - \overline{x}}{(x_k - \overline{x})^2} &= \lim_{x \to \overline{x}} \frac{g(x) - \overline{x}}{(x - \overline{x})^2} \\ &= \lim_{x \to \overline{x}} \frac{1}{f'(x)} \frac{xf'(x) - f(x) - \overline{x}f'(x)}{(x - \overline{x})^2} = \frac{f''(\overline{x})}{2f'(\overline{x})} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Discuţia de mai sus indică faptul că pentru a fi siguri că iteraţia Newton converge către soluţia dorită cu viteză pătratică, trebuie ca x_0 să fie dintr-o vecinătate V a soluţiei în care să nu se anuleze derivata şi în care să aibă loc condiţia (4.6). Astfel, pentru funcţii care au mai multe zerouri, în funcţie de data iniţială aleasă putem găsi diferite soluţii.

Se poate întâmpla ca metoda lui Newton să funcţioneze şi pentru cazul unei rădăcini multiple, dar convergenţa în acest caz poate să nu mai fie pătratică. Astfel, să presupunem că f

este de forma $f(x) = (x - \overline{x})^q u(x)$, unde $q > 1$, u este de clasă C^2 şi $u(\overline{x}) \neq 0$. Atunci funcţia g se scrie

$$g(x) = x - \frac{(x - \overline{x})u(x)}{qu(x) + (x - \overline{x})u'(x)}$$

iar, după calcule,

$$g'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{q}\right) + (x - \overline{x})\frac{2u'(x)}{qu(x)} + (x - \overline{x})^2 \frac{u''(x)}{q^2 u(x)}}{\left[1 + (x - \overline{x})\frac{u'(x)}{qu(x)}\right]^2}.$$

Pentru valori suficient de apropiate de $\overline{x}$, $|g'(x)| < 1$, deci iteraţiile Picard generate de g converg la punctul fix al lui g care este $\overline{x}$ (în vecinătatea considerată). Pe de altă parte, $g'(\overline{x}) = 1 - \frac{1}{q} \neq 0$, deci convergenţa este doar liniară. Aşadar, procedura Newton converge pătratic doar pentru rădăcini simple. Dacă pentru o rădăcină $\overline{x}$ se cunoaşte ordinul de multiplicitate q, atunci se poate considera funcţia

$$g_q(x) = x - q\frac{f(x)}{f'(x)} = x - q\frac{(x - \overline{x})u(x)}{qu(x) + (x - \overline{x})u'(x)},$$

iar un calcul rapid arată că $g_q'(\overline{x}) = 0$, deci, folosind considerentele anterioare, se reobţine convergenţa pătratică.

Încheiem cu discutarea unor posibilităţi de a alege punctul x_0 suficient de aproape de soluţie astfel încât metoda lui Newton să conveargă la punctul căutat. O primă posibilitate (empirică) este aceea de a studia graficul funcţiei şi de a alege o valoare x_0 care pare a fi destul de apropiată soluţiei. O altă variantă ar fi de a aplica o altă metodă de aproximare a rădăcinilor unei funcţii a cărei convergenţă este mai lentă dar care totuşi după câteva iteraţii ne duce în apropierea soluţiei, moment din care putem alege x_0 şi aplica metoda lui Newton pentru accelerarea convergenţei. O astfel de metodă este, de exemplu, metoda înjumătăţirii intervalului. Cum am discutat, în general, această convergenţă nu este foarte rapidă, deci e de preferat să o folosim doar preţ de câteva iteraţii pentru a găsi un punct relativ apropiat de soluţie care să folosească drept dată iniţială pentru mult mai rapida convergenţă Newton.

Observaţia 4.3.1 *Implementarea metodei lui Newton ne permite să rezolvăm (cu aproximaţie) ecuaţia neliniară de la Exemplul 3.5.7 şi deci să aflăm soluţia problemei de optimizare respective: a se vedea Exerciţiul 4.22.*

Observaţia 4.3.2 *Metoda lui Newton se poate aplica pentru a aproxima puncte fixe cu viteză pătratică, pierzându-se însă caracterul global al algoritmului. Pentru ecuaţia $f(x) = x$, funcţia g ale cărei iteraţii Picard sunt iteraţii Newton este*

$$g(x) = x - \frac{f(x) - x}{f'(x) - 1}.$$

Pentru ilustrarea acestei observaţii, a se vedea Exerciţiul 4.23.

Observaţia 4.3.3 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie ce clasă C^3, strict convexă şi coercivă. Atunci f are un unic punct de minim global $\overline{x}$ care este soluţia ecuaţiei $f'(\overline{x}) = 0$. Astfel, pentru aproximarea sa, putem folosi metoda lui Newton şi iteraţia devine*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.$$

Pentru ilustrarea acestei observaţii, a se vedea Implementare Matlab 4.28.

4.4 Metoda gradientului

În final descriem o metodă numerică dedicată aproximării punctelor de minim. Există mai multe modele generale de proiectare a algoritmilor pentru optimizarea liberă de constrângeri, dar noi ne vom concentra pe modelul numit căutarea direcţiei de descreştere sau metoda gradientului. Scopul acestui algoritm este acela de a realiza la fiecare pas o descreştere a funcţiei obiectiv $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, de clasă C^2 (i.e., $f(x_{k+1}) < f(x_k)$). Algoritmul calculează la fiecare pas k, o direcţie p_k (un vector de normă 1) şi un pas $\alpha_k > 0$ de mişcare pe direcţia p_k. Astfel, plecând de la iteraţia x_k, noua iteraţie va fi

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k. \tag{4.7}$$

În cadrul acestei scheme sunt importante atât alegerea direcţiei cât şi a pasului. Din formula lui Taylor, există $t \in (0, \alpha)$

$$f(x_k + \alpha p) = f(x_k) + \alpha \nabla f(x_k)(p) + \frac{1}{2}\alpha^2 \nabla^2 f(x_k + tp)(p, p). \tag{4.8}$$

Oprindu-ne cu evaluarea la diferenţiala de ordinul întâi, direcţia pe care f descreşte cel mai mult este dată de soluţia problemei de minimizare pe bila unitate închisă a funcţiei (în variabila p), $p \mapsto \nabla f(x_k)(p)$. Cum

$$\nabla f(x_k)(p) = \|p\| \, \|\nabla f(x_k)\| \cos\theta = \|\nabla f(x_k)\| \cos\theta$$

unde θ este unghiul dintre p şi $\nabla f(x_k)$, este clar că minimul este atins pentru

$$p = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$$

dacă $\|\nabla f(x_k)\| \neq 0$. Deci dacă s-a atins un punct critic, atunci nu putem înainta. În caz contrar, alegerea lui p_k de forma de mai sus se numeşte metoda celei mai bune descreşteri. Pe de altă parte, orice altă direcţie pentru care unghiul cu $\nabla f(x_k)$ este mai mare de $\frac{\pi}{2}$ (i.e. $\cos\theta < 0$) produce o descreştere a funcţiei f dacă α este suficient de mic (conform (4.8)), întrucât ultimul termen conţine α^2, deci tinde mai rapid către zero decât $\alpha \nabla f(x_k)(p)$. O astfel de direcţie (pentru care $\nabla f(x_k)(p_k) < 0$) se numeşte direcţie de descreştere.

Apare acum problema alegerii lui α_k. Alegerea ideală ar fi minimul, pentru $\alpha > 0$, al funcţiei $\alpha \mapsto f(x_k + \alpha p_k)$, dar, din nou, problema aceasta nu este neapărat una simplu de rezolvat. O altă posibilitate care ar fi mai simplă este aceea de a alege un număr $\alpha > 0$ pentru care

$f(x_k + \alpha p_k) < f(x_k)$, dar această alegere ar putea să nu conducă la o descreştere rezonabil de rapidă a funcţiei. Descriem acum o tehnică de alegere a pasului, numită condiţia Armijo (fiind introdusă de matematicianul american Larry Armijo în 1966)

Fie $\alpha > 0$, $\beta \in (0,1)$ şi $c \in (0,1)$. Se testează inegalitatea

$$f(x_k) + c\left(\beta^i \alpha\right) \nabla f(x_k)(p_k) > f\left(x_k + \beta^i \alpha p_k\right), \ i = 0, 1, 2, ... \tag{4.9}$$

iterativ pornind cu $i = 0$ (sau, mai practic, cu valoarea lui i obţinută la precedenta iteraţie). Ideea este că dorim ca descreşterea funcţiei să fie suficient de mare. Primul test, pentru $i = 0$ (sau pentru i specificat mai sus) adică pentru pasul α (respectiv pasul α_k) este

$$f(x_k) + c\alpha \nabla f(x_k)(p_k) > f(x_k + \alpha p_k).$$

Dacă inegalitatea de mai sus este satisfăcută alegem $x_{k+1} = x_k + \alpha p_k$ (adică $\alpha_k = \alpha$). Altfel, pasul se micşorează la $\beta\alpha$ şi efectuăm testul (pentru $i = 1$)

$$f(x_k) + c\beta\alpha \nabla f(x_k)(p_k) > f(x_k + \beta\alpha p_k).$$

Continuând procedeul în acelaşi fel, obţinem o metodă foarte practică.

Observaţia 4.4.1 *Iteraţiile prevăzute de Regula Armijo pentru determinarea pasului se termină la un moment dat. Demonstrăm această aserţiune. Evident, atunci când i este foarte mare, $t := \beta^i \alpha$ este foarte apropiat de 0. Presupunem că*

$$f(x_k + tp_k) \geq f(x_k) + ct\nabla f(x_k)(p_k), \ \forall t.$$

Cum f este de clasă C^1, există o funcţie θ continuă în 0, cu $\lim_{t\to 0} \frac{\theta(t)}{t} = 0$ astfel încât

$$f(x_k + tp_k) = f(x_k) + t\nabla f(x_k)(p_k) + \theta(t).$$

Obţinem

$$(c-1)\nabla f(x_k)(p_k) + \frac{\theta(t)}{t} \leq 0.$$

Pentru $t \to 0$ (adică pentru $i \to \infty$), deducem

$$(c-1)\nabla f(x_k)(p_k) \leq 0,$$

ceea ce este fals.

Discutăm acum, foarte pe scurt, unele elemente privind convergenţa metodei celei mai bune descreşteri.

O primă cerinţă pentru a avea rezultate de convergenţă semnificative este legată de unghiul dintre $\nabla f(x_k)$ şi direcţia (vectorul de normă 1) p_k. Dacă notăm cu θ_k acest unghi, atunci impunem să existe $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice k

$$\cos\theta_k = \frac{\nabla f(x_k)(p_k)}{\|\nabla f(x_k)\|} \in [-1, -\varepsilon). \tag{4.10}$$

Astfel, chiar dacă p_k nu este cea mai bună direcţie de descreştere, cerem totuşi ca unghiul să nu se apropie oricât de mult de $\frac{\pi}{2}$. Evident, în cazul alegerii celei mai bune direcţii de descreştere $\cos\theta_k = -1$ pentru orice k, deci condiţia are loc.

Teorema 4.4.2 *Fie* (x_k) *şir de vectori generaţi după formula de recurenţă*

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

unde direcţiile (p_k) *satisfac* (4.10) *şi paşii* (α_k) *satisfac Regula Armijo* (4.9) *cu parametrii* α, β, c. *Dacă* $\overline{x}$ *este un punct limită al şirului* (x_k), *atunci* $\overline{x}$ *este punct critic al lui* f *(adică* $\nabla f(\overline{x}) = 0$*).*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că (x_k) este convergent la $\overline{x}$, iar (p_k) este convergent la o direcţie p. Dacă pasul α_k a fost validat la încercarea i în (4.9), atunci avem

$$f(x_k) - f(x_k + \alpha_k p_k) > -c\alpha_k \nabla f(x_k)(p_k) \geq \varepsilon c \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|, \tag{4.11}$$

iar dacă încercarea $i-1$ este invalidă

$$f(x_k) - f\left(x_k + \frac{\alpha_k}{\beta} p_k\right) \leq -c\frac{\alpha_k}{\beta} \nabla f(x_k)(p_k). \tag{4.12}$$

Presupunem, prin reducere la absurd, că $\nabla f(\overline{x}) \neq 0$. Cum $(f(x_k))$ este descrescător la $f(\overline{x})$ deducem că

$$f(x_k) - f(x_k + \alpha_k p_k) = f(x_k) - f(x_{k+1}) \to 0,$$

deci

$$\alpha_k \nabla f(x_k)(p_k) \to 0.$$

Dar, pe baza (4.10), prin trecere la limită, $\nabla f(\overline{x})(p) < 0$, deci $\alpha_k \to 0$. Aceasta implică faptul că pentru k mare alegerea pasului trece prin procedura de ajustare (backtracking), adică se întâmplă (4.12). Folosind Teorema lui Lagrange (pentru funcţii de mai multe variabile), există $z_k \in \left(x_k, x_k + \frac{\alpha_k}{\beta} p_k\right)$ astfel încât

$$-\frac{\alpha_k}{\beta} \nabla f(z_k)(p_k) \leq -c\frac{\alpha_k}{\beta} \nabla f(x_k)(p_k).$$

Cum $z_k \to \overline{x}$, prin simplificare şi trecere la limită obţinem contradicţia $\nabla f(\overline{x})(p) \geq 0$. Deci $\nabla f(\overline{x}) = 0$. □

În forma menţionată, sub ipoteze minimale, algoritmul nu garantează convergenţa către un punct de minim, dar din punct de vedere practic, dacă se constată o aglomerare a termenilor şirului sau dacă valoarea absolută a normei gradientului în iteraţia curentă este foarte mică, atunci suntem probabil în apropierea unui punct critic, deci, posibil, a unui punct de minim.

4.5 Exerciţii

Implementare Matlab 4.1 Dorim să aproximăm soluţia ecuaţiei $\cos x = x$, $x \in [0,1]$, folosind algoritmul dat de Principiul lui Banach. Evident, o soluţie a acestei ecuaţii este punct fix pentru restricţia funcţiei cos la intervalul $[0,1]$. Funcţia cos este o contracţie întrucât $\sup_{x\in[0,1]} |\cos' x| = \sin 1 < 1$. Mai mult, orice calculator ne dă valoarea aproximativă a acestei constante de contracţie: $\sin 1 \simeq 0.84147$, deci

$$|\cos x - \cos y| \leq 0.8415\,|x - y|\,.$$

Atunci, conform Principiului lui Banach de punct fix, există o singură soluţie a ecuaţiei menţionate care aproximează folosind şirul iteraţiilor Picard generat de dată iniţială $x_0 \in [0,1]$ arbitrar aleasă. Totuşi, am vrea să ştim cât de bine aproximăm soluţia după un număr prestabilit de iteraţii. Sau, spre exemplu, de câte iteraţii este nevoie pentru o obţine valoarea lui $\overline{x}$ cu o eroare mai mică decât 10^{-3}. Acest lucru este posibil datorită estimărilor privind viteza de convergenţă a aproximaţiilor Picard în Principiul lui Banach.

Avem următoarele estimări:

$$|x_k - \overline{x}| \leq |x_1 - x_0|\,\frac{\lambda^k}{1-\lambda} \tag{4.13}$$

$$|x_k - \overline{x}| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}\,|x_k - x_{k-1}| \tag{4.14}$$

Această discuţie ne va ajuta să experimentăm consecinţele acestor formule. Ţinând cont de relaţiile (4.13) şi (4.14), pentru $x_0 = 0$ avem

$$|x_k - \overline{x}| \leq \frac{0.8415^k}{1-0.8415} \text{ şi } |x_k - \overline{x}| \leq \frac{0.8415}{1-0.8415}\,|x_k - x_{k-1}|\,.$$

Se poate verifica direct (a se şi vedea calculele de mai jos) că a doua estimare este mai bună decât prima. Astfel, valoarea $\frac{0.8415^k}{1-0.8415}$ ajunge sa fie mai mică decât 0.001 pentru $k = 50$, în timp ce a doua este sub 0.001 mult mai repede, pentru $k = 21$. Luând $k = 21$ obţinem o încadrare a lui $\overline{x}$ între două valori foarte apropiate.

Programele Matlab care verifică afirmaţiile de mai sus sunt:

```
functie=@(x) [cos(x)];
lambda=0.8415;
u=0; c=abs(functie(u)-u)/(1-lambda); i=0;
while c*lambda>0.001 % abs(u-functie(u))>0.001
i=i+1; c=c*lambda; u =functie(u);
end
disp(i); disp(c); disp(u);
```

care returnează

```
 50
 0.0011290
 0.73909
```

şi respectiv

```
u=0; i=0;
while (0.8415/(1-0.8415))*abs((u-cos(u)))>0.001
    i=i+1; u=cos(u);
end
disp(i); disp((0.8415/(1-0.8415))*abs((u-cos(u)))); disp(u);
```

care returnează

```
21
0.0008820
0.73909
```

Din nou, procesul de aproximare este mai rapid dacă se pleacă cu o valoare iniţială mai apropiată de $\overline{x}$. De exemplu, pentru $x_0 = 0.7$, estimările

$$|x_k - \overline{x}| \leq \frac{0.8415^k}{1 - 0.8415} |\cos(0.7) - 0.7| \text{ şi } |x_k - \overline{x}| \leq \frac{0.8415}{1 - 0.8415} |x_k - x_{k-1}|$$

dau o eroare inferioară lui 0.001 pentru valori mai mici ale lui k, valori ce se pot determina făcând modificările evidente în programele de mai sus.

Implementare Matlab 4.2 Să considerăm funcţia $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dată prin $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Am văzut că f este o contracţie şi are un singur punct fix care este unica soluţie pozitivă a ecuaţiei $x^3 + x - 1 = 0$, iar şirul iteraţiilor Picard satisface:

$$\frac{x_{k+1} - \overline{x}}{x_k - \overline{x}} \overset{k\to\infty}{\to} f'(\overline{x}) = \frac{-2\overline{x}}{(1 + \overline{x}^2)^2} = -2\overline{x}^3 \approx -0.63534438165.$$

Să studiem viteza de convergenţă prin intermediul unui program Matlab. Criteriul de oprire este atingerea unui număr maxim de iteraţii (1000) sau cazul în care distanţa dintre două iteraţii consecutive este sub o toleranţă admisă (10^{-7}).

```
functia=@(x) [1/(1+x^2)];
tol=1e-7; maxiter=1000;
k=0; x=1; x_vechi=0;
%Picard
while abs(x-x_vechi)>tol && k<maxiter
      x_vechi=x; x=functia(x); k=k+1;
end
%endPicard
disp(x); disp(k);
```

Rezultatele afişate sunt:

```
-->disp(u); 0.6823278 -->disp(k); 35.
```

deci algoritmul s-a oprit după 35 de iteraţii şi a găsit valoarea aproximativă a soluţiei 0.6823278, pornind de la valoarea iniţială $x_0 = 1$. Această viteză acceptabilă de calcul se datorează faptului că valoarea $|f'(\overline{x})|$ este relativ mică.

Să luăm cazul funcţiei $f : [\sqrt{2}, \infty) \to [\sqrt{2}, \infty)$ dată prin

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Este uşor de verificat că f este bine definită (inegalitatea mediilor). În plus,

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{2},$$

deci f este contracţie şi are ca unic punct fix $\overline{x} = \sqrt{2}$. Se observă că $f'(\overline{x}) = 0$ şi, deci, pentru orice iteraţie Picard nestaţionară

$$\frac{x_{k+1} - \overline{x}}{(x_k - \overline{x})^2} = \frac{1}{2x_k} \to \frac{1}{2\sqrt{2}} = f''(\overline{x}),$$

deci avem o convergenţă pătratică, aşa încât ne aşteptăm la o viteză de convergenţă foarte rapidă. Repetăm programul anterior pentru noua funcţie şi obţinem:

```
-->disp(u); 1.4142136 -->disp(k); 5.
```

deci algoritmul se opreşte după doar 5 iteraţii şi obţine o aproximare foarte bună a punctului fix $\overline{x} = \sqrt{2}$.

Pentru restricţia funcţiei $\sin x$ la intervalul $[0, 1]$ care satisface condiţiile Teoremei lui Picard cu $\overline{x} = 0$ punct fix, situaţia se schimbă pentru că orice iteraţie Picard (x_k) satisface

$$\frac{x_{k+1} - \overline{x}}{x_k - \overline{x}} \overset{k\to\infty}{\to} f'(\overline{x}) = 1$$

şi nu ne aşteptăm să avem o viteză de convergenţă rezonabilă. Dacă în programul anterior schimbăm legea funcţiei f cu noua situaţie, atunci vom obţine rezultatele:

```
-->disp(u);
0.0545930
-->disp(k);
1000.
```

deci după 1000 de iteraţii s-a obţinut o aproximare nu tocmai convenabilă a soluţiei. Situaţia se schimbă foarte puţin dacă plecăm cu o valoare (de exemplu $x_0 = 0.1$) mai apropiată de soluţie:

```
-->disp(u); 0.0480222 -->disp(k); 1000.
```

Exerciţiul 4.3 *Fie $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^p$ şi $f : A \to A$.*

(i) Să se arate că dacă f este contracţie de constantă $\lambda \in (0, 1)$, atunci pentru orice $n \geq 1$, f^n este contracţie de constantă λ^n.

(ii) Să se arate că dacă $\overline{x}$ este punct fix pentru f atunci $\overline{x}$ este punct fix pentru orice iterată a lui f.

(iii) Studiind exemplele: $f : [0, 1] \to [0, 1]$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

şi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = e^{-x}$, să se arate că este posibil ca o iterată a lui f să fie contracţie, fără ca f să fie contracţie.

Exerciţiul 4.4 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. Dacă există $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ astfel încât f^q este o contracţie, atunci f are un unic punct fix. In plus, iteraţiile Picard ale lui f converg la punctul fix. Folosind această concluzie şi punctul (ii) al exerciţiului precedent, să se scrie un program Matlab care să aproximeze punctul fix al funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.*

Soluţie Fie $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ astfel încât f^q este o contracţie. Din Principiul lui Banach, f^q are un punct fix unic pe care îl notăm $\overline{x}$. Să observăm, pe baza comentariului de mai sus, că $\overline{x}$ este singurul candidat pentru a fi punct fix pentru f (orice punct fix al lui f este punct fix pentru orice iteraţie). Au loc relaţiile:

$$f(\overline{x}) = f(f^q(\overline{x})) = f^q(f(\overline{x})),$$

adică $f(\overline{x})$ este punct fix pentru f^q. Cum f^q are un unic punct fix, deducem că $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Să demonstrăm acum afirmaţia privitoare la convergenţa iteraţiilor Picard. Pornim cu un element fixat $x_0 \in \mathbb{R}^p$ şi construim şirul Picard asociat $(f^n(x_0))_n$. Trebuie să arătăm că acest şir converge la $\overline{x}$. Fie $r \in \overline{0, q-1}$. Atunci, mulţimea termenilor şirului $(f^n(x_0))_n$ este reuniunea mulţimilor termenilor subşirurilor de forma $(f^{qk+r}(x_0))_k$. Pe de altă parte, $(f^{qk+r}(x_0))_k$ poate fi privit ca şirul iteraţiilor Picard asociat lui f^q cu punctul iniţial $f^r(x_0)$ pentru că:

$$f^{qk+r}(x_0) = (f^q)^k(f^r(x_0)).$$

Cum f^q este o contracţie, ştim din Principiul lui Banach că toate iteraţiile Picard ale lui f^q converg către punctul fix $\overline{x}$. Deci toate cele q subşiruri care partiţionează şirul iniţial au aceeaşi limită (i.e., $\overline{x}$), ceea ce arată că $\lim_n f^n(x_0) = \overline{x}$ şi demonstraţia este acum completă. □

Problema 4.5 *Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$. Să se arate că dacă există $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ astfel încât $f^m(x) = x$ pentru orice $x \in [0,1]$, atunci $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0,1]$.*

Soluţie În ipotezele de mai sus, f este bijecţie în baza unui bine cunoscut rezultat referitor la proprietatile de injectivitate şi surjectivitate a compunerii funcţiilor, întrucât f^m este bijecţie. Conform unui rezultat de la funcţii continue (Teorema 4.5.54), f trebuie să fie strict monotonă şi ipotezele $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ asigură că f este strict crescătoare. Presupunem prin reducere la absurd că există $x \in (0,1)$ astfel încât $f(x) > x$ (cazul $f(x) < x$ este similar). Atunci, din monotonie, pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$f^n(x) > f^{n-1}(x) > ... > f(x) > x.$$

În particular, pentru $n = m$, obţinem o contradicţie, deci presupunerea făcută este falsă. □

Problema 4.6 *Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă astfel încât $f \circ f$ admite puncte fixe. Să se arate că şi f admite puncte fixe.*

Soluţie Dacă presupunem că f nu admite puncte fixe. Atunci, din ipoteza de continuitate rezultă că fie $f(x) > x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, fie $f(x) < x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În prima situaţie, trecând x în $f(x)$ obţinem: $f(f(x)) > f(x) > x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $(f \circ f)(x) > x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, $f \circ f$ nu admite puncte fixe, ceea ce este fals. A doua situaţie este similară. □

Exerciţiul 4.7 *Fie $f : [0,1] \to [0,1]$ o funcţie $1-$Lipschitz pe $[0,1]$. Să se arate că mulţimea punctelor fixe este un interval (posibil degenerat).*

Exerciţiul 4.8 *Fie funcţia* $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{x}.$$

Pentru o dată iniţială $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *consideră iteraţia Picard asociată* (x_k). *Să se studieze convergenţa acestui şir. Să se scrie un program Matlab care să aproximeze valoarea limitei.*

Soluţie Imaginea lui f este intervalul $I = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$. Considerăm restricţia lui f la acest interval şi arătăm că aceasta este o contracţie de la I la I. Pentru aceasta, calculăm (pentru $x \in I$)

$$f'(x) = -\frac{1}{4x^2}\cos\frac{1}{x},$$

de unde

$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9} < 1,\ \forall x \in I.$$

Cum $x_1 = f(x_0) \in I$, putem aplica demonstraţia Principiului lui Banach pentru a deduce că (x_k) este convergent la singurul punct fix al lui f din I. □

Exerciţiul 4.9 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dată prin*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2} + 1.$$

Să se arate că f *este contracţie. Se dă şirul* (x_k) *prin* $x_0 = 1$,

$$x_{k+1} = 1 + \frac{x_k}{x_k^2+2},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că (x_k) *este convergent iar limita sa* $\overline{x}$ *este soluţie a ecuaţiei* $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ *şi pentru orice* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, *avem*

$$|x_k - \overline{x}| \leq 2^{-k}\left|\overline{x} - 1\right|.$$

Exerciţiul 4.10 *Fie funcţia* $f : [1,2] \to [1,2]$,

$$f(x) = \sqrt{2+\sqrt{x}}.$$

Să se arate că f *este bine definită şi că este o contracţie pe domeniul său de definiţie. Să se deducă faptul că ecuaţia*

$$x^4 - 4x^2 - x + 4 = 0$$

are soluţie unică în intervalul $(1,2)$, *iar această soluţie coincide cu limita şirului* (x_k) *dat prin* $x_{k+1} = \sqrt{2+\sqrt{x_k}}$ *pentru orice* $k \in \mathbb{N}$ *cu* $x_0 = 1$. *Apoi, precizaţi viteza de convergenţă a acestui şir.*

Exerciţiul 4.11 *Fie* $f, g : \mathbb{R}_+ := [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *definite prin*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 1. \end{cases},\quad g(x) = (x-2)e^{2x} + (x+2)e^x.$$

(i) Să se arate că $g(x) \geq 0$, *pentru orice* $x \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Să se arate că f *este de clasă* C^1 *pe* $\mathbb{R}_+$.

(iii) Să se arate că

$$f''(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^3}, \ \forall x \in (0, \infty)$$

şi $|f'(x)| \leq 2^{-1}$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Definim şirul (x_k) *prin* $x_0 = 0$ *şi* $x_{k+1} = f(x_k)$ *pentru orice* $k \in \mathbb{N}$. *Să se arate că*

$$|x_k - \ln 2| \leq 2^{-k} \ln 2, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Soluţie (i) Funcţia g este o (strict) crescătoare pe $[0, \infty)$, lucru care se verifică în mod obişnuit. Mai mult, $g(0) = 0$, deci $g(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Evident, f este derivabilă pe $(0, \infty)$ şi, pe acest interval,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Calculăm limita acestei derivate în 0 şi obţinem (combinând o limită fundamentală şi regula lui l'Hôspital)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f'(x) &= \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1 - xe^x}{x^2} \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1 - xe^x}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aplicând una dintre consecinţele Teoremei lui Lagrange, deducem că f este derivabilă în 0, iar derivata sa este continuă în 0. În plus, $f'(0) = -2^{-1}$.

(iii) Funcţia f este derivabilă de două ori pe $(0, \infty)$ iar relaţia anunţată se arată prin calcul direct. Conform punctului (i), f' este crescătoare pe $(0, \infty)$, iar din continuitatea lui f', din relaţia $f'(0) = -2^{-1}$ şi din observaţia

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$$

deducem că $f'(x) \in [-2^{-1}, 0)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}_+$, de unde rezultă concluzia.

(iv) Punctul precedent arată că f este o $2^{-1}-$contracţie pe $\mathbb{R}_+$ care ia valori tot în $\mathbb{R}_+$. Cum şirul (x_k) este o iteraţie Picard cu data iniţială 0, deducem, pe baza Principiului lui Banach, că (x_k) converge la singurul punct fix al lui f din $\mathbb{R}_+$ care, prin calcul direct, se dovedeşte a fi $\overline{x} = \ln 2$. Acum estimarea căutată rezultă (prin inducţie) din

$$|x_k - \overline{x}| = |f(x_{k-1}) - f(\overline{x})| \leq 2^{-1} |x_{k-1} - \overline{x}| \leq ... \leq 2^{-k} |x_0 - \overline{x}|.$$

Aşadar, inegalitatea are loc. □

Exerciţiul 4.12 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dată prin* $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

(i) Să se arate că f *este contracţie.*

(ii) Se consideră iteraţia Picard

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{k+1} = f(x_k),\ \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Să se arate că şirul (x_k) converge la unica soluţie reală a ecuaţiei $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Să se implementeze în Matlab.

Exerciţiul 4.13 *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $|a| < 1$. Considerăm şirul (x_k) definit de relaţia de recurenţă*

$$x_{k+1} = ax_k + b,\ x_0 \in \mathbb{R}.$$

Să se precizeze funcţia pentru care acest şir reprezintă o iteraţie Picard. Folosind un rezultat studiat, să se arate că (x_k) este convergent şi să se stabilească limita sa.

Exerciţiul 4.14 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin*

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2} + 1.$$

Să se arate că f este contracţie. Se dă şirul (x_k) prin $x_0 = 1$,

$$x_{k+1} = 1 + \frac{x_k}{x_k^2 + 2},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Să se arate că (x_k) este convergent iar limita sa $\overline{x}$ este soluţie a ecuaţiei $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ şi pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, avem

$$|x_k - \overline{x}| \leq 2^{-k} |\overline{x} - 1|.$$

Exerciţiul 4.15 *Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2}$. Să se arate că f este contracţie. Se dă şirul (x_k) definit prin $x_0 = 1$, $x_{k+1} = f(x_k)$. Să se arate că $0 < x_k < 2^{-k}$ pentru orice $k \geq 1$.*

Exerciţiul 4.16 *Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. Să se arate că f este contracţie. Se dă şirul (x_k) definit prin $x_0 = 2$, $x_{k+1} = f(x_k)$. Să se arate că $0 < x_k < 2^{-k+1}$ pentru orice $k \geq 1$.*

Exerciţiul 4.17 *Fie $f : [0, 1/2] \to [0, 1/2]$, $f(x) = \frac{1}{5}(x^5 + 1)$. Să se arate că f este corect definită, este contracţie şi să se determine constanta de contracţie. Să se deducă faptul că ecuaţia $x^5 - 5x + 1 = 0$ are soluţie unică în intervalul $[0, 1/2]$. Să se indice un mod de a aproxima această soluţie şi să se estimeze un număr raţional care aproximează soluţia cu o eroare mai mică de 10^{-2}.*

Exerciţiul 4.18 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + 3\right).$$

Să se arate că f are un punct fix în intervalul $(1, 2)$. Să se studieze dacă iteraţiile Picard ale lui f aproximează acest punct fix şi în caz afirmativ să se precizeze (cu justificare) ordinul de convergenţă.

Exerciţiul 4.19 *Fie* $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$,

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x} + 1.$$

Să se arate că f *are un punct fix în intervalul* $(1, 3)$. *Să se studieze dacă iteraţiile Picard ale lui* f *aproximează acest punct fix şi în caz afirmativ să se precizeze (cu justificare) ordinul de convergenţă.*

Implementare Matlab 4.20 Prezentăm acum o situaţie particulară în care o iteraţie Picard poate fi accelerată printr-o funcţie auxiliară. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 10$. Folosind şirul lui Rolle este uşor de arătat că ecuaţia $f(x) = x$ are o singură rădăcină reală care este pozitivă, deci f are un singur punct fix, notat $\overline{x}$ şi localizat în intervalul $[1, 2]$ (a se vedea şi graficul de mai jos). Despre f nu putem folosi teoria precedentă pentru că nu este contracţie. În schimb, luăm funcţia $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x},$$

iar egalitatea $g(x) = x$ este echivalentă cu $f(x) = x$. Dar

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(6x^2 + 8x)(3x^2 + 8x) - (6x + 8)(2x^3 + 4x^2 + 10)}{(3x^2 + 8x)^2} \\ &= \frac{(6x + 8)(x^3 + 4x^2 - 10)}{(3x^2 + 8x)^2}. \end{aligned}$$

Cum $\overline{x}$ este soluţia ecuaţiei $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, obţinem că $g'(\overline{x}) = 0$. Aceasta înseamnă că pe o vecinătate a lui $\overline{x}$, g este contracţie şi, în plus, convergenţa şirului Picard asociat este pătratică. Programul următor arată că dacă se aplică iteraţia Picard funcţiei f pornind de la 1, atunci după doar 9 iteraţii şirul are o valoare ce, în valoare absolută, depăşeşte valoarea mixímă acceptată de Matlab (deci este divergent), lucru ce era de aşteptat din cauză că f nu este contracţie. În schimb, utilizând funcţia g avem o aproximare bună a soluţiei după doar 5 iteraţii. Să se studieze codul de mai jos.

```
tol=1e-7;maxiter=1000;
u=1; u_vechi=0; k=0; t=1; t_vechi=0; p=0;
%Picard g
while abs(u-u_vechi)>tol & n<maxiter
     u_vechi=u; u=(2*u^3+4*u^2+10)/(3*u^2+8*u); k=k+1;
end
%Picard f
while abs(t-t_vechi)>tol & p<maxiter
     t_vechi=t; t=t^3+4*t^2+t-10; p=p+1;
end
disp(u); disp(n); disp(t); disp(p);
```

Rezultatul este:

```
--> disp(u); disp(k); disp(t); disp(p);
```

```
1.36523
5.
Nan
9.
```

Implementare Matlab 4.21 Testăm metoda lui Newton pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de relaţia

$$f(x) = x + e^x + \frac{10}{1+x^2} - 5$$

care are o rădăcină simplă în intervalul $(-2, 0)$ după cum se poate constata din studiul graficului său. Plecând cu data iniţială $x_0 = 1.5$ aproximăm această soluţie folosind metoda lui Newton:

```
functie=@(x) [x+exp(x)+10/(1+x^2)-5];
%desen
fplot(functie,[-3,3]);
functie_der=@(x) [1+exp(x)-20*x/(1+x^2)^2];%Newton
x=1.5;x_precedent=-1;k=0;eps=10^(-6);maxiter=50;
while abs(x-x_precedent)>eps && k<maxiter
 x_precedent=x;
 x=x-functie(x)/functie_der(x);
 k=k+1;
end
x
k
functie(x)
```

care returnează:

```
x = -0.9046
k = 35
ans = 8.8818e-016
```

Dacă se pleacă cu data iniţială $u = -1.5$, atunci se obţine valoarea de mai sus după doar 5 iteraţii. Să se observe că metoda este foarte sensibilă la data iniţială testând pentru 1.5, 1.4, 0.

Exerciţiul 4.22 *Să se aproximeze în cazul*

$$p = 7, a_i = i, v_i = 10, i \in \overline{1,7},$$

prin metoda lui Newton, soluţia ecuaţiei neliniare de a cărei rezolvare depindea calculul proiecţiei unui punct pe un elipsoid generalizat (a se vedea Exemplul 3.5.7). Să se testeze pe acest exemplu numeric şi metoda înjumătăţirii intervalului.

Exerciţiul 4.23 *Să se revolve ecuaţia* $\cos x = x$ *prin metoda lui Newton. Să se compare cu metoda Picard.*

Problema 4.24 *Fie ecuaţia* $x^3 - x - 1 = 0$ *pentru* $x \in [1, 2]$.

(i) Să se transforme această ecuaţie într-o problemă de determinare a punctului fix pentru o contracţie.

(ii) Să se construiască un şir convergent liniar şi un altul convergent pătratic la această soluţie. Să se implementeze în Matlab.

Soluţie (i) Ecuaţia este echivalentă cu

$$x = x^3 - 1,$$

dar în această formulare ar trebui să luăm $g(x) = x^3 - 1$, dar $g([1,2]) \not\subset [1,2]$, iar g nu este contracţie. Astfel vom scrie ecuaţia în formele echivalente

$$x^3 = x + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+1}.$$

Fie atunci $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Este uşor de observat că $f(I) \subset I$ şi

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} < 1,$$

deci f este o contracţie de la I la I.

(ii) O iteraţie Picard asociată lui f converge liniar, iar o iteraţie Newton pentru ecuaţia iniţială converge pătratic. □

Exerciţiul 4.25 *Să se determine soluţiile aproximative ale problemelor de la Exerciţiul 3.68.*

Exerciţiul 4.26 *Fie şirul de numere reale dat prin* $x_0 = 1$ *şi*

$$x_{k+1} = \frac{2x_k^3 + 3}{3x_k^2}, \ \forall k \geq 0.$$

Să se arate că $(x_k)_k$ *este o iteraţie Newton pentru o funcţie care se va determina. Ce se poate spune despre convergenţa lui* $(x_k)_k$?

Exerciţiul 4.27 *Fie şirul de numere reale dat prin* $x_0 = 1$ *şi*

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}, \ \forall k \geq 0.$$

Să se arate că $(x_k)_k$ *este o iteraţie Newton pentru o funcţie care se va determina şi totodată o iteraţie Picard pentru o contracţie* g*, al cărei domeniu de definiţie convenabil îl veţi preciza. Studiaţi convergenţa şirului* (x_k) *şi, în caz de convergenţă, determinaţi-i limita.*

Implementare Matlab 4.28 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 3x + 1.$$

Această funcţie este strict convexă întrucât $f''(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Evident că f este şi coercivă, deci există un singur punct de minim global. Aplicăm metoda lui Newton ecuaţiei $f'(x) = 0$ pentru a aproxima acest punct.

```
functie=@(x) [x^4/4+x^2/2-3*x+1];
%desen
fplot(functie,[-5,5]);
%optimizare Newton
```

```
functie_der=@(x) [x^3+x-3];
functie_der_sec=@(x) [3*x^2+1];
x=1.5;x_precedent=-1;n=0;eps=10^(-6);maxiter=50;
while abs(x-x_precedent)>eps && k<maxiter
 x_precedent=x;
 x=x-functie_der(x)/functie_der_sec(x);
 k=k+1;
end
x
k
functie(x)
```

care returnează

```
x = 1.213411662762230
k = 5
ans = -1.362084275383167
```

Exerciţiul 4.29 *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3e^{-2x}$. Să se arate că f este strict convexă şi admite punct de minim. Să se determine acest punct cu aproximaţie folosind metoda lui Newton (aplicată pentru ecuaţia $f'(x) = 0$).*

Implementare Matlab 4.30 Implementăm acum metoda celei mai bune descreşteri cu regula Armijo pentru o funcţie de o variabilă reală. Aşdar, direcţia se alege

$$p_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|}$$

dacă $\|\nabla f(x_k)\| \neq 0$ iar, în ceea ce priveşte pasul α_k, vom utiliza condiţia de tip Armijo

$$f(x_k + \alpha_k p_k) < f(x_k) + c\alpha_k \nabla f(x_k)(p_k),$$

unde $c \in (0, 1)$. Astfel, vom testa la fiecare pas dacă se îndeplineşte condiţia, iar în caz contrar, îl vom înmulţi pe α_k cu un factor subunitar (β) pentru a scădea pasul. Ca de obicei, criteriul de oprire utilizează valoarea absolută a derivatei.

Pentru exemplificare alegem funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3e^x - x^3 + 5x$. Astfel, avem codul de mai jos:

```
funct=@(x) 3*exp(x)-x^3+5*x;
der=@(x) 3*exp(x)-3*x^2+5;
tol=1e-3;u=5; u_vechi=1; n=0; beta=0.5;
c=0.01; alpha=1;
%steepest descent
while abs(der(u))>tol
 u_vechi=u;
while funct(u_vechi-alpha*der(u_vechi)/abs(der(u_vechi)))...
    >=funct(u_vechi)-c*alpha*abs(der(u_vechi))
 alpha=beta*alpha;
end
```

```
u=u-alpha*der(u)/abs(der(u));
n=n+1;
end
u
n
alpha
der(u)
u = -1.3845; n = 12; alpha = 0.00024414; ans = 0.00063161
```

Deci algoritmul se opreşte atunci când valoarea absolută a derivatei în punctul curent este suficient de mică. Evoluţia descreşterii pasului şi a gradientului poate fi de asemenea elocventă.

Implementare Matlab 4.31 Scriem acum un cod pentru aplicarea metodei funcţiei Rosenbrock (a se vedea Exemplul 3.3.9), funcţie de două variabile reale pentru care ştim că unicul punct de minim este $(1,1)$.

```
funct=@(x) 100.0*(x(2)-x(1)^2)^2 + (1-x(1))^2;
dif_fct=@(x) [-2*(1-x(1))-400*x(1)*(x(2)-x(1)^2),200*(x(2)-x(1)^2)];
n=0; beta=0.5;
c=0.01; alpha=1;
u_vechi=[0, 0];u=[-1.5, 2];v=u;
%steepest descent
while norm(dif_fct(u))>10^(-7)
 u_vechi=u;
% u=u-alpha*dif_fct(u)/norm(dif_fct(u));
v=[v;u];
 while funct(u_vechi-alpha*dif_fct(u_vechi)/norm(dif_fct(u_vechi)))...
    >=funct(u_vechi)-c*alpha*norm(dif_fct(u_vechi))
 alpha=beta*alpha;
end
u=u-alpha*dif_fct(u)/norm(dif_fct(u));v=[v;u];
n=n+1;
end
u
n
alpha
plot(v(:,1),v(:,2),'-');hold on;
plot(1,1,'r*');hold on;[x,y] = meshgrid (-2:0.2:2,-1:0.2:4);
z1=100*(y-x.^2).^2 + (1-x).^2;
[c,h] = contour(x,y,z1,100);
```

În cazul acesei metode se poate observa că sunt necesare foarte multe iteraţii, dar punctul de start poate fi îndepărtat de soluţie.

Exerciţiul 4.32 *Să se implementeze algoritmul celei mai bune direcţii de descreştere pentru funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2x^2$.

Exerciţiul 4.33 *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 3e^{-2x}$. *Să se arate că* f *este strict convexă şi admite punct de minim. Să se determine acest punct cu aproximaţie folosind metoda lui Newton (aplicată lui* $f'(x) = 0$*) şi metoda celei mai bune descreşteri.*

Appendix

Spaţiul $\mathbb{R}^p$

Fie $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Notăm cu $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale şi introducem mulţimea

$$\mathbb{R}^p := \{(x_1, x_2, ..., x_p) \mid x_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \overline{1,p}\}.$$

Această mulţime se organizează ca spaţiu vectorial real de dimensiune p cu operaţiile standard definite astfel: pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p$ şi orice $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_p + y_p) \in \mathbb{R}^p, \\ ax &= (ax_1, ax_2, ..., ax_p) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

De multe ori, nefiind pericol de confuzie, vom folosi şi notaţia în care indicii componentelor sunt jos. Vom extinde aceste operaţii şi la mulţimi: dacă $A, B \subset \mathbb{R}^p$ sunt nevide, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $C \subset \mathbb{R}$ este nevidă, definim $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, $\alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}$, $CA = \{\alpha a \mid \alpha \in C,\ a \in A\}$, $A - B = A + (-1)B$.

De foarte multe ori, dar mai ales atunci când vom folosi operaţii matriciale, vom privi un element x din $\mathbb{R}^p$ ca fiind o matrice de tip $p \times 1$ (adică un vector coloană). Matricea transpusă corespunzătoare va fi notată cu x^t, conform notaţiei ce va fi adoptată pentru matrici de orice dimensiune. De asemenea, se defineşte produsul scalar uzual a doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^p$ prin

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i = x^t y.$$

De exemplu, în relaţia anterioară, notaţia $\langle x, y \rangle$ este una în care x, y sunt vectori din $\mathbb{R}^p$ ce pot fi priviţi atât ca vectori linie cât şi ca vectori coloană, iar notaţia $x^t y$ se referă la o înmulţire de matrici, deci pentru ca operaţia să fie posibilă x, y sunt matrici de tip $p \times 1$. Vom face de multe ori trecerea tacită de la o interpretare la alta, contextul neconducând la confuzii.

Spaţiul $\mathbb{R}^p$ se organizează ca spaţiu normat (şi deci în particular spaţiu metric) înzestrat cu norma euclidiană $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$ definită prin

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} x_i^2}.$$

Este uşor de arătat că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^p$ are loc următoarea relaţie, numită egalitatea paralelogramului

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Se defineşte unghiul dintre doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ ca fiind valoarea $\theta \in [0, \pi]$ definită prin

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Bila deschisă (respectiv închisă) centrată într-un punct $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$ de rază $\varepsilon > 0$ se defineşte prin:

$$B(\overline{x}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - \overline{x}\| < \varepsilon\}$$

(respectiv $D(\overline{x}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - \overline{x}\| \leq \varepsilon\}$). O submulţime $A \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte mărginită dacă este conţinută într-o bilă deschisă centrată în origine, adică, există $M > 0$ astfel încât $A \subset B(0, M)$.

Se numeşte vecinătate a elementului $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$ o submulţime a lui $\mathbb{R}^p$ care conţine o bilă deschisă centrată în $\overline{x}$. Notăm cu $\mathcal{V}(\overline{x})$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui $\overline{x}$.

- O submulţime a lui $\mathbb{R}^p$ se numeşte deschisă dacă este mulţimea vidă sau dacă este vecinătate pentru orice punct al său.
- O submulţime a lui $\mathbb{R}^p$ se numeşte închisă dacă mulţimea sa complementară în raport cu $\mathbb{R}^p$ este deschisă.
- Un punct $a \in \mathbb{R}^p$ se numeşte punct interior mulţimii $A \subset \mathbb{R}^p$ dacă A este vecinătate a lui a. Notăm cu $\operatorname{int} A$ interiorul lui A (i.e. mulţimea tuturor punctelor interioare lui A).
- Un punct $a \in \mathbb{R}^p$ se numeşte punct de acumulare pentru mulţimea $A \subset \mathbb{R}^p$ dacă orice vecinătate a lui a are în comun cu mulţimea A cel puţin un punct diferit de a. Notăm cu A' mulţimea derivată a lui A (i.e. mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale lui A). Un punct $a \in A \setminus A'$ se numeşte punct izolat al lui A.
- Un punct $a \in \mathbb{R}^p$ se numeşte punct aderent pentru mulţimea $A \subset \mathbb{R}^p$ dacă orice vecinătate a lui a are în comun cu mulţimea A cel puţin un punct. Vom folosi notaţiile $\operatorname{cl} A$ şi $\overline{A}$ pentru a desemna mulţimea aderentă a lui A (i.e. mulţimea tuturor punctelor aderente lui A).
- Notăm cu $\operatorname{Fr} A$ mulţimea $\operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A = \operatorname{cl} A \cap \operatorname{cl}(\mathbb{R}^p \setminus A)$ şi o numim frontiera lui A.
- O submulţime a lui $\mathbb{R}$ se numeşte compactă dacă este mărginită şi închisă.

Au loc următoarele rezultate.

Propoziţia 4.5.1 *(i) O submulţime a lui $\mathbb{R}^p$ este deschisă dacă şi numai dacă este egală cu interiorul său.*

(ii) O submulţime a lui $\mathbb{R}^p$ este închisă dacă şi numai dacă este egală cu aderenţa sa.

Definiţia 4.5.2 *Se numeşte şir de elemente din $\mathbb{R}^p$ o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^p$.*

Valoarea funcţiei f în $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$, se notează cu x_n (sau $y_n, z_n, ...$), iar şirul definit de f se notează (x_n) (sau, respectiv, $(y_n), (z_n), ...$).

Definiţia 4.5.3 *Un şir se numeşte mărginit dacă mulţimea termenilor săi este mărginită.*

Definiţia 4.5.4 *Se numeşte subşir al şirului (x_n) un şir (y_k) cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $y_k = x_{n_k}$, unde (n_k) este un şir strict crescător de numere naturale.*

Definiţia 4.5.5 *Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ este convergent dacă există $x \in \mathbb{R}^p$ astfel încât*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists n_V \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_V,\ x_n \in V.$$

Numărul x se numeşte limita lui (x_n).

Dacă există, limita unui şir este unică.

Vom folosi notaţiile $x_n \to x$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau, mai simplu, $\lim x_n = x$ pentru a descrie situaţia din definiţia precedentă. Are loc următorul rezultat de caracterizare.

Propoziţia 4.5.6 *Un şir (x_n) este convergent la limita $x \in \mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon,\ \ \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Propoziţia 4.5.7 *Şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ converge la $x \in \mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă şirurile coordonate (x_n^i) converg (în $\mathbb{R}$) la x^i pentru orice $i \in \overline{1,p}$.*

Teorema 4.5.8 *Un şir este convergent la limita $x \in \mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă orice subşir al său este convergent la limita x.*

Propoziţia 4.5.9 *Orice şir convergent este mărginit.*

Propoziţia 4.5.10 (Caracterizarea punctelor aderente cu ajutorul şirurilor) *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$. Un punct $x \in \mathbb{R}^p$ este aderent mulţimii A dacă şi numai dacă există un şir (x_n) de puncte din A astfel încât $x_n \to x$.*

Propoziţia 4.5.11 *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^p$ este închisă dacă şi numai dacă limita oricărui şir convergent de puncte din A aparţine lui A.*

Propoziţia 4.5.12 *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^p$ este compactă dacă şi numai dacă din orice şir de elemente din A se poate extrage un subşir convergent la un punct din A.*

Teorema 4.5.13 (Lema lui Cesàro) *Orice şir mărginit are un subşir convergent.*

Definiţia 4.5.14 *Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ se numeşte şir Cauchy sau fundamental dacă*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n, m \geq n_\varepsilon,\ \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Definiţia de mai sus poate fi reformulată astfel: (x_n) este şir Cauchy dacă:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \ \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

Teorema 4.5.15 (Teorema lui Cauchy) *Spaţiul $\mathbb{R}^p$ este complet, adică un şir de puncte din acest spaţiu este convergent dacă şi numai dacă este fundamental.*

Dăm acum unele rezultate specifice cazului şirurilor de numere reale.

Definiţia 4.5.16 *Un şir de numere reale (x_n) se numeşte crescător (strict crescător, descrescător, strict descrescător) dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} > x_n$, $x_{n+1} \leq x_n$, $x_{n+1} < x_n$). Un şir crescător sau descrescător se numeşte monoton.*

Fie $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mulţimea extinsă a numerelor reale. Se numeşte vecinătate a lui $+\infty$ o submulţime a lui $\overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(x, +\infty]$, unde $x \in \mathbb{R}$. Vecinătăţile pentru $-\infty$ se definesc analog.

Definiţia 4.5.17 *(i) Spunem că şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă*

$$\forall V \in \mathcal{V}(+\infty),\ \exists n_V \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_V,\ x_n \in V.$$

(ii) Spunem că şirul $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(-\infty),\ \exists n_V \in \mathbb{N}\ astfel încât\ \forall n \geq n_V,\ x_n \in V.$$

Rezultatele corespunzătoare de caracterizare sunt următoarele.

Propoziţia 4.5.18 *(i) Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă*

$$\forall A > 0,\ \exists n_A \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_A,\ x_n > A.$$

(ii) Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă

$$\forall A > 0,\ \exists n_A \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \forall n \geq n_A,\ x_n < -A.$$

Propoziţia 4.5.19 *Fie $(x_n), (y_n), (z_n)$ şiruri de numere reale, $x, y \in \mathbb{R}$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$.*

(i) (Trecerea la limită în inegalităţi) *Dacă $x_n \to x$, $y_n \to y$ şi $x_n \leq y_n$, pentru orice $n \geq n_0$, atunci $x \leq y$;*

(ii) (Criteriul majorării) *dacă $|x_n - x| \leq y_n$, pentru orice $n \geq n_0$ şi $y_n \to 0$, atunci $x_n \to x$;*

(iii) dacă $x_n \geq y_n$, pentru orice $n \geq n_0$ şi $y_n \to +\infty$, atunci $x_n \to +\infty$;

(iv) dacă $x_n \geq y_n$, pentru orice $n \geq n_0$ şi $x_n \to -\infty$, atunci $y_n \to -\infty$;

(v) dacă (x_n) este mărginit şi $y_n \to 0$, atunci $x_n y_n \to 0$;

(vi) (Teorema cleştelui) *dacă $x_n \leq y_n \leq z_n$, pentru orice $n \geq n_0$ şi $x_n \to x$, $z_n \to x$ atunci $y_n \to x$;*

(vii) $x_n \to 0 \Leftrightarrow |x_n| \to 0 \Leftrightarrow x_n^2 \to 0$.

Continuăm cu rezultate fundamentale în teoria şirurilor de numere reale.

Teorema 4.5.20 *Orice şir monoton de numere reale are limită în $\overline{\mathbb{R}}$. Dacă, în plus, şirul este mărginit, atunci el este convergent după cum urmează: dacă este crescător, atunci limita sa este marginea superioară a mulţimii termenilor şirului, iar dacă este descrescător, atunci limita sa este marginea inferioară a mulţimii termenilor şirului. Dacă este nemărginit, atunci are limita $+\infty$ sau $-\infty$ după cum este crescător sau descrescător.*

Teorema 4.5.21 (Teorema lui Weierstrass pentru şiruri) *Orice şir de numere reale mărginit şi monoton este convergent.*

Definiţia 4.5.22 *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Un element $x \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte punct limită pentru (x_n) dacă există un subşir (x_{n_k}) al lui cu $x = \lim x_{n_k}$.*

Finalizăm această secţiune cu două criterii utile de convergenţă.

Propoziţia 4.5.23 *Fie (x_n) un şir de numere reale strict pozitive astfel încât există $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = x$. Dacă $x < 1$, atunci $x_n \to 0$, iar dacă $x > 1$, atunci $x_n \to +\infty$.*

Propoziţia 4.5.24 (Criteriul Stolz-Cesàro)*) Fie (x_n) şi (y_n) şiruri de numere reale astfel încât (y_n) este strict crescător şi cu limita $+\infty$. Dacă există $\lim \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = x \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există $\lim \frac{x_n}{y_n}$ şi este egală cu x.*

Limite de funcţii şi continuitate

Reamintim acum unele chestiuni legate de conceptul de limită a unei funcţii şi de continuitatea funcţiilor. Fie $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definiţia 4.5.25 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^q$ şi a punct de acumulare pentru A. Spunem că elementul $l \in \mathbb{R}^q$ este limita funcţiei f în punctul a, dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(l)$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A$, $x \neq a$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.*

Teorema 4.5.26 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^q$ şi a punct de acumulare pentru A. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$;

(ii) pentru orice $B(l, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^q$, există $B(a, \delta) \subset \mathbb{R}^p$ astfel încât dacă $x \in B(a, \delta) \cap A$, $x \neq a$, atunci are loc $f(x) \in B(l, \varepsilon)$;

(iii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $\|x - a\| < \delta$, $x \in A$, $x \neq a$, atunci are loc $\|f(x) - l\| < \varepsilon$;

(iv) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $|x_i - a_i| < \delta$, pentru orice $i \in \overline{1, p}$, unde $x = (x_1, x_2, .., x_p) \in A$, $a = (a_1, a_2, .., a_p)$, $x \neq a$, atunci are loc $\|f(x) - l\| < \varepsilon$;

(v) pentru orice şir $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$ rezultă $f(x_n) \to l$.

Teorema 4.5.27 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^q$, $l \in \mathbb{R}^q$ şi a punct de acumulare pentru A. Dacă funcţia f are limita l în punctul a, atunci această limită este unică.*

Observaţia 4.5.28 *Dacă $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^q$, a punct de acumulare pentru A şi există două şiruri $(x'_n), (x''_n) \subset A \setminus \{a\}$, $x'_n \to a$, $x''_n \to a$ astfel încât $f(x'_n) \to l'$, $f(x''_n) \to l''$ şi $l' \neq l''$, atunci funcţia f nu are limită în $a \in A'$.*

Teorema 4.5.29 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}^q$, $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ (adică f_i, $i \in \overline{1, q}$ sunt funcţiile coordonate) şi a punct de acumulare pentru A. Atunci f are limita $l = (l_1, l_2, ..., l_q) \in \mathbb{R}^q$ în punctul a dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = l_i$, pentru orice $i \in \overline{1, q}$.*

Definiţia 4.5.30 *Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A \subset \mathbb{R}$. Notăm $A_s = A \cap (-\infty, a]$, $A_d = A \cap [a, \infty)$. Punctul a se numeşte punct de acumulare la stânga (respectiv dreapta) pentru A, dacă este punct de acumulare pentru mulţimea A_s (respectiv A_d). Vom nota mulţimea punctelor de acumulare la stânga (respectiv dreapta) cu A'_s (respectiv A'_d).*

Definiţia 4.5.31 *Fie $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}^q$ şi a punct de acumulare la stânga (respectiv dreapta) pentru A. Spunem că elementul $l \in \mathbb{R}^q$ este limita la stânga (respectiv dreapta) a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in U \cap A_s$ (respectiv $x \in U \cap A_d$), $x \neq a$, atunci are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x \to a, x<a} f(x) = l$ sau $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = l$ (respectiv $\lim\limits_{x \to a, x>a} f(x) = l$ sau $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = l$).*

Teorema 4.5.32 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}^q, I \subset \mathbb{R}$ şi $a \in I$. Atunci există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ dacă şi numai dacă există limitele laterale (la stânga şi la dreapta) în a şi sunt egale. În acest caz toate cele trei limite sunt egale: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.*

Un binecunoscut rezultat spune că funcţiile reale de o variabilă reală care sunt monotone admit limite laterale în punctele de acumulare ale domeniului.

Teorema 4.5.33 (Criteriul majorării) *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$, $g : A \to \mathbb{R}$. Dacă există $l \in \mathbb{R}^q$ şi $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\|f(x) - l\| \leq |g(x)|$, pentru orice $x \in U \setminus \{a\}$ şi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, atunci există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.*

Teorema 4.5.34 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ şi $f, g : A \to \mathbb{R}^q$. Dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât g este mărginită pe U, atunci există limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0$.*

Teorema 4.5.35 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, $l > 0$ (respectiv $l < 0$) atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq a$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).*

Teorema 4.5.36 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$. Dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f este mărginită pe U.*

Definiţia 4.5.37 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $a \in A'$. Spunem că funcţia f are limita ∞ (respectiv $-\infty$) în punctul a, dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(\infty)$ (respectiv $V \in \mathcal{V}(-\infty)$), există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq a$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (respectiv $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$).*

Teorema 4.5.38 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Atunci există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (respectiv $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$) dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $\|x - a\| < \delta$, $x \in A$, $x \neq a$ are loc $f(x) > \varepsilon$ (respectiv $f(x) < -\varepsilon$).*

Definiţia 4.5.39 *Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem că ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A dacă există un şir de elemente din A cu limita ∞ (respectiv $-\infty$), ceea ce este echivalent cu a spune că A este nemărginită superior (respectiv inferior).*

Definiţia 4.5.40 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$ astfel încât ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A. Spunem că elementul $l \in \mathbb{R}^q$ este limita funcţiei f în punctul ∞ (respectiv $-\infty$), dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(l)$, există $U \in \mathcal{V}(\infty)$ (respectiv $U \in \mathcal{V}(-\infty)$) astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$).*

Teorema 4.5.41 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$ astfel încât ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A. Atunci există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}^q$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}^q$) dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $x > \delta$ (respectiv $x < -\delta$), $x \in A$ are loc $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.*

Definiţia 4.5.42 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ astfel încât ∞ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A. Spunem că elementul ∞ este limita funcţiei f în punctul ∞, dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(\infty)$, există $U \in \mathcal{V}(\infty)$ (respectiv $U \in \mathcal{V}(-\infty)$) astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.*

Analog se definesc situaţiile $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Caracterizările cu ε şi δ ale tuturor acestor cazuri sunt similare celor deja descrise.

Definiţia 4.5.43 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$. Spunem că funcţia f este continuă în punctul a dacă oricare ar fi $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \in V$.*

Dacă f nu este continuă în a, vom spune că f este discontinuă în a sau că a este punct de discontinuitate al funcţiei f.

Teorema 4.5.44 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A' \cap A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$. Funcţia f este continuă în a dacă şi numai dacă are loc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Dacă a este un punct izolat al lui A, atunci f este continuă în a.*

Teorema 4.5.45 *Fie $A \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}^q$,. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f este continuă în a;

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încât dacă $\|x - a\| < \delta$, $x \in A$, atunci $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ (caracterizarea $\varepsilon - \delta$);

(iii) pentru orice $(x_n) \subset A$, $x_n \to a$ are loc $f(x_n) \to f(a)$ (caracterizarea cu şiruri).

Teorema 4.5.46 *Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) f este continuă;

(ii) pentru orice mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^q$, $f^{-1}(D)$ este deschisă;

(iii) pentru orice mulţime închisă $F \subset \mathbb{R}^q$, $f^{-1}(F)$ este închisă.

Teorema 4.5.47 *Imaginea printr-o funcţie continuă a unei mulţimi compacte este o mulţime compactă.*

Teorema 4.5.48 (Teorema lui Weierstrass) *Fie K din $\mathbb{R}^p$ o mulţime compactă. Dacă $f : K \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă atunci f este mărginită şi îşi atinge marginile pe K (adică există $a, b \in K$, astfel încât $\sup_{x\in K} f(x) = f(a)$ şi $\inf_{x\in K} f(x) = f(b)$).*

Definiţia 4.5.49 *Fie $D \subset \mathbb{R}^p$ şi $f : D \to \mathbb{R}^q$. Funcţia f se numeşte uniform continuă pe mulţimea D, dacă pentru orice număr pozitiv $\varepsilon > 0$, există $\delta_\varepsilon > 0$, încât pentru orice $x', x'' \in D$ cu $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$ are loc relaţia $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.*

Observaţia 4.5.50 *O funcţie uniform continuă pe D este continuă pe D.*

Teorema 4.5.51 (Teorema lui Cantor) *O funcţie continuă pe o mulţime compactă K din $\mathbb{R}^p$ cu valori în $\mathbb{R}^q$ este şi uniform continuă pe K.*

Definiţia 4.5.52 *Fie $L \geq 0$ o constantă reală. O funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ se numeşte Lipschitz pe A de constantă L sau $L-$Lipschitz pe A dacă $\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$, pentru orice $x, y \in A$.*

Propoziţia 4.5.53 *Orice funcţie Lipschitz pe $A \subset \mathbb{R}^p$ este uniform continuă pe A.*

Teorema 4.5.54 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este injectivă şi continuă, atunci f este strict monotonă pe I.*

Definiţia 4.5.55 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Spunem că funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă pentru orice $a, b \in I$, $a < b$ şi orice $\lambda \in (f(a), f(b))$ sau $\lambda \in (f(b), f(a))$ există $c_\lambda \in (a, b)$ astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.*

Teorema 4.5.56 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux şi există $a, b \in I$, $a < b$, astfel încât $f(a)f(b) < 0$, atunci ecuaţia $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul (a, b).*

Teorema 4.5.57 *Fie $I \subset \mathbb{R}, I$ interval. Funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux dacă şi numai dacă pentru orice interval $J \subset I$, $f(J)$ este interval.*

Teorema 4.5.58 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci f are proprietatea lui Darboux.*

Reamintim că orice aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este continuă. Pentru o astfel de aplicaţie se defineşte numărul real

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{M > 0 \mid \|Tx\| \leq M \|x\|, \ \forall x \in \mathbb{R}^p\} \\ &= \sup\{\|Tx\| \mid x \in D(0, 1)\} \end{aligned}$$

care se numeşte norma operatorului T. Astfel, mulţimea aplicaţiilor liniare de la $\mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^q$ se organizează ca spaţiu liniar normat peste $\mathbb{R}$ cu operaţiile algebrice uzuale şi cu norma de mai sus. Acest spaţiu se notează cu $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ şi se identifică izomorf cu spaţiul $\mathbb{R}^{pq}$. Mai mult, fiecărei aplicaţii $T \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ i se asociază în mod natural o matrice reală de dimensiune $q \times p$

notată $A_T = (a_{ji})_{j\in\overline{1,q},i\in\overline{1,p}}$ astfel: dacă $(e_i)_{i\in\overline{1,p}}$ şi $(e'_i)_{i\in\overline{1,q}}$ sunt bazele canonice ale spaţiilor $\mathbb{R}^p$ şi respectiv $\mathbb{R}^q$ atunci $(a_{ji})_{j\in\overline{1,q},i\in\overline{1,p}}$ sunt coordonatele exprimării imaginilor elementelor $(e_i)_{i\in\overline{1,p}}$ prin T în raport cu baza $(e'_i)_{i\in\overline{1,q}}$, adică

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{q} a_{ji}e'_j, \ \forall i \in \overline{1,p}.$$

Prin urmare, $T \mapsto A_T$ este un izomorfism de spaţii liniare între $L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ şi spaţiul matricilor reale de dimensiune $q \times p$ şi, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$,

$$T(x) = A_T x.$$

În plus, pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$ şi $y \in \mathbb{R}^q$ are loc

$$\langle A_T x, y\rangle = \left\langle x, A_T^t y\right\rangle.$$

Dacă A este o matrice de dimensiune $q \times p$ atunci aplicaţia liniară asociată lui A este surjectivă dacă şi numai dacă aplicaţia asociată lui A^t este injectivă.

Reamintim de asemenea că dacă $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este o aplicaţie liniară atunci

$$\mathrm{Ker}(T) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid T(x) = 0\}$$

este subspaţiu liniar în $\mathbb{R}^p$, iar

$$\mathrm{Im}(T) := \{T(x) \mid x \in \mathbb{R}^p\}$$

este subspaţiu liniar în $\mathbb{R}^q$ şi

$$p = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)),$$

unde dim notează dimensiunea algebrică.

O matrice A pătratică simetrică de dimensiune p se numeşte pozitiv semidefinită dacă $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$ şi pozitiv definită dacă $\langle Ax, x\rangle > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$. De fapt, A este pozitiv definită dacă şi numai dacă este pozitiv semidefinită şi inversabilă. Dacă au loc inegalităţile opuse, matricea se numeşte negativ semidefinită, respectiv negativ definită. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,p}}$ atunci, conform Criteriului lui Sylvester, A este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\det(a_{ij})_{i,j\in\overline{1,q}} > 0$ pentru orice $q \in \overline{1,p}$ şi negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^q \det(a_{ij})_{i,j\in\overline{1,q}} > 0$ pentru orice $q \in \overline{1,p}$.

Diferenţiabilitate

Definiţia 4.5.59 *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in \operatorname{int} D$. Spunem că f este Fréchet diferenţiabilă (sau, pe scurt, diferenţiabilă) în a dacă există o aplicaţie liniară notată $\nabla f(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ astfel încât*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \nabla f(a)(h)}{\|h\|} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Aplicaţia $\nabla f(a)$ se numeşte diferenţiala Fréchet a funcţiei f în a.

Să observăm că relaţia de mai sus este echivalentă cu următoarele condiţii:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(a,\delta), \|f(x) - f(a) - \nabla f(a)(x-a)\| \leq \varepsilon \|x-a\|;$$

$$\exists \alpha : D - \{a\} \to \mathbb{R}^q, \ \lim_{h \to 0} \alpha(h) = \alpha(0) = 0,$$
$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)(h) + \|h\| \alpha(h), \ \forall h \in D - \{a\}.$$

Spunem că $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este de clasă C^1 pe mulţimea deschisă D dacă f este Fréchet diferenţiabilă pe D şi ∇f este continuă pe D. Evident, f se poate scrie sub forma $f = (f_1, f_2, ..., f_q)$ unde $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,q}$ şi, în general, aplicaţia $\nabla f(a) \in L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ se identifică cu matricea de dimensiune $q \times p$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$$

numită matricea jacobiană a lui f în punctul a, unde $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ reprezintă derivata parţială a funcţiei f_i în raport cu variabila x_j în a.

De multe ori ne vom referi la matricea jacobiană în locul diferenţialei. Pe baza unui rezultat general, dacă $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in D$, $\nabla f(a)$ este izomorfism al lui $\mathbb{R}^p$ dacă şi numai dacă matricea jacobiană a lui f în punctul a este nesingulară.

Au loc următoarele reguli de calcul.

- Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ afină, adică având forma $f(x) := g(x) + u$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, unde $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este liniară, iar $u \in \mathbb{R}^q$. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, $\nabla f(x) = g$.
- Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ de forma $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$ unde A este o matrice pătratică simetrică de ordin p, iar $b \in \mathbb{R}^p$. Atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$, $\nabla f(x) = Ax + b$.
- Fie $D \subset \mathbb{R}^p$, $E \subset \mathbb{R}^q$, $\overline{x} \in \operatorname{int} D$, $\overline{y} \in \operatorname{int} E$ şi $f, g : D \to \mathbb{R}^q$, $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $h : E \to \mathbb{R}^k$.
  - Dacă f, g sunt diferenţiabile în $\overline{x}$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi are loc
  $$\nabla(\alpha f + \beta g)(\overline{x}) = \alpha \nabla f(\overline{x}) + \beta \nabla g(\overline{x}).$$
  - Dacă f, φ sunt diferenţiabile în $\overline{x}$, atunci φf este diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi
  $$\nabla(\varphi f)(\overline{x}) = \varphi(\overline{x}) \nabla f(\overline{x}) + f(\overline{x}) \nabla \varphi(\overline{x}),$$
  unde $\left(f(\overline{x}) \nabla \varphi(\overline{x})\right)(x) = \nabla \varphi(\overline{x})(x) \cdot f(\overline{x})$.
  - Dacă $f(D) \subset E$, $\overline{y} = f(\overline{x})$, f este diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi h este diferenţiabilă în $\overline{y}$, atunci $h \circ f$ este diferenţiabilă în $\overline{x}$ şi
  $$\nabla(h \circ f)(\overline{x}) = \nabla h(\overline{y}) \circ \nabla f(\overline{x}).$$

Un caz ce merită o atenţie specială este $p = 1$. În acest caz spunem că f este derivabilă în a dacă există

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \in \mathbb{R}^q. \tag{4.15}$$

Notăm această limită cu $f'(a)$ şi o numim derivata lui f în a.

Propoziţia 4.5.60 *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in \operatorname{int} D$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) f este derivabilă în a;
(ii) f este Fréchet diferenţiabilă în a.
În plus, în fiecare din aceste cazuri, $\nabla f(a)(x) = xf'(a)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ şi $(a, b) \in \operatorname{int} D$ este fixat, definim $D_1 := \{x \in \mathbb{R}^p \mid (x, b) \in D\}$ şi $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}^r$, $f_1(x) := f(x, b)$. Spunem că f este Fréchet diferenţiabilă parţial în raport cu x dacă f_1 este Fréchet diferenţiabilă în a, iar diferenţiala se notează cu $\nabla_x f(a, b)$. Dacă f este diferenţiabilă în (a, b), atunci f este diferenţiabilă parţial în raport cu x şi y în a, respectiv b şi

$$\nabla_x f(a,b) = \nabla f(a,b)(\cdot, 0),\ \nabla_y f(a,b) = \nabla f(a,b)(0,\cdot).$$

Revenind acum la cazul general, spunem că $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ este Fréchet diferenţiabilă de ordinul al doilea în $a \in \operatorname{int} D$ dacă f este Fréchet diferenţiabilă pe o vecinătate $V \subset D$ a lui a şi $\nabla f : V \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ este Fréchet diferenţiabilă în a, adică există o funcţională, notată $\nabla^2 f(a)$, din spaţiul $L^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q) := L(\mathbb{R}^p, L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q))$ şi $\alpha : D - \{a\} \to L(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ astfel că $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = \alpha(0) = 0$ şi pentru orice $h \in D - \{a\}$ are loc

$$\nabla f(a + h) = \nabla f(a) + \nabla^2 f(a)(h, \cdot) + \|h\|\, \alpha(h).$$

Să reamintim că spaţiul $L^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ definit mai sus se identifică cu spaţiul aplicaţiilor biliniare de la $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ la $\mathbb{R}^q$.

Spunem că f este de clasă C^2 dacă este Fréchet diferenţiabilă de ordinul al doilea pe D şi $\nabla^2 f : D \to L^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ este continuă.

Teorema 4.5.61 *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ şi $a \in \operatorname{int} D$. Dacă f este Fréchet diferenţiabilă de ordinul al doilea în a atunci $\nabla^2 f(a)$ este aplicaţie biliniară simetrică.*

În cazul în care $q = 1$, aplicaţia $\nabla^2 f(a)$ este definită de matricea pătratică simetrică $H(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a)\right)_{i,j\in\overline{1,p}}$, numită matricea hessiană a lui f în a. În plus, $\langle H(a)u, u\rangle = \nabla^2 f(a)(u, u)$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^p$.

Dacă $a, b \in \mathbb{R}^p$, definim segmentul închis de capete a, b mulţimea

$$[a, b] := \{\alpha a + (1 - \alpha)b \mid \alpha \in [0, 1]\}$$

şi segmentul deschis de aceleaşi capete

$$(a, b) := \{\alpha a + (1 - \alpha)b \mid \alpha \in (0, 1)\}.$$

Teorema 4.5.62 (Teoremele lui Lagrange şi Taylor) *Fie $U \subset \mathbb{R}^p$ deschisă, $f : U \to \mathbb{R}$ şi $a, b \in U$ cu $[a, b] \subset U$. Dacă f este de clasă C^1 pe U, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$f(b) = f(a) + \nabla f(c)(b - a).$$

Dacă f este de clasă C^2 pe U, atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) = f(a) + \nabla f(a)(b - a) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(c)(b - a, b - a).$$

Teorema 4.5.63 (Teorema funcţiilor implicite) *Fie $D \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ o mulţime deschisă, $h : D \to \mathbb{R}^q$ o funcţie şi $\overline{x} \in \mathbb{R}^p$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^q$ astfel încât*

(i) $h(\overline{x}, \overline{y}) = 0$;

(ii) funcţia h este de clasă C^1 pe D;

(iii) $\nabla_y h(\overline{x}, \overline{y})$ este nesingulară.

Atunci există două vecinătăţi U şi V ale lui $\overline{x}$ şi respectiv $\overline{y}$ şi o funcţie continuă unică $\varphi : U \to V$ astfel încât

(a) $h(x, \varphi(x)) = 0$ pentru orice $x \in U$;

(b) dacă $(x, y) \in U \times V$ şi $h(x, y) = 0$, atunci $y = \varphi(x)$;

(c) φ este diferenţiabilă pe U şi

$$\nabla\varphi(x) = -[\nabla_y h(x, \varphi(x))]^{-1} \nabla_x h(x, \varphi(x)), \ \forall x \in U.$$

Câteva rezultate fundamentale din teoria derivabilităţii funcţiilor reale de o variabilă reală sunt date pe scurt în finalul acestui capitol.

În acest context ($p = q = 1$) se aplică Propoziţia 4.5.60, dar are sens să vorbim de existenţa derivatei în puncte ale domeniului care sunt puncte de acumulare ale acestuia: este suficient să considerăm limita din relaţia (4.15) din această perspectivă. Mai mult, ca şi în cazul limitelor laterale, putem vorbi de derivate laterale, din nou considerând, atunci când este posibil, limitele laterale pentru expresia din relaţia (4.15). Atunci când există, vom numi aceste limite derivatele la stânga şi respectiv la dreapta ale funcţiei f în a şi le vom nota cu $f'_-(a)$ şi respectiv $f'_+(a)$.

Definiţia 4.5.64 *Fie $A \subset \mathbb{R}$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este punct de minim (respectiv maxim) local pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$ (respectiv $f(a) \geq f(x)$), pentru orice $x \in A \cap V$. Punctele de maxim sau de minim local se numesc puncte de extrem local.*

Teorema 4.5.65 (Teorema lui Fermat) *Fie $I \subset \mathbb{R}, I$ interval şi $a \in \operatorname{int} I$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a, iar a este punct de extrem local pentru f, atunci $f'(a) = 0$.*

Teorema 4.5.66 (Teorema lui Rolle) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.*

Teorema 4.5.67 (Teorema lui Lagrange) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Propoziţia 4.5.68 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilă pe I.*

(i) Dacă $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este constantă pe I.

(ii) Dacă $f'(x) > 0$ (respectiv $f'(x) \geq 0$) pentru orice $x \in I$, atunci f este strict crescătoare (respectiv crescătoare) pe I.

(iii) Dacă $f'(x) < 0$ (respectiv $f'(x) \leq 0$), pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare (respectiv descrescătoare) pe I.

Teorema 4.5.69 (Şirul lui Rolle) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$, o funcţie derivabilă. Dacă $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ sunt rădăcini consecutive ale derivatei f' (adică $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$ şi $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (x_1, x_2)$) atunci:*

(i) dacă $f(x_1)f(x_2) < 0$, ecuaţia $f(x) = 0$ are exact o rădăcină în intervalul (x_1, x_2);

(ii) dacă $f(x_1)f(x_2) > 0$, ecuaţia $f(x) = 0$ nu are nicio rădăcină în intervalul (x_1, x_2);

(iii) dacă $f(x_1) = 0$ sau $f(x_2) = 0$, atunci x_1 sau x_2 este o rădăcină multiplă a ecuaţiei $f(x) = 0$ şi ecuaţia nu are nicio rădăcină în intervalul (x_1, x_2).

Teorema 4.5.70 (Teorema lui Cauchy de eliminare a unor nedeterminări) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, care verifică condiţiile:*

(i) $f(a) = g(a) = 0$;

(ii) f, g sunt derivabile în a;

(iii) $g'(a) \neq 0$.

Atunci există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in V \setminus \{a\}$ şi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Teorema 4.5.71 (Regula lui L'Hôspital) *Fie $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, unde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dacă:*

(i) f, g sunt derivabile pe (a, b) cu $g' \neq 0$ pe (a, b);

(ii) există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$;

(iii) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0$ sau

(iii)' $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$,

atunci există $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Teorema 4.5.72 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis $f : I \to \mathbb{R}$, o funcţie de n ori derivabilă în $a \in I$, $(n \in N, n \geq 2)$, astfel încât*

$$f'(a) = 0,\ f''(a) = 0, ..., f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

(i) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem, după cum urmează: punct de maxim local dacă $f^{(n)}(a) < 0$ şi punct de minim local dacă $f^{(n)}(a) > 0$.

(ii) Dacă n este impar, atunci a nu este punct de extrem.

Integrala Riemann

În finalul acestui breviar teoretic discutăm principalele aspecte legate de integrala Riemann. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Definiţia 4.5.73 *(i) Se numeşte diviziune a intervalului $[a, b]$ o mulţime finită de numere reale $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$, notată Δ, cu proprietatea că*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

(ii) Se numeşte norma diviziunii Δ valoarea $\|\Delta\| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i \in \overline{1, n}\}$.

(iii) Se numeşte sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ o mulţime de puncte $\Xi := \{\xi_i \mid i \in \overline{1, n}\}$ cu proprietatea $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pentru orice $i \in \overline{1, n}$.

(iv) Fie o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se numeşte sumă Riemann corespunzătoare unei diviziuni Δ a intervalului $[a, b]$ şi unui sistem asociat de puncte intermediare Ξ valoarea

$$S(f, \Delta, \Xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definiţia 4.5.74 *Fie o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că f este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$ dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi pentru orice sistem de puncte intermediare Ξ asociat diviziunii Δ are loc inegalitatea*

$$|S(f, \Delta, \Xi) - I| < \varepsilon.$$

Numărul real I din definiţia precedentă este unic, se numeşte integrala lui f pe $[a, b]$ şi se notează cu

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Convenim ca

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ şi } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema 4.5.75 *Orice funcţie integrabilă Riemann pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$.*

Definiţia 4.5.76 *Fie o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Spunem că o funcţie $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ este primitivă a funcţiei f pe $[a, b]$ dacă F este derivabilă pe $[a, b]$ şi $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.*

Evident, dacă o funcţie admite o primitivă, atunci admite o infinitate de primitive, iar diferenţa dintre orice două primitive este o funcţie constantă.

Are loc teorema fundamentală a calculului integral.

Teorema 4.5.77 *(Leibniz-Newton) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe intervalul $[a, b]$ şi admite o primitivă F pe $[a, b]$ atunci*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Funcţiile continue satisfac ambele ipoteze ale teoremei precedente.

Teorema 4.5.78 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi admite primitivă pe $[a, b]$.*

Teorema 4.5.79 *Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită şi mulţimea punctelor sale de discontinuitate este finită, atunci f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Orice funcţie monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.*

Prezentăm în final principalele proprietăţi ale integralei Riemann.

Teorema 4.5.80 *(i) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann pe $[a, b]$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci $\alpha f + \beta g$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

(ii) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in [a, b]$ $(m, M \in \mathbb{R})$ atunci

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

În particular, dacă $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

iar dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile şi $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(iii) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci $|f|$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$.

(iv) Dacă $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile pe $[a, b]$ atunci $f \cdot g$ este integrabilă pe $[a, b]$.

Teorema 4.5.81 *(i) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann pe orice subinterval al lui $[a, b]$.*

(ii) Dacă $c \in (a, b)$ şi f este integrabilă pe $[a, c]$ şi $[c, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema 4.5.82 *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie care coincide cu f pe $[a, b]$ cu excepţia unui număr finit de puncte. Dacă f^* este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^*(x)dx.$$

Modele de evaluări scrise

Model examen parţial – varianta 1

Subiectul 1. Să se definească noţiunea de vector tangent la o mulţime închisă din $\mathbb{R}^p$ într-un punct al său. Să se arate că mulţimea acestor vectori este un con închis. Este acest con convex, în general?

Subiectul 2. Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln x$. Să se arate că f este convexă şi că pentru orice $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(x_i)_{i\in\overline{1,n}} \subset (0, +\infty)$ cu $\sum_1^n x_i = 1$ are loc

$$\ln \frac{1}{n} \leq \sum_1^n x_i \ln x_i.$$

Subiectul 3. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă. Definim

$$B = [-2, 1]A = \{\alpha a \mid \alpha \in [-2, 1], a \in A\}.$$

Să se arate că dacă A este compactă atunci B este compactă, dar reciproca nu este adevărată.

Subiectul 4. Să se scrie conul tangent la mulţimea

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6x = 5y^2\right\}$$

într-un punct al său. Justificaţi. Să se deseneze mulţimea şi conul tangent determinat.

Barem de notare: (pentru fiecare subiect se acordă un punct din start)

1. definiţia 2p; con 1p; închis 3p; convexitatea 3p.
2. convexitatea 2p; folosirea inegalităţii lui Jensen 3p; stabilirea rezultatului 4p.
3. directa 5p, reciproca 4p.
4. forma conului tangent 3p; justificarea 2p; desen 4p.

Timp de lucru: 100 minute

Model examen parţial – varianta 2

Subiectul 1. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ o mulţime nevidă, convexă şi închisă. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbb{R}^p$ există un unic element $a_x \in A$ astfel încât $d_A(x) = \|x - a_x\|$.

Subiectul 2. Un dreptunghi este înscris în elipsa

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Care trebuie să fie dimensiunile dreptunghiului pentru ca aria să fie maximă. Determinaţi aria maximă.

Subiectul 3. Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ nevidă. Definim $\operatorname{con} A := [0, \infty)A$. Să se arate că:
(a) dacă A este convexă, atunci $\operatorname{con} A$ este convexă;
(b) dacă A este compactă şi $0 \notin A$, atunci $\operatorname{con} A$ este închisă.
(c) Să se dea, grafic, un exemplu de mulţime compactă pentru care $\operatorname{con} A$ nu este închisă.

Subiectul 4. Fie mulţimea

$$C = \{\alpha(1,1) + \beta(0,1) \mid \alpha, \beta \geq 0\}.$$

Să se arate că C este con convex închis. Să de deseneze mulţimea. Să se scrie şi să se deseneze conul tangent şi conul normal la această mulţime în punctul $(1,1)$.

Barem de notare: (pentru fiecare subiect se acordă un punct din start)
1. directa 5p; reciproca 4p;
2. modelare 4 p; rezolvare 5p.
3. (a) 3p; (b) 4p; (c) 2p.
4. C este con, închis şi convex 4p; conul tangent, conul normal 3p; desene 2p.

Timp de lucru: 100 minute

Model verificare scrisă

Subiectul 1. Să se scrie cele două rezultate studiate de existenţă a soluţiilor globale pentru o problemă de optimizare de tip

$$\min f(x),\ x \in M,$$

unde $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ şi $M \subset \mathbb{R}^p$ cu precizarea notaţiilor folosite. Să se demonstreze unul dintre aceste rezultate.

Subiectul 2. Să se arate că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ are o infinitate de maxime globale, dar nu are niciun minim local.

Barem de notare: (pentru fiecare subiect se acordă un punct din start)

1. precizarea cadrului 2p; enunţuri 2x2=4; demonstraţie 3p.
2. punctele critice 3 p; calculul matricei hessiene 2 p; determinarea punctelor de extrem 4p.

Timp de lucru: 50 minute

Model evaluare finală – varianta 1

Proba scrisă

Subiectul 1. (a) Conul tangent (în sens Bouligand) la o mulţime nevidă şi închisă într-un punct al mulţimii. Proprietăţi. Cazul special al mulţimilor convexe. (Enunţuri)

(b) Calculul proiecţiilor pe un hiperplan şi pe un elipsoid generalizat

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - x_1 - 4x_2 - x_1x_2$ şi mulţimea restricţiilor M egală cu discul unitate închis. Considerăm problema (P) a minimizării lui f pe M. Să se verifice dacă este îndeplinită condiţia necesară, respectiv condiţia suficientă de optimalitate de ordinul I în punctul: $\left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$.

Subiectul 3. Fie problema $\min\left(4x_1^2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2\right)$ cu restricţiile $2x_1 + x_2 \leq 1$ şi $x_1^2 \leq 1$. Determinaţi soluţiile problemei, cu parcurgerea următorilor paşi: existenţa soluţiilor, chestiunea convexităţii problemei, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, stabilirea soluţiilor.

Timp de lucru: 90 de minute

Barem de notare proba scrisă:

1p – oficiu;

1. (a) 1p; (b) 2,5p. (=3,5p)

2. scrierea condiţiilor 0,5p; verificarea condiţiei necesare 1p; verificarea condiţiei suficiente 0,5p. (=2p)

3. justificarea existenţei soluţiilor: 0,5p; aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker: 0,5p; convexitatea problemei: 0,5p; scrierea şi rezolvarea sistemului Karush-Kuhn-Tucker, determinarea soluţiilor: 2p. (=3,5p)

Proba practică

Se dă codul Matlab

```
f = @(x) x^3 - 2*x + 2;
f_der = @(x) 3*x^2 - 2;
x=???;
x_precedent=-1;k=0;eps=10^(-6);maxiter=100;
while abs(x-x_precedent)>eps && k<maxiter
 x_precedent=x;x=x-f(x)/f_der(x);k=k+1;
end
disp(x); disp(k); disp(f(x));
```

Scrieţi codul de mai sus, reprezentaţi grafic funcţia f, precizaţi metoda folosită şi comentaţi liniile principale de cod, înlocuiţi `"???"` (de pe a treia linie) cu diverse valori şi demonstraţi relevanţa unei alegeri judicioase prin rularea codului.

Timp de lucru: 30 minute

Barem de notare proba practică:

scrierea codului 1p, reprezentare grafică - 2p, metoda şi comentarii 3p; explicarea semnificaţiei matematice a înlocuirilor 2p; rularea şi interpretarea rezultatelor 2p.

Model evaluare finală – varianta 2

Proba scrisă

Subiectul 1. (a) Funcţia distanţă la o mulţime nevidă. Proprietăţi (inclusiv cazul mulţimilor convexe) – doar enunţuri.

(b) Să se enunţe şi să se demonstreze rezultatul referitor la condiţia necesară de optimalitate de ordinul I. Să se prezinte cazul particular al Teoremei lui Fermat.

Subiectul 2. Fie $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată prin $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4$. Să se arate că sistemul de restricţii $h(x) = 0$ satisface condiţia Abadie în toate punctele sale.

Subiectul 3. Fie problema $\min(x^2 + xy)$ cu restricţia $x^2+y^2 \leq 1$. Să se determine soluţia/soluţiile globală/globale a/ale problemei (cu parcurgerea tuturor paşilor: existenţa soluţiilor, chestiunea convexităţii problemei, aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker, determinarea soluţiei/soluţiilor).

Timp de lucru: 90 de minute

Barem de notare proba scrisă:
1p – oficiu;
1. (a) 1p; (b) 2,5p. (=3,5p)
2. precizarea conditiei 0,5; verificarea 1,5p. (=2p)
3. justificarea existenţei soluţiilor: 0,5; studiul convexităţii problemei şi aplicabilitatea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker: 0,5p; aplicarea Teoremei Karush-Kuhn-Tucker şi rezolvarea sistemului Karush-Kuhn-Tucker: 2; determinarea soluţiei/soluţiilor: 0,5. (=3,5p)

Proba practică

Se dă codul Matlab

```
functie=@(x) [x^4/4+x^2/2-3*x+1];
functie_der=@(x) [x^3+x-3];
functie_der_sec=@(x) [3*x^2+1];
x=1.5;x_precedent=-1;n=0;eps=10^(-6);maxiter=50;
while abs(x-x_precedent)>eps && n<maxiter
 x_precedent=x;
 x=x-functie_der(x)/functie_der_sec(x);
 n=n+1;
end
x
n
functie(x)
```

care returnează

```
x = 1.213411662762230
n = 5
ans = -1.362084275383167
```

Să se scrie codul, să se reprezinte grafic `functie`, să se precizeze metoda folosită şi rezultatul obţinut, să se comenteze liniile principale de cod, să se verifice şi să se explice efectul înlocuirii valorii 1,5 din instrucţiunea `x=1.5`.

Timp de lucru: 30 minute

Barem de notare proba practică:
scrierea codului 1p, reprezentare grafică - 2p, metoda, rezultatul şi comentarii 4p; efectul înlocuirilor 3p.

Bibliografie

[1] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, C. M. Shetty, *Nonlinear programming: theory and algorithms*, John Wiley & Sons, 2006.

[2] O. Cârjă, *Unele metode de analiză funcţională neliniară*, Editura Matrix Rom, 2003.

[3] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, John Wiley & Sons, 1983.

[4] M. R. Hestenes, *Optimization Theory. The finite dimensional case*, John Wiley & Sons, 1975.

[5] J.-B. Hiriart-Urruty, *Optimization et analyse convexe*, EDP Sciences, 2009.

[6] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical optimization*, Springer, 2006.

[7] P. Pedregal, *Introduction to optimization*, Springer, 2004.

[8] T. L. Rădulescu, V. Rădulescu, T. Andreescu, *Problems in Real Analysis: advanced calculus on the real axis*, Springer, 2009.

[9] A. Quarteroni, F. Saleri, *Scientific computing with MATLAB and Octave*, Springer, 2006.

[10] C. Zălinescu, *Programare matematică în spaţii normate infinit dimensionale*, Editura Academiei, 1998.